

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под
знаком модуля»**

Студент

Арбузова 04.05.23
(подпись, дата)

Арбузова Марина Сергеевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитин 04.05.23
(подпись, дата)

Никитин Н.Д.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 15.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.23 № 12)

Заведующий кафедрой

Паньженский 24.05.23
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 22.06.23 № 1)

Секретарь ГЭК

Журавлева 22.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Оглавление

Введение	3
Глава I. Теоретические основы обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля	6
1.1 Подходы к определению модуля, его свойства	6
1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.....	9
Глава II. Методические особенности обучения решению уравнений и неравенства, содержащих неизвестную под знаком модуля	25
2.1 Методические особенности обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.....	25
при подготовке к ЕГЭ	25
2.2 Методический блок по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля функционально-графическим способом, с использованием информационно-коммуникационных технологий.....	34
Заключение.....	48
Список литературы	50
Приложение.....	53

Введение

В методике обучения математике существует большое количество методических рекомендаций по составлению и решению уравнений и неравенств. Однако, что касается решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, то данному разделу в классно-урочной системе уделяется малое количество времени.

Развитие навыков решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, является эффективным способом повторения и закрепления навыков решения других видов уравнений и неравенств и способов их решения: линейных, квадратных, дробно-рациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических, а также системы уравнений и неравенств.

Понятие модуля (абсолютной величины) имеет широкое применение не только в различных разделах школьного курса математики, но и в заданиях олимпиадного характера, высшей математики, физики.

Стоит отметить, что рассмотрение данной темы необходимо в связи с тем, что задания, содержащие знак модуля, часто встречаются в материалах ЕГЭ разного уровня. Как правило, обучающиеся затрудняются при решении подобных заданий, поэтому перед педагогом ставится задача организации и построения методики обучения решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, на высоком уровне [11, 16, 23].

Возникает проблема методического характера, как организовать процесс обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, чтобы данный материал был понятен обучающимся, имел наглядное представление, тем самым обеспечить школьников широким набором знаний, умений и навыков по данному разделу.

Все вышесказанное обуславливает актуальность темы выпускной квалификационной работы.

Объектом исследования является процесс обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля в основной школе.

Предметом исследования является решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, как средство формирования компетенции и результатом образовательной деятельности школьников.

Целью выпускной квалификационной работы является изучение методических особенностей обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля; поиск рациональных методических решений, с помощью которых процесс обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля был эффективным; разработка методических рекомендации по обучению решений уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, с использованием современных технологий обучения.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить подходы к определению знака модуля в школьном курсе математики.
2. Изучить методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.
3. Провести сравнительный анализ школьных учебников по теме решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.
4. Проанализировать эффективность применения современных технологий обучения при обучении решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.
5. Разработать методический блок по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля традиционным способом, а также с использованием современных технологий обучения.

Методы исследования: изучение научно-методической литературы, анализ учебных материалов, изучение опыта работы педагогов современной школы, моделирование и структуризация задачного материала.

Глава I. Теоретические основы обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля

1.1 Подходы к определению модуля, его свойства

Модулем или абсолютной величиной действительного числа a называется само это число, если оно неотрицательно, или противоположное ему число, если оно отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Геометрически модуль числа можно интерпретировать как расстояние от начала координат до точки, соответствующей числу a . Геометрическое представление модуля числа можно представить в виде следующей графической интерпретации, которая представлена на рисунке 1.

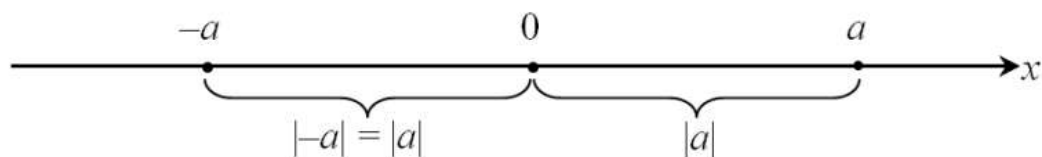


Рисунок 1 – Геометрическое представление модуля числа

Данное определение согласуется с определением модуля числа, данного выше. Действительно, расстояние от начала отсчета до точки, которой соответствует положительное число, равно этому числу. Нулю соответствует начало отсчета, поэтому расстояние от начала отсчета до точки с координатой 0 равно нулю. Расстояние от начала отсчета до точки с отрицательной координатой равно числу, противоположному координате данной точки, так как равно расстоянию от начала координат до точки, координатой которой является противоположное число [8].

Например: $|10| = 10$ и $|-10| = 10$, так как расстояние от точек с координатами 10 и -10 до начала отсчета равно 10.

Если задание содержит сложную комбинацию, в которой присутствует знак модуля под знаком модуля, то подобные выражения требуют некоторых преобразований.

Для преобразования выражения, в котором под знаком модуля находятся выражения, также содержащие модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем раскрыть оставшиеся модули.

Например, раскрыть знак модуля следующего выражения: $\frac{||x|-1|}{x^2-1}$.

Для начала определим область допустимых значений данного выражения, имеем: $x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 1$.

Раскрывая внутренний модуль по определению, получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x-1| \end{cases}, \begin{cases} x < 0 \\ |-x-1| \end{cases} \frac{1}{x^2-1}.$$

Преобразовывая первую систему, то есть раскрывая модуль по определению, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x+1} \end{cases}.$$

Преобразовывая вторую систему, то есть раскрывая модуль по определению, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -\frac{1}{x-1} \end{cases}, \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x-1} \end{cases}.$$

С учетом области допустимых значений имеем: $\frac{1}{x+1}$ при $x > 1$, $-\frac{1}{x+1}$ при $0 \leq x < 1$, $-\frac{1}{x-1}$ при $x < -1$, $\frac{1}{x-1}$ при $-1 < x < 0$.

Для уверенного преобразования уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, рассмотрим подробно свойства модуля. Свойства модуля представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Свойства модуля

1.	Модуль числа неотрицательное число	есть	$ a \geq 0$
2.	Модули противоположных чисел равны		$ -a = a $

3.	Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа (справедливо для любой четной степени)	$ a ^2 = a^2$ $ a ^{2n} = a^{2n}$
4.	Абсолютная величина любого действительного числа a равна арифметическому квадратному корню из a (справедливо для корня любой четной степени)	$ a = \sqrt{a^2}$ $ a = \sqrt[2n]{a^{2n}}$
5.	Модуль произведения чисел равен произведению модулей этих чисел	$ a \cdot b = a \cdot b $
6.	Модуль частного чисел равен отношению модулей этих чисел	$\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }, b \neq 0$
7.	Постоянный положительный множитель можно вынести за знак модуля	$ m \cdot a = m \cdot a , m > 0$
8.	Модуль суммы (разности) двух чисел не превосходит сумму модулей этих чисел	$ a \pm b \leq a + b $
9.	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен разности их модулей	$ a \pm b \geq a - b $
10.	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен модулю разности их модулей	$ a \pm b \geq a - b $
11.	Разность модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений, когда эта сумма равна нулю или, когда уменьшаемое имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму, а вычитаемое имеет противоположный знак	$ a - b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$ $ a - b = b - a \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a - b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a - b = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$

12	Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму	$ a + b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$ $ a + b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a + b = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a + b = -a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$
13	Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак	$ a + b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow ab \geq 0$ $ a + b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0, \\ a \leq 0, \\ b \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow ab \leq 0$

1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля

В школьном курсе математики приводятся конкретизированные виды уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля. Разберем подробно на примерах каждый их них [2, 9, 10, 19, 20, 21, 22].

В соответствии с выделенными видами уравнений и неравенств, можно выделить следующую классификацию методов решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

1. Простейшие уравнения и неравенства – в данном случае метод решения подобных уравнений и неравенств основывается на определении модуля как расстояния от нуля до числа, выраженного в единичных отрезках.

2. По определению модуля – в данном случае необходимо раскрывать модуль в двух случаях, то есть в зависимости от знака подмодульного выражения. В данном случае изменения происходят только в части содержащей модуль.

3. Метод интервалов – используется, если выражение представляет собой сумму или разность нескольких модулей; произведение выражений или частное выражений сравнивается с модульным выражением.

4. Метод возведения обеих частей уравнения в квадрат.

5. Метод замены переменной равносильной совокупностью или системой.

6. Метод использования геометрической интерпретации модуля.

7. Графический метод решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

8. Метод знакотождественных множителей.

Рассмотрим в начале методы решения уравнений, содержащих знак модуля.

1) Решение уравнения вида $|f(x)| = a$

Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если $a = 0$, то уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Если $a > 0$, то уравнение равносильно совокупности, состоящей из двух уравнений:
$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

2) Решение уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$.

Так как $|a| = |b|$, если $a = \pm b$, то $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}$.

Так как $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \leftrightarrow (f(x) + g(x)) * (f(x) - g(x)) = 0$, то $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}$.

3) Решение уравнения вида $|f(x)| = g(x)$.

1 способ. Решение данного уравнения сводится к решению совокупности двух уравнений $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}$ и проверке справедливости неравенства $g(x) > 0$ для найденных значений.

2 способ. Так как $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) = 0$, $|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$, то уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности следующих

уравнений: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$. В первой системе, решив уравнение $f(x) =$

$g(x)$, проверяют выполнения условия $f(x) \geq 0$. Аналогичные рассуждения проводят и для второй системы.

Замечание.

1. Решив уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ нужно получившиеся корни подставить в исходное уравнение, тем самым проверив правильность нахождения корней.

2. Иногда, уравнения $|f(x)| = g(x)$ удобно свести к системе, состоящей из уравнения и условия $\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$. Однако, можно решить уравнение вида $f^2(x) - g^2(x) = 0$ и проверить полученные корни, подставив их в исходное уравнение.

3) Решение уравнения вида: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$.

Решение подобных уравнений базируется на основном определении модуля числа. Пусть $f_i(x)$, $i=1,2,\dots, n$, где $n \in N$ функции любого характера: многочлены, дробно-рациональные, тригонометрические, показательные и т.д. Для каждой функции необходимо найти область определения, её нули и точки разрыва. Далее, на основе базового определения модуля, для каждой функции и её области определения, с учетом точек разрыва и нулей функции, решить соответствующее уравнение на рассматриваемом промежутке.

4) Метод замены переменной в уравнении, содержащей знак модуля. Данным методом необходимо наиболее рациональным образом произвести замену переменной, для упрощения исходно заданного уравнения.

5) Решение уравнений с параметром, содержащих знак модуля. Данные уравнения, как правило, решаются аналитическим способом. Рассмотрим способ на примере:

$$|x - a| = a + 3.$$

При $a + 3 < 0$, то есть при $a < -3$ уравнение корней не имеет. При $a = -3$ уравнение имеет единственный корень $x = -3$. При $a > -3$ уравнение преобразовывается в два уравнения:

$$x - a = a + 3,$$

$$x - a = -a - 3.$$

Следовательно, $x = 2a + 3, x = -3$.

Таким образом, при $a < -3$ уравнение корней не имеет; при $a = -3$, $x = -3$; при $a > -3$, $x = 2a + 3, x = -3$.

Далее рассмотрим методы решения неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

1. Решение неравенств вида: $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| \leq |g(x)|$, $|f(x)| \geq a$, $|f(x)| \geq |g(x)|$.

Неравенство $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$, где $a \geq 0$. Отметим, что при $a < 0$ это неравенство решений не имеет.

Неравенство $|x| \geq a \leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$, где $a \geq 0$, а при $a < 0$ решением этого неравенства является множество действительных чисел.

Отсюда следует, что $|f(x)| \leq a \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases}$ при условии, что $a \geq 0$.

Что касается неравенства вида $|f(x)| \geq a$, то оно имеет решения при любых значениях x из области определения функции, если $a \leq 0$.

2. Решения неравенств вида: $|f(x)| \leq g(x)$ и $|f(x)| \geq g(x)$.

1 способ. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно совокупности двух

систем неравенств: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \leq g(x) \end{cases}$. Аналогичные рассуждения верны и для

неравенства $|f(x)| \geq g(x)$.

2 способ. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ имеет решение при $g(x) \geq 0$ поэтому $|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$. Заметим, что $|f(x)| \geq g(x)$

выполняется для всех x из области определения функции $f(x)$, при которых $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то $|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0$. Таким образом, при решении неравенства $|f(x)| \geq g(x)$ необходимо рассматривать два случая.

3 способ. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ можно решить с помощью двойного неравенства $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$.

3. Решение неравенств вида: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq g(x)$ или $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| \geq g(x)$.

При решении неравенств данного вида используется аналогичный метод что и при решении уравнения данного вида.

4. Решение неравенств, содержащих знак модуля, методом интервалов. Решение подобных неравенств методом интервалов приводят все заданное неравенство к виду $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$. Далее находится область определения функции и её нули. Нули функции разбивают область определения на промежутки, в каждом из которых функция является непрерывной и не обращается в ноль. Таким образом на каждом получившемся промежутке функция сохраняет свой знак, тем самым определяется однозначно.

5. Решение неравенств с параметром, содержащих знак модуля. Рассмотрим аналитический способ решения, следующего примера

$$2|x - a| < 2ax - x^2 - 2.$$

Решение. Введем функцию $f(x) = 2|x - a| - (2ax - x^2 - 2)$. Тогда исходное неравенство примет вид $f(x) < 0$, $D(f) = R$. Найдем нули функции $f(x)$.

а) При $x \geq a$ нулями функции $f(x)$ являются корни уравнения системы

$$\begin{cases} x \geq a \\ 2x - 2a - 2ax + x^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Решая уравнение системы, получаем $x = a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Корни уравнения должны удовлетворять неравенству $x \geq a$. Найдем те значения a , при которых $x \geq a$, то есть $a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 1} \geq a$. Решая неравенство

$a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} \geq a$, получаем, что $a \leq -\sqrt{2}$ или $a \geq \sqrt{2}$. Неравенство $a - 1 - \sqrt{a^2 - 1} \geq a$ не выполняется ни при каких $a \leq -1$ или $a \geq 1$. Если $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, то $a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} < a$. В этом случае неравенство не имеет решений. Из проведенных рассуждений следует, что при $a \leq -\sqrt{2}$ или $a \geq \sqrt{2}$ промежуток $[a; a - 1 + \sqrt{a^2 - 1})$ является решением неравенства.

б) Пусть теперь $x < a$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 2x(1 + a) + (2 + 2a) < 0$. Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x(1 + a) + (2 + 2a) = 0.$$

$x_1 = a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}$, $x_2 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 1}$ корни этого уравнения. Заметим, что неравенство $a + 1 + \sqrt{a^2 - 1} < a$ не имеет решений при любых значениях $a \leq -1$ или $a \geq 1$, а неравенство $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < a$ выполняется как при $a < -\sqrt{2}$ так при $a > \sqrt{2}$.

Поэтому общее решения заданного неравенства будет:

при $|a| < \sqrt{2}$ решений нет; при $|a| \geq \sqrt{2}$, $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$.

С примерами, отражающими каждый из рассматриваемых видов уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, можно ознакомиться в Приложении 1.

Таким образом, рассмотрев все методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, необходимо

отметить, что при организации обучения решению подобных уравнений и неравенств педагогу нужно понимать, что данный процесс требует внимательности, осознанности и точности в рассуждениях.

Отметим, что учителю необходимо тщательно прорабатывать структуру задачного материала при организации процесса обучения решений рассматриваемых уравнений и неравенств, пользоваться технологией структуризации задачного материала, использовать наглядные методы решения – графический метод решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также использовать технологию обучения с помощью исследовательских работ, на нахождение параметрических значений уравнений и неравенств.

1.3 Сравнительный анализ школьных учебников по математике по теме «Уравнения и неравенства, содержащих неизвестную под знаком модуля»

Начальные сведения в области понятия модуля числа в школьном курсе математики начинаются еще в 6 классе при изучении темы «Рациональные числа» или «Целые числа». На данном этапе вводится определение модуля числа и его геометрический смысл. На основе графической интерпретации, в виде координатного луча, рассматривается простейшая задача на вычисление расстояния от нулевой координаты на положительном и отрицательном направлении. Учащиеся без труда определяют, то что расстояние от нулевой координаты до любой другой, взятой на положительном направлении и идентичной ей координаты, взятой на отрицательном направлении, равно.

Рассмотрим тематическую линию изучаемого понятия с 6 по 11 класс. Сравнительный анализ будем вести по трем учебникам следующих авторов:

– С.М. Никольский и др. учебники для обучающихся общеобразовательных учреждений для 6-11 классов [15];

– Н.Я. Виленкин и др. учебники для обучающихся общеобразовательных учреждений для 6-11 классов [5, 6];

– А.Г. Мордкович и др. учебники для обучающихся общеобразовательных учреждений для 6-11 классов [14].

Сравнительный анализ приведем в виде таблицы, где отражается содержание изучаемой темы в соответствии с классом. Сравнительный анализ представлен в таблице 2.

Как показывает сравнительный анализ, полнота, целостность и систематичность введения понятия модуля числа, его свойств, методов решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, отражается в учебниках С.М. Никольского. Автор широко раскрывает понятийный аппарат изучаемой тематической линии, а значит дает хорошую основу для формирования прочных знаний, умений и навыков обучающихся по данному разделу алгебры и началам математического анализа.

Широкий спектр практических заданий по данной тематике помогает отрабатывать навыки решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а дифференциация данных заданий помогает углублять полученные знания при изучении теоретического материала.

Учебники авторов Н.Я. Виленкин и А.Г. Мордкович также применимы в педагогической деятельности. Однако, стоит отметить, что при формировании понятийного аппарата тематической линии, связанной с понятием модуля числа, его свойств и способов решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, педагогу необходимо дополнительно применять индивидуализацию к изучению данной темы: систематизировать учебный материал, применять вариативность в практических заданиях, использовать структурирование задачного материала.

Таблица 2 – Сравнительный анализ школьных учебников по теме решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля

Автор Класс	С.М. Никольский	Н.Я. Виленкин	А.Г. Мордкович
6 класс	Понятие «модуля числа» вводится во второй главе «Целые числа» на основе формальных определений. После определения понятия авторы рассматривают свойства модуля: модуль нуля, модуль число неотрицательное, модуль положительного числа, модуль отрицательного числа, равенство модулей противоположных чисел.	Понятие «модуля числа» вводится на основе геометрического смысла, то есть как расстояние от начала координат до заданной точки А. После определения понятия авторы рассматривают все свойства модуля: модуль нуля, модуль число неотрицательное, модуль положительного числа, модуль отрицательного числа, равенство модулей противоположных чисел.	Понятие «модуля числа» вводится на основе геометрического смысла, однако тема ограничивается лишь определением и свойством нулевого модуля. Учащимся самостоятельно предлагается сделать вывод свойстве модуля противоположных чисел. Остальных свойств модуля в данном учебнике не приведено. представлены простейшие уравнения и неравенства с модулем, что является основой для изучения более сложных уравнений и неравенств, рассматриваемых в старших классах.
7 класс	Определение понятия «модуль числа» в контексте абсолютной величины, приводится в главе 3 «Действительные числа» –		В учебнике тема «модуль числа» не разбирается, однако в задачнике в теме «Математический язык.

	«Понятие действительного числа»; решаются задание на сравнение по модулю действительных чисел (небольшое количество).	-	Математическая модель» представлены задания на применение свойств модуля числа и раскрытие модуля, а также в теме «Линейные уравнения с одной переменной» в заданиях повышенного уровня сложности предлагается решить уравнения с модулем.
8 класс	Понятие модуля вводится в главе 1 «Простейшие функции. Квадратные корни» в параграфе «Координатная ось. Модуль числа»; После определения понятия авторы рассматривают все свойства модуля; определение и свойства модуля проводится аналитическим способом; решаются простейшие уравнения и неравенства со знаком модуля; в главе «Квадратные и рациональные уравнения», в параграфе «Уравнение-следствие» рассматриваются рациональные уравнения, содержащие знак модуля; в	Определение «модуля числа» приводится в главе 5 «Действительные числа» – в пункте «Арифметические операции над действительными числами»: определение и свойства модуля проводится аналитическим способом; решаются простейшие неравенства со знаком модуля; в пункте свойства числовых неравенств присутствуют задания содержащих знак модуля; в пункте основные тождества для квадратных корней приводится тождество $\sqrt{x^2} = x $; в главе «Квадратные уравнения. Системы нелинейных уравнений» в параграфе «Уравнения и системы уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям»	В разделе «Действительные числа» рассматривается понятие модуля действительного числа. Он определяется аналитически. Модуль применяется для оценки иррациональных чисел. Геометрический смысл модуля определяется формулой: $p(a-b) = a-b $. Также рассматривается уравнения, содержащие знак модуля, причем уравнения подразумевают решение как аналитическим, так и графическим способом. Однако, уравнения, предлагаемые в данном учебнике довольно просты. В задачнике в главе «квадратные

	<p>главе 3 «Функции» приводится графическое представление и свойства функции $y = x$; в дополнениях к главе 3, разбирается построение графиков функций, содержащих модуль; в параграфе «Графическое решение систем рациональных уравнений приводятся задания, содержащие знак модуль, а также уравнения содержащие параметр под знаком модуля.</p>	<p>присутствует целый пункт по решению уравнений, содержащих знак модуля.</p>	<p>уравнения» предлагаются уравнения с модулем различного уровня сложности.</p>
9 класс	<p>В главе 1 «Неравенства» представлен целый параграф «Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля»: разбирается большое количество заданий, способов решения таких неравенств, большой набор практических заданий для обрабатывания навыков решения данных неравенств; в параграфе «Замена неизвестного при решении неравенств» присутствуют задания, содержащие знак модуля в</p>	<p>Учебник является продолжением учебника за курс 8 класса, по этому в главе 8 «Функции» разбирается функция $y = x$, её график и свойства; в последующих параграфах данной главы рассматриваются задания, связанные с построением квадратичной и дробно-рациональной функций, имеющих знак модуля; далее в главе 9 «Степени и корни» подробно рассматривается тождество $\sqrt{x^2} = x$; в главе 10 «Уравнения, неравенства и их системы» в процессе изучения всей главы</p>	<p>Рассматриваются решение модульных неравенств с помощью геометрического смысла модуля предлагаются простые неравенства; рассматривается графический и аналитический способы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.</p>

	<p>неравенствах, а также в системах неравенств, приводятся способы их решения и задачи практической направленности; в главе 2 «Степень числа» в параграфе «Корень степени n» приводится тождество $\sqrt{x^2} = x$; в главе 5 «Элементы приближенных вычислений, статистики, комбинаторики и теории вероятностей» в параграфах по теме абсолютной и относительной погрешностей, а также приближенных значений величин используется понятие модуля числа и его свойства.</p>	<p>приводятся задания на решения уравнений, неравенств и их систем, содержащих знак модуля, однако подробного разбора решения не приводится; стоит отметить параграф «Графическое решение неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными», в данном параграфе большое количество заданий на предмет наличия знака модуля в неравенствах; далее в главе 11 «Последовательности» в параграфах бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей с помощью знака модуля приводится понятие относительной и абсолютной погрешности.</p>	
10 класс	<p>В главе 1 «Корни, степени и логарифмы» в параграфе «Понятие действительного числа» приводится аналитическое определение модуля числа и рассматриваются его некоторые свойства; решаются простейшие неравенства с помощью координатной</p>	<p>В главе 1 «Числа и координаты» в пункте «Арифметические операции над действительными числами» приводится аналитическое определение модуля числа и рассматриваются его некоторые свойства; решаются простейшие неравенства и уравнения, содержащие знак модуля; используется координатная ось; в</p>	<p>В главе 1 «Действительные числа» разбирается понятие «модуль числа» и его свойства; приводятся примеры простейших неравенств и методы их решения; далее в главе 2 «Числовые функции» приводится понятие функции $y = x$, и как следствие, приводится графический метод</p>

	<p>прямой; далее в параграфе «Системы рациональных уравнений» приводится разбор способов решения уравнений со знаком модуля, а также аналогичных уравнений с параметром; присутствует значительный набор заданий для закрепления навыков их решения; в параграфе «Корень степени n» в пункте «Понятия функции и её графика» предлагаются задания на нахождение области определения функции заданной выражением, стоящим под знаком модуля; в последующих параграфах данной главы приводится тождество $\sqrt{x^2} = x$; в параграфе «логарифмы» рассматриваются задания на нахождение простейших логарифмических функций, содержащих знак модуля.</p>	<p>главе 2 «Рациональные выражения. Уравнения и неравенства с одной переменной» выделен целый параграф по решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, тем самым обеспечивая обучающихся значительным набором знаний, умений и навыков в данной теме.</p>	<p>решения уравнений, содержащих знак модуля; в задачнике представлены не значительное количество заданий, содержащих знак модуля.</p>
11 класс	<p>В главе 1 «Функции и их графики» задаются большое количество функций со знаком модуля, у которых необходимо</p>	<p>В учебнике данного автора не выделяется отдельных параграфов, связанных с понятием модуля, решения уравнений и неравенств,</p>	<p>В данном учебнике в главе 2 «Степени и корни. Степенные функции» дается тождество $\sqrt{x^2} = x$; решаются простейшие</p>

	<p>найти область определения и построить их график, стоит отметить, что присутствуют подробные разборы построения графиков функций содержащих знак модуля; в главе 2 Уравнения, неравенства и системы в параграфе 8 «Уравнение-следствие», параграфе 9 «Равносильность уравнений и неравенств системам» и параграфе 10 «равносильность уравнений на множествах» подробно разбираются решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, приводится большое количество примеров для закрепления навыков их решения; далее в пунктах «Возведения неравенств в четную степень» и «Умножение неравенств на функцию» параграфа 11 приводятся подробный разбор решения неравенств, содержащих неизвестную под</p>	<p>содержащих знак модуля, способов их решения, однако стоит отметить, что при изучении некоторых параграфов главы 2 «Показательная, логарифмическая и степенная функция» и главы 3 «Многочлены от нескольких переменных. Системы уравнений» задания, содержащие знак модуля все же присутствуют, но подробного разбора их способов их решения нет.</p>	<p>задачи; в главе 6 «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» приводится разбор некоторых примеров, содержащих знак модуля; в задачнике присутствует не значительных набор вариативных заданий.</p>
--	---	---	--

	<p>знаком модуля; параграф 12 учебника «Метод промежутков для уравнений и неравенств» содержит полноценные пункты посвященные решению уравнений и неравенств содержащих знак модуля: приводится разбор большого количество примеров, а также представлен значительный набор задачного инструментария для формирования навыков решения данных уравнений и неравенств, в частности решения уравнений и неравенств с параметром, содержащих знак модуля.</p>		
--	---	--	--

Отметим, что использование в педагогической практике любого из рассматриваемых учебников, не ограничивает учителя в применении индивидуального подхода к способам обучения школьников решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а значит педагог в праве применять и современные технологии обучения на практике, например такие как информационные-коммуникационные технологии, что значительно повысит интерес обучающихся к изучаемой теме, поможет расширить пространственное воображение, сформирует навыки решения уравнений и неравенств способами отличных от стандартных.

Глава II. Методические особенности обучения решению уравнений и неравенства, содержащих неизвестную под знаком модуля

2.1 Методические особенности обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля

при подготовке к ЕГЭ

Понятие модуля (абсолютной величины) является одной из основополагающей тем при изучении курса алгебры основного общего образования. Её элементы входят в состав не только основного курса математик, но и прослеживаются в выпускных экзаменах обучающихся, олимпиадных заданиях по математике.

Отметим, что понятие модуля (абсолютной величины) прослеживается в кодификаторе единого государственного экзамена, а именно в разделе «Алгебра» – «Преобразование выражений» общего перечня элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике [11]. Фрагмент кодификатора проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания единого государственного экзамена по математике, который отображает наличие темы «Модуль (абсолютная величина) числа» представлен на рисунке 2. Изучаемое понятие модуля числа и его свойства входят как в базовый, так и в углубленный уровень позиций федерального компонента государственного стандарта среднего (полного) общего образования по математике. Однако, необходимо сказать о том, что в перечне элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике, отсутствуют уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля как отдельный элемент, однако подобный вид уравнений и неравенств включены в состав таких уравнений и неравенства как квадратные, рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, а также заложены в такие содержательные

элементы как равносильность неравенств и систем неравенств, метод интервалов, равносильность уравнений и систем уравнений.

Кодификатор ЕГЭ 2023 г.

МАТЕМАТИКА, 11 класс. 11 / 22

Код раз дела	Код контролируемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы		
		Федеральный компонент государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования	Наличие позиций ФК ГОС в ПООП СОО	
			базовый уровень	углублённый уровень
	1.3.3	Десятичный и натуральный логарифмы, число e	Десятичный логарифм. Число e . Натуральный логарифм	Десятичный и натуральный логарифм
1.4	Преобразования выражений			
	1.4.1	Преобразования выражений, включающих арифметические операции	Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел	Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел
	1.4.2	Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень	Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел.	Решение задач с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел.
	1.4.3	Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени	Решение задач с использованием свойств степеней и корней	Решение задач с использованием свойств степеней и корней
	1.4.4	Преобразования тригонометрических выражений	Тригонометрическая окружность, радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него	Радианная мера угла, тригонометрическая окружность. Тригонометрические функции чисел и углов. Формулы приведения, сложения тригонометрических функций, формулы двойного и половинного аргумента. Преобразование суммы, разности в произведение тригонометрических функций, и наоборот
	1.4.5	Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования	Преобразование логарифмических выражений	Преобразование логарифмических выражений
	1.4.6	Модуль (абсолютная величина) числа	Модуль числа и его свойства	Модуль числа и его свойства

Рисунок 2 – Раздел «Алгебра» – «Преобразование выражений» общего перечня элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике

Все вышесказанное обуславливает необходимость в качественном обучении по данной тематике и, следовательно, требует продуманной организации обучения от учителя. Педагогу необходимо четко формулировать цели обучения, использовать современные технологии обучения для повышения качества обучения, а также создавать приемлемые условия для всеобщего обучения каждого школьника.

С помощью четко спланированной организации обучения школьников решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, учитель обеспечит обобщение и систематизацию полученных знаний, расширит и углубит знания по изучаемой теме, сформирует практические навыки школьников при выполнении заданий с модулем, повысит уровень математической подготовки.

Работа педагога по организации обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля должна отвечать некоторым задачам обучения:

- сформировать прочные знания по теме;
- сформировать навыки применения полученных знаний при решении многовариативных задач различной сложности;
- способствовать качественной подготовки школьников к ЕГЭ;
- сформировать навыки самостоятельной работы в индивидуальном и групповом формате;
- сформировать навыки исследовательской деятельности школьников;
- способствовать развитию алгоритмического мышления обучающихся;
- способствовать развитию познавательного интереса школьников к предметной области.

Проанализировав контрольно-измерительные материалы ЕГЭ отметим, что понятие модуля входит в обе части письменного экзамена профильного уровня. Задания, которые содержат уравнения или неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля, могут быть как с кратким содержанием ответ (задания №10), так и со свободным письменным ответом (задание №12, №.14, №17) [16].

Несомненно, начать подготовку к ЕГЭ в области данной тематике необходимо с 10 задания – график функции, где содержится функции с параметрическими значениями коэффициентов функции, в котором требуется её восстановление и, в последствии, нахождение значения функции или значения аргумента.

Для организации обучения решения данного вида задания предлагается следующая структура занятия. Разберем на конкретном примере подробно методику обучения решению задания №10 ЕГЭ, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Данную деятельность, целесообразно провести в рамках урока по изучению графика функции модуля или при изучении свойств раскрытия модуля.

Пример: На рисунке 3 изображен график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где a, b, c, d – целые числа. Найти коэффициенты a, b, c, d .

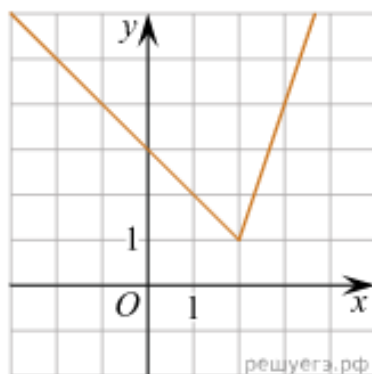


Рисунок 3 – График функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$

Для начала восстановим функции для каждой прямой, заданной на графике функции: так как на графике расположены две прямые общее уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

Для восстановления функций обеих прямых возьмем по две точки, которые принадлежат соответствующим прямым:

Для левой прямой возьмем точки $(0; 3)$ и $(1; 2)$, составим систему из двух уравнений и двух переменных k и b :

$$\begin{cases} 3 = k * 0 + b \\ 2 = 1 * k + b \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований получаем функцию $y = -x + 3$.

Для правой прямой возьмем точки с координатами $(2; 1)$ и $(3; 4)$, составим систему из двух уравнений и двух переменных k и b :

$$\begin{cases} 1 = k * 2 + b \\ 4 = 3 * k + b \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований получаем функцию $y = 3x - 5$.

Возвращаясь к исходному выражению, содержащему знак модуля, воспользуемся общим свойством его раскрытия, то есть:

$$\text{Если } bx + c > 0$$

$$f(x) = ax + bx + c + d$$

Приводя подобные слагаемые

получим:

$$f(x) = (a + b)x + (c + d)$$

$$\text{Если } bx + c < 0$$

$$f(x) = ax - bx - c + d$$

Приводя подобные слагаемые

получим:

$$f(x) = (a - b)x + (-c + d)$$

Исходя из уравнений графиков функции прямых коэффициент перед переменной в функции $f(x)$ может быть равен двум случаям:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

Не сложно заметить, что при решении и первой и второй системы уравнений коэффициент $a = 1$, отсюда $b = 2$.

Нахождение свободных коэффициентов заданной функции осуществляется по такому же принципу:

$$\begin{cases} c + d = 3 \\ -c + d = -5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c + d = -5 \\ -c + d = 3 \end{cases}$$

Не сложно заметить, что при решении и первой и второй системы уравнений коэффициент $d = -1$, отсюда $c = -4$

Исходя из данных рассуждений, целесообразно выделить алгоритм нахождения коэффициентов функции, содержащей знак модуля:

1. Восстановить соответствующие функции по их графикам, предложенным на рисунке. Если в исходной функции под модулем содержится только лишь переменная x , переходим к п. 2.
2. Раскрыть модуль по основному его определению и свойству.
3. В полученных случаях сгруппировать коэффициенты, стоящие перед x и свободные коэффициенты.
4. Рассмотреть системы линейных уравнений в соответствии с коэффициентами, которые получились в функциях в п. 1.
5. Записать функцию в соответствии с найденными коэффициентами.

На основе данной работы целесообразно предложить систему задач на закрепление и отработку приобретённых навыков по решению данного вида задания. Система задач приведена в приложении 1.

Тема решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля полноценно располагает возможностями в применении ИКТ при её изучении [7].

Для организации обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля с использованием цифровых технологий необходимо использовать современные программные обеспечения образовательного назначения, что повысит качество понимания и практической направленности данного раздела математик, а также в силу высокой наглядности, поможет обучающимся сформировать навык распознавания функционально-графической модели, как объекта математической природы. Одним из таких программных обеспечений является 1С:Математический конструктор. В данном математическом пакете существует интерактивная лаборатория для создания и решения функционально-графическим методом уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля [1].

Приведем пример организации деятельности школьников по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля с применением программного обеспечения 1С: Математический конструктор – Интерактивная лаборатория «Графики функции».

Входящая в состав программного обеспечения Виртуальная лаборатория «Графики функций» включает в себя комплекс интерактивных учебных средств, позволяющих активизировать работу учащихся по изучению функциональной линии школьного курса математики, внести в неё элементы исследовательской и экспериментальной деятельности. Данная виртуальная лаборатория имеет доступ в сети Интернет, однако в онлайн-формате есть временные ограничения использования [1].

Все средства лаборатории могут использоваться как учителем при объяснении и закреплении материала, так и учениками в самостоятельной работе в классе и дома. Состав лаборатории представлен на рисунке 4.



Рисунок 4 – Состав Виртуальной лаборатории «Графики функций»

Приведем пример организации деятельности школьников по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля с использованием данной интерактивной лаборатории. В данной лаборатории рассматриваются функции, полученные из элементарных (линейной, квадратичной и др.) операциями взятия модуля, и их графики.

В модели имеется 4 листа, на каждом из которых рассматривается какое-либо семейство функций с модулями. В каждом из этих семейств исходная функция зависит от одного или нескольких параметров. Изменяя параметры, можно следить за поведением соответствующих графиков.

Для изменения параметров можно использовать четыре способа:

- вводить их значения с помощью цифровой клавиатуры (двойной щелчок мышью);
- менять стрелками;

- менять с помощью ползунка;
- запустить (и остановить) автоматическое изменение параметров с помощью кнопок «Анимация».

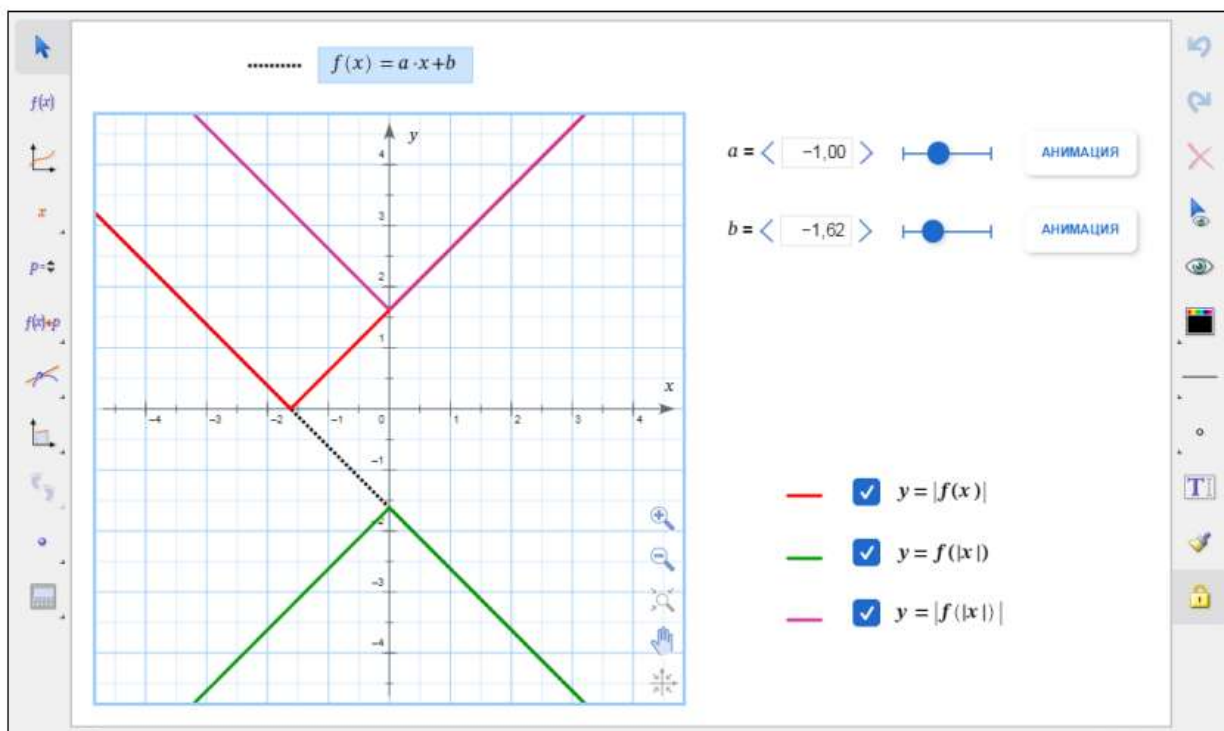


Рисунок 5 – Лист функции $y = ax + b$

На цифровом листе, отображенном на рисунке 5, исходной функцией является линейная функция $y = ax + b$ с параметрами a и b . Её график изображается жирным чёрным пунктиром. Три чекбоксы позволяют включить/отключить графики функций, полученные из исходной следующими преобразованиями:

- $y = |f(x)|$ – (красного цвета);
- $y = f(|x|)$ – (зелёного цвета);
- $y = |f(|x|)|$ – (фиолетового цвета).

При изменении параметров a и b , автоматически меняются графики всех функций.

Вопросы для исследования

1. Опишите, что происходит с графиком $f(x)$ при каждом из трёх преобразований с модулем.

2. Может ли функция $f(x)$ не измениться после какого-то из трёх преобразований? Если да, то в каких случаях?
3. Могут ли совпасть результаты каких-то из трёх преобразований? Если да, то в каких случаях?
4. Сколько корней может быть у каждой из четырёх функций?
5. Сколько локальных экстремумов может быть у каждой из четырёх функций?

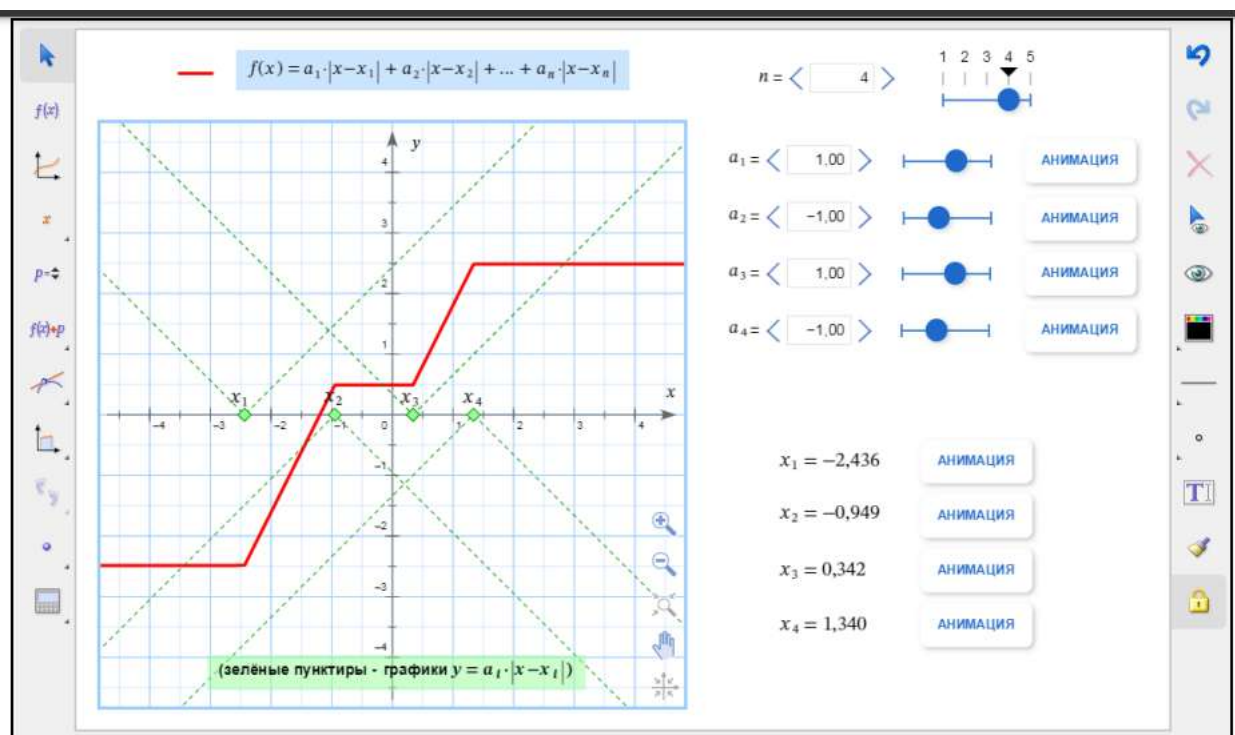


Рисунок 6 – Лист суммы модулей

Лист «Сумма модулей», который отображен на рисунке 6, отличается от предыдущего по содержанию и структуре.

Рассматривается функция вида $f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \dots + a_n|x - x_n|$ где $1 \leq n \leq 5$, с параметрами $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Зелёным пунктиром показаны графики n слагаемых $f^1(x) = a_1|x - x_1|$, $f^2(x) = a_2|x - x_2|$, $f^n(x) = a_n|x - x_n|$ красным цветом – их сумма $f(x)$. При изменении любого из параметров автоматически меняются графики всех функций.

Вопросы для исследования

1. В каких точках «ломается» график функции $f(x)$? Как ведёт себя график между этими точками?
2. Опишите поведение $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.
3. Сколько корней может быть у функции $f(x)$?
4. Сколько локальных экстремумов может быть у функции $f(x)$?
5. Найдите промежутки монотонности $f(x)$).

Также в данной лаборатории есть возможность поработать и исследовать квадратичные функции содержащие неизвестные под знаком модуля и функции многочлена.

На современном этапе развития процесса образования в школе, педагоги на практике все чаще используют цифровые технологии при обучении школьников. Математика – предмет, который тесно связан с возможностью применения ИКТ на уроках, что повышает не только интерес к нему и способствует развитию межпредметных связей, но и дает возможности развитию профессиональных качеств обучающихся, формирует способность применения своих знаний, умений и навыков в любой области науки и техники, а также повышает компетентность школьников в целом, ведь владение ИКТ в современном обществе является ведущей способностью в профессиональной деятельности человека.

2.2 Методический блок по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля функционально-графическим способом, с использованием информационно-коммуникационных технологий

Данный методический блок рассчитан на обучающихся 10-11 классов, для подготовки к сдаче ЕГЭ. В ходе занятий, входящих в состав методического блока, будут рассмотрены различные методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Целесообразность применения методического блока на практике в учебном процессе обуславливается тем, что данная тема в рамках классно-урочной системы проходит значительно быстро, что порождает проблемный характер в усвоении необходимых знаний, незначительное количество часов, которые отводятся на изучение данной тематики не хватает для изучения сложных примеров, в следствие чего обучающиеся допускают ошибки при решении обозначенных заданий при решении выпускных экзаменов. Методический блок направлен на систематизацию и обобщение часто используемых методов решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, начиная от простых заданий, заканчивая более сложными такими как логарифмические, тригонометрические и показательные уравнения и неравенства.

Организация данной работы по обучения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, не только повысит уровень знаний обучающихся, но и будет способствовать развитию познавательного интереса школьников и их логическому мышлению. Выделим некоторую структуру методического блока по обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, которая представлена на рисунке 7.

В данной структуре выделены основные цели методического блока, его задачи, используемые средства обучения в ходе реализации методического блока, а также основные используемые формы и методы обучения.

Отметим, что данный методический блок целесообразно реализовывать в процессе внеурочной деятельности, в качестве углубления знаний, умений и навыков обучающихся. Однако, использование данной деятельности в урочное время также возможно, в соответствии с позволяемыми временными рамками обучения.



Рисунок 7 – Структура методического блока

На основе вышесказанного приведем примерное тематическое планирование методического блока, который представлен в приложении 2.

В качестве примера приведем содержание нескольких занятий, входящие в состав методического блока:

Занятие 1. Тема «Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов». Данный метод широко применим на практике при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля и является одним из универсальных методов решения подобных уравнений и неравенств.

Начать необходимо с разбора контр-примера, после которого выделить алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов.

Пример: $|x + 3| - |x - 1| = x + 2$

Решение. Необходимо найти нули функции при:

$$x + 3 = 0 \text{ и } x - 1 = 0$$

В данном случае $x_1 = -3, x_2 = 1$

Проверим знаки функции на соответствующих интервалах, которые изобразим в виде графической интерпретации на рисунке 8:

$x+3$	—	+	+
$x-1$	—	—	+
	●	●	
	-3	1	

Рисунок 8 – Знаки интервалов заданного уравнения

Раскроем модули в уравнении согласно знакам, получившимся на промежутках:

$$\begin{aligned}
 1. & \begin{cases} x < -3 \\ -x - 3 + x - 1 = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -4 = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x = -6, \in (-\infty, -3) \end{cases} \\
 2. & \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x + 3 + x - 1 = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x = 0, \in [-3, 1] \end{cases} \\
 3. & \begin{cases} x > 1 \\ x + 3 - x + 1 = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 2, \in (1, +\infty) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Таким образом, получили три корня, которые удовлетворяют условиям: -6, 0, 2.

После разбора контр-примера выделим алгоритм решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов:

1. Найти нули функции, то есть те точки, при которых функция обращается в ноль.
2. Получившиеся точки наносим на числовую прямую, тем самым разбивая её на несколько интервалов.
3. Необходимо определить знаки функции для каждого получившегося промежутка, для каждого заданного модуля.
4. Раскрыть модули согласно тем знакам, которые получились на каждом из промежутков числовой прямой.
5. Составить системы уравнений и неравенств относительно числовых промежутком и получившимся уравнением на конкретно заданном промежутке. Решить её.

Пример: $\frac{|x+3|-|x-1|}{2} = |x+4| - 3$

Находим нули функции:

$$x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$$

$$x + 4 = 0 \rightarrow x_3 = -4$$

Получившиеся точки наносим на числовую прямую, тем самым разбивая её на несколько интервалов и изобразим её в виде графической интерпретации, представленной на рисунке 9.

x+3	—	—	+	+
x-1	—	—	—	+
x+4	—	+	+	+
	•	•	•	
	-4	-3	1	

Рисунок 9 – Знаки интервалов заданного уравнения

Раскроем модули согласно тем знакам, которые получились на каждом из промежутков числовой прямой и составим системы уравнений и

неравенств относительно числовых промежутком и получившимся уравнением на конкретно заданном промежутке. Решим их.

$$\begin{aligned}
 &1. \begin{cases} x < -4 \\ 0,5(-x - 3 - (-x + 1)) = -x - 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} x < -4 \\ 0,5(-x - 3 + x - 1) = -x - 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -4 \\ 0,5(-4) = -x - 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -4 \\ -2 = -x - 7 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} x < -4 \\ x = -5, \in (-\infty, -4) \end{cases} \\
 &2. \begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ 0,5(-x - 3 - (-x + 1)) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ 0,5(-x - 3 - (-x + 1)) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ 0,5(-x - 3 + x - 1) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ 0,5(-4) = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ -2 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -3 \\ x = -3, \in [-4, -3] \end{cases} \\
 &3. \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 0,5(x + 3 - (-x + 1)) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 0,5(x + 3 + x - 1) = x + 1 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 0,5(2x + 2) = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ x + 1 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 0 = 0, x \in R \end{cases} \\
 &4. \begin{cases} x > 1 \\ 0,5(x + 3 - (x - 1)) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 0,5(x + 3 - x + 1) = x + 4 - 3 \end{cases} \rightarrow \\
 &\begin{cases} x > 1 \\ 0,5(4) = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -1, \text{ не подходит} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение имеет вид $\{-5\} \cup [-3; 1]$

Пример: решить неравенство: $|x| + |x + 2| < 2x + 6$

Найдем нули функции, то есть те точки, при которых неравенство обращается в ноль.

$$x + 2 = 0 \text{ и } x = 0$$

В данном случае $x_1 = -2, x_2 = 0$

Получившиеся точки наносим на числовую прямую, тем самым разбивая её на несколько интервалов. Определяем знаки функции для каждого получившегося промежутка, для каждого заданного модуля. Изобразим это в виде графической интерпретации, отображенной на рисунке 10.

x	—	—	+
$x+2$	—	+	+
	—	•	•
		-2	0

Рисунок 10 – Знаки интервалов заданного уравнения

Раскроем модули согласно тем знакам, которые получились на каждом из промежутков числовой прямой и составим системы уравнений и неравенств относительно числовых промежутком и получившимся уравнением на конкретно заданном промежутке. Решим их.

Случай 1

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ -x - x - 2 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ -2x - 2 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ -4x < 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x > 2 \end{cases}$$

Нанесем данные решения на числовую прямую и изобразим её в виде графической интерпретации на рисунке 11:

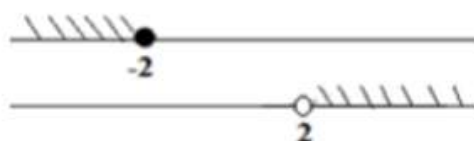


Рисунок 11 – Числовая прямая и пересечение решений для случая 1

Очевидно, что пересечений получившихся промежутков нет, следовательно, и система неравенств решений не имеет.

Случай 2

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -x + x + 2 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 2 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 2x > -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

Нанесем данные решения на числовую прямую, изображенную на рисунке 12:

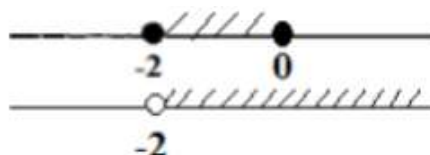


Рисунок 12 – Числовая прямая и пересечение решений для случая 2

Очевидно, что пересечение получившихся промежутков есть, соответственно система неравенств будет иметь решение следующего вида: $(-2; 0]$.

Случай 3

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + x + 2 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 6 < 2x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 < 6 \end{cases}, x \in [0, +\infty)$$

Таким образом, объединяя ответы от каждого из рассмотренных случаев получаем ответ следующего вида: $x \in (-2; +\infty)$

В качестве проверки знаний по усвоению данного метода решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов целесообразно предложить самостоятельную работу (представлена в таблице 3.)

Таблица 3 – Пример самостоятельной работы при организации проверки знаний по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов

Вариант 1	Вариант 2
1. $ x - 2 + x \leq 7 - x + 4 $	1. $ x - 1 + x - 2 \leq 3$
2. $ x + 3 - 1 - x = 2x - 1$	2. $ x - 2 + x \leq 7 - x + 4 $
3. $ x^2 - 3x + 2 - 2 - x \geq 4$	3. $ x + 3 + x - 1 = 2x + 7 + \frac{5x}{ x }$

Занятие 2. Тема «Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля».

Исходя из того, что с детьми была проведена работа по построению графиков функций, содержащих неизвестную под знаком модуля, с большим количеством вариативности, целесообразно рассмотреть графический способ решения уравнений и неравенств. Данный способ применяется в основном тогда, когда необходимо найти количество корней заданного уравнения или неравенства, то есть нахождение приближенных корней. Решение уравнений данным методом будем проверять с помощью программного обеспечения

образовательного назначения 1С:Математический конструктор, так как ранее работа уже велась на его основе.

Пример: определите количество корней заданного уравнения: $(x - 2)^2 = 1 - |x|$

Для начала необходимо построить в одной системе координат два графика функции: $y = (x - 2)^2$ и $y = 1 - |x|$. Отобразим цифровую графическую интерпретацию на рисунке 13.

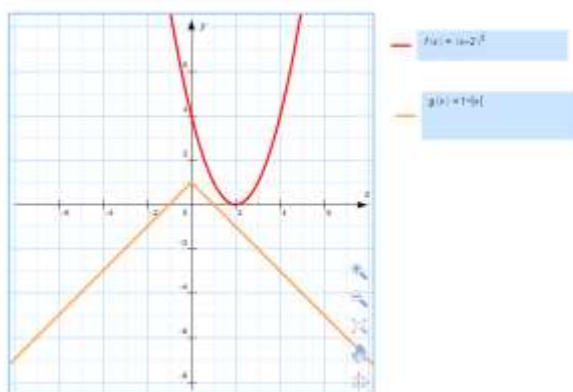


Рисунок 13 – Графическое представление решения заданного примера

По графику видно, что точек пересечения графики заданных функций не имеют, соответственно уравнение решений не имеет.

Пример: решить уравнение: $|2x + 6| + |2x - 6| = x + 12$

Для начала необходимо построить в одной системе координат два графика функции: $y = |2x + 6| + |2x - 6|$ и $y = x + 12$. Отобразим цифровую графическую интерпретацию на рисунке 14.

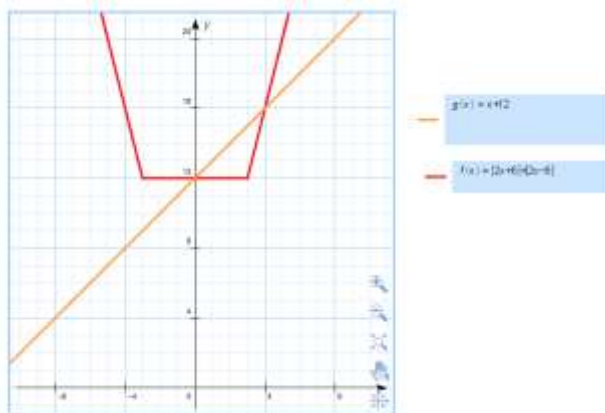


Рисунок 14 – Графическое представление решения заданного примера

По графику видно, что две заданные функции имеют две точки пересечения. Причем координаты точек пересечения легко увидеть по графику, а также проверить свои результаты с помощью автоматической кнопки «Координаты точки». Интерактивное графическое представление графиков функций, а также вычисленные координаты получившихся точек представлены на рисунке 15.

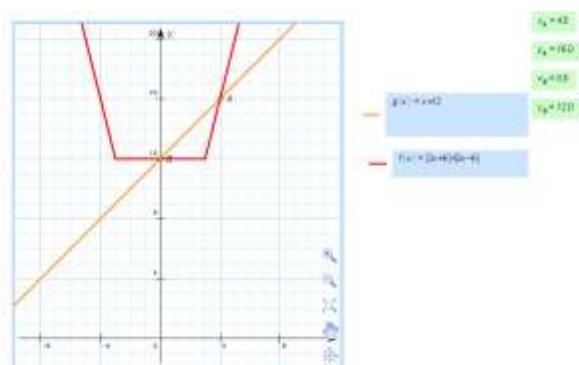


Рисунок 15 – Определение координат точек пересечения графиков функций

Пример: $x - 1 < |(x - 2)^2 - 1|$

Для начала необходимо построить в одной системе координат два графика функции: $y = x - 1$ и $y = |(x - 2)^2 - 1|$. Интерактивное графическое представление графиков заданных функций представлено на рисунке 16.

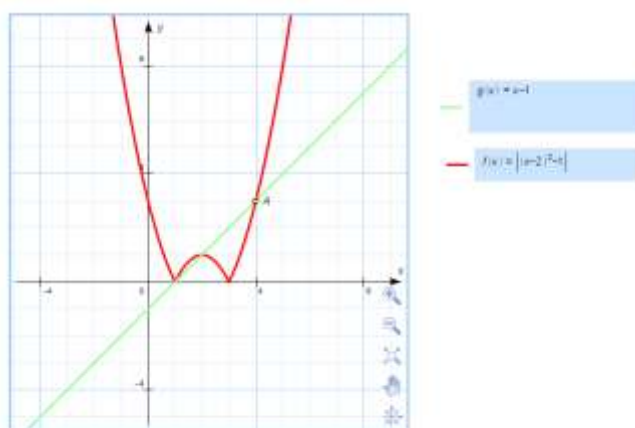


Рисунок 16 – Графическое представление решения заданного примера

Далее с помощью автоматической кнопки «Выделение области» выделяем область «над графиком» модуля и «под графиком» прямой так как в исходно заданном неравенстве стоит знак «<». Интерактивное графическое

представление выделенных областей исследования графиков заданных функций представлено на рисунке 17.

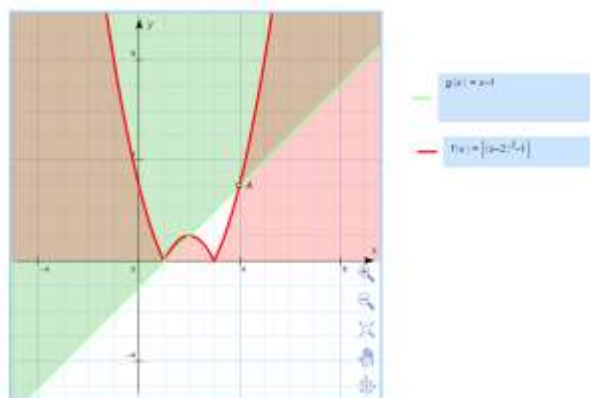


Рисунок 17 – Выделение области заданного неравенства

Пересечение областей дает нам промежуток (1; 5).

В рамках организации данного занятия целесообразно предложить самостоятельную лабораторную работу по решению уравнений и неравенств графическим способом с использованием цифровых технологий. Задания самостоятельной лабораторной работы представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Задания для организации самостоятельной лабораторной работы с использованием цифровых технологий

Вариант 1	Вариант 2
1. $ x = -x^2 + 2$	1. $2x^2 = x - 1 + x + 1 $
2. $ x^2 - 4x + 3 = 3 - x$	2. $ x^2 - 4 = 3 x $
3. $ x - 3 > x + 2 - 5$	3. $ x + 3 - x - 3 \geq 2x$

Рекомендации для выполнения самостоятельной лабораторной работы: каждое заданное уравнение и неравенство выполняется на отдельном листе в программном обеспечении. Результаты, полученные в ходе самостоятельной лабораторной работы, демонстрируются всему классу по 1-3 человека от каждого варианта, с целью коллективной проверки решения данных неравенств и для создания многовариативности практического обучения.

Занятие 3. «Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, входящие в состав ЕГЭ». Задания, в

ходящие в состав данного занятия, входят в перечень заданий единого государственного экзамена по математике профильного уровня.

Пример: $|3 - |5 - x|| = 3$

Решение:

$$|3 - |5 - x|| =$$

$$3 \Rightarrow \begin{cases} 3 - |5 - x| = 3 \\ 3 - |5 - x| = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |5 - x| = 0 \\ |5 - x| = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - x = 0 \\ 5 - x = 6 \\ 5 - x = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -11 \\ x = 11 \end{cases}$$

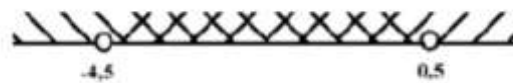
Пример: $||2x + 4| - 2| < 3$

$$\text{Решение: } ||2x + 4| - 2| < 3 \Rightarrow \begin{cases} |2x + 4| - 2 < 3 \\ |2x + 4| - 2 > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x + 4| < 5 \\ |2x + 4| > -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4 > -1 \\ 2x + 4 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > -5 \\ 2x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2.5 \\ x < -1.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4 < 5 \\ 2x + 4 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 2x > -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0.5 \\ x > -4.5 \end{cases}$$

Изобразим решение данного неравенства на числовой прямой:



Так как две совокупности решений находятся в системе, ответом будет являться их объединение.

Пример: $3|x + 3| - 3x \leq 14 - |2 - x|$

Решение: Воспользуемся свойством суммы модулей:

$$|a| + |b| \leq c \Leftrightarrow \begin{cases} -c \leq a + b \leq c, \\ -c \leq a - b \leq c. \end{cases}$$

Тогда решение будет иметь вид:

$$3|x+3|+|2-x| \leq 3x+14 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \leq 3(x+3)+(2-x) \leq 3x+14, \\ -3x-14 \leq 3(x+3)-(2-x) \leq 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow$$

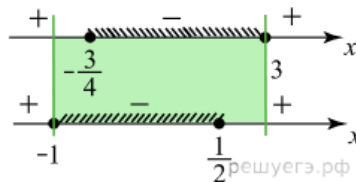
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \leq 2x+11 \leq 3x+14, \\ -3x-14 \leq 4x+7 \leq 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7. \\ x \leq 7 \end{cases}$$

Пример: $\left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$

Решение:

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}, \\ -2x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{1}{8} \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} \leq 0, \\ x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)\left(x+\frac{3}{4}\right) \leq 0, \\ (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$



Пример: $|x^2 - 3x + 1| \geq \sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1}$

Решение: Заметим, что под знаком корня содержится полный квадрат
выражение: $\sqrt{4x^4 - 4x^2 + 1} = \sqrt{(2x^2 - 1)^2} = |2x^2 - 1|$

Возведем в квадрат обе части получившегося неравенства и рассмотрим разность квадратов:

$$\begin{aligned}
& |x^2 - 3x + 1| \geq |2x^2 - 1| \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 \geq (2x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 - (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (3x^2 - 3x)(-x^2 - 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + 3x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x(x - 1) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, стоит отметить, что подобная организация деятельности обучающихся по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, даст хорошую основу для формирования прочных знаний, умений и навыков по данной теме. Обучающие мероприятия систематизируют знания, которые были получены при теоретическом изучении темы, а также обобщают навыки практической работы.

Использование интерактивного формата обучения, отражает развитие познавательного интереса школьников, развитие исследовательских навыков обучающихся, а также формирование навыков использования ИКТ на уроках математики не только с целью развития интереса к предмету, но и с целью формирования профессиональных компетенций обучающихся.

Заключение

Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, является одной из основополагающих тем курса алгебра основной школы. Её материала входят в состав не только выпускных экзаменов, но и в состав задач олимпиад разного уровня. В связи с этим, при изучении данной темы в процессе обучения математики основной школы, педагогу важно спланированно организовать процесс обучения данной теме: проработать план-конспект подачи теоретического материала, так чтобы каждый обучающийся смог воспринять изучаемый материал; организовать практическую деятельности с учетом вариативности заданий и индивидуальным подходом к каждому ученику; использовать современные технологии для организации наглядности способов решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля и, наконец, систематизировать контрольно-измерительные материалы по данной теме, для проверки качества обучения.

Целью выпускной квалификационной работы ставилось изучение методических особенностей обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля; поиск рациональных методических решений, с помощью которых процесс обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля был бы эффективным; разработка методических рекомендаций по обучению решений уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, с использованием современных технологий обучения.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Изучены подходы к определению знака модуля в школьном курсе математики.
2. Изучены методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

3. Проведен сравнительный анализ школьных учебников по теме решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

4. Проанализирована эффективность применения современных технологий обучения при обучении решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

5. Разработан методический блок по решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля традиционным способом, а также с использованием современных технологий обучения.

Данный методический блок был частично апробирован в рамках педагогической практики во время обучения. Апробация проходила в процессе урочной деятельности и показала хорошие результаты. В ходе реализации данного методического блока по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля» были использованы интерактивные лабораторные работы и соответствующий им дидактический материал. Обучающиеся с интересом знакомились с современными технологиями ИКТ и способами их применения при решении тригонометрических уравнений и отбора корней, принадлежащих заданному промежутку.

Таким образом можно сделать вывод о том, что предлагаемая методика обучения решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля может быть применена на практике в процессе обучения математики, в процессе организации элективных курсов по математике и при подготовке обучающихся к ЕГЭ 10-11 классов.

Список литературы

1. «1С:Урок» — портал с интерактивными наглядными учебными материалами, предназначенный для подготовки и проведения уроков учителями, а также для самостоятельной работы школьников. URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/grafiki_funktsiy/interaktivnye_issledovaniya/4483.phd. (Дата обращения 23.02.2023).
2. Аксанова И. И. Элективный курс: Решение уравнений и неравенств с модулем. URL: <http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2015/04/20/elektivnyy-kurs-reshenie-uravneniy-i-neravenstv-s-modulem>. (Дата обращения 25.02.2023).
3. Асмолов А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли / А. Г. Асмолов [и др.]. 2-е изд. М. : Просвещение, 2011. 159 с.
4. Бурмистрова Т. А. Сборник примерных рабочих программ по геометрии. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни. 4-е изд. М. : Просвещение, 2020. 159 с.
5. Виленкин Н. Я., Жохов В. И. Математика. 6 кл. М.: Просвещение, 2001. 158с.
6. Виленкин Н. Я., Иващев-Мусатов О. С., Шварцбург С. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень). 18-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2014. 312 с.
7. Захарова И. В., Кузенков О. А. Опыт реализации требований образовательных и профессиональных стандартов в области ИКТ в Российском образовании // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 3-1. С.17-31.

8. Зеленский А. С. Решение уравнений и неравенств с модулем / А. С. Зеленский, И. И. Панфилов. М. : Научно-технический центр «Университетский»: УНИВЕР-ПРЕСС, 2009. 112 с.

9. Зеленский А. С., Панфилов И. И. Решение уравнений и неравенств с модулем: учебное пособие. М. : Научно-технический центр «Университетский»: Универ - Пресс, 2013. 112 с.

10. Ильина С. Д. Графические решения уравнений, содержащих знак модуля. // Научно – методический Журнал Математика в школе. М. : издательство Школа- Пресс, 2001. № 8. С. 33-39.

11. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике 2023 года. URL: <https://vpr-ege.ru/images/ege/ege23-ma-kodifikator.pdf>. (Дата обращения 25.04.2023).

12. Корянов А. Г., Прокофьев А. А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. // Математика в школе. 2011. №1. С. 18-25.

13. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2023 года. МАТЕМАТИКА. Федеральный институт педагогических измерений, 2023. URL: <file:///C:/Users/Admin/Downloads/math.pdf>. (Дата обращения 25.04.2023).

14. Министерство образования и науки РФ. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст]. 4-е изд., перераб. Москва : Просвещение, 2016. 47 с.

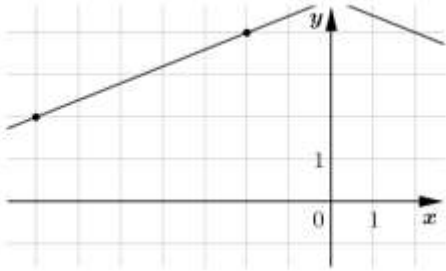
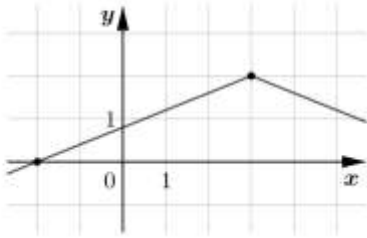
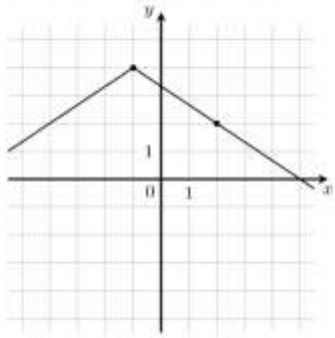
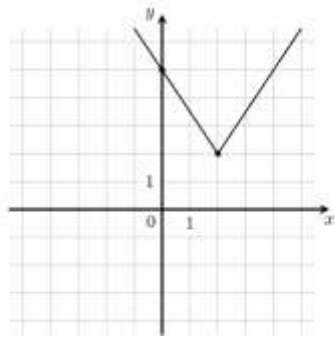
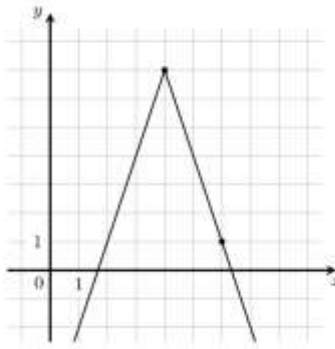
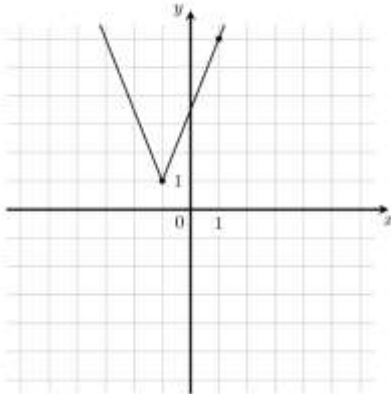
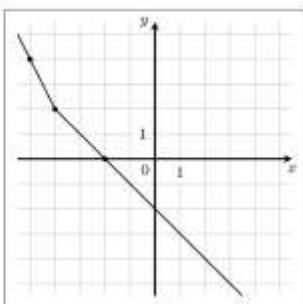
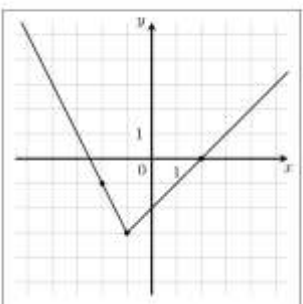
15. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 11 классы. В 2 ч. Ч. 1 Учеб. для общеобразоват. учреждений (проф. уровень). 6-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2012. 287 с.

16. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. Уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. 8-е изд. М. : Просвещение, 2009. 464 с.
17. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. Уровни. М. : Просвещение, 2009. 130 с.
18. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: <https://ege.sdamgia.ru/legal>. (Дата обращения 25.03.2023).
19. Олехник С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы : Учебно- метод. пособие. М. : Дрофа, 2001. 192 с.
20. Раконова Н. А. Педагогика современной школы: учебно-методическое пособие. Витебск : Издательство УО «ВГУ и. П. Ш. Машеров», 2009. 126 с.
21. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учеб.-метод. Пособие. М. : Илекса, Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2005. 112 с.
22. Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. // Научно – методический Журнал Математика в школе. М. : издательство Школа- Пресс, 2003. № 9. С. 25-36.
23. Трефилова Г. А. Рациональное решение уравнений и неравенств с модулем // Математика в школе, 2008. № 10. С. 29-30.
24. Фирер А. В. Элементарная математика. Уравнения и неравенства с модулем: учеб. пособие / А. В. Фирер, Е. Н. Яковлева, А. П. Елисова, Т. В. Захарова. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2020. 113 с.
25. Яковлев И. В., Малкова А. Г. Уравнения и неравенства с модулем. // Материалы по математике. MathUs.ru. URL: <http://docplayer.ru/27596962-Uravneniya-i-neravenstva-s-modulem.html>. (Дата обращения 25.03.2023).

Приложение

Приложение 1

Система упражнений по восстановлению функции, содержащих неизвестную под знаком модуля по её графику.

Задания 1 варианта	Задания 1 варианта
<p>На рисунке изображена часть графика функции $f(x) = k x + 6$. Найдите $f(10)$.</p> 	<p>На рисунке изображен график функции $f(x) = a x - b + c$. Найдите $f(18)$.</p> 
<p>На рисунке изображен график функции $f(x) = a x - b + c$. Найдите $f(-10)$.</p> 	<p>На рисунке изображен график функции $f(x) = a x - b + c$. Найдите $f(15)$.</p> 
<p>На рисунке изображен график функции $f(x) = a x - b + c$. Найдите $f(12)$.</p> 	<p>На рисунке изображен график функции $f(x) = a x - b + c$. Найдите $f(-8)$.</p> 
<p>На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax + bx + c + d$, где $b > 0$. Найдите $a + b + c + d$.</p> 	<p>На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax + bx + c + d$, где $b > 0$. Найдите $ad - bc$.</p> 

Тематическое планирование методического блока по обучению решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля

№	Тема занятия	Количество часов
1.	Модуль числа и его свойства. Решение уравнений с модулем, используя определение модуля. Используя метод равносильных переходов.	2
2.	Самостоятельная работа	1
3.	Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля методом интервалов	2
4.	Самостоятельная работа	1
5.	Построение графиков функций, содержащих знак модуля	2
6.	Самостоятельная работа	1
7.	Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.	2
8.	Самостоятельная работа	1
9.	Решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, входящие в состав ЕГЭ	2
10.	Самостоятельная работа	1
11.	Решение тригонометрических уравнений с модулем	2
12.	Самостоятельная работа	1
13.	Решение показательных уравнений и неравенств с модулем	2
14.	Самостоятельная работа	1
15.	Решение логарифмических уравнений и неравенств с модулем	2
16.	Самостоятельная работа	1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
20 » 09 20 22 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Арбузовой Марины Сергеевны

Тема работы «Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под
знаком модуля»

Утверждена приказом по Университету от «28» сентября 2022 г. № 805/о

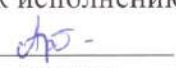
Срок сдачи студентом законченной работы « 04 » мая 20 23 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь 2022	Выполнено
2.	Рассмотрение основных методов решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.	Ноябрь 2022	Выполнено
3.	Проведение сравнительного анализа школьных учебников по математике в соответствии с рассматриваемой темой.	Декабрь 2022	Выполнено
4.	Разработка методического блока по решению уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля традиционным способом, а также с использованием современных технологий обучения.	Январь-февраль 2023	Выполнено
5.	Разработка методического блока по решению уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля при подготовке к ЕГЭ и блока по решению уравнений и неравенств того же типа, функционально-графическим способом, с использованием информационно-коммуникационных технологий.	Март-апрель 2023	Выполнено
6.	Оформление работы.	Май 2023	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2023	Выполнено

Дата выдачи задания «20» сентября 2022 г.

Руководитель  Никитин Н.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  Арбузова М.С.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Арбузовой Марины Сергеевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Арбузова Марина Сергеевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
15.05.23
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 15.05.23
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
подпись Н.Д. Никитин

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: «Методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля» студентки 4 курса Арбузовой Марины Сергеевны направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля «Математика»
Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Арбузова Марина Сергеевна
Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://online.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 65
Начало загрузки: 15.05.2023 16:24:17
Длительность загрузки: 00:00:22
Имя исходного файла: ВКР.docx
Название документа: ВКР Арбузова
Размер текста: 55 Кб
Тип документа: Дипломная работа
Символов в тексте: 56696
Слов в тексте: 7127
Число предложений: 260

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 15.05.2023 16:24:40
Длительность проверки: 00:00:21
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы содержания: с. 1, основная часть с. 2-49, библиография с. 49, приложение с. 50-51
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс*, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по Интернету, Перефразирование по Интернету (EN), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



совпадения
33,7%

самоцитирование
0%

цитирование
1,7%

оригинальность
64,5%

15.05.2023
дд.мм.гггг.

подпись

Н.Д. Никитин

Никитин Николай Дмитриевич