

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Организация исследовательской деятельности обучающихся
на кружковых занятиях по геометрии»**

Студент

Сур - 04.05.23
(подпись, дата)

Сурина Ксения Евгеньевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Сорокина М.В. 04.05.23
(подпись, дата)

Сорокина М.В.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева Е.Г. 15.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.23 № 12)

Заведующий кафедрой

Паньженский В.И. 24.05.23
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 23.06.23 № 16)

Секретарь ГЭК

Журавлева Е.Г. 23.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Теоретические основы исследовательской деятельности на кружковых занятиях по геометрии	6
1.1 Понятие и отличительные особенности исследовательской деятельности	6
1.2 Структурные компоненты исследовательской деятельности обучающихся. Основные функции учебного исследования.....	9
1.3 Кружковая деятельность как одна из эффективных форм внеклассной работы.....	11
1.4 Значение исследовательских умений на кружковых занятиях по геометрии	14
1.5 Творческое мышление как путь активизации исследовательской деятельности обучающихся	17
Глава 2. Организация исследовательской деятельности обучающихся на примере конструкции «качели на равностороннем треугольнике»	19
2.1 Возможности реализации исследовательской деятельности на кружковых занятиях по геометрии с помощью программы GeoGebra	19
2.2 Система исследовательских задач на примере организации деятельности обучающихся в кружке	20
2.3 Рабочий лист как средство организации исследовательской деятельности обучающихся в кружковой работе	49
Заключение.....	52
Список литературы	53

Введение

Школа играет очень важную роль в развитии личности, от того, какие знания, умения и навыки сформируются в процессе обучения, зависит его будущее. Быстрое развитие мира и современного общества диктует особые требования к школе, например, формирование у учеников умения творческого решения разного рода задач, критического мышления, выражение и отстаивания собственной точки зрения, стремления к непрерывному самообразованию. В условиях, когда объем информации постоянно увеличивается, становится важным не просто передать знания, а научить овладению новым знанием и новыми видами деятельности. Формировать данные навыки помогает освоение различных предметных дисциплин, в частности, геометрии.

Существует немало путей, с помощью которых можно выполнять задачи, поставленные перед школой. Одним из таких является развитие способностей обучающихся к исследовательской деятельности посредством приобщения к ней. Исследовательская деятельность тесно связана с творческой, поэтому важно развивать и творческие способности для наиболее результативной работы в рамках учебного исследования во время кружковой работы.

Активная деятельность учителя при организации исследовательской деятельности школьников имеет важное значение в связи с реализацией федерального государственного образовательного стандарта, в котором отмечается необходимость «формирования компетенций обучающихся в области использования исследовательской деятельности».

Актуальность темы: исследовательская деятельность способствует развитию навыков, которые необходимы для развития будущего человека, но не все учителя школ применяют такого типа задачи в своей работе.

Большинство методистов относят формирование элементов исследовательской деятельности к задачам кружковых занятий или к урокам,

которые проводятся в классах с углубленным изучением математики. На вопросы: «как эффективнее формировать элементы исследовательской деятельности?», «какую проводить для этого работу?», «как её правильно организовать с методической точки зрения?», «какие задания использовать?», ответы найти достаточно проблематично. В электронных и книгопечатных ресурсах представлены только некоторые типы задач, применимые для работы с обучающимися. Именно в этом состоит *проблема* рассматриваемой темы.

Цель исследования: исследование методических особенностей организации исследовательской деятельности на кружковых занятиях на примере геометрической конструкции «качели на равностороннем треугольнике» в 9 классе.

Объект исследования: учебно-исследовательская деятельность школьников.

Предмет исследования: организация учебно-исследовательской деятельности в процессе кружковой работы.

Чтобы реализовать поставленную цель, необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить и обобщить литературные источники, раскрывающие содержание выбранной темы.
2. Структурировать прочитанную информацию по рассматриваемой теме.
3. Познакомиться с понятиями исследовательской деятельности, предложенные разными авторами, выделить отличительные особенности.
4. Рассмотреть структурные компоненты и функции исследовательской деятельности.
5. Изучить геометрическую конструкцию «качели на равностороннем треугольнике».
6. Доказать свойства, которыми обладает конструкция «качели на равностороннем треугольнике».

7. Разработать методические рекомендации по организации исследовательской деятельности.

Гипотеза исследования: вовлечение обучающихся в исследовательскую деятельность способствует наиболее прочному усвоению изучаемого материала.

При написании работы были использованы следующие *методы исследования:* поиск и анализ психолого-педагогической, математической литературы, обобщение и систематизация информации.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования учителем полученных результатов при организации работы математического кружка.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В первой главе содержатся теоретические основы по теме исследования, в частности: понятие исследовательской деятельности и её отличительные особенности; характеристика кружковой деятельности, как одной из эффективной формы внеклассной работы, а также влияние учебного исследования на развитие творческого мышления.

Во второй главе разработана система исследовательских задач на примере использования конструкции «качели на равностороннем треугольнике», составлены методические рекомендации по организации учебного исследования, представлен рабочий лист.

В заключении обобщены результаты исследования.

Список литературы представлен 15 источниками, ссылки на которые содержатся в тексте работы.

Глава 1. Теоретические основы исследовательской деятельности на кружковых занятиях по геометрии

1.1 Понятие и отличительные особенности исследовательской деятельности

Исследовательская деятельность занимает важное место в процессе обучения, так как основой современных образовательных стандартов является системно-деятельностный подход, нацеленный на активную деятельность обучающихся. К выпускникам предъявляются особые требования: аргументировано высказывать собственную точку зрения, уметь отстаивать ее, постоянно обновлять уже имеющиеся знания, дополнять их, особое внимание обращается на творческий подход, а также развитие УУД. Перед школой стоят различные задачи, связанные с развитием обучающегося, чтобы их выполнить, необходимо внедрять исследовательскую деятельность в образовательный процесс.

Один из учебных предметов, который создает благоприятные условия для привлечения обучающихся к исследовательской деятельности – математика, в частности, геометрия.

Сторонником использования исследовательского пути в процессе обучения был Ян Амос Каменский. Он считал, что для обучающихся важно не только извлекать знания из книг, но и получать их самостоятельно, из окружающих их предметов.

Идея использования исследовательской деятельности в образовательной процессе в России впервые была выдвинута Н. И. Новиковым в 18 веке. Развитие данная идея получила в работах К. Д. Ушинского, Н. Ф. Бунакова и др.

Исследовательская деятельность школьников являлась объектом изучения многих учёных, например, А. И. Савенкова, П. И. Пидкасистого, В. И.

Андреева, В. А. Далингера и многих других. Особое внимание уделялось формированию умений, которые приобретаются в процессе исследовательской деятельности.

Исследовательская деятельность – это любая деятельность, в ходе которой можно получить что-то совершенно новое: умение, навык, материальный продукт, так считает Е. В. Ларькина [5].

А. В. Леонтьевич утверждает, что данная деятельность, это активная работа, совершаемая обучающимися по заранее намеченному плану, а именно: постановка проблемной ситуации, изучение теоретического материала, отбор необходимых методов и методик, анализ собственных результатов, подведение итогов, формулировка результатов исследования, а результатом такой работы является решение творческой задачи, где ранее не было решения.

А. С. Обухова [9] понимает под исследовательской деятельностью работу, которая объединяет двух субъектов, в ходе которой они обмениваются опытом, решают неизвестную проблему и как результат воздействуют на мировоззрения друг друга.

Особым видом интеллектуальной и творческой деятельности называет исследовательскую А. И. Савенков, которая может возникнуть только в результате активной поисковой работы, в основе которой заложено исследовательское поведение.

По ФГОС исследовательская деятельность трактуется как творческая деятельность, нацеленная на решение неизвестной проблемы. Таким образом, исследовательская деятельность – процесс, который характеризуется целенаправленностью, творческой инициативой, который носит значимый результат, может носить как творческий, так и интеллектуальный характер [13].

Существуют и много других определений данного метода, но все они имеют сходство: сущность рассматриваемой деятельности состоит в неизвестности результата, самостоятельности учеников в его открытии.

Различие можно увидеть в сущности использования исследовательского метода. Например, Н. А. Рожков под данным методом подразумевает совокупность различных приемов, основой которых является самостоятельная познавательная деятельность обучающихся. Н. Ф. Натали отмечала, что использование данного метода состоит в восприятии учениками новых фактов, явления и процессов, которые получены не со слов педагога, а в результате самостоятельных открытий.

М. Н. Скаткин и И. Я. Лернер наиболее четко сформулировали сущность исследовательского метода: в процессе обучения и познания разных наук обучающиеся осваивают методы исследования, которые находят применения в любой области знаний, то есть у учеников формируется навык самостоятельного добывания новых знаний [14].

В современном мире исследовательская деятельность на уроке представляет собой целостную, системную, многоуровневую, динамичную модель, которая отражает объединение логических и эвристических методов.

Особенностью исследования в сфере образования является, что оно носит учебный характер, важным результатом является изменение самой личности, а не действительности. Математическая активность обучающихся не должна ограничиваться математикой взрослых. Каждый ученик может войти в мир математики, учитель только должен создать первичную ситуацию, мотивируя его деятельность.

М. З. Каплан выделяет учебное исследование как метод обучения математики, который имеет две характеристики: исследуется вопрос, который способствует реализации некоторых целей обучения; исследование характеризуется двойственным характером.

Как отмечала Е. Б. Епишева [5], любое общеобразовательное учреждение должно стать для обучающего малой лабораторией, где бы он каждый день узнавал что-то новое, ранее неизведанное, совершал открытия, которые являются большими для него самого и его наставника.

1.2 Структурные компоненты исследовательской деятельности обучающихся. Основные функции учебного исследования

Для эффективного использования исследовательской деятельности на кружковых занятиях, необходимо знать её структуру.

Многие педагоги, психологи, методисты рассматривали в своих работах данную тему.

Учебное исследование представляет собой процесс познания объективного мира, в этом оно похоже на научное, именно это является теоретической предпосылкой, поэтому некоторые элементы учебного и научного исследования совпадают.

Многие педагоги занимались сравнением научного и учебного исследования.

Э. М. Мирский [14] выделил следующие различия между научным творчеством и обучением: научное творчество состоит в обнаружении различных противоречий и дальнейшего их разрешения, в то время как обучение исключает любые противоречия; творчество научного исследования состоит в постановке проблемы на основе выявленного информационного комплекса, а обучение характеризуется постановкой проблемы, на основе сформулированных условий задач.

В. Ю. Ульянинский выделил следующие этапы в исследовательской деятельности: 1. активное наблюдение; 2. самостоятельное проведение эксперимента; 3. творческое воспроизведение увиденного.

И. Я. Лернер [5] отмечал этапы учебного исследования:

1. наблюдение различных фактов;
2. разъяснение непонятных фактов и явлений, которые подлежат исследованию;
3. изучение необходимых основ;
4. объяснение всех вопросов исследования;

5. анализ выводов и их фактическая запись.

М. Д. Касьяненко определил обобщенную схему исследования, которая применяется в математике:

1. рассмотрение объектов и определение связей между ними;
2. нахождение других объектов, которые связаны с исходными;
3. выстраивание новых понятий и гипотез;
4. проверка, выдвинутых утверждений;
5. систематизация результатов, полученных в ходе исследования;
6. поиск области применения результатов.

Разные авторы выделяют по-своему этапы исследования, это объясняется тем, что существует большое количество видов исследовательской деятельности, в частности, математической. Но к обязательным этапам исследования можно отнести: 1) постановка проблемной ситуации; 2) выдвижение гипотезы; 3) подтверждение или опровержение гипотезы (проверка); 4) формулирование результатов.

В современном мире исследовательская деятельность на уроках геометрии, а также на дополнительных занятиях используется для реализации развивающих целей, так как с ее помощью происходит формирование мышления, а именно таких процессов как гибкость ума, целенаправленность, выстраивание логических связей.

Исследовательская деятельность предполагает решение проблемы, таким образом, способствует развитию такого умения как выдвижение гипотез, помогает научиться систематизировать и анализировать полученную информацию, что отражает развивающую функцию.

Исследования, применяемые в кружковой деятельности, способствуют расширению кругозора и интереса в предметной области, тем самым выполняют воспитывающую функцию.

Кроме перечисленных функций необходимо отметить дидактические, контролирующие, управленческие функции. К дидактическим относятся:

открытие знаний ранее неизвестных обучающемуся, систематизация имеющихся. К управленческим: привлечение обучающихся к самообразованию и саморегуляции.

Привлекать учеников к исследованиям должно происходить по двум направлениям: содержательное и организационное. Первое состоит в том, что ученик без всякой посторонней помощи может поставить учебную задачу и определить ход ее решения. Второе характеризует умение обучающегося организовать собственную деятельность по решению поставленных задач.

Учебно-исследовательская деятельность тесно связана с научно-исследовательской, такой вывод можно сформулировать, проанализировав основные структурные компоненты. Научно – исследовательская деятельность является более сложной. Трудно утверждать, какие границы она имеет, где именно заканчивается учебно-исследовательская и начинается научная.

1.3 Кружковая деятельность как одна из эффективных форм внеклассной работы

Впервые понятие кружковой деятельности возникло в 19 веке с момента появления ремесленных кружков. Их целью являлась выработка и усвоение профессиональных умений. Занятия в таких кружках – дело добровольное. Проводились они под руководством одного человека – мастера.

Внеклассная деятельность сейчас является очень важной частью образовательного процесса, в частности, обучения геометрии. Основной целью данной деятельности является повышение интереса к предмету.

В современном мире существуют различные формы внеклассной работы, число которых увеличивается с каждым годом, с возникновением новых тенденций. Но именно кружковая деятельность не теряет своей эффективности и действенности.

Кружковые занятия по геометрии – это объединение обучающихся, которым руководит педагог, проводит с ними занятия в свободное от уроков время. Основа любого кружка – это принцип добровольности. Кружковые занятия могут посещать как обучающиеся одного класса, так и параллельных. Количество членов кружка может быть различно от 5 до 15 человек, уровень их знаний может варьироваться от низкого к высокому. Работа кружка не повторяет деятельность на уроке, часто выступает в качестве связующего звена между уроком и внеурочной деятельностью. При организации кружковой деятельности можно привлекать учеников, а именно, поручать им подготовку докладов и рефератов по теме, изготовление различных геометрических моделей.

Основной задачей является формирование математического способа мышления посредством тщательного подбора задач, демонстрации идей и методов решения. К целям кружка по геометрии относятся: 1) обогащение математического кругозора обучающихся; 2) формирование навыков решения нестандартных геометрических задач; 3) повышение интереса к геометрии; 4) развитие творческих, исследовательских способностей и самостоятельности при решении.

На первом занятии кружка необходимо наметить содержание работы на весь курс, выбрать старосту, определить ответственных за каждый тип работы. Тщательная организация кружковой деятельности является залогом его успешного функционирования и результативности. Чтобы члены кружка хорошо усваивали новые знания необходимо одной теме посвящать 2-3 занятия, используя задания разного характера, а также различные формы организации занятий, например, такие интерактивные формы, как мозговой штурм, математическая карусель, дискуссия и т. д. Выполнение домашнего задания является обязательным условием посещения кружка, в нем содержатся задачи простого, высокого и повышенного уровня [3].

Выделяют формы работы кружка:

1. Тематическое занятие, в ходе которого происходит разбор задач по определенной теме, например, площадь параллелограмма, геометрическое место точек и др.

2. Десятиминутка, в ходе которой происходит обсуждение какого-то узкого вопроса, темой таких обсуждений может является интересный биографический факт, прием счета, краткая характеристика геометрического объекта.

3. Рассмотрение задач, которые не связаны с темой занятия, они могут иметь пропедевтический характер для следующей изучаемой темы, а также могут является историческими и логическими.

4. Занятие, имеющее развлекательный характер, где присутствуют геометрические иллюзии, математические головоломки, задачи-шутки.

5. Решение домашних задач, где происходит разбор заданий, предложенных на прошедших занятиях.

6. Доклады и рефераты, такая форма применяется реже остальных, только по тем темам, где проведение тематических занятий является нецелесообразным.

7. Моделирование, в ходе занятия такого типа происходит изготовление различных моделей.

8. Обсуждение книг и статей по математике.

9. Просмотр тематического документального или художественного фильма.

Выделяют требования к проведению кружковой работы [12]:

1. Использование нестандартных, олимпиадных задач разного уровня;
2. Учет интересов и желаний обучающихся.

Во время организации кружковой работы применяются различные технологии.

- Здоровьесберегающие технологии, которая заключается в смене деятельности;

- Игровые технологии, которые способствуют развитию самостоятельности и инициативы обучающихся;

- Интегрированные занятия, в ходе которых используются знания из нескольких областей знания.

Занятия предметных кружков не регламентируется учебной программой, поэтому предоставляет большой простор для реализации исследовательской деятельности.

1.4 Значение исследовательских умений на кружковых занятиях по геометрии

Под исследовательскими умениями стоит понимать систему умственных действий (операций), которые необходимы, чтобы выполнить исследование или его часть самостоятельно.

Формирование исследовательских навыков является сложным процессом. Д. И. Климеченко отмечает, что сформировать исследовательские умения можно только с помощью решения задач, которые требуют анализа условия и чертежа. А. Я. Цукарь утверждает, что исследовательские навыки формируются во время дополнительного рассуждения над задачей, а именно, сравнения ее с другими, формулирование обратных задач данной [3].

Е. В. Позднякова выделяет основные типы задач, которые способствуют формированию исследовательских умений [7].

1. Задачи открытого типа разного уровня, которые развивают умение ставить цели работы.

1 уровень: а) цель «озвучена» в своей формулировке, б) сказана на математическом языке.

Пример: цель задачи по геометрии: «В параллелограмме две стороны равны 5 и 2 см, соответственно, а диагональ равна – 2 см. Существует ли такой

параллелограмм?» (Доказать существование такое параллелограмма или опровергнуть, что его не существует).

2 уровень: цель в своей формулировке не озвучивается, но предлагается ее интерпретация на математическом языке.

Пример: почему в параллелограмме одна диагональ больше второй всегда? (Доказать, что $d_1 > d_2$, где d_1 и d_2 – диагонали параллелограмма).

3 уровень: цель не озвучивается, задача сформулирована не на математическом языке.

Пример: где на участке квадратной форме нужно поставить фонарь, что свет доходил одинаково до каждого угла? (Найти точку, расположенную внутри квадрата, которая удалена на одинаковом расстоянии от углов.)

2. Задачи разного уровня открытого типа, которые развивают умение проводить анализ условия задачи.

1 уровень: условия данной ситуации а) явно сформулированы; б) в них нет противоречий; в) отсутствуют данные с избытком.

Пример: Дан треугольник, у которого первая сторона равна 4 см, вторая на 2 см меньше первой, а третья в 2 раза большее ее, существует ли такой треугольник?

2 уровень: наблюдается нарушение одного из пунктов а) – б)

Пример: чему равны стороны равнобедренного треугольника, если две его стороны относятся как 3:8, его периметр равен 38 см, а сторона на 10 см меньше другой? (Условие задачи избыточно.)

3 уровень: определенную часть условия обучающийся вводит самостоятельно.

Пример: два вектора AB , CD равны, при каком условии $ABCD$ – параллелограмм?

3. Задачи открытого типа разного уровня, которые развивают умение критически проводить анализ результатов.

1 уровень: задачи, требующие выяснения: а) является ли верным утверждение, используя теорему, определение или свойство; б) является ли верным решение задачи (решение без ошибок).

Пример: Верно ли утверждение: «Если сумма двух углов 180° , то они смежные?»

2 уровень: задачи, требующие выяснения: а) является ли верным утверждение, используя несколькими теоремами, определениями или свойствами; б) является ли верным решение задачи (решение задачи содержит ошибку).

Пример: дан прямоугольник со сторонами 2 и 3 см, изображенный на плане, имеющий масштаб 1:100. Вычислить площадь данного прямоугольника.

3 уровень: задачи, требующие выяснения рационального использования решения задачи.

О. В. Охтенко приводит перечень учебно-исследовательских умений, которые развиваются обучающихся:

1. умение подбирать для решаемой задачи известную математическую модель или предложить новую;
2. умение правильно интерпретировать полученный результат;
3. умение предложить контрпримеры, чтобы опровергнуть неверное суждение;
4. умение осуществлять доказательство утверждений геометрии;
5. умения применить полученные новые знания на практике;
6. умение проведения самоконтроля.

А. А. Окунев утверждает, что исследовательские навыки формируются в том случае, если сам ученик осуществляет поиск сразу нескольких решений одной задачи.

Таким образом, различные геометрические задачи позволяют глубоко изучить материал, усвоить его на достаточно прочном уровне, вызвать интерес к геометрии. Открытые задачи способствуют развитию важных качеств,

например, гибкость ума, нестандартность мышления. Задачи разного уровня помогают в дифференциации обучения.

1.5 Творческое мышление как путь активизации исследовательской деятельности обучающихся

Одним из приоритетных направлений при обучении геометрии является развитие личности, в частности, творческого мышления.

Проблема, касающаяся исследовательской деятельности школьников имеет длинную историю, так как ранее исследовательский метод был применим только к предметам гуманитарного и естественнонаучного цикла. Появление задач, которые требуют исследований, в учебниках по математике говорит о возможности необходимого включения разного вида исследований в учебный процесс.

Творческая деятельность – вид деятельности, сущностной характеристикой которой является создание нового, не имеющего аналогов.

Исследовательская деятельность способствует реализации познавательной активности и творческой самостоятельности. Исследовательскую деятельность рассматривают как составляющую часть творческой. В процессе целенаправленно организованной деятельности, которая организована под контролем учителя развивается способность обучающихся к творческой, а значит и к исследовательской деятельности.

Н. Д. Волкова [9] даёт следующее определение творческой деятельности, которая развивается в процессе обучения: определенный вид деятельности, которая направлена на реализацию умений, навыков уже имеющихся и формирование новых знаний.

Основные черты творческой деятельности: 1) логическое мышление; 2) новизна; 3) направленность действий на цель; 4) выявление нечеткости рассуждений; 5) отказ от стандартных способов мышления.

А. Н. Колмогоров обращал внимание, что даже самые простые сведения математики могут применяться умело и со смелостью только тогда, когда они творчески усвоены.

Многие методисты и математики разрабатывали методы, которые способствовали развитию творческого потенциала обучающихся посредством привлечения их к исследовательской деятельности.

Всякая исследовательская деятельность невозможна без напряженной деятельности, активных мыслительных операций, то есть без творческого мышления.

В. И. Андреев отмечает, что оригинальные решения приходят только в момент активизации логических процедур. Творческое мышление имеет две основные составляющие: 1. логические приемы, например, анализ, синтез; 2. эвристические приемы: аналогии, ассоциации.

З. И. Калмыкова определяет творческое мышление «как возможность приобретать новые знания». Для возникновения решения необходимо «откинуть прошлые знания» и рассматривать только настоящую ситуацию.

В. В. Давыдов под творческим мышлением понимал теоретические мышление, которое характеризуется планированием, анализом и рефлексией.

Э. Ш. Хамитов творческое мышление характеризовал как активное взаимодействие объекта и субъекта, в ходе которого происходит изменение окружающей действительности [5].

Многие педагоги-психологи останавливались на проблеме математического творчества. Огромную роль в нем играют способности обучающихся к математике. К таким специфическим способностям относят: классификация понятий и свойств, интеллектуальная любознательность, быстрота и резкость мысли, математическая память.

Таким образом, при осуществлении исследовательской деятельности обучающийся открывает теоретические знания, развивает практические умения, в том числе, применяя своё творческое мышление.

Глава 2. Организация исследовательской деятельности обучающихся на примере конструкции «качели на равностороннем треугольнике»

2.1 Возможности реализации исследовательской деятельности на кружковых занятиях по геометрии с помощью программы GeoGebra

В эпоху компьютерных технологий существует большое количество динамических математических программ, позволяющих использовать их во время проведения учебных занятий. Одна из таких программ – GeoGebra, которая обладает полным набором инструментов для построения и преобразования различных фигур на плоскости, позволяет проводить дополнительные построения, а именно: строить прямую, луч, окружность, точки пересечения нескольких геометрических объектов и др., находить середины отрезков или центры окружностей, а также производить измерения: величин длин отрезков, градусных мер углов.

Программа используется как виртуальный инструмент, который заменяет циркуль и линейку, но в отличие от традиционных инструментов она обладает рядом дополнительных возможностей:

- 1) предоставляет широкие возможности для самопроверки и самоконтроля через исследование построенного объекта;
- 2) позволяет вернуться к любому этапу построения, используя журнал истории действий.

Система GeoGebra – незаменимый инструмент при организации исследовательской работы обучающихся, с ее помощью можно выдвигать гипотезы и предположения, исследовать зависимости элементов геометрической конфигурации. GeoGebra позволяет создавать визуальное решение поставленной задачи. При работе с такой задачей можно выделить несколько этапов:

- геометрическое моделирование условия задачи на экране монитора;

– решение задачи на экране с использованием встроенных функций программы;

– построение модели решения, увиденного на экране.

Программа динамической геометрии обладает рядом преимуществ:

1) доступность в освоении и использовании, как для учителя, так и для ученика;

2) простота интерфейса;

3) интерактивность;

4) функциональность, которая заключается в возможности использования программы с 1 по 11 классы.

Таким образом, GeoGebra – средство, помогающее учителю и обучающемуся в изучении геометрии, с помощью которого можно организовать разнообразные виды деятельности, в частности, учебное исследование.

2.2 Система исследовательских задач на примере организации деятельности обучающихся в кружке

Исследовательская деятельность является важным видом работы, организуемым в образовательном процессе. Такой вид деятельности является интересным для обучающихся, но в то же время достаточно сложным для выполнения. В ее организации важная роль отводится учителю. Прежде, чем предлагать задачи ученикам, учителю необходимо самостоятельно преодолеть весь путь исследователя.

В работе организация исследовательской деятельности описывается с точки зрения работы педагога, его взаимодействия с обучающимися.

Любое учебное исследование начинается с постановки исследовательской задачи: необходимо построить геометрическую конструкцию, которая обладает

большой степенью подвижности, то есть такую, где можно менять положение ее элементов.

Первый вопрос, который необходимо обсудить с учениками: возможно ли построить равносторонний треугольник, жестко зафиксировав его? Обучающиеся выдвигают предположения о построении такого треугольника, а именно, что такой треугольник может быть построен, если заранее определить длины его сторон.

Таким образом, зафиксируем сторону AC треугольника ABC, построим точку B, такую что $\triangle ABC$ – равносторонний (Рисунок 1).

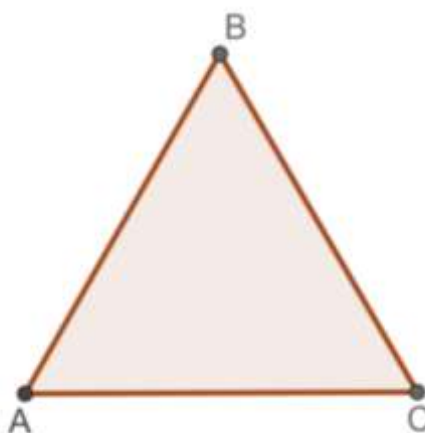


Рисунок 1 – равносторонний треугольник ABC

Сколько прямых можно провести через точку B? (*Бесконечно много*).

Как необходимо построить прямую, чтобы зафиксировать ее положение?

После постановки такого вопроса от обучающихся можно услышать ряд предположений, которые касаются построения точки, отличной от B, через две полученные точки можно провести прямую и притом только одну.

Если предположений не последует важно задавать наводящие вопросы: Через сколько точек можно провести прямую? Как должна быть расположена точка относительно B? (Рисунок 2)

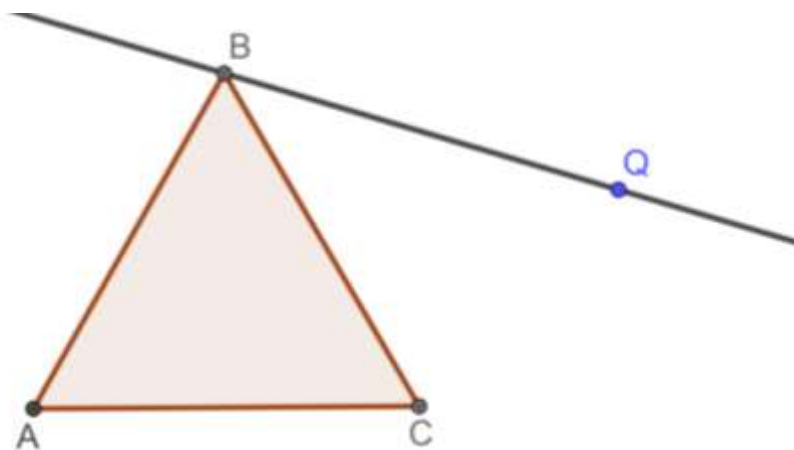


Рисунок 2 – прямая, проходящая через точку В

Получили конструкцию, которая имеет название «качели на равностороннем треугольнике».

Продлим основание AC треугольника. Попробуем вписать окружности, так чтобы они внешним образом касались сторон AB и BC, продолжения AC и прямой BQ. Где лежат центры таких окружностей? Как можно построить их? (Центры окружностей – точки пересечений биссектрис внешних углов треугольника и биссектрис углов, образованных между боковыми сторонами треугольника и прямой BQ) (Рисунок 3).

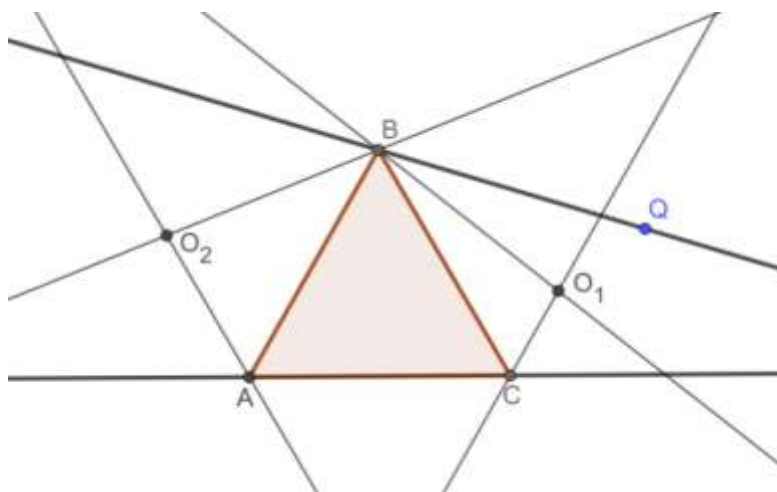


Рисунок 3 – построение центров окружности

Где лежат точки касания окружностей? (Точки касания окружности с центром O_1 лежат на BC, продолжении AC за точку C и прямой BQ; точки касания окружности с центром O_2 лежат на AB, продолжении AC за точку A и прямой BQ). Как можно построить точки касания? (Опустим перпендикуляр

из точки O_1 на BC , продолжение AC и BQ , а также перпендикуляр из точки O_2 на AB , продолжение AC и BQ) (Рисунок 4).

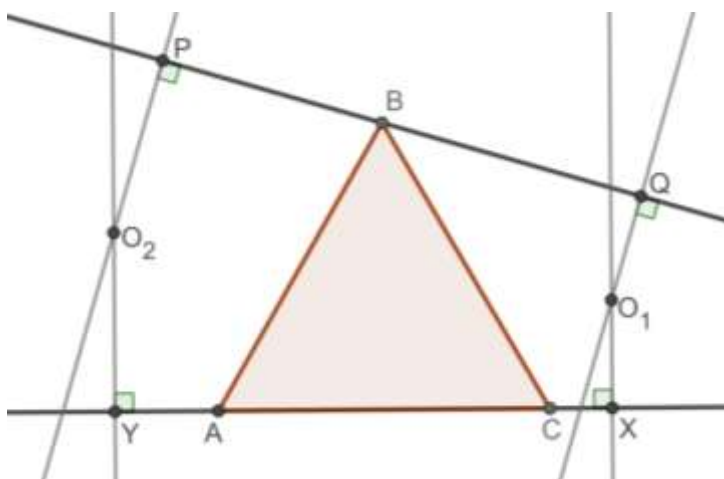


Рисунок 4 – построение перпендикуляров из точек O_1 и O_2

Полученные точки P , Y , Q , X – точки касания окружностей.

Чем являются отрезки O_2P , O_2Y , O_1Q , O_1X для окружностей? (Данные отрезки являются радиусами окружностей). Построим такие окружности (Рисунок 5).

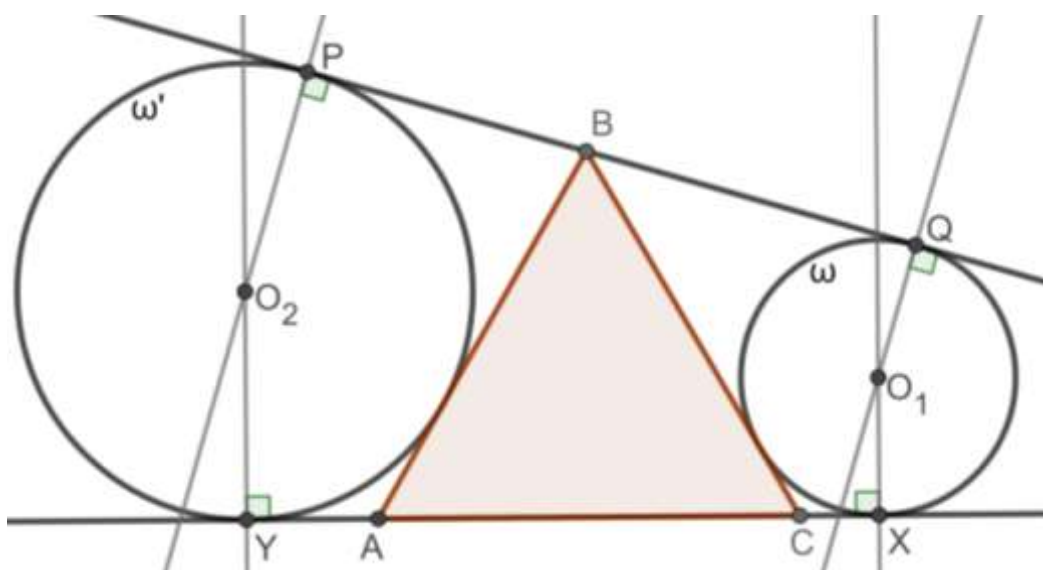


Рисунок 5 – окружности ω и ω'

Попробуем выявить закономерности, которые происходят в полученной конфигурации. Вычислим сумму радиусов двух окружностей. Как она будет изменяться в зависимости от перемены радиусов? Сделайте вывод на основе проведенного исследования. (При изменении радиусов их сумма остается постоянной) (Рисунок 6).

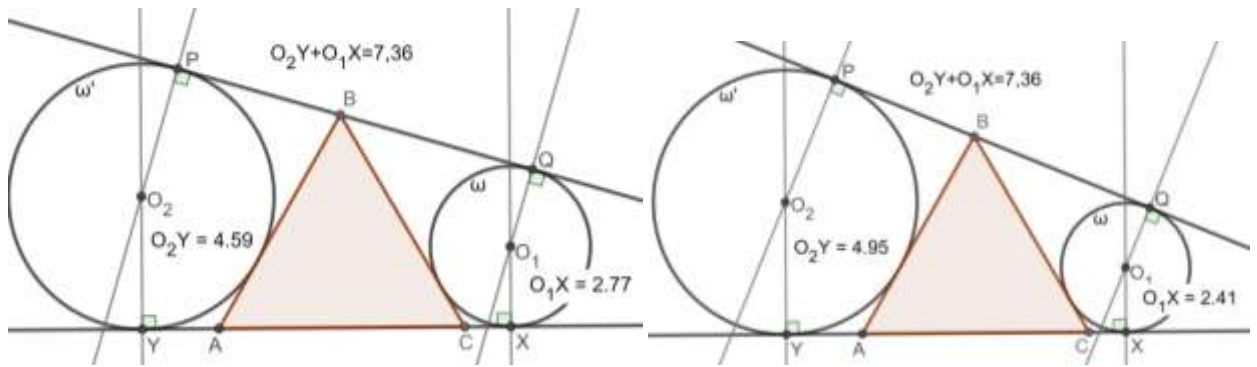


Рисунок 6 – изменение радиусов окружностей

Таким образом, мы получили, что сумма радиусов является величиной постоянной. Важно выяснить от чего же зависит ее значение? (*Окружности внешним образом касаются боковых сторон треугольника, а также продолжения основания, возможно сумма радиусов зависит от стороны равностороннего треугольника*).

В дальнейшем будем считать, что сторона равностороннего треугольника равна a , $O_1X = r$, $O_2Y = R$.

Посмотрим на полученную конструкцию с точки зрения существования алгебраических и геометрических инвариантов (Рисунок 7):

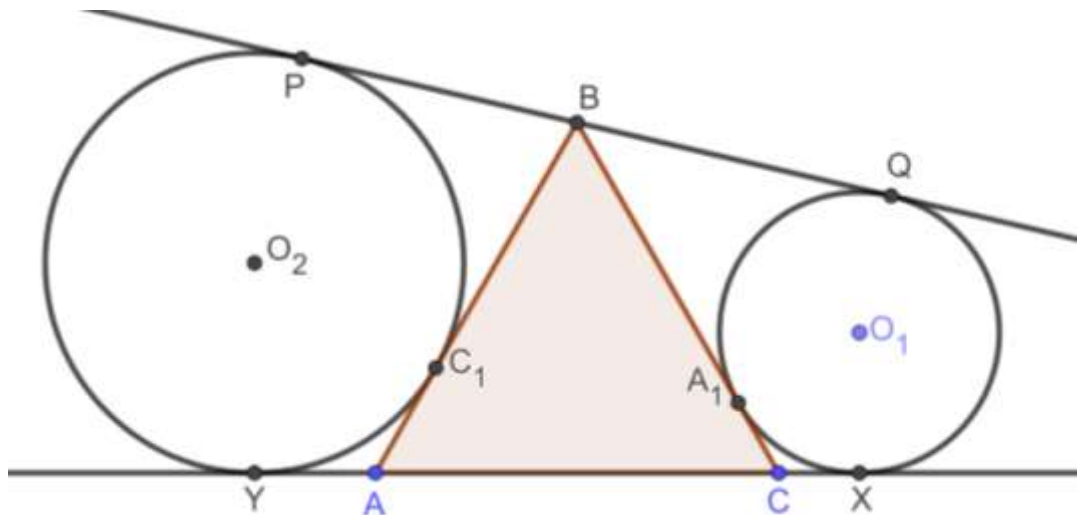


Рисунок 7 – «качели» на равносторонний треугольник

Мы имеем общие касательные к двум окружностям, какой вывод о взаимном расположении радиусов этих окружностей можно сделать? (*Радиусы, проведенные в точки касания параллельны, то есть $O_1X \parallel O_2Y$, $O_1Q \parallel O_2P$*).

Проведем прямые O_2C_1 и O_1A_1 . Каково их взаимное расположение? Где лежит их точка пересечения? Исследуйте ее расположение и сделайте вывод. (Прямые O_2C_1 и O_1A_1 пересекаются в одной точке, принадлежащей основанию AC равностороннего треугольника).

Теперь данный факт докажем аналитически.

Докажем, что прямые O_2C_1 и O_1A_1 пересекаются в точке Z , $Z \in AC$ (Рисунок 8).

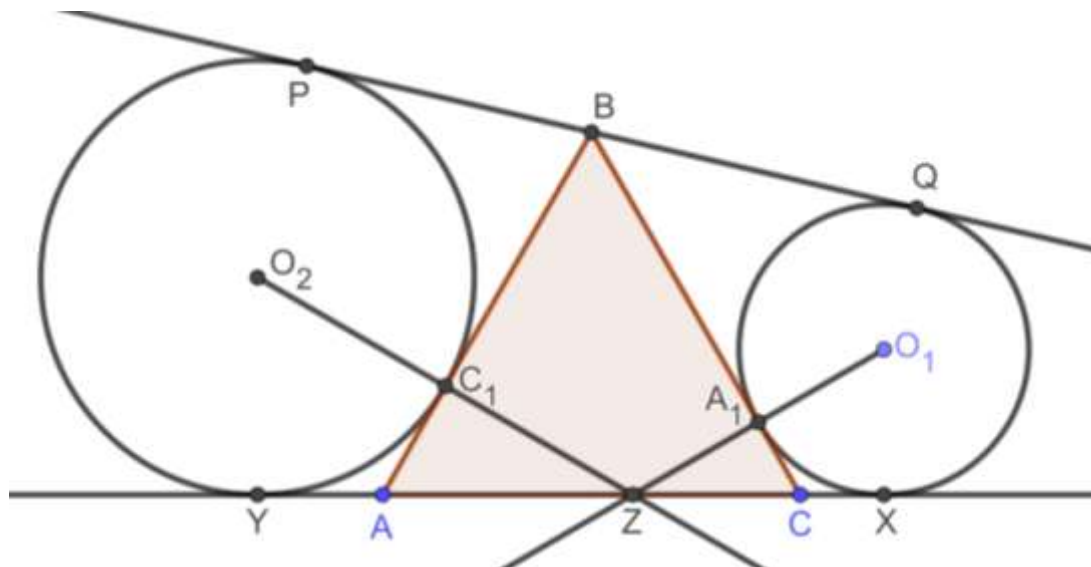


Рисунок 8 – построение Z , как точки пересечения O_1A_1 и O_2A_2

Предположим, что прямые O_2C_1 и O_1A_1 пересекаются с основанием треугольника AC в различных точках (Рисунок 9):

$$O_2C_1 \cap AC = Z_1, O_1A_1 \cap AC = Z_2.$$

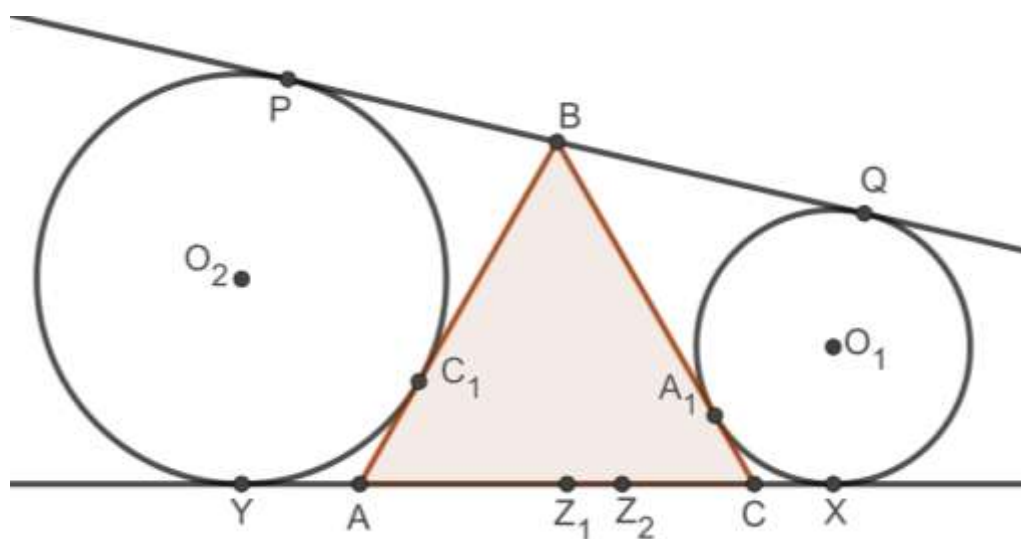


Рисунок 9 – $O_1A_1 \cap AC = Z_1$, $O_2C_1 \cap AC = Z_2$

По свойству касательных:

$$YA = AC_1, BP = BC_1, CX = CA_1, BA_1 = BQ. \quad (1)$$

Отрезок XY складывается из трех отрезков:

$$XY = AC + YA + CX.$$

Отрезок PQ состоит из двух отрезков:

$$PQ = PB + BQ.$$

Найдем сумму этих отрезков, получим:

$$XY + PQ = AC + YA + CX + PB + BQ. \quad (2)$$

Подставим в полученное равенство (2) равенства (1):

$$\begin{aligned} XY + PQ &= AC + AC_1 + CA_1 + BC_1 + BA_1 = AC + AB + AC = \\ &= P_{\triangle ABC} = 3a, \end{aligned}$$

где a – сторона равностороннего треугольника.

Тогда,

$$XY = PQ = \frac{3a}{2}.$$

Рассмотрим $\triangle O_1XZ_2$ – прямоугольный:

$$\angle O_1Z_2X = 30^\circ \Rightarrow Z_2O_1 = 2O_1X = 2r.$$

Рассмотрим $\triangle CA_1Z_2$ – прямоугольный:

$$\begin{aligned} Z_2A_1 &= r, \angle Z_2CA_1 = 60^\circ, \\ CX &= CA_1 = r \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}}, \\ Z_2C &= 2A_1C = 2CX = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

как катет, лежащий против угла в 30° .

Рассмотрим $\triangle O_2YZ_1$ – прямоугольный:

$$\angle O_2Z_1Y = 30^\circ \Rightarrow Z_1O_2 = 2O_2Y = 2R.$$

Рассмотрим $\triangle AC_1Z_1$ – прямоугольный:

$$\begin{aligned} Z_1C_1 &= R, \angle Z_1AC_1 = 60^\circ, \\ YA &= AC_1 = R \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}, \\ AZ_1 &= 2AC_1 = 2YA = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

как катет, лежащий против угла в 30° .

Таким образом, отрезок XY складывается из нескольких отрезков:

$$\begin{aligned} XY &= 3A_1C + 3AC_1 + Z_1Z_2 = \frac{3a}{2}, \\ \frac{3R}{\sqrt{3}} + \frac{3r}{\sqrt{3}} + Z_1Z_2 &= \frac{3a}{2}, \\ \sqrt{3}(R + r) + Z_1Z_2 &= \frac{3a}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ранее было выяснено, что сумма радиусов окружности является величиной постоянной. Найдем значение этой величины.

$$a - \frac{r}{\sqrt{3}} + a - \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{2} \Rightarrow -\frac{3a}{2} + \frac{4a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(r + R) \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{r + R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r + R = \frac{\sqrt{3}a}{2}. \quad (4)$$

Таким образом, сумма радиусов равна высоте равностороннего треугольника.

Подставим значение, полученное в (4) в равенство (3), получим:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a + Z_1Z_2 = \frac{3a}{2} \Rightarrow Z_1Z_2 = 0.$$

Следовательно, $O_1A_1 \cap O_2A_2 = Z$.

При анализе геометрических конфигураций часто необходимо использовать дополнительные построения, которые способствуют дальнейшему продвижению в учебном исследовании. Какое дополнительное построение возможно сделать в рассматриваемой нами конфигурации? (*Самое простое дополнительное построение – построение отрезка, можно соединить точки O_2 и A , O_1 и C*). Чему равна их сумма? Будет ли она постоянной величиной?

Заметим, относительно точек A и C рассматриваемая конструкция обладает «равноправием», а относительно точки B она имеет отличные свойства. Соединим B и O_1 , B и O_2 (Рисунок 10). Что можно сказать про длины полученных отрезков? Воспользуйтесь программой GeoGebra, сделайте вывод. (*Полученные отрезки BO_1 и BO_2 равны*).

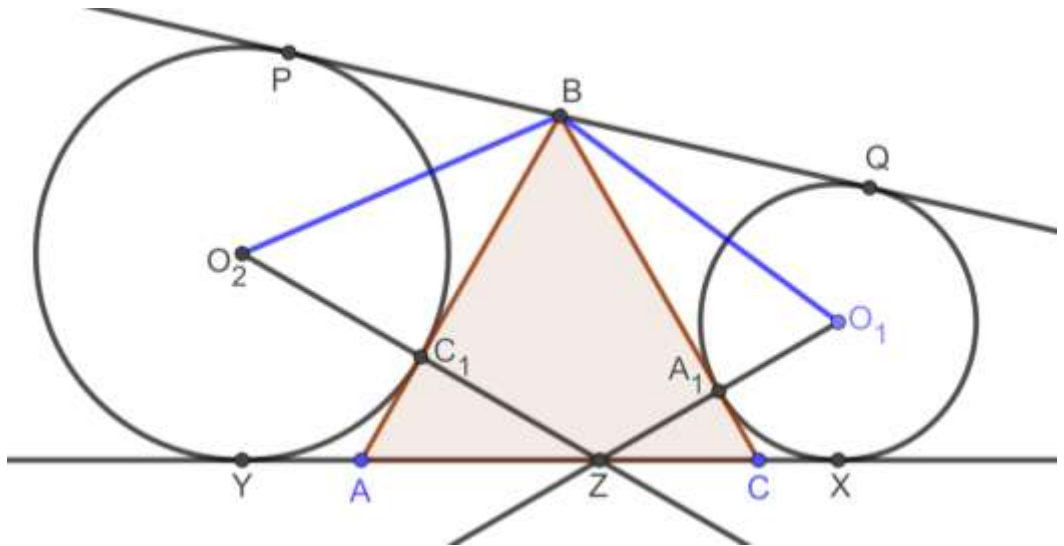


Рисунок 10 – построение отрезков BO_1 и BO_2

Докажем, что $BO_1 = BO_2$.

Рассмотрим $\triangle ZHO_1$ – прямоугольный:

$$O_1X = \frac{1}{2}O_1Z = r,$$

как катет, лежащий против угла в 30° ,

$$O_1A_1 = A_1Z = r,$$

По теореме Пифагора:

$$ZX = \sqrt{ZO_1^2 - XO_1^2} = \sqrt{2r + r} = \sqrt{3}r.$$

Аналогично, рассматривая прямоугольный $\triangle ZHO_2$, получим:

$$ZY = \sqrt{3}R.$$

Рассмотрим $\triangle AZC_1$ – прямоугольный:

$$AZ = 2AC_1,$$

как катет, лежащий против угла в 30° .

По теореме синусов:

$$\frac{AC_1}{\sin 30^\circ} = \frac{ZC_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$AC_1 = AY$ (по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки),

По теореме Пифагора:

$$AZ = \sqrt{AC_1^2 + ZC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + R^2} = \sqrt{\frac{R^2}{3} + R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}.$$

Аналогично, рассматривая прямоугольный $\triangle CZA_1$, получим:

$$ZC = \frac{2\sqrt{3}r}{3}.$$

Сторона AC равностороннего треугольника складывается из двух отрезков:

$$a = AC = AZ + ZC = \frac{2\sqrt{3}}{3}(R + r),$$

Отрезок C_1B представляет собой разность нескольких отрезков:

$$C_1B = a - AC_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(R + r) - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2R + 2r - R) = \frac{\sqrt{3}}{3}(R + 2r),$$

Аналогично,

$$A_1B = \frac{\sqrt{3}}{3}(r + 2R).$$

Рассмотрим $\triangle BC_1O_2$ – прямоугольный:

По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} BO_2 &= \sqrt{O_2C_1^2 + BC_1^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(r + 2R)\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + \frac{3}{9}(R^2 - 4R \cdot r + 4r^2)} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{3}R^2 - \frac{4}{3}R \cdot r + \frac{4}{3}r^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{3}R^2 + \frac{4}{3}R \cdot r + \frac{4}{3}r^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим $\triangle BA_1O_1$ – прямоугольный:

По теореме Пифагора:

$$BO_1 = \sqrt{(A_1O_1)^2 + (BA_1)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}R^2 + \frac{4}{3}Rr + \frac{4}{3}r^2}$$

Значит, $BO_1 = BO_2$.

Какой отрезок может быть равен BO_1 и BO_2 ?

Соединив В и Z можем заметить, что полученный отрезок является равным с BO_1 и BO_2 . Докажем этот факт.

Рассмотрим $\triangle BZA_1$ и $\triangle BO_1A_1$ – прямоугольные, BA_1 – общая, $ZA_1 = A_1O_1$

Значит, $\triangle BZA_1 = \triangle BO_1A_1$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow BO_1 = BZ$ (как соответственные элементы равных треугольников).

Таким образом, имеем равенство трех отрезков: $BO_1 = BO_2 = BZ$. (5)

Данный треугольник ABC – равносторонний. Сколько осей симметрии он имеет? (*Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии*). Проведем одну из них: BM – ось симметрии, значит $Z \rightarrow Z'$, $BZ \rightarrow BZ'$ (Рисунок 11).

Возникают ли какие-то равенства относительно проведенной оси?

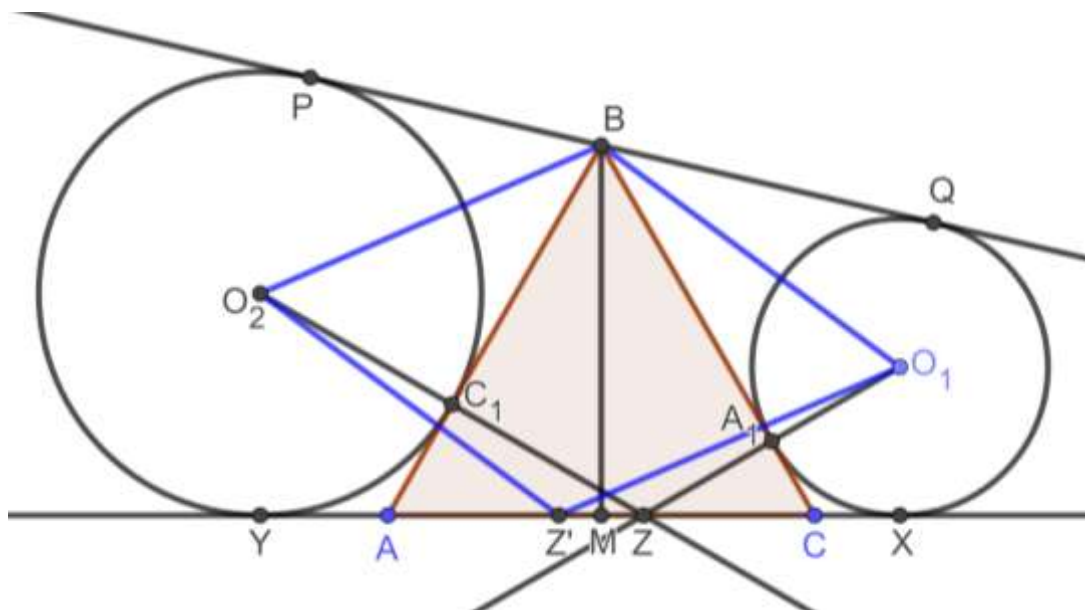


Рисунок 11 – симметрия относительно точки М

Какое дополнительное построение можно провести, используя полученные точки относительно оси симметрии? Проведите аналогию с точкой Z.

Проведем отрезки $Z'O_2$ и $Z'O_1$. Получили четырёхугольник с вершинами В, O_1 , Z' , O_2 . Какой он имеет вид? (*Параллелограмм*). Измерьте его стороны. Что можно сказать про длины сторон? (*Стороны имеют одинаковые длины, значит, полученный четырёхугольник – ромб*).

Докажем, что $Z'O_1BO_2$ – ромб.

Известно, что $BO_1 = BO_2$, необходимо показать, что $Z'O_2 = Z'O_1$.

Рассмотрим $\triangle O_2YZ'$ – прямоугольный:

Отрезок YZ' складывается из двух отрезков:

$$YZ' = YA + AZ',$$

$$YA = \frac{R\sqrt{3}}{3},$$

$$AZ' = ZC = \frac{2\sqrt{3}r}{3},$$

получим,

$$YZ' = \frac{R\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}r}{3} = \frac{\sqrt{3}(R+2r)}{3},$$

По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} O_2Z' &= \sqrt{YO_2^2 + YZ'^2} = \sqrt{R^2 + \frac{3R^2 + 12R \cdot r + 12r^2}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{12R^2 + 12R \cdot r + 12r^2}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$O_2Z' = BO_1 = BO_2.$$

Рассмотрим $\triangle O_1XZ'$ – прямоугольный:

Отрезок XZ' включает в себя отрезки XC и CZ' :

$$XZ' = XC + CZ' = XC + AZ = \frac{r}{\sqrt{3}} + \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{r+2R}{\sqrt{3}},$$

По теореме Пифагора:

$$O_1Z' = \sqrt{O_1X^2 + XZ'^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2 + 4R \cdot r + 4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}(r^2 + R \cdot r + R^2)}.$$

Таким образом,

$$O_2Z' = BO_1 = BO_2 = O_1Z',$$

значит $Z'O_1BO_2$ – ромб (Рисунок 12).

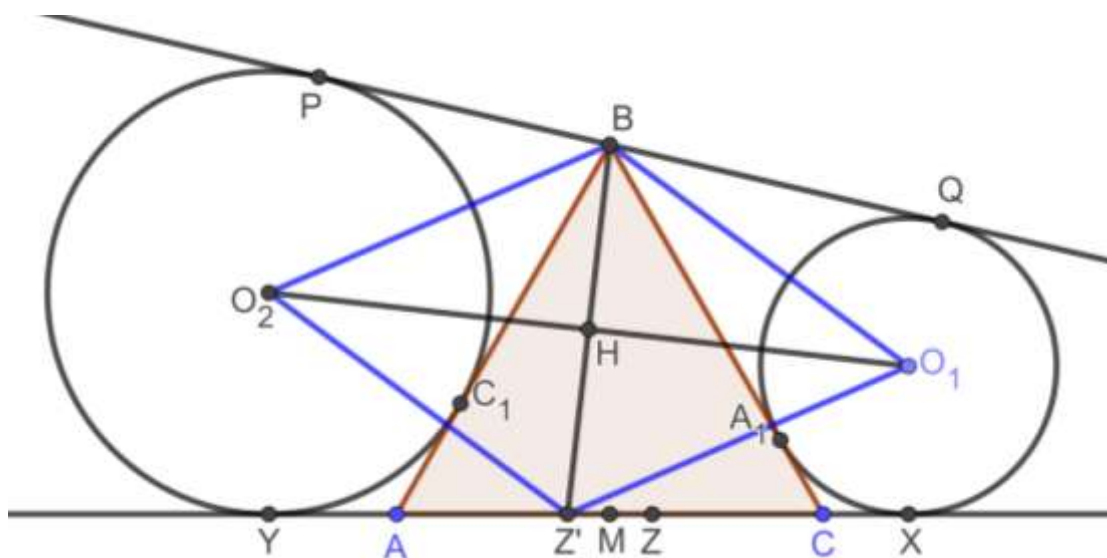


Рисунок 12 – $Z'O_1BO_2$ – ромб

Проведем диагонали ромба, H – точка их пересечения $\Rightarrow H$ – середина O_1O_2 . Выясним не существует ли закономерности относительно точки H ? Является ли точка H постоянной? Найдите ее ГМТ. Изменяя положение точки H и используя инструмент «Оставлять след», сформулируйте гипотезу. (*H не является постоянной точкой, она движется по средней линии равнобедренного треугольника ABC*).

Рассмотрим $\triangle ABZ'$:

H – середина $BZ' \Rightarrow$ через нее проходит средняя линия $\triangle ABZ'$, которая параллельна AZ' .

Рассмотрим $\triangle BZ'C$:

H – середина $BZ' \Rightarrow$ через нее проходит средняя линия $\triangle BZ'C$, которая параллельна $Z'C$.

Таким образом, получили, что средние линии параллельны основанию и проходят через $H \Rightarrow$ есть средняя линия $\triangle ABC$.

В результате, показали, что середина отрезка O_1O_2 не является постоянной точкой, она движется по средней линии данного треугольника ABC .

Таким образом, H – точка пересечения диагонали ромба и средней линии равнобедренного треугольника ABC . Геометрическое место точки найдено.

Мы анализировали свойства линейных объектов, а возникают ли закономерности при рассмотрении нелинейных объектов? Начнем с самого простого из таковых – окружности.

Через какие точки можно провести окружность? Начнем с точек, которые даны по условию. Существует ли окружность, проходящая через B , O_1 , O_2 (Рисунок 13)?

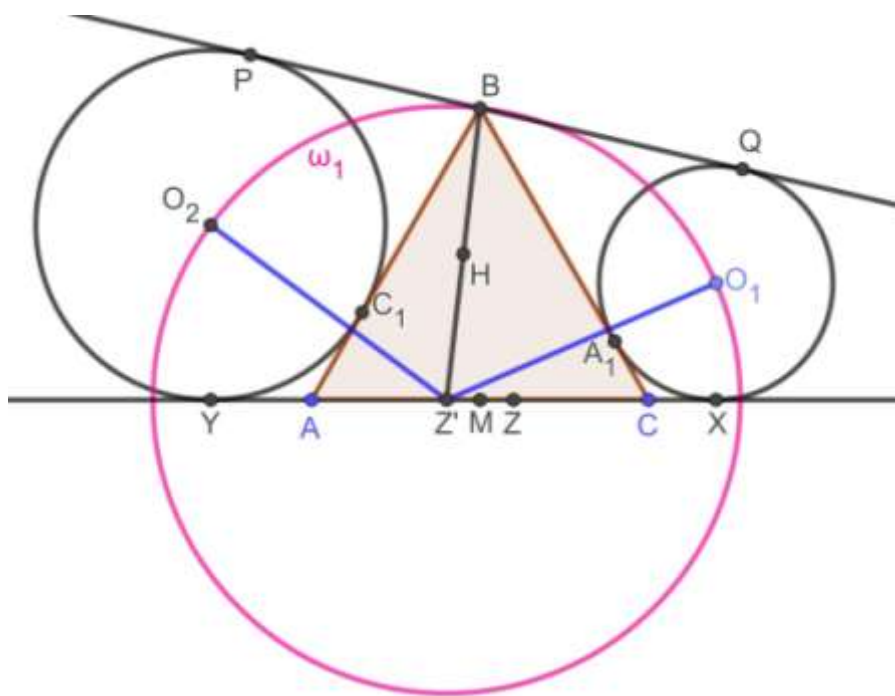


Рисунок 13 – окружность ω_1 , проходящая через точки O_2 , B , O_1

Нами установлено, что $O_2Z' = BO_1 = BO_2 = O_1Z'$, (6)

Рассмотрим $\triangle BMZ'$ и $\triangle BMZ$ – прямоугольные:

BM – общая,

$MZ = MZ'$ (в силу симметрии относительно точки M),

Значит, $\triangle BMZ' = \triangle BMZ$ (по двум катетам) $\Rightarrow BZ = BZ'$ (как соответственные элементы равных треугольников). (7)

Из равенств (5) и (7) $\Rightarrow BO_1 = BO_2 = BZ = BZ'$.

Объединяя равенства (6) и (7), получим $Z'O_2 = Z'B = Z'O_1$.

Таким образом, Z' – равноудалена от O_2 , B , O_1 , следовательно, можно сделать вывод, что Z' – центр ω_1 , а значит O_2 , B , $O_1 \in \omega_1$.

Продлим боковые стороны AB и BC , заметим что они пересекаются с O_1A_1 и O_2C_1 , которые мы проводили ранее. Где лежат их точки пересечения?

Осуществляя исследование, заметим, что точка пересечения BA и O_1A_1 , BC и O_2C_1 , лежит на окружности ω_1 (Рисунок 14).

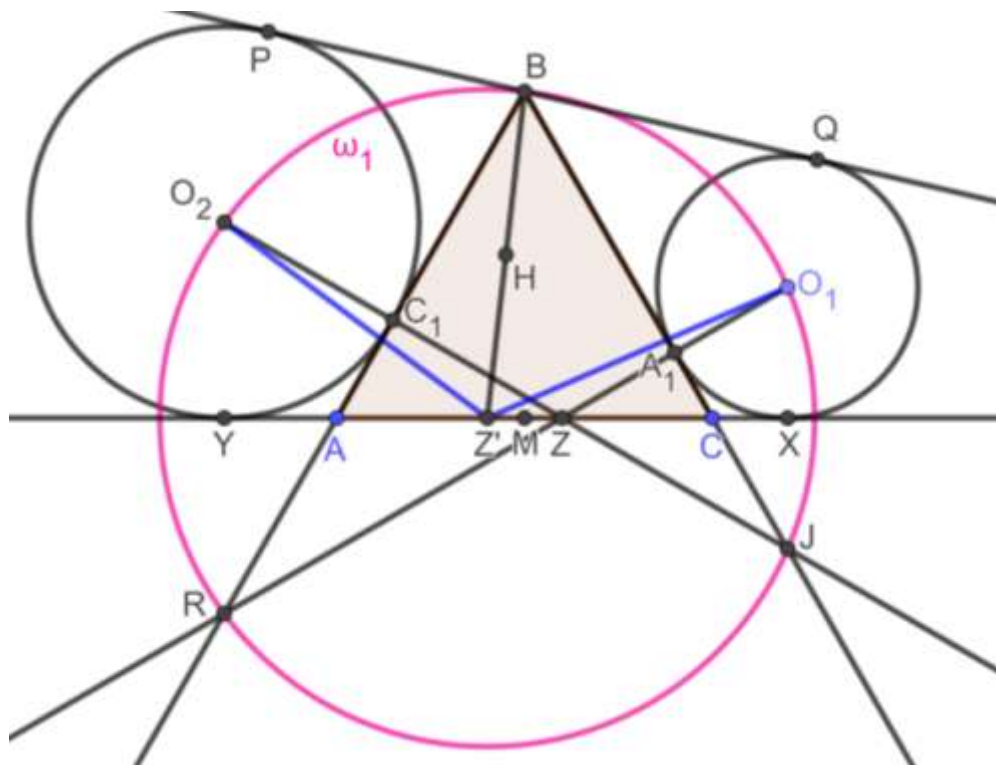


Рисунок 14 – точки пересечения BA и O_1A_1 , BC и O_2C_1

Докажем, что $BA \cap O_1A_1 = R$ и $BC \cap O_2C_1 = J$, где R и $J \in \omega_1$.

$\angle BZ'O_1$ – центральный угол, $\angle BZ'O_1 = 60^\circ$, $\angle BO_1 = 60^\circ$

Рассмотрим $\triangle RBA_1$ – прямоугольный: $\angle A_1 = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle R = 30^\circ$

Значит, $\angle BRA_1$ – вписанный угол в $\omega_1 \Rightarrow R \in \omega_1$,

Рассмотрим $\triangle JBC_1$ – прямоугольный: $\angle C_1 = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle J = 30^\circ$

Значит, $\angle JBC_1$ – вписанный угол в $\omega_1 \Rightarrow J \in \omega_1$.

Таким образом, точки пересечения продолжений боковых сторон равностороннего треугольника и радиусов данных окружностей принадлежат $\omega_1(Z'; Z'B)$.

Продлив стороны равностороннего треугольника, вспоминается вневписанная окружность, а именно, встает вопрос: где лежит центр вневписанной окружности $\triangle ABC$?

Вневписанная окружность треугольника – окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон. Центр вневписанной окружности – точка пересечения биссектрис внешних углов треугольника.

Переход к вневписанной окружности является логичным, так как исходные окружности являются полувписанными, получаем, что из всех вневписанных окружностей для нашей конфигурации возможна только одна, которая касается боковых сторон AB и BC , основания AC .

Проведите биссектрисы внешних углов $\triangle ABC$, с помощью программы сделайте вывод о расположении точки их пересечения.

Проведем биссектрисы $\angle CAR$ и $\angle ACJ$, $AI \cap CI = I$ (Рисунок 15).

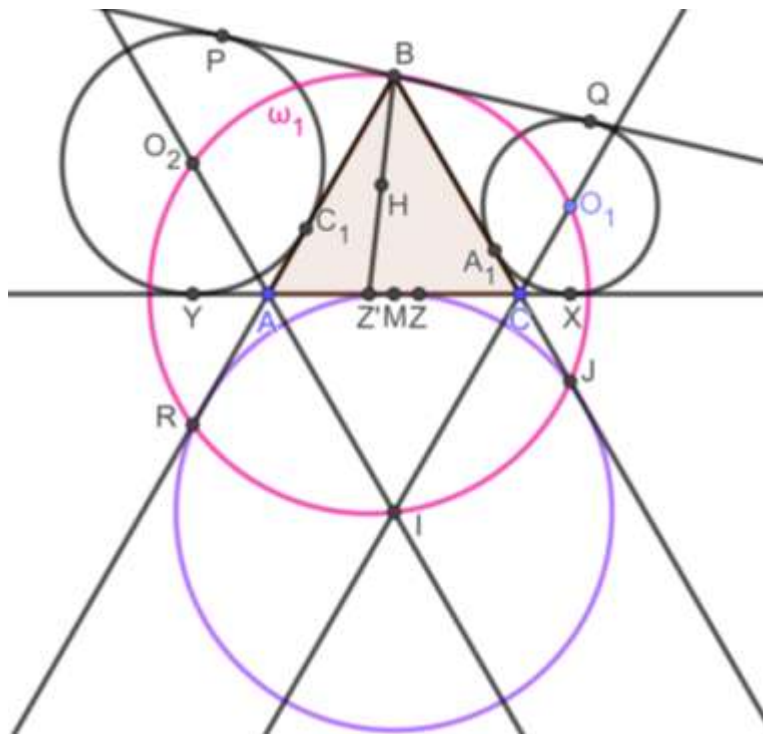


Рисунок 15 – вневписанная окружность $\triangle ABC$

Докажем, что $I \in \omega_1$.

$\angle BAC$ и $\angle CAR$ – смежные, $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle CAR = 120^\circ$,

$\angle CAI = \angle IAR = 60^\circ$ (так как AI – биссектриса).

Аналогично, $\angle ACI = \angle ICJ = 60^\circ$ (так как CI – биссектриса).

Рассмотрим $\triangle CAI$:

$$\angle CAI = \angle ACI = 60^\circ \Rightarrow \angle CIA = 60^\circ,$$

$$\angle O_2 Z' O_1 - \text{центральный угол}, \angle O_2 Z' O_1 = 120^\circ \Rightarrow \angle O_2 B O_1 = 120^\circ$$

Таким образом, $\angle CIA$ – вписанный угол ω_1 , опирающийся на $\angle O_2 B O_1$

Значит, $I \in \omega_1$.

Нам удалось найти такие окружности, на которых «ловятся» некоторые точки полученной конструкции. Существуют ли еще такие окружности? Найдите их самостоятельно.

В результате исследования у нас возникали точки касания окружностей, например, C_1 или A_1 , M и другие. Выберем отрезок и построим на нем окружность как на диаметре, проанализируем как точки принадлежат этой окружности.

Строим ω_2 как на диаметре BZ , центром которой является точка K (Рисунок 16).

Докажем, что $C_1, M, A_1 \in \omega_2$.

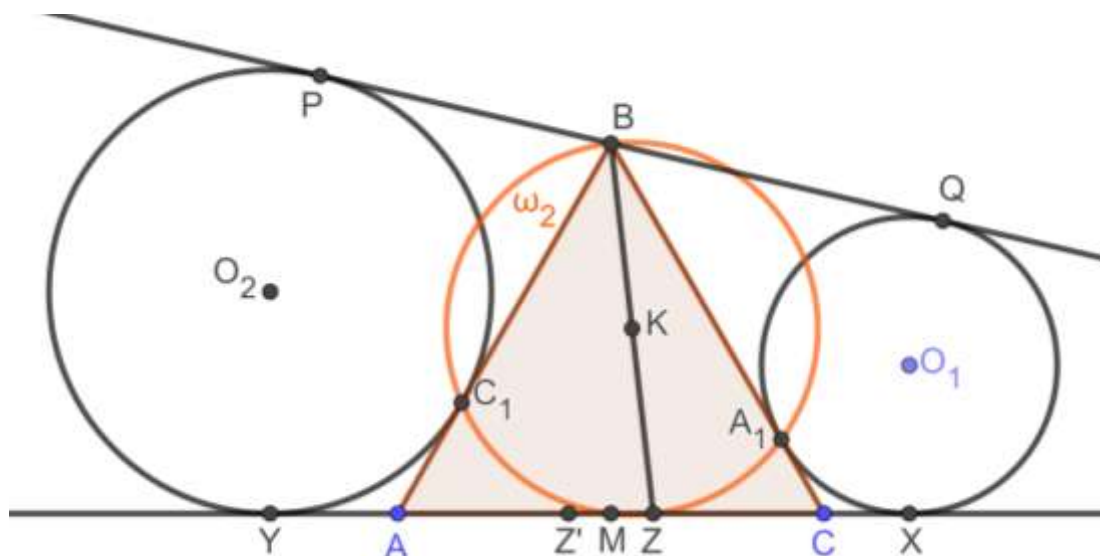


Рисунок 16 – ω_2 , построенная на BZ как на диаметре

$\angle BC_1 Z = 90^\circ$, $\angle BC_1 Z$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BC_1 Z$ – вписанный угол $\Rightarrow C_1 \in \omega_2$,

$\angle BMC = 90^\circ$, $\angle BMC$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BMC$ – вписанный угол $\Rightarrow M \in \omega_2$,

$\angle BA_1Z = 90^\circ$, $\angle BA_1Z$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BA_1Z$ – вписанный угол $\Rightarrow A_1 \in \omega_2$.

Действительно, точки C_1, M, A_1 принадлежат окружности, построенной на BZ как на диаметре.

Что произойдет с окружностью ω_2 , если сместить её центр из точки K в точку M ? Какие точки будут попадать на неё (Рисунок 17)? (Строя окружность с центром в точке M , видим, что она проходит через точки C_1, H, K, A_1)

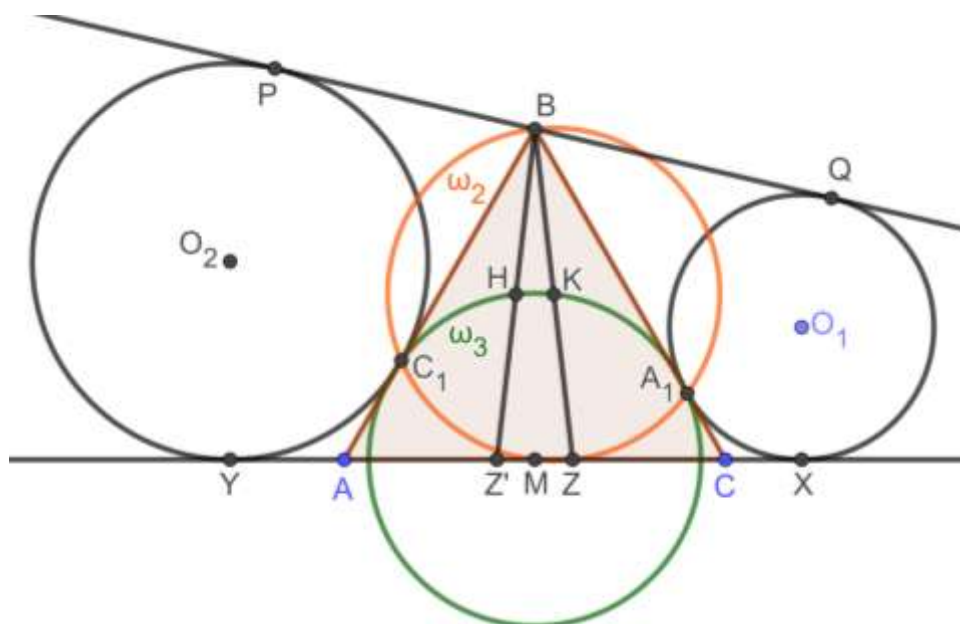


Рисунок 17 – ω_3 , проходящая через C_1, H, K, A_1

Проведем окружность ω_3 через три точки: A_1, K, C_1 .

Докажем, что центром ω_3 является M .

Рассмотрим $\triangle KMA_1$:

$$KM = KA_1 \text{ (как радиусы } \omega_2), \quad (8)$$

$$\angle MBA_1 \text{ – вписанный угол } \omega_2, \angle MBA_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle MZA_1 = 60^\circ,$$

$$\angle MKA_1 \text{ – центральный угол } \omega_2, \angle MKA_1 = 60^\circ, \quad (9)$$

Из утверждений (8) и (9) $\Rightarrow \triangle KMA_1$ – равносторонний, значит, $MK = MA_1$.

Рассмотрим $\triangle KMC_1$:

$$KM = KC_1 \text{ (как радиусы } \omega_2), \quad (10)$$

$$\angle MBC_1 \text{ – вписанный } \omega_2, \angle MBC_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle MC_1 = 60^\circ,$$

$$\angle MKC_1 - \text{центральный угол } \omega_2, \angle MKC_1 = 60^\circ, \quad (11)$$

Из (10) и (11) $\Rightarrow \triangle KMC_1$ – равносторонний, значит, $MK = MC_1$.

Получили, $MK = MA_1 = MC_1 \Rightarrow M$ – равноудалена от $K, A_1, C_1 \Rightarrow M$ – центр ω_3 .

Можно ли утверждать, что $H \in \omega_3$?

H – симметричная точка относительно BM , $MH = MK \Rightarrow H \in \omega_3$.

Какой вывод можно сформулировать про радиусы окружностей ω_2 и ω_3 ?

Заметим, MK – радиус ω_2 , MK – радиус ω_3 , значит, ω_2 и ω_3 – окружности одинаковых радиусов.

Соединим отрезками точки K, C_1, M, A_1 . Получим четырехугольник. Какой вид он имеет (Рисунок 18)?

Докажем, что KC_1MA_1 – ромб.

Нам известно, что $MA_1 = MC_1 = KM$, так как являются радиусами ω_2 ,

$KA_1 = KC_1 = KM$, так как являются радиусами ω_3 ,

Таким образом, $KM = MA_1 = MC_1 = KA_1 = KC_1$. Получили, что в четырехугольнике четыре стороны являются равными, значит, KC_1MA_1 – ромб.

Что можно сказать про середину диагоналей полученного ромба? Будет ли она постоянной точкой?

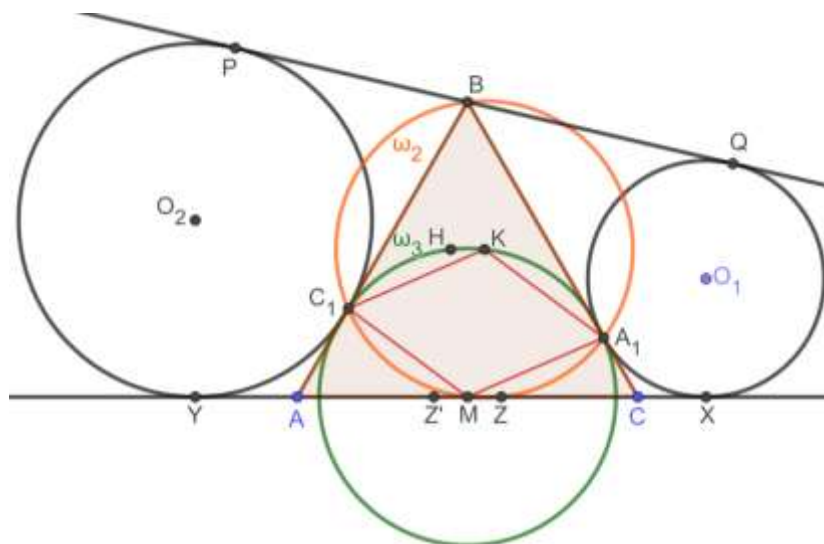


Рисунок 18 – KC_1MA_1 – ромб

Что произойдет с окружностью ω_2 , если её центр будет смещен в точку H (Рисунок 18)? (Окружность с центром в точке H «ловит» на себе B, M, Z')

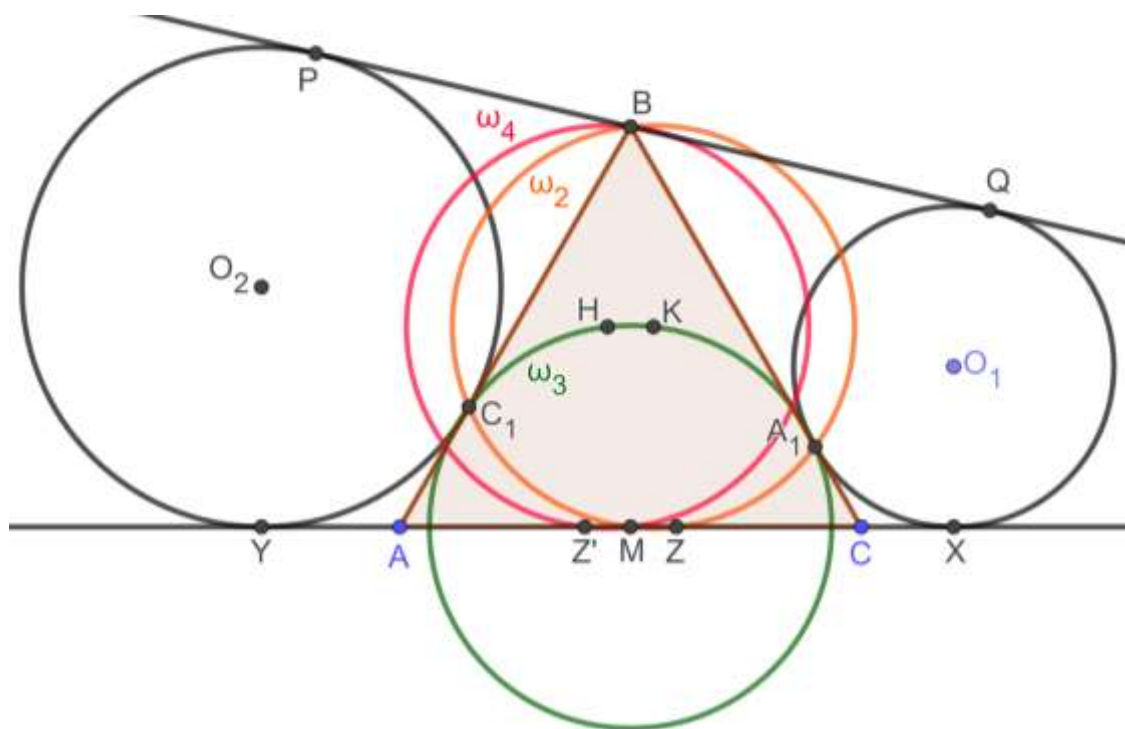


Рисунок 18 – ω_4 , проходящая через B, M, Z'

Таким образом, мы нашли семейство окружностей, изменяя центры которых, нам удалось определить группу точек, попадающих на новую окружность.

Соединим отрезками центры O_1 , O_2 и центр вневписанной окружности I. Является ли окружность ω_3 вписанной в $\triangle O_1 O_2 I$? На первый взгляд может показаться, что это действительно так, но с помощью изменения чертежа, мы сможем легко опровергнуть это предположение.

На данном этапе вспомним, что такое окружность Эйлера. Окружностью Эйлера или окружностью девяти точек называется окружность, проходящая через середины всех трех сторон треугольника. Она получила такое название благодаря следующей теореме: основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах отрезков от ортоцентра до вершин треугольника, лежат на одной окружности.

Ставим вопрос: является ли ω_3 окружностью Эйлера (Рисунок 19)?

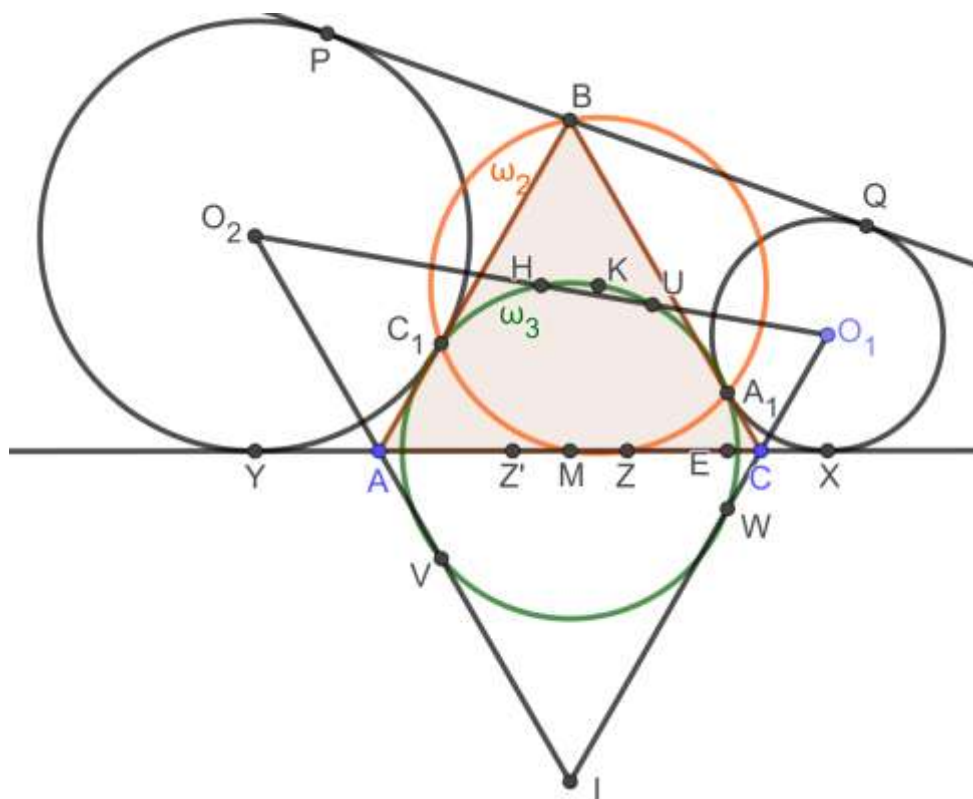


Рисунок 19 – ω_3 – окружность Эйлера

Какие точки лежат на окружности ω_3 ? Чем является точка H для стороны $\triangle O_1O_2I$? (H – середина стороны O_1O_2)

Построим высоты $\triangle O_1O_2I$. Где лежат основания проведенных высот? (Основания высот $\triangle O_1O_2I$ принадлежат окружности ω_3)

Выполняя построения в GeoGebra, заметим, что прямые O_1Z и O_2Z содержат высоты $\triangle O_1O_2I$. Пусть $O_1Z \cap O_2I = V, O_2Z \cap O_1I = W$.

Какая точка является ортоцентром $\triangle O_1O_2I$? Сделайте вывод на основе исследования, проведенного в GeoGebra.

Докажем, что Z – ортоцентр $\triangle O_1O_2I$.

$\angle O_2ZO_1 = \angle VZW = 120^\circ$, так как они вертикальные,

Рассмотрим $\triangle ZCW$:

$\angle ZCW = 60^\circ$, так как CW – биссектриса внешнего угла $\triangle ABC$

$\angle CZW = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

Значит, $\angle ZWC = 90^\circ$.

Аналогично, $\angle ZVA = 90^\circ$.

Таким образом, O_1V и O_2W – высоты $\triangle O_1O_2I$, точка Z его ортоцентр.

O_2W – высота $\triangle O_1O_2I$ (W – основание высоты).

Докажем, что $W \in \omega_3$.

Рассмотрим $\triangle ZA_1C$ и $\triangle ZWC$ – прямоугольные:

ZC – общая сторона,

$$\angle ZCA_1 = \angle ZCW = 60^\circ,$$

$$\angle A_1ZC = \angle WZC = 30^\circ,$$

Значит, $\triangle ZA_1C = \triangle ZWC$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow ZA_1 = ZW$.

Рассмотрим $\triangle ZA_1E$ и $\triangle ZWE$:

ZE – общая,

$ZA_1 = ZW$ (как соответственные элементы равных треугольников $\triangle ZA_1C$ и $\triangle ZWC$),

$$\angle A_1ZE = \angle WZE = 30^\circ,$$

Значит, $\triangle ZA_1E = \triangle ZWE$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow A_1E = EW$.

Рассмотрим $\triangle ZA_1W$ – равнобедренный ($ZA_1 = ZW$):

ZE – медиана, так как $A_1E = EW \Rightarrow ZE$ – высота.

Рассмотрим $\triangle MA_1E$ и $\triangle MWE$ – прямоугольные:

ME – общая,

$A_1E = EW$ (как соответственные элементы равных треугольников $\triangle ZA_1E$ и $\triangle ZWE$),

Значит, $\triangle MA_1E = \triangle MWE$ (по двум катетам) $\Rightarrow MA_1 = MW$.

Таким образом, $W \in \omega_3$.

Аналогично, $\triangle MC_1G = \triangle MVG \Rightarrow MC_1 = MV$.

Таким образом, $V \in \omega_3$, где V – основание высоты $\triangle O_1O_2I$.

U – основание высоты $\triangle O_1O_2I$, поэтому $\angle VUW = 180^\circ - 2\angle O_1IO_2$.

В $\triangle O_1O_2I$ два угла равны 60° , делаем вывод, что $\angle O_1IO_2 = 60^\circ$,

Значит, $\angle VUW = 60^\circ$,

$\angle VMW$ – центральный угол, $\angle VMW = 120^\circ$,

Соответственно можем сделать вывод, что $U \in \omega_3$.

Таким образом, мы доказали, что основания высот $\triangle O_1O_2I$ принадлежат окружности ω_3 , что означает: ω_3 – окружность Эйлера.

Любая окружность определяется тремя точками. Можно ли доказать, что ω_3 – окружность Эйлера, если использовать только две точки, которые являются основаниями высот и одну точку, являющуюся серединой стороны? Данный вопрос остается открытым, предоставляет поле для дальнейшего исследования.

Мы рассматривали конструкцию, в которой были проведены внешние касательные. Проведем внутренние касательные и продолжим исследование. Как построить внутренние касательные к двум данным окружностям ω и ω' ?

Проведем луч q с началом в точке O_2 , отложим на нем последовательно отрезки $O_2G = R$, $GT = r$. Соединим T с центром O_1 , проведем прямую через точку G параллельную TO_1 , прямая пересекает O_1O_2 в точке S . Построим окружность ω_4 как на диаметре O_2S . $\omega_4 \cap \omega' = K$ и $\omega_4 \cap \omega' = L$. Проведем прямую t , проходящую через точки K , S и прямую k , проходящую через точки L , S . Полученные прямые t , k являются внутренними касательными к окружностям ω и ω' (Рисунок 20).

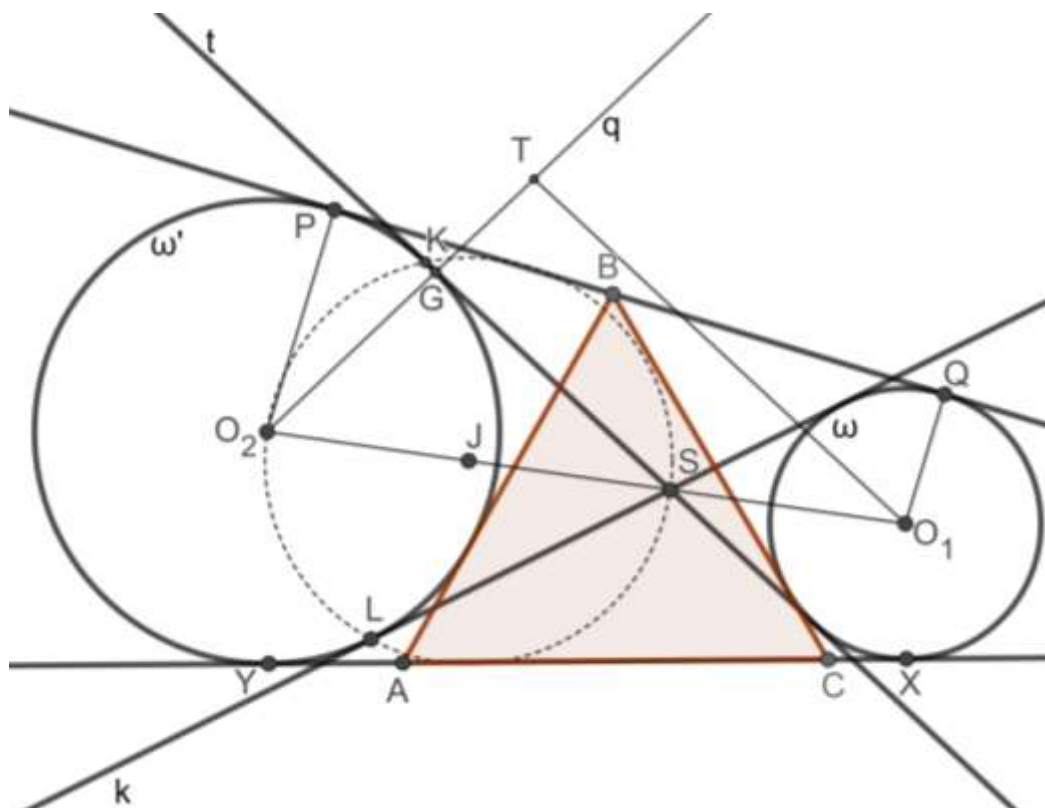


Рисунок 20 – построение общих внутренних касательных к ω и ω'

Обозначим точки пересечения внутренних касательных с внешней касательной: $PQ \cap SK = K_1, PQ \cap LS = L_1$.

Ранее нами было исследовано расположение точки Н – середины отрезка O_1O_2 , соединим её с точками K_1 и L_1 . Какой вывод можно сформулировать относительно величин полученных отрезков?

Докажем, что $NK_1 = NL_1$ (Рисунок 21).

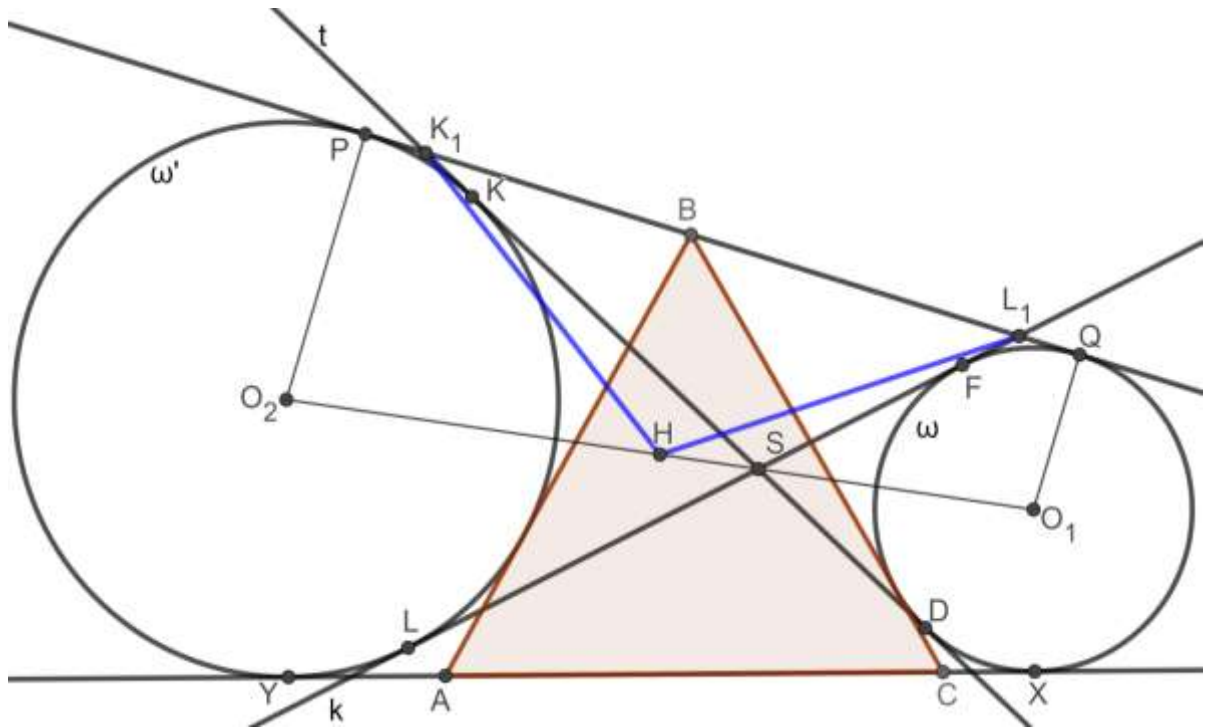


Рисунок 21– равенство NK_1 и NL_1

$K_1Q = K_1D$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки K_1 к ω),

$K_1P = K_1K$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки K_1 к ω'),

$L_1P = L_1L$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки L_1 к ω'),

$L_1Q = L_1F$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки L_1 к ω),

$KD = LF$ (как отрезки внутренних касательных k, t). (12)

$O_1Q \perp PQ, O_2P \perp PQ$ (как радиусы, проведенные в точки касания),

Таким образом, O_2PQO_1 – прямоугольная трапеция.

Опустим перпендикуляр на PQ из точки Н, это есть средняя линия, являющаяся для отрезка PQ серединным перпендикуляром. Если докажем, что

$L_1Q = K_1P$, то проведенный перпендикуляр будет является серединным перпендикуляром для отрезка K_1L_1 .

Отрезок L_1Q представляет разность двух отрезков:

$$L_1Q = K_1Q - K_1L_1,$$

заменяя в полученном равенстве отрезки на равные им из (12).

Получим:

$$\begin{aligned} L_1Q &= K_1Q - K_1L_1 = K_1D - K_1L_1 = K_1K + KD - K_1L_1 = K_1P + \\ &+ LF - K_1L_1 = K_1P + LL_1 - L_1F - K_1L_1 = K_1P + L_1P - L_1F - K_1L_1K_1P + \\ &L_1P - K_1L_1 - L_1Q = K_1P + K_1P - L_1Q \end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_1Q = K_1P + K_1P - L_1Q,$$

приведя подобные слагаемые, получим конечное равенство:

$$L_1Q = K_1P.$$

Следовательно, можем сделать вывод, что $NK_1 = NL_1$.

По построению S принадлежит отрезку O_1O_2 . Если точка принадлежит отрезку, то она делит его в некотором отношении. В каком отношении точка S делит O_1O_2 ? Связано ли такое отношение с радиусами исходных окружностей?

$$\text{Докажем, что } \frac{O_2S}{O_1S} = \frac{R}{r}.$$

Рассмотрим два треугольника: $\triangle O_1SD$ и $\triangle O_2SK$, они являются прямоугольными, так как KD и LF – внутренние касательные к исходным окружностям, то $\angle O_1DS = \angle O_2KS = 90^\circ$,

$$\angle O_1SD = \angle O_2SK, \text{ так как они вертикальные,}$$

значит, $\triangle O_1SD \sim \triangle O_2SK$ (по двум углам).

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{O_2S}{O_1S} = \frac{O_2K}{O_1D};$$

Заметим,

$$\frac{O_2K}{O_1D} = \frac{R}{r};$$

Получим,

$$\frac{O_2S}{O_1S} = \frac{R}{r}.$$

Таким образом, точка пересечения внутренних касательных разделяет отрезок, соединяющий O_1 и O_2 , в таком же отношении, в каком радиусы окружностей ω и ω' относятся друг к другу.

Предложенные задания для учебного исследования не являются конечным набором задач, которые помогают анализировать конструкцию «качели на правильном треугольнике», а демонстрируют лишь возможность отыскания различных фактов и закономерностей. Исследование не ограничивается только ими, а предполагает дальнейшие изыскания.

На сегодняшний день существует большое количество заданий разного уровня сложности, которые предполагают различные способы и идеи решения. Можно выделить совокупность задач, где необходимо применить знания о радикальной оси и степени точки. В рассматриваемой нами конструкции также есть возможность использования данной теории для исследования.

Прежде чем организовывать с обучающимися исследовательскую деятельность по расположению радикальной оси, необходимо провести беседу, в ходе которой обсудить вопросы, связанные с определением радикальной оси и степенью точки.

Что называется степенью точки относительно окружности? Степень точки – это число равное $d^2 - R^2$, где d – расстояние от точки до центра окружности, R – радиус данной окружности. Отметим, что степень точки может быть положительной, если точки расположены вне окружности, отрицательной, если точки расположены внутри окружности или равными нулю, если точки лежат на окружности.

Построим середины внешних и внутренних касательных:

U_1 – середина PQ , W_1 – середина KD , Z_1 – середина LF , V_1 – середина AC .

Как расположены относительно друг друга построенные точки? Выдвиньте гипотезу. (U_1, W_1, Z_1, V_1 лежат на одной прямой).

Предложив построить середины касательных, мы даём задание на построение точек, имеющих одинаковую степень. Поэтому исследовательскую задачу можно сформулировать следующим образом: найти ГМТ одинаковой степени точек ω и ω' .

Докажем, что U_1, W_1, Z_1, V_1 лежат на одной прямой (Рисунок 22). Такая прямая имеет название – радикальная ось.

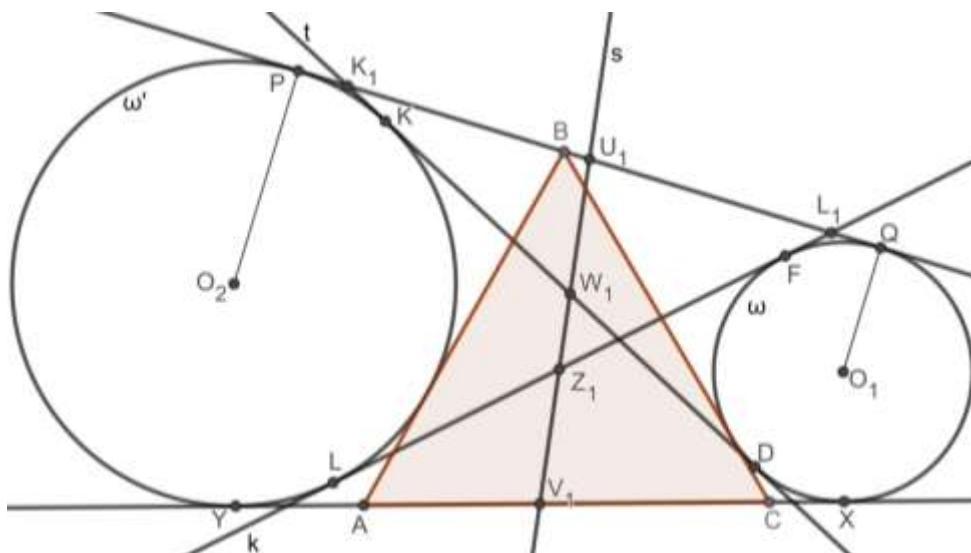


Рисунок 22 – $U_1, W_1, Z_1, V_1 \in s$

Обозначим точки пересечения внутренних касательных с YX точками K_2, L_2 соответственно.

Рассмотрим четырехугольник $K_1K_2L_2L_1$ (Рисунок 23). Как он имеет вид? (Трапеция, где $K_1K_2 \parallel L_1L_2$).

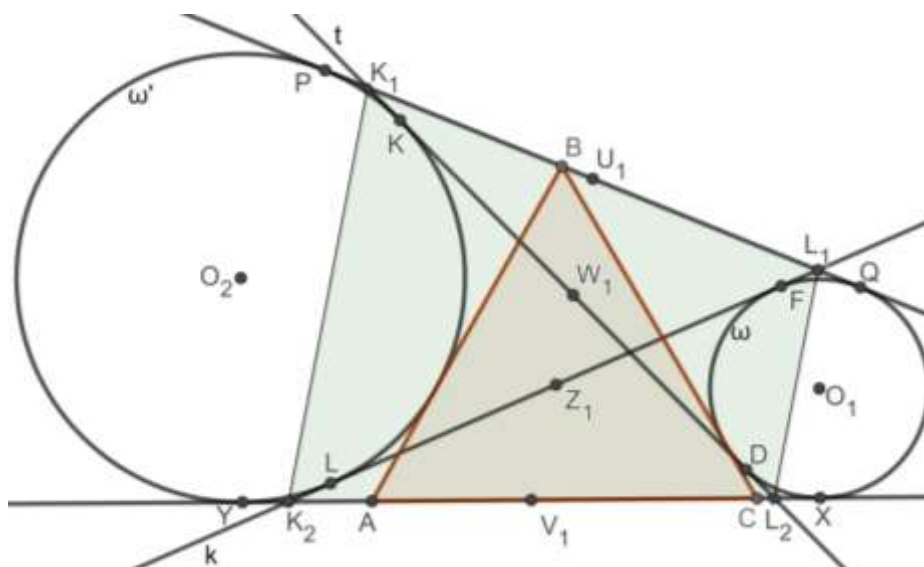


Рисунок 23 – трапеция $K_1K_2L_2L_1$

По построению нам известно, что U_1 – середина PQ .

Ранее было доказано равенство отрезков L_1Q и K_1P .

Таким образом, можем сделать вывод, что U_1 – середина K_1L_1 .

Аналогично, V_1 – середина K_2L_2 , W_1 – середина K_1L_2 , Z_1 – середина K_2L_1 .

Получили, что точки, являющиеся серединами отрезков, совпадают с серединами боковых сторон трапеции и её диагоналей, а значит лежат на одной прямой, то есть $U_1, W_1, Z_1, V_1 \in s$.

Как расположена прямая s по отношению к линии центров? (*Прямая s перпендикулярна линии центров*). Как можно это доказать?

Докажем, $s \perp O_1O_2$.

Доказательство легко провести, используя симметрию относительно линии центров. Имеем точку U_1 – середину PQ , значит существует симметричная её точка, а именно точка V_1 , следовательно прямая, определяемая этими точками будет перпендикулярна линии центров O_1O_2 .

Меняя радиусы исходных окружностей можно обратить внимание, что точки пересечения касательных двигаются по определенной траектории. Проанализируем движение точки S – точки пересечения внутренних касательных с помощью встроенной в GeoGebra функции «Оставлять след» (Рисунок 24).

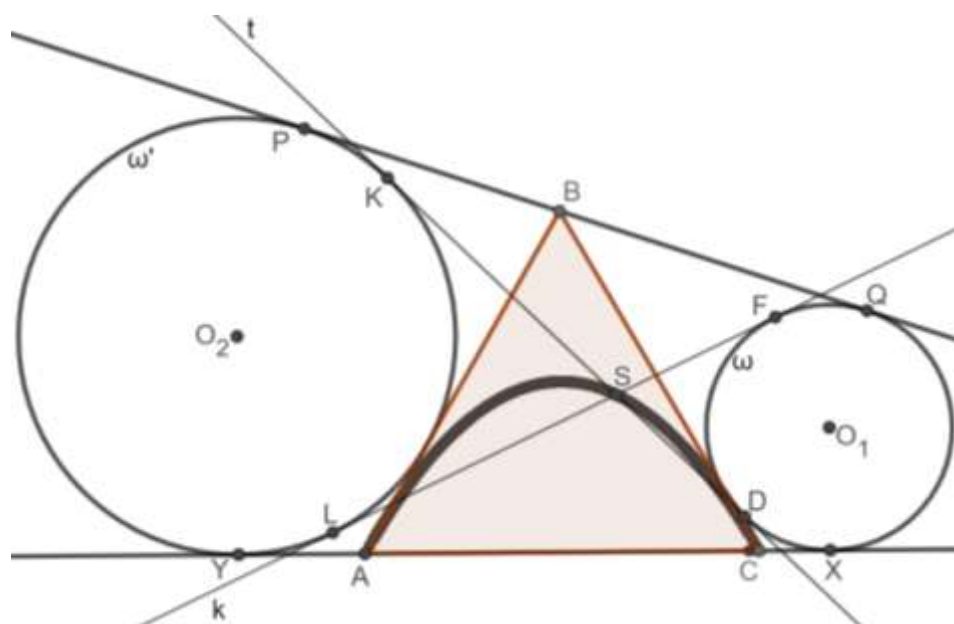


Рисунок 24 – траектория движение точки S

Замечаем, что точка S движется по кривой второго порядка, а именно параболе. Что же такое парабола? (Геометрическое место точек на плоскости, которые равноудалены от данной прямой, называемой директрисой параболы и данной точки, которое называется фокусом параболы).

Следующий вопрос, который необходимо решить относится к нахождению фокуса и директрисы параболы. Где расположен фокус? (Фокус параболы расположен в центре треугольника). Где находится директриса параболы (Рисунок 25)?

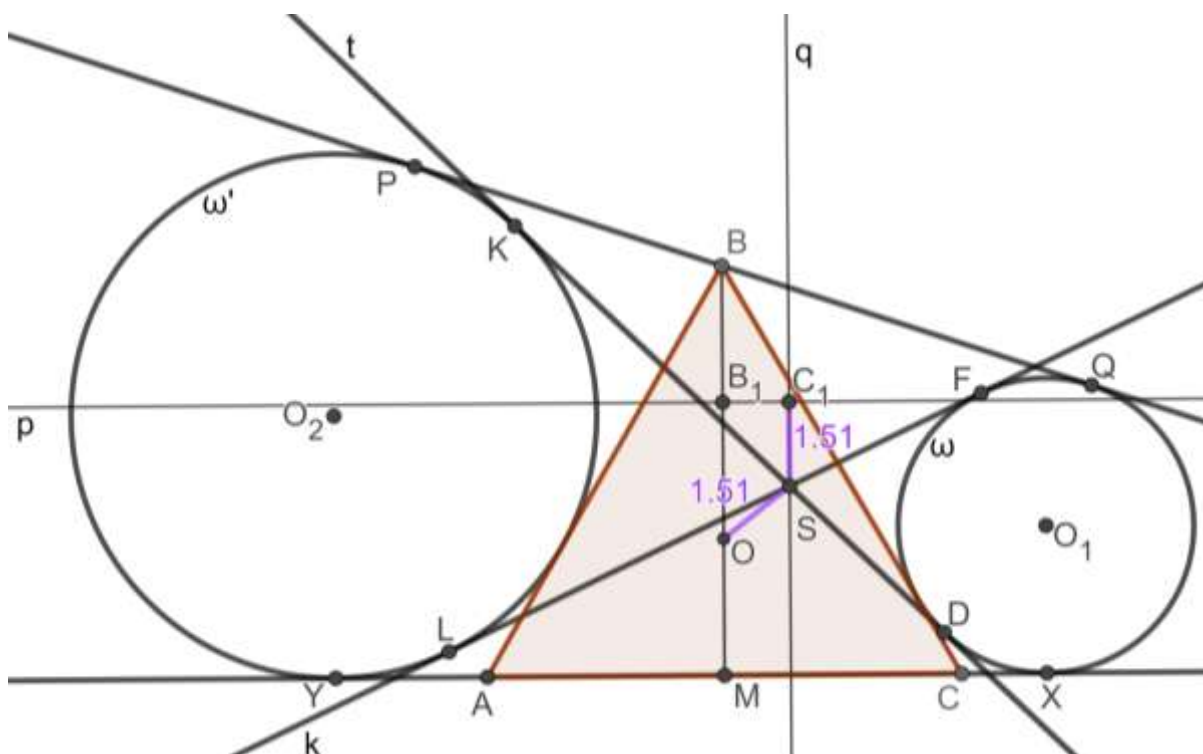


Рисунок 25 – нахождение фокуса и директрисы параболы

Выдвинуть гипотезу о нахождении фокуса и директрисы параболы достаточно сложно, поэтому учителю необходимо самостоятельно подвести к такому предположению. Построим центр $\triangle ABC$, точка O является таковой. Построим B_1 – середина отрезка BO , проведем через полученную точку перпендикуляр p к BO . Из точки S опустим перпендикуляр q на p , таким образом две прямые пересеклись в одной точке: $p \cap q = C_1$. С помощью GeoGebra можем измерить длины отрезков SC_1 и SO , обнаружить, что длины этих отрезков являются равными величинами. Убедимся в этом, меняя радиусы окружностей.

Таким образом, получили, что точка S двигается по параболе, фокус которой находится в точке O , являющейся центром треугольника, а директрисой является прямая p . Также средствами программы можно сформулировать предположение о нахождении вершины параболы. Где она расположена? (*Вершина параболы принадлежит средней линии треугольника*).

Как аналитически доказать, что кривая, по которой двигается точка S , является параболой? Данный вопрос остается открытым и представляет возможность для дальнейшего проведения исследования.

Проведем исследование точек, которые являются серединами касательных. По каким кривым двигаются они?

В процессе проведенного исследования возникают факты, требующие доказательства и опирающиеся на предыдущие утверждения. Особо ценным является формирование непрерывной цепочки исследовательских фактов, то есть каждая исследовательская задача опирается на ранее доказанный факт. Именно это позволяет систематизировать все свойства и признаки исследуемой конструкции и наметить пути для дальнейшей деятельности.

2.3 Рабочий лист как средство организации исследовательской деятельности обучающихся в кружковой работе

В современном образовательном процессе существует множество средств, которые используются во время кружковой работы, наиболее эффективным является рабочий лист, который представляет собой одноразовое дидактическое пособие в печатном или электронном виде, имеет определенно созданную форму.

Рабочие листы могут иметь различные формы:

- 1) Рабочий лист с пропусками.
- 2) Опорный конспект, который облегчает работу с большим объемом информации.

3) Тренировочный рабочий лист, в котором отсутствует теоретический материал, а все задания имеют практический характер.

4) Исследовательский рабочий лист, задания в котором направлены на решение научной проблемы.

5) Рабочий лист рефлексии, который необходим для анализа деятельности обучающегося.

Использование рабочего листа способствует вовлечению школьников в работу и самостоятельную исследовательскую деятельность. Ученики работают в определенной последовательности, постоянно ставя перед собой цели и достигая их. Такое средство можно использовать как для индивидуальной, так и для групповой работы. Основной блок, который входит в рабочий лист – задачи разноуровневого характера, идущие на увеличение уровня сложности.

В рамках реализации исследовательской деятельности посредством решения задачи «качели на равностороннем треугольнике» также целесообразно использовать рабочий лист с заданиями.

Рабочий лист

1. Постройте равносторонний треугольник, жестко зафиксировав его.
2. Постройте две окружности, чтобы они внешним образом касались боковых сторон равностороннего треугольника, продолжения основания и прямой, проходящей через вершину треугольника.
3. Проанализируйте полученную конструкцию, ответьте на вопрос, где лежит точка пересечения двух радиусов?
4. Найдите ГМТ середины линии центров двух окружностей.
5. Найдите семейство окружностей, изменяя центры которых определяются группы точек, попадающие на новую окружность.
6. Существует ли такая группа точек, через которую можно провести окружность Эйлера?
7. Постройте внутренние касательные к окружности.

8. Найдите отношение отрезков, концами которых являются точки пересечения внешних и внутренних касательных и середины линии центров.

9. Как расположены середины внешних и внутренних касательных относительно друг друга?

10. По какой траектории двигается точка пересечения внутренних касательных?

Данный рабочий лист составлен для самостоятельного проведения исследования, представляет собой совокупность основных заданий и вопрос по исследуемой задаче. Все задания расположены по увеличению уровня сложности. Каждое следующее задание является продолжением предыдущего, образуя последовательную цепочку.

Данный рабочий лист может корректироваться в зависимости от уровня подготовки обучающихся, может добавляться краткая теоретическая информация по теме или уточняющие вопросы по каждому пункту.

Заключение

Исследовательская деятельность – важный процесс, который решает многие образовательные задачи, так как именно данный вид деятельности способствует развитию абстрактного мышления, логического мышления, воспитанию самостоятельности в решении задач.

При организации исследовательской деятельности важно опираться на интересы обучающихся, чтобы они смогли в большей мере раскрыть свой потенциал и продемонстрировать свои способности. При систематическом использовании исследовательских задач развивается интеллектуальный потенциал личности, так как обучающиеся самостоятельно открывают знания, путем собственной творческой деятельности, что способствует повышению интереса к процессу обучения. Такие знания являются наиболее прочными и действенными. Разработанная в рамках исследования система задач может быть использована учителем математики для организации учебного исследования на кружковых занятиях.

В ходе проделанной работы были получены следующие результаты:

1. Изучены и проанализированы научная и учебно-методическая литература, связанная с организацией исследовательской деятельности во время кружковой работы;
2. Изучена геометрическая конструкция «качели на равностороннем треугольнике»;
3. Доказаны свойства, которыми обладает геометрическая конструкция «качели на равностороннем треугольнике»;
4. Разработаны методические рекомендации по организации исследовательской деятельности на примере работы с задачей;
5. Разработан рабочий лист для работы в кружке.

Полученные результаты свидетельствуют о достижении поставленной цели посредством решения сформулированных во введении задач.

Список литературы

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия. 7 класс : учеб. пособие для образовательных организаций : углуб. уровень. СПб. : СМИО Пресс, 2022. 252 с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия. 7 – 9 кл : учеб. для общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 2017. 384 с.
3. Балк М. Б. Математика после уроков : пособие для учителей. М. : Просвещение, 2003. 462 с.
4. Гордин Р. К. Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровень : учеб. пособие. М. : МЦНМО, 2015. 96 с.
5. Далингер В. А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике : учебное пособие. Омск : Изд-во ОмГПУ, 2005. 456 с.
6. Интернет-проект «Задачи». URL : <https://problems.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 30.05.2023).
7. Клещева И. В. Учебно-исследовательская деятельность учащихся при изучении математики как средство достижения новых образовательных результатов // Мир науки, культуры, образования. 2012. №4. С. 27 – 37.
8. Математика в задачах: сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. / А.А. Заславский [и др.] ; под ред. А.А. Заславского. М. : МЦНМО, 2012. 488 с.
9. Обухова А. С. Исследовательская деятельность учащихся : научно-методический сборник. М. : Исследователь, 2007. 495 с.
10. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразовательных учреждений. 6-е изд. М. : Просвещение, 2018. 240 с.
11. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия : учеб. пособие. М. : Прометей, 2018. 206 с.

12. Тищенко А. А. Клубовая работа по математике как форма подготовки к олимпиадам // Дидактика математики: проблемы и исследования. Международный сборник научных работ. 2023. № 1. С. 77 – 83.

13. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г.]. М. : Просвещение, 2021. 62 с.

14. Хуторской А. В. Эвристическое обучение : научно-методический сборник. М. : Эйдос, 2011. 320 с.

15. Швецов Д. В. Важная лемма // Квант. 2012. № 5 – 6. С. 55 – 59.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
20 » 09 2022 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Суриной Ксении Евгеньевны

Тема работы «Организация исследовательской деятельности обучающихся на кружковых занятиях по геометрии»

Утверждена приказом по Университету от «28.09» 2022 г. № 800/0

Срок сдачи студентом законченной работы «04» 05 2023 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь – ноябрь 2022	<i>выполнено</i>
2.	Сравнение форм организации исследовательской деятельности на кружковых занятиях по геометрии	Декабрь 2022	<i>выполнено</i>
3.	Исследование геометрической конструкции «качели на равностороннем треугольнике».	Январь – февраль 2023	<i>выполнено</i>
4.	Оформление результатов исследования и доказательств полученных фактов геометрической конструкции.	Март – апрель 2023	<i>выполнено</i>
5.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2023	<i>выполнено</i>
6.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2023	<i>выполнено</i>

Дата выдачи задания

«20» 09 2022 г.

Руководитель


(подпись)

Сорокина М. В.
(Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению


(подпись)

Сурина К. Е.
(Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Суриной Ксении Евгеньевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Сурина Ксения Евгеньевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Организация исследовательской деятельности обучающихся на кружковых занятиях по геометрии», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования — программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись

15.05.2023

дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 15.05.2023
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР


подпись

М. В. Сорокина

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Организация исследовательской деятельности обучающихся на кружковых занятиях по геометрии» студентки 4 курса Суриной Ксении Евгеньевны направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля «Математика»
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Сурина Ксения Евгеньевна
Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://www.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 66
начало загрузки: 15.05.2023 10:16:36
длительность загрузки: 00:00:22
имя исходного файла: ВКР.docx
название документа: ВКР
Размер текста: 65 KB
Тип документа: Дипломная работа
Символов в тексте: 66232
Слов в тексте: 8316
число предложений: 563

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

начало проверки: 15.05.2023 10:17:00
длительность проверки: 00:01:42
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: титульный лист с. 1; содержание с. 2; основная часть с. 3-53; библиография с. 54-57
Модуль поиска: ИПС Адвент, Библиография, Сводная коллекция ЯСЦ Интернет, Поиск, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, аналитика, СПС ГАРАНТ, нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации, МББ, Коллекция МББ, Переработки по eLIBRARY.RU, Переработки по Интернету, Переработки по Интернету (En), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПЛУ", СМИ России и СНГ, Шрифтовые образы, кольцо Visio, Издательство Wiley, Переводные заимствования

совпадения
5,12%

самодетектирование
0%

цитирование
5,22%

оригинальность
88,84%

15.05.2023

ДД.ММ.ГГГГ

подпись

Сорокина М. В.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Организация исследовательской деятельности обучающихся на
кружковых занятиях по геометрии»
студентки Суриной Ксении Евгеньевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 19ФПМ1

В настоящее время в образовании уделяется внимание развитию способностей обучающихся к исследовательской деятельности посредством приобщения к ней. Активная деятельность учителя при организации исследовательской деятельности школьников имеет важное значение в связи с реализацией федерального государственного образовательного стандарта, в котором отмечается необходимость «формирования компетенций обучающихся в области использования исследовательской деятельности»

Выпускная квалификационная работа Суриной К.Е. посвящена изучению возможностей организации исследовательской деятельности школьников в рамках кружковых занятий по геометрии. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Первая глава работы носит теоретический характер. В ней рассмотрены понятие и отличительные особенности исследовательской деятельности, структурные компоненты исследовательской деятельности обучающихся, основные функции учебного исследования. Также дается характеристика такого вида внеурочной деятельности, как математический кружок.

В следующей главе рассматривается конкретный пример организации исследовательской деятельности школьников с использованием программы GeoGebra. На конкретной геометрической конструкции представлен план исследования и доказательство открытых фактов. Также составлен рабочий лист для серии кружковых занятий.

Работа Суриной К.Е. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации научно-исследовательской деятельности и подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина