

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
Профиль «Математика»
Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

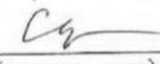
«Изучение свойств алгебры циклических чисел
на факультативных занятиях в школе»

Студент


(подпись, дата)

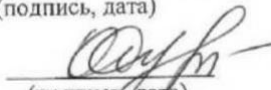
Бурлаков Валерий Михайлович
(ФИО полностью)

Руководитель


(подпись, дата)

Султанов Адгам Яхиевич
(ФИО полностью)

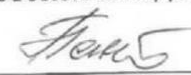
Нормоконтролёр


(подпись, дата)

Сурина Ольга Петровна
(ФИО полностью)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.20 № 9)

Заведующий кафедрой


(подпись)

Паньженский В. И.

Работа защищена с отметкой отлично (протокол заседания ГЭК от 23.06.20
№ 6)

Секретарь ГЭК



Сурина О. П.

Пенза 2020

Оглавление

1. Введение	3
2. Глава 1. Векторные пространства над полем	7
3. Глава 2. Линейные алгебры над полем	16
4. Глава 3. Алгебры циклических чисел	27
5. Глава 4. Приложения циклических алгебр в элементарной математике	48
6. Заключение.	63
7. Список использованной литературы	64

Введение

Выпускная квалификационная работа «Изучение свойств циклических чисел на факультативных занятиях в школе» посвящена одному из разделов современной алгебры, а именно теории линейных алгебр, и того её фрагмента, который относится к групповым алгебрам с базовой группой Z_m .

Исторически первой линейной алгеброй была *алгебра комплексных чисел*. Комплексные числа $z = x + \sqrt{-1}y$ впервые появились в XVI веке при решении уравнений третьей и четвёртой степени. Но, в отсутствии какого-либо наглядного образа, эти числа почитались *надуманными, мнимыми*, хотя со временем комплексные числа стали важнейшим инструментом в самых разных областях математики. Ситуация изменилась на рубеже XVIII – XIX веков, когда ряд математиков, в том числе Гаусс и Коши, независимо друг от друга, интерпретировали комплексные числа как точки евклидовой плоскости. При этом свойства комплексных чисел были настолько хорошо согласованы с планиметрией, что некоторые геометрические задачи при помощи комплексных чисел решались проще, чем традиционными методами [3].

При такой интерпретации комплексных чисел естественно возникала задача поиска *гиперкомплексных чисел*, которые можно было бы отождествлять с точками трёхмерного пространства. Эту задачу в середине XIX века решил ирландский математик Уильям Гамильтон. Хотя его *гиперкомплексные числа* $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, которые он назвал *кватернионами*, соответствовали точкам четырёхмерного пространства, кватернионам вида $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ можно было сопоставить точки трёхмерного пространства; такие кватернионы Гамильтон назвал *векторами*. Обобщением алгебры кватернионов стали *линейные алгебры*.

Линейные алгебры строятся над векторными пространствами. Теория векторных пространств, имеющая своим истоком кватернионы Гамильтона, приобрела законченную форму в начале XX века благодаря работам Оливера Хевисайда, Уилларда Гиббса, Морица Паша, Эдмона Лагерра, Джузеппе Пеано и ряда других математиков. Под векторным пространством стали понимать множество, для элементов которого была определена одна “внутрен-

няя” операция сложения и одна “внешняя” операция умножения на число. И в таком абстрактном виде теория линейных пространств стала основой для разных математических дисциплин, от евклидовой геометрии [1] до теории дифференциальных и интегральных уравнений [2].

Если, структуру линейного пространства дополнить ещё одной “внутренней” операцией, дистрибутивной относительно сложения векторов, то полученная структура станет частным случаем структуры кольца; в неё включены кольца, у которых центр содержит некоторое поле. Такая структура получила название *линейных алгебр*, или просто *алгебр* [3], [11]. Элементы этой структуры представляют собой непосредственное обобщение комплексных чисел и кватернионов. И так же как поле комплексных чисел и тело кватернионов, различные линейные алгебры находят приложения в геометрии и во многих других разделах математики и теоретической физики [2].

Приложения линейных алгебр к проблемам современной геометрии развивались учёными Казанской геометрической школы А. П. Котельниковым, А. П. Норденом, А. П. Широковым, В. В. Вишневым, В. В. Шурыгиным и др., а также геометрами Москвы, Саратова, Пензы, Грозного, и так далее. Основные работы этих учёных относились с одной стороны к общей теории *коммутативных алгебр*, с другой стороны – к геометрическим приложениям гиперкомплексных чисел Гамильтона, Грассмана и Клиффорда.

Данная выпускная работа посвящена изучению одного достаточно широкого класса коммутативных алгебр, а именно *циклических алгебр*, или *алгебр циклических чисел различных порядков*. Эти алгебры представляют собой обобщение *алгебры двойных чисел*, или *алгебры комплексных гиперболических чисел* вида $z = x + \varepsilon y$, где $\varepsilon^2 = 1$ (в отличие от комплексных чисел вида $z = x + iy$, где $i^2 = -1$). Они изучались казанскими геометрами, и нашли различные приложения в теории неевклидовых пространств, а также в некоторых вопросах теоретической физики.

Некоторые положения, приведённые в данной работе, могут быть использованы в педагогической практике в средних школах и гимназиях с углублённым изучением математики, а так же во внеклассной работе матема-

тических кружков и факультативных занятий. Это, прежде всего, относится и изучению метрических и конфигурационных свойств многоугольников.

Заметим ещё, что включение элементов теории алгебр (и в том числе циклических алгебр) в программы факультативов и кружков (а также дополнительных курсов школ с углублённым изучением математики) целесообразно в том случае, если учащиеся имеют представление о комплексных числах, и знакомы с приложениями комплексных чисел в геометрии [4]. В этом случае линейные алгебры предстают как некоторое обобщение поля комплексных чисел.

Степень разработанности проблемы: понятие линейной алгебры даётся в разных учебных пособиях для педагогических вузов и университетов, например в книге И. Р. Шафаревича «Основные понятия алгебры». Знакомство с некоторыми алгебрами, такими как алгебры комплексных чисел, кватернионов и октав предполагается и на факультативных занятиях в средних школах, а также в программах школ с углублённым изучением математики.

Противоречие исследования: некоторый отрыв материала по линейным алгебрам от стандартной школьной программы по математике.

Проблема исследования: заключается в выборе материала доступного школьникам, углублённо изучающим математику.

Объект исследования: адаптация основ теории линейных алгебр к факультативным занятиям школьников.

Предмет исследования: один из классов линейных алгебр, имеющий интересные приложения в элементарной математике.

Цель исследования: рассмотреть теоретические вопросы, касающиеся циклических алгебр и их приложений в элементарной математике.

Гипотеза исследования: в работе предполагается определить доступный школьникам объём материала и структуру приложений циклических алгебр в элементарной математике.

Задачи исследования:

1. Изучение материала по теории циклических алгебр.
2. Использование приложений циклических алгебр для развития абстрактного мышления и пространственной интуиции школьников.

3. Определение направления практического применения изученного теоретического материала.

4. Анализ возможности эффективного усвоения материала по теории циклических алгебр.

5. Оценка качества полученных знаний на практическом учебном материале факультативных занятий.

Структура работы: выпускная работа состоит из оглавления, введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе конспективно излагается теория линейных или векторных пространств, так как эта теория даёт базу для построения любых линейных алгебр.

Вторая глава посвящена общей теории линейных алгебр. В ней приводятся основные понятия, относящиеся к этой теории. И даются примеры линейных алгебр, иллюстрирующие те или иные их свойства, и конструкции, присущие произвольным алгебрам.

В третьей главе дано краткое описание основных свойств и особенностей циклических алгебр (или алгебр циклических чисел). И эти свойства иллюстрируются на конкретных примерах алгебр циклических чисел различных порядков.

Наконец, четвёртая глава посвящена некоторым приложениям циклических алгебр к вопросам элементарной математики. В частности, композиционное свойство детерминантов циклических чисел даёт ряд элементарно-алгебраических тождеств, а существование в циклических алгебрах делителей нуля позволяет просто доказывать различные конфигурационные теоремы о многоугольниках, аналогичные известной теореме Вариньона о серединном параллелограмме произвольного четырёхугольника.

В заключении указывается возможность приложений алгебр циклических чисел различного порядка к изучению геометрии пространств с неевклидовой метрической структурой.

Базовый материал исследования даётся в первой и второй главах.

Глава 1. Векторные пространства над полем

1. Определение 1.1. *Линейным или векторным пространством V над полем P называется множество, снабжённое внутренней бинарной операцией $V \times V \rightarrow V$, которая называется сложением, и для любых $v_1, v_2 \in V$ обозначается $v_1 + v_2$, и внешней бинарной операцией $P \times V \rightarrow V$, которая называется умножением на элементы поля, и для любых $a \in P$ и $v \in V$ обозначается av . Элементы множества V называются векторами, а элементы поля P – скалярами. При этом сложение векторов и умножение их на скаляры удовлетворяет следующим аксиомам [5]:*

А) Сложение векторов превращает V в коммутативную (абелеву) группу. Её нулевой элемент обозначается 0 ; элемент, обратный к $v \in V$ обозначают $-v$.

Б) Умножение векторов на скаляры унитарно, то есть $1v = v$ для любого $v \in V$, и для любых $a, b \in P$ ассоциативно, то есть $a(bv) = (ab)v$.

В) Сложение и умножение связаны законами дистрибутивности, то есть

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 \quad \text{и} \quad (a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$$

для любых $v, v_1, v_2 \in V$ и любых $a, a_1, a_2 \in P$.

Из этих аксиом вытекают некоторые простые следствия.

а) $0v = 0$ для любых $v \in V$. Действительно $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$, откуда $0v = 0$ по свойству сокращения в абелевой группе.

б) $(-1)v = -v$. Действительно $v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$, откуда получается, что $(-1)v$ вектор обратный вектору v .

в) Если $av = 0$, то либо $a = 0$, либо $v = 0$. В самом деле, если $a \neq 0$, то $0 = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1v = v$.

г) Как и во всякой группе для сложения векторов справедлив так называемый обобщенный закон ассоциативности для операции сложения.

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ произвольная система векторов при $n \geq 3$. Составим выражение $v_1 + v_2 + \dots + v_n$. В этом выражении составим скобки произвольным образом. Например, в выражении $v_1 + v_2 + v_3$ это можно сделать двумя способами:

$$(v_1 + v_2) + v_3 \quad \text{и} \quad v_1 + (v_2 + v_3),$$

(внешние скобки не учитываются). В выражении $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ способов расстановки скобок больше чем 2:

$$(v_1 + v_2 + v_3) + v_4, (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4), v_1 + ((v_2 + v_3) + v_4), v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4))$$

и так далее. Можно доказать, что все выражения равны «стандартному» выражению $(v_1 + v_2 + v_3) + v_4$. Возьмём $(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4)$ и преобразуем его используя ассоциативный закон сложения:

$$(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) = ((v_1 + v_2) + v_3) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4 = (v_1 + (v_2 + v_3)) + v_4$$

Аналогично поступим и с выражением $v_1 + (v_2 + (v_3 + v_4)) = (v_1 + v_2) + (v_3 + v_4)$, для которого мы уже показали, что $(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) = (v_1 + v_2 + v_3) + v_4$. И так далее.

Методом математической индукции можно доказать, что любое выражение, полученное из выражения $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ расстановкой скобок равно «стандартному» выражению $(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + v_n$. Это свойство и называется обобщённым законом ассоциативности.

Действительно, по аксиоме ассоциативности, справедливом в любой группе, для $n = 3$ имеем $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.

Предположим теперь, что для $n = k$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1} + v_k = (v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1}) + v_k.$$

Покажем, что это тождество справедливо и для $n = k + 1$. Пусть в выражении $v_1 + v_2 + \dots + v_k + v_{k+1}$ скобки расставлены так:

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_m) + (v_{m+1} + \dots + v_{k+1})$$

Возможны два случая: 1) $m = k$ и 2) $m < k$. В случае 1) это будет уже «стандартное» выражение. А в случае по предположению

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2 + \dots + v_m) + (v_{m+1} + \dots + v_{k+1}) &= (v_1 + v_2 + \dots + v_m) + ((v_{m+1} + \dots + v_k) + v_{k+1}) = \\ &= ((v_1 + v_2 + \dots + v_m) + (v_{m+1} + \dots + v_k)) + v_{k+1} = (v_1 + \dots + v_m + v_{m+1} + \dots + v_k) + v_{k+1}, \end{aligned}$$

Что и доказывает свойство обобщённой ассоциативности по индукции.

д) Для любых $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и любого $a \in P$

$$a(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = av_1 + av_2 + \dots + av_n.$$

Докажем это тождество по индукции. Действительно, из аксиомы В) следует, что $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$. Предположим, что это тождество справедливо для

$n = k$, то есть $a(v_1 + v_2 + \dots + v_k) = av_1 + av_2 + \dots + av_k$ и покажем, что оно будет справедливо для $n = k + 1$, то есть $a(v_1 + v_2 + \dots + v_{k+1}) = av_1 + av_2 + \dots + av_{k+1}$. Действительно

$$\begin{aligned} a(v_1 + v_2 + \dots + v_{k+1}) &= a((v_1 + v_2 + \dots + v_k) + v_{k+1}) = \\ &= a(v_1 + v_2 + \dots + v_k) + av_{k+1} = av_1 + av_2 + \dots + av_k + av_{k+1}, \end{aligned}$$

Что и доказывает тождество $a(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = av_1 + av_2 + \dots + av_n$ по индукции.

е) Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{P}$ и $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ на основании обобщённого закона ассоциативности однозначно определено выражение

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

которое называется линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ с коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{P}$.

Примерами линейных пространств будут:

1) Поле $\mathbf{P}$.

2) Декартово произведение

$$\mathbf{P}^n = \underbrace{\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \dots \times \mathbf{P}}_n,$$

где операция сложения векторов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n), u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{P}^n$ определена по правилу $v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n)$, а умножение вектора v на число $a \in \mathbf{P}$ задано так: $av = (av_1, av_2, \dots, av_n)$.

Если $\mathbf{P}$ поле вещественных чисел $\mathbf{R}$, то $\mathbf{R}^n$ называется вещественным арифметическим пространством, а если $\mathbf{P}$ поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}^n$ называется комплексным арифметическим пространством [6].

3) Множество $\mathbf{M}_{n \times m}$ вещественных (или комплексных) прямоугольных матриц с n строками и m столбцами с операциями (покомпонентного) сложения и умножения на число.

4) Множество $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ вещественных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с операциями сложения и умножения на число. При этом под суммой $f + g$ функций f и g понимается функция, определённая условием $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ для всех $x \in D(f) \cap D(g)$, где $D(f)$ и $D(g)$ области определения функций f и g .

g . Аналогично под функцией af , где $a \in \mathbf{P}$, понимается функция, определённая условием $(af)(x) = af(x)$ для всех $x \in D(f)$.

5) Множество $\mathbf{F}(\mathbf{C})$ комплексных функций $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ с операциями сложения и умножения на число.

Линейными пространствами будут также множества $\mathbf{F}^0(\mathbf{R})$ непрерывных функций, $\mathbf{F}^1(\mathbf{R})$ дифференцируемых функций, $\mathbf{F}^k(\mathbf{R})$ k раз дифференцируемых функций, $\mathbf{F}^\omega(\mathbf{R})$ аналитических функций (то есть функций, представленных сходящимися рядами).

2. Определение 2.1. Семейство векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ называется *линейно зависимым*, если можно найти такой ненулевой набор скаляров $a_1, a_2, \dots, a_n$, что $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. В противном случае семейство $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ векторов называется *линейно независимым*.

Лемма (о линейной зависимости). а) Семейство векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов $\mathbf{v}_k$ является линейной комбинацией остальных.

б) Если семейство векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ линейно независимо, а семейство векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ линейно зависимо, то вектор $\mathbf{v}_{n+1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Доказательство. а) Если $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ и $a_k \neq 0$, тогда $\mathbf{v}_k = -a_k^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \dots - a_k^{-1}a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} - a_k^{-1}a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \dots - a_k^{-1}a_n\mathbf{v}_n$.

Наоборот, если $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$, то $\mathbf{v} - a_1\mathbf{v}_1 - a_2\mathbf{v}_2 - \dots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

б) Если $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n + a_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}$ и не все a_k равны нулю, то обязательно $a_{n+1} \neq 0$, иначе бы мы получили нетривиальную линейную зависимость между векторами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Поэтому $\mathbf{v}_{n+1} = -a_{n+1}^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \dots - a_{n+1}^{-1}a_n\mathbf{v}_n$.

Лемма доказана.

Определение 3.1. Семейство векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ в линейном пространстве V называется (конечным) *базисом* этого пространства, если каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ однозначно представляется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n.$$

При этом скаляры $x_k \in \mathbf{P}$ называются *координатами вектора* $x \in V$ в данном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Вообще говоря, любое (ненулевое) линейное пространство имеет множество базисов, однако имеет место следующая теорема.

Теорема (о базисе). Если линейное пространство V имеет конечный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, то любой другой базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$ содержит такое же количество векторов, то есть $m = n$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ некоторый базис пространства V . Покажем, что никакое семейство векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$ с $m > n$ не может служить базисом V по следующей причине: существует представление нулевого вектора $\theta = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_m e'_m$ в котором не все x_k равны нулю. Поэтому θ неоднозначно представляется в виде линейной комбинации векторов e'_k : всегда существует тривиальное представление $\theta = 0e'_1 + 0e'_2 + \dots + 0e'_m$.

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку этим мы проверим, что никакой базис не может содержать больше элементов, чем другой базис. Положим

$$e'_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Тогда для любых $x_k \in \mathbf{P}$ имеем

$$\sum_{k=1}^m x_k e'_k = \sum_{k=1}^m x_k \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right) e_i$$

Поскольку $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис в V , нулевой вектор имеет единственное представление. Поэтому условие

$$\sum_{k=1}^m x_k e'_k = \theta$$

равносильно системе однородных линейных уравнений относительно x_k

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} x_k = 0.$$

И так как число неизвестных m больше числа уравнений n , эта система имеет ненулевое решение. Теорема доказана.

Из этой теоремы проистекает следующее определение.

Определение 4.1. Пространство V называется *конечномерным*, если оно имеет конечный базис, а количество векторов базиса называется размерностью этого пространства и обозначается $\dim V$. Линейные пространства, у которых нет конечного базиса, называются бесконечномерными.

3. Определение 5.1. Подмножество W линейного пространства V называется *линейным подпространством*, если оно само является линейным пространством по отношению к определённым в пространстве V операциям сложения векторов и умножения вектора на число [7].

Можно показать, что для того чтобы непустое подмножество W линейного пространства V было его линейным подпространством, достаточно выполнения следующих требований.

Критерий подпространства.

1) Если $a, b \in W$, то и $a + b \in W$.

2) Если $a \in W$, то и $sa \in W$ для любого скаляра $s \in \mathbf{P}$.

Действительно, в силу 2) $0 \in W$, так как $0a = 0$. Далее из 2) следует, что для любого $a \in W$, $-a = (-1)a \in W$, а потому и для любых $a, b \in W$, $a - b \in W$. Что же касается всех остальных требований, входящих в определение линейного пространства, то они, выполняясь в V , будут выполняться и в W .

Отсюда сразу следует, что пересечение подпространств линейного пространства будет подпространством этого пространства.

Определение 6.1. *Линейной оболочкой* семейства векторов пространства V называется множество их всевозможных линейных комбинаций в V .

Из предыдущего замечания следует, что линейная оболочка любого множества векторов пространства V есть линейное подпространство в V . Отсюда проистекает следующая конструкция.

Определение 7.1. Пусть $W_1, \dots, W_m$ подпространства в пространстве V . Суммой $W_1, \dots, W_m$ называется их линейная оболочка, что обозначают так

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m = \sum_{k=1}^m W_k.$$

Следующая теорема связывает размерность суммы двух подпространств и их пересечения.

Теорема (о размерности суммы подпространств). Если W_1, W_2 подпространства в пространстве V , то

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \quad (1,1)$$

Доказательство. Пусть $\dim W_1 \cap W_2 = m$, $\dim W_1 = n$ и $\dim W_2 = p$. Выберем в $W_1 \cap W_2$ некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ и дополним его до базисов $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n$ и $e_1, e_2, \dots, e_m, e''_{m+1}, \dots, e''_p$ пространств W_1 и W_2 .

Докажем, что семейство векторов $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n, e''_{m+1}, \dots, e''_p$ образует базис пространства $W_1 + W_2$. Так как любой вектор из $W_1 + W_2$ будет линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n, e''_{m+1}, \dots, e''_p$, нам остаётся проверить, что система векторов $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n, e''_{m+1}, \dots, e''_p$ линейно независима.

Предположим, что существует нетривиальная линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^m x_i e_i + \sum_{k=1}^n y_k e'_k + \sum_{j=1}^p z_j e''_j = 0.$$

Тогда обязательно должны существовать индексы h и r , для которых $y_h \neq 0$ и $z_r \neq 0$: иначе мы получили бы нетривиальную линейную зависимость между элементами базиса W_1 или W_2 . Следовательно, ненулевой вектор

$$\sum_{j=1}^p z_j e''_j \in W_2$$

должен лежать в $W_1 \cap W_2$, так как

$$\sum_{j=1}^p z_j e''_j = -\sum_{i=1}^m x_i e_i - \sum_{k=1}^n y_k e'_k$$

и поэтому он представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$, а следовательно вектора $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n$ линейно зависимы, что противоречит их определению. А из того, что $e_1, e_2, \dots, e_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n, e''_{m+1}, \dots, e''_p$ есть базис пространства $W_1 + W_2$, следует, что

$$\dim(W_1 + W_2) = n + p - m = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема приводит к одной конструкции, специализирующей конструкцию суммы подпространств.

Определение 8.1. Пусть W_1 и W_2 подпространства линейного пространства V . Тогда подпространство $W_1 + W_2 \subset V$ называется *прямой суммой подпространств* W_1 и W_2 , и обозначается $W_1 \oplus W_2$, если каждый его вектор единственным образом представляется в виде $x + y$, где $x \in W_1$, $y \in W_2$ [8].

Имеет место следующее утверждение.

Теорема (о прямой сумме). Подпространство $W_1 + W_2 \subset V$ тогда и только тогда является прямой суммой подпространств W_1 и W_2 когда их пересечение содержит только нулевой вектор.

Доказательство. Если для $x, x_1 \in W_1$ и $y, y_1 \in W_2$ имеет место равенство $x + y = x_1 + y_1$, то вектор $x - x_1 = y - y_1 \in W_1 \cap W_2$. Поэтому, если пересечение $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, то $x = x_1$ и $y = y_1$, то есть представление каждого вектора из $W_1 + W_2$ в виде $x + y$, где $x, x_1 \in W_1$ и $y, y_1 \in W_2$ единственно.

Обратно, если $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, и $a \in W_1 \cap W_2$, $a \neq 0$, то для любых векторов $x \in W_1$ и $y \in W_2$ будет иметь место равенство $x + y = (x + a) + (y - a)$, показывающее, что представление векторов из $W_1 + W_2$ в виде $x + y$, где $x \in W_1$, а $y \in W_2$ не единственно.

4. Рассмотрим ещё одну конструкцию, связанную с подпространствами линейных пространств.

Определение 9.1. Пусть W произвольное подпространство линейного пространства V . Вектора $x, y \in V$ называются *сравнимыми по модулю W* , если $x - y \in W$. В этом случае пишут $x \equiv y \pmod{W}$.

Отношение сравнимости является отношением эквивалентности. Соответствующие классы сравнимых по модулю W векторов называются смежными классами пространства V по подпространству W . Класс, содержащий вектор x , состоит из всех векторов вида $x + a$, где $a \in W$; этот класс обозначают $x + W$.

Сравнения можно складывать и умножать на скаляры, то есть если

$$x \equiv y \pmod{W} \text{ и } x_1 \equiv y_1 \pmod{W}, \text{ то } x + x_1 \equiv y + y_1 \pmod{W}, \text{ и } kx \equiv ky \pmod{W}.$$

Действительно, если $x - y \in W$ и $x_1 - y_1 \in W$, то

$$(x + x_1) - (y + y_1) = (x - y) + (x_1 - y_1) \in W$$

и, аналогично, $kx - ky = k(x - y) \in W$.

Для смежных классов это означает, что формулы

$$(x + W) + (y + W) = (x + y) + W \quad \text{и} \quad k(x + W) = kx + W \quad (2,1)$$

корректно определяют их сумму и произведение на число. При этом такие операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства, и, следовательно множество смежных классов линейного пространства V по его подпространству W образуют линейное пространство, которое называется факторпространством линейного пространства V по его подпространству W . Обозначается оно символом V/W .

Теорема (о факторпространствах) Если $V = W_1 \oplus W_2$, то W_2 изоморфно V/W_1 .

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi: W_2 \rightarrow V/W_1$, определённое формулой $\varphi(x) = x + W_1$ для любого $x \in W_2$. Если $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, то есть $x + W_1 = x_1 + W_1$, то $x - x_1 \in W_1$, а значит $x = x_1$.

С другой стороны, любой вектор $z \in V$ однозначно представляется суммой $z = x + y$, где $x \in W_1$, а $y \in W_2$ и потому $z + W_1 = x + W_1$. То есть отображение $\varphi: W_2 \rightarrow V/W_1$ биективное. Кроме того оно сохраняет сумму и произведение на число, и потому это отображение есть изоморфизм.

Глава 2. Линейные алгебры над полем

1. Определение 1.2. *Линейной алгеброй* над полем $\mathbf{P}$ называется линейное пространство A , если на этом пространстве задана операция умножения векторов, то есть билинейное отображение $\varphi: A \times A \rightarrow A$. При этом вектора линейного пространства алгебры A называются её элементами [3], [9].

По традиции произведение $\varphi(a, b)$ будет обозначаться так $\varphi(a, b) \equiv a \cdot b$ для любых векторов $a, b \in A$. Тогда билинейность произведения приобретёт следующий вид:

$$(ra + hb) \cdot (kc + qd) = rk(a \cdot c) + rq(a \cdot d) + hk(b \cdot c) + hq(b \cdot d).$$

В дальнейшем линейные алгебры будут рассматриваться только над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ и потому скаляры будем называть числами. При этом, если необходимо уточнить поле над которым рассматривается алгебра, то будут применяться такие обозначения: $A(\mathbf{R})$ для вещественных алгебр и $A(\mathbf{C})$ для комплексных алгебр.

Алгебра A называется конечномерной, если A , как линейное пространство, конечномерно; и его размерность называется размерностью алгебры. Мы будем в основном рассматривать конечномерные алгебры, и алгебру размерности n будем обозначать A_n .

Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства алгебры A_n называется и базисом алгебры. И тогда любой элемент $x \in A_n$ будет записываться так:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

где числа x_k называются координатами элемента $x \in A_n$.

Запишем произведение базисных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ алгебры A_n :

$$e_k \cdot e_h = \sum_{m=1}^n c_{khm} e_m, \quad (1,2)$$

коэффициенты c_{khm} называются структурными константами. Они определяют произведения любых элементов алгебры A_n : если

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ и } y = \sum_{k=1}^n y_k e_k,$$

то

$$\begin{aligned} z = x \cdot y &= \left(\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{h=1}^n y_h \mathbf{e}_h \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n x_k y_h \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n x_k y_h \left(\sum_{m=1}^n c_{khm} \mathbf{e}_m \right) = \sum_{m=1}^n z_m \mathbf{e}_m, \end{aligned}$$

то есть

$$z_m = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n x_k y_h c_{khm}.$$

2. Определение 2.2. а) Алгебра A_n называется коммутативной, если для любых $x, y \in A_n$ справедливо тождество $x \cdot y = y \cdot x$.

б) Алгебра A_n называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in A_n$ справедливо тождество $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

в) Алгебра A_n называется унитарной (или унитарной), если существует элемент $e \in A_n$, такой, что $e \cdot x = x \cdot e = x$ для любых $x \in A_n$. При этом элемент e называется единицей алгебры.

Если алгебра A_n коммутативная, то структурные константы удовлетворяют тождеству $c_{khm} = c_{hkm}$. Действительно, так как

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = \sum_{m=1}^n c_{khm} \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{m=1}^n c_{hkm} \mathbf{e}_m,$$

то $c_{khm} = c_{hkm}$. Пусть теперь алгебра A_n ассоциативная, тогда

$$(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h) \cdot \mathbf{e}_r = \sum_{m=1}^n c_{khm} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_r = \sum_{m=1}^n c_{khm} \left(\sum_{l=1}^n c_{mrl} \right) \mathbf{e}_l,$$

и

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_r) = \sum_{m=1}^n c_{hrm} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^n c_{hrm} \left(\sum_{l=1}^n c_{kml} \right) \mathbf{e}_l,$$

поэтому

$$\sum_{m=1}^n c_{khm} \left(\sum_{l=1}^n c_{mrl} \right) = \sum_{m=1}^n c_{hrm} \left(\sum_{l=1}^n c_{kml} \right).$$

Определение 3.2. Элемент $a \in A_n$ унитарной алгебры A_n называется обратимым, если найдётся такой элемент $a^{-1} \in A_n$, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Если $a \in A_n$ обратимый элемент, то элементарные линейные уравнения $a \cdot x = b$, $x \cdot a = b$ и $a \cdot x \cdot b = c$ имеют единственное решение. Для первого

уравнения $x = a^{-1} \cdot b$, для второго – $x = b \cdot a^{-1}$, наконец для третьего уравнения решение имеет такой вид: $x = a^{-1} \cdot c \cdot b^{-1}$.

Множество обратимых элементов ассоциативной алгебры A_n образуют группу относительно умножения, так как произведение обратимых элементов $a, b \in A_n$ будет снова обратимым элементом $a \cdot b \in A_n$, где $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, при этом умножение ассоциативно, и очевидно единица алгебры – элемент обратимый. Группа обратимых элементов называется регулярной группой данной ассоциативной алгебры.

Определение 4.2. Отличный от нуля элемент $a \in A_n$ называется делителем нуля, если найдётся не равный нулю элемент $b \in A_n$ такой, что $a \cdot b = 0$.

Нетрудно видеть, что делитель нуля в ассоциативной алгебре элемент необратимый. Действительно, если предположить, что делитель нуля $a \in A_n$ обратим, то умножив тождество $a \cdot b = 0$ на a^{-1} мы получим, что $b = 0$.

3. Приведём примеры линейных алгебр.

А) Поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ само будет вещественной одномерной линейной алгеброй над самим полем $\mathbf{R}$

Б) Поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ будет комплексной одномерной линейной алгеброй над самим полем $\mathbf{C}$.

С другой стороны $\mathbf{C}$ является двумерной алгеброй над полем $\mathbf{R}$. В этом случае базисом будет единица и мнимая единица i для которой $i^2 = -1$. Таким образом, произведение комплексных чисел имеет такой вид:

$$c \cdot z \equiv (a + ib) \cdot (x + iy) = (ax - by) + (bx + ay)i. \quad (2,2)$$

Отсюда следует, что $\mathbf{C}$ это коммутативная и ассоциативная алгебра над $\mathbf{R}$, и каждое (ненулевое) комплексное число $c = a + ib$ обратимо, где

$$c^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}, \text{ так как } c \cdot c^{-1} = \frac{(a + ib)(a - ib)}{a^2 + b^2} = 1.$$

Таким образом, регулярную группу алгебры $\mathbf{C}$ образуют все ненулевые комплексные числа.

Комплексное число $\bar{c} = a - ib$ называется сопряжённым к $c = a + ib$, и для произведения комплексных чисел получается, что $c\bar{c} = a^2 + b^2$. Отсюда

следует такое тождество: $\overline{(cz)}(cz) = (c\bar{z})(z\bar{z})$. Расписанное в координатах оно называется “тождеством двух квадратов” и имеет такой вид:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2.$$

В) Алгебра кватернионов $\mathbf{H}$ над полем действительных чисел. Базис этой алгебры образует единица и элементы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, а произведение определяется следующими структурными тождествами: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, и

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

Таким образом, произведение кватернионов имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) = \\ &= (a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3) + (a_1x_0 + a_0x_1 - a_3x_2 + a_2x_3)\mathbf{i} + \\ &+ (a_2x_0 + a_3x_1 + a_0x_2 - a_1x_3)\mathbf{j} + (a_3x_0 - a_2x_1 + a_1x_2 + a_0x_3)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3,2)$$

Отсюда получается такое замечательное тождество:

$$(x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

При этом кватернион $\bar{\mathbf{x}} = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}$ называется сопряжённым к кватерниону $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

Очевидно алгебра $\mathbf{H}$ некоммутативная. Но можно прямым вычислением показать, что умножение кватернионов ассоциативно [10]. Кроме того, каждый (ненулевой) кватернион $\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ имеет обратный:

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}}.$$

Таким образом, регулярную группу алгебры $\mathbf{H}$ образуют все ненулевые кватернионы. Ассоциативность умножения кватернионов приводит к одному любопытному тождеству. Так как $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{-1}$, то $\overline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}}$, и потому

$$\overline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \bar{\mathbf{b}} \cdot (\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a})(\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{b}).$$

В координатах это тождество имеет такой вид:

$$\begin{aligned} (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)^2 + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)^2 + \\ &+ (a_2b_0 + a_3b_1 + a_0b_2 - a_1b_3)^2 + (a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)^2, \end{aligned}$$

и называется “тождеством четырёх квадратов”, аналогично “тождеству двух квадратов” [10]. Алгебра $\mathbf{H}$ была открыта Гамильтоном в 1843 году.

Г) Множество $\mathbf{M}[n]$ квадратных матриц $n \times n$ относительно сложения матриц, умножения матриц на числа и умножения матриц. Это ассоциативная и некоммутативная алгебра размерности n^2 . Некоммутативность умножения видна, например, из таких соотношений:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Регулярную группу образуют матрицы с определителем отличным от нуля, так как такие матрицы и только они имеют обратные, с другой стороны произведение матриц с определителем отличным от нуля будет матрицей с определителем отличным от нуля, так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц сомножителей.

Д) В качестве последнего примера рассмотрим целый класс алгебр, которые называются групповыми алгебрами. Они определяются следующим образом. Пусть $\mathbf{G}_n$ некоторая конечная группа и $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ её элементы, тогда формальные линейные комбинации $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2 + \dots + x_n \mathbf{g}_n$, где x_k вещественные или комплексные числа, образуют линейную алгебру, умножение элементов которой индуцируется умножением элементов группы базовой $\mathbf{G}_n$. Обозначим групповые алгебры $\mathbf{R}(\mathbf{G}_n)$ или $\mathbf{C}(\mathbf{G}_n)$.

4. Рассмотрим линейное уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ в алгебре $\mathbf{A}_n$. Это уравнение эквивалентно системе линейных скалярных уравнений

$$\sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k c_{k h m} \right) x_h = b_m \quad \text{или} \quad \sum_{h=1}^n A_{h m} x_h = b_m, \quad (4,2)$$

где $A_{km} = \sum_{k=1}^n a_k c_{k h m}$, а $c_{k h m}$ структурные константы алгебры $\mathbf{A}_n$.

Определение 5.2. Определитель системы линейных скалярных уравнений (4,2) будем называть левым детерминантом элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$ и обозначать

$$\Delta_L(\mathbf{a}) = \det[A_{h m}],$$

где $[A_{h m}]$ матрица коэффициентов системы уравнений (4,2).

Рассмотрим ещё линейное уравнение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ в алгебре $\mathbf{A}_n$. Это уравнение эквивалентно системе линейных скалярных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{h=1}^n a_h c_{khm} \right) x_k = b_m \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n A_{km} x_k = b_m, \quad (5,2)$$

где $A_{hm} = \sum_{h=1}^n a_h c_{khm}$, а c_{khm} структурные константы алгебры A_n .

Определение 6.2. Определитель системы линейных скалярных уравнений (5,2) будем называть правым детерминантом элемента $\mathbf{a} \in A_n$ и обозначать

$$\Delta_R(\mathbf{a}) = \det[A_{km}],$$

где $[A_{km}]$ матрица коэффициентов системы уравнений (5,2).

Очевидно, что для коммутативных алгебр детерминанты $\Delta_L(\mathbf{a})$ и $\Delta_R(\mathbf{a})$, и в этом случае пишут $\Delta(\mathbf{a}) = \Delta_L(\mathbf{a}) = \Delta_R(\mathbf{a})$.

Для примера возьмём (коммутативную) алгебру комплексных чисел. Из тождества (2,2) получаем, что

$$\Delta(a + ib) = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2.$$

Возьмём теперь алгебру кватернионов. Из тождества (3,2) получаем

$$\Delta_L(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &= (x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) \cdot (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) = \\ &= (x_0 a_0 - x_1 a_1 - x_2 a_2 - x_3 a_3) + (x_1 a_0 + x_0 a_1 - x_3 a_2 + x_2 a_3) \mathbf{i} + \\ &+ (x_2 a_0 + x_3 a_1 + x_0 a_2 - x_1 a_3) \mathbf{j} + (x_3 a_0 - x_2 a_1 + x_1 a_2 + x_0 a_3) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta_R(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2.$$

Алгебра кватернионов некоммутативная, однако, для элементов этой алгебры детерминанты $\Delta_L(\mathbf{a})$ и $\Delta_R(\mathbf{a})$ совпадают, хотя матрицы этих определителей различные. Но это исключение, в общем случае $\Delta_L(\mathbf{a}) \neq \Delta_R(\mathbf{a})$.

Возьмем, например, алгебру $\mathbf{K}_3$, элементами которой будут линейные комбинации $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, а умножение определяется следующими структурными тождествами:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1.$$

Очевидно, что алгебра $\mathbf{K}_3$ некоммутативна. Для неё

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)(x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = \\ & = a_0x_0 + a_0x_1\mathbf{e}_1 + a_0x_2\mathbf{e}_2 + a_1x_0\mathbf{e}_1 + a_1x_1 + a_1x_2\mathbf{e}_1 + a_2x_0\mathbf{e}_2 + a_2x_1\mathbf{e}_2 + a_2x_2 = \\ & = (a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + (a_1x_0 + a_0x_1 + a_1x_2)\mathbf{e}_1 + (a_2x_0 + a_2x_1 + a_0x_2)\mathbf{e}_2, \\ & \Delta_L(a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \\ & = a_0^3 + a_2a_1^2 + a_1a_2^2 - a_0a_2^2 - a_0a_1^2 - a_0a_1a_2. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} & (x_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)(a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) = \\ & = x_0a_0 + x_0a_1\mathbf{e}_1 + x_0a_2\mathbf{e}_2 + x_1a_0\mathbf{e}_1 + x_1a_1 + x_1a_2\mathbf{e}_1 + x_2a_0\mathbf{e}_2 + x_2a_1\mathbf{e}_2 + x_2a_2 = \\ & = (a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + (a_1x_0 + a_0x_1 + a_2x_1)\mathbf{e}_1 + (a_2x_0 + a_0x_2 + a_1x_2)\mathbf{e}_2, \\ & \Delta_R(a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 + a_2 & 0 \\ a_2 & 0 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = \\ & = a_0(a_0 + a_1)(a_0 + a_2) - a_2^2(a_0 + a_2) - a_1^2(a_0 + a_1) = \\ & = a_0^3 + (a_1 + a_2)a_0^2 + a_0a_1a_2 - a_1^3 - a_2^3 - a_1^2a_0 - a_2^2a_0. \end{aligned}$$

Таким образом $\Delta_L(a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \neq \Delta_R(a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)$. Кстати, $\mathbf{K}_3$, даёт пример неассоциативной алгебры, так как, например

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \text{а} \quad (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \neq (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2.$$

5. Определение 7.2. а) Подпространство V_m линейного пространства алгебры A_n называется подалгеброй, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_m$ их произведение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in V_m$.

б) Подпространство $V_m \subset A_n$ называется левым идеалом в алгебре A_n , если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in V_m$ для любых $\mathbf{b} \in V_m$ и для любых $\mathbf{a} \in A_n$.

в) Подпространство $B_m \subset A_n$ называется правым идеалом в алгебре A_n , если $b \cdot a \in B_m$ для любых $b \in B_m$ и для любых $a \in A_n$.

г) Подпространство $B_m \subset A_n$ называется двусторонним идеалом в алгебре A_n , если B_m является одновременно левым и правым идеалом.

Примером подалгебры для любой унитарной (унитарной) алгебры является поле, над которым рассматривается данная алгебра. В частности поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ будет подалгеброй алгебры комплексных чисел $\mathbf{C}$ и кватернионов $\mathbf{H}$.

Множество $\mathbf{C}(i) \subset \mathbf{H}$ кватернионов вида $x + yi$ будет подалгеброй алгебры кватернионов. Подалгебрами в $\mathbf{H}$ будут также множества $\mathbf{C}(j)$ и $\mathbf{C}(k)$ кватернионов вида $x + yj$ и кватернионов вида $x + yk$. И вообще для любого фиксированного $h \in \mathbf{H}$ множество $\mathbf{C}(h)$ кватернионов вида $x + yh$ будет подалгеброй в алгебре кватернионов.

Нетрудно видеть, что приведённые выше подалгебры не являются идеалами. Для того чтобы привести примеры левых и правых идеалов мы обратимся к алгебре $\mathbf{M}[n]$ квадратных матриц. Обозначим $\mathbf{M}_1[n]$ множество матриц следующего вида:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{M}_1[n]$ будет подалгеброй в $\mathbf{M}[n]$, так как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Покажем, что $\mathbf{M}_1[n]$ будет левым идеалом в алгебре $\mathbf{M}[n]$. Действительно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_1[n].$$

Обозначим теперь $\mathbf{M}^1[n]$ множество матриц следующего вида:

$$\mathbf{m}^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{M}^1[n]$ будет подалгеброй в $\mathbf{M}[n]$, так как

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\mathbf{M}^1[n]$ будет правым идеалом в алгебре $\mathbf{M}[n]$. Действительно

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \dots + a_{n1}b_{1n} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} + \dots + a_{n2}b_{1n} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}^1[n].$$

6. Приведём теперь примеры некоторых алгебр, которые не являются конечномерными, но играют важную роль в разных разделах математики.

а) Множество $\mathbf{P}[x]$ многочленов от одной переменной

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (6,2)$$

Очевидно, что $\mathbf{P}[x]$ является коммутативной, ассоциативной и унитарной алгеброй. При этом обратимыми будут только ненулевые многочлены нулевой степени.

б) Множество $\mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ многочленов от m переменных

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m \leq n} a_{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}; \quad (7,2)$$

в формуле (7,2) суммирование ведётся по всем наборам $k_1, k_2, \dots, k_m$, для которых сумма натуральных чисел $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$. Очевидно, что множество $\mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ многочленов от m переменных является коммутативной, ассоциативной и унитарной алгеброй. При этом обратимыми будут только ненулевые многочлены нулевой степени.

Если в алгебре $\mathbf{P}[x]$ зафиксировать некоторый многочлен $f(x)$, то множество $\mathbf{J}(f(x))$ многочленов $p_n(x)f(x)$, где $p_n(x)$ какие угодно многочлены из $\mathbf{P}[x]$, будет двусторонним идеалом в алгебре $\mathbf{P}[x]$. Действительно если $g(x), h(x) \in \mathbf{J}(f(x))$, то это означает, что $g(x) = p_n(x)f(x)$ и $h(x) = q_m(x)f(x)$, а потому $g(x) + h(x) = (p_n(x) + q_m(x))f(x) \in \mathbf{J}(f(x))$ и для любого многочлена $r_k(x) \in \mathbf{P}[x]$ и какого угодно многочлена $g(x) = p_n(x)f(x) \in \mathbf{J}(f(x))$ мы будем иметь $r_k(x)g(x) = r_k(x)p_n(x)f(x) \in \mathbf{J}(f(x))$.

Аналогично, если в алгебре $\mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ зафиксировать некоторый многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то множество $\mathbf{J}(f(x_1, x_2, \dots, x_m))$ многочленов $p_n(x_1, x_2, \dots, x_m)f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $p_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ какие угодно многочлены из $\mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_m]$, будет двусторонним идеалом в алгебре $\mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_m]$.

Определение 8.2. Пусть A алгебра над полем $\mathbf{P}$ и J двусторонний идеал в данной алгебре, то факторпространство A/J называется факторалгеброй, если для любых элементов $a + J, b + J \in A/J$ определить умножение по следующей формуле:

$$(a + J) \cdot (b + J) = a \cdot b + J \in A/J. \quad (8,2)$$

Формула (8,2) определена корректно в силу определения двустороннего идеала и дополняет формулы (2,1) до определения структуры линейной алгебры на множестве классов A/J .

Легко видеть, что сопоставление элементу $a \in A$ класса $a + J \in A/J$ является гомоморфизмом $F: A \rightarrow A/J$, который называется каноническим [11]. То есть $F(a) = a + J$, и при этом

$$F(a + b) = a + b + J, \quad F(za) = za + J, \quad F(a \cdot b) = a \cdot b + J,$$

для любых $a, b \in A$ и любых $z \in P$.

Приведём примеры факторалгебр.

А) Пусть $P = R$, и $R[x]$ алгебра вещественных многочленов одной переменной, и пусть $f(x) = x^2 + 1$. Тогда факторалгебра $R[x]/J(x^2 + 1)$ изоморфна полю комплексных чисел C , причём $i \in C$ есть образ x в факторалгебре $R[x]/J(x^2 + 1)$, и $a + ib$ образ $a + bx$ [11].

Б) Пусть $P = R$, и $R[x]$ алгебра вещественных многочленов одной переменной, и пусть $f(x) = x^2$. Тогда факторалгебра $R[x]/J(x^2)$ изоморфна алгебре *дуальных чисел* $R_2(\omega)$, то есть двумерной алгебре, элементами которой будут суммы $a + b\omega$, где $a, b \in R$, а $\omega \notin R$, но $\omega^2 = 0$ [12].

В) Пусть $P = R$, и $R[x]$ алгебра вещественных многочленов одной переменной, и пусть $f(x) = x^m$. Тогда $R[x]/J(x^m)$ изоморфна алгебре *плуральных чисел* $R_m(\omega)$, то есть m -мерной алгебре, элементами которой будут суммы $a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_{m-1}\omega^{m-1}$, где $a_k \in R$, а $\omega \notin R$, но $\omega^2 = 0$ [9].

Г) Пусть $P = C$, и $C[x]$ алгебра комплексных многочленов одной переменной, и пусть $f(x) = x^2 - 1$. Тогда факторалгебра $C[x]/J(x^2)$ изоморфна алгебре *двойных комплексных чисел* или *тесарионов* $C_2(\varepsilon)$, то есть двумерной алгебре, элементами которой будут суммы $a + b\varepsilon$, где $a, b \in C$, а $\varepsilon \notin C$, но $\varepsilon^2 = 1$ [13]. Если же в этой конструкции заменить поле C на поле R , то факторалгебра $R[x]/J(x^2)$ будет изоморфна алгебре $R_2(\varepsilon)$ *двойных вещественных чисел* $a + b\varepsilon$, где $a, b \in R$, а $\varepsilon \notin R$ [9], [13].

Большое разнообразие алгебр делает целесообразным изучение отдельных их классов, которые имеют те или иные приложения. В следующей главе мы рассмотрим один класс алгебр.

Глава 3. Алгебры циклических чисел

1. Определение 1.3. Циклическими числами порядка m над полем $\mathbf{P}$ называются формальные линейные комбинации такого вида

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + \dots + x_{m-1} \varepsilon^{m-1}, \quad (1,3)$$

где $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbf{P}$, а дополнительный элемент ε и его степени $\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$ не принадлежат полю $\mathbf{P}$, но $\varepsilon^m = 1$.

Для таких формальных сумм можно определить покомпонентное сложение и умножение, дистрибутивное относительно сложения, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &\equiv (a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_{m-1} \varepsilon^{m-1}) \times \\ &\times (x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + \dots + x_{m-1} \varepsilon^{m-1}) = \\ &= (a_0 x_0 + a_{m-1} x_1 + a_{m-2} x_2 + \dots + a_2 x_{m-2} + a_1 x_{m-1}) + \\ &+ (a_1 x_0 + a_0 x_1 + a_{m-1} x_2 + \dots + a_3 x_{m-2} + a_2 x_{m-1}) \varepsilon + \\ &+ (a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2 + \dots + a_4 x_{m-2} + a_3 x_{m-1}) \varepsilon^2 + \dots + \\ &+ (a_{m-2} x_0 + a_{m-3} x_1 + a_{m-4} x_2 + \dots + a_0 x_{m-2} + a_{m-1} x_{m-1}) \varepsilon^{m-2} + \\ &+ (a_{m-1} x_0 + a_{m-2} x_1 + a_{m-3} x_2 + \dots + a_1 x_{m-2} + a_0 x_{m-1}) \varepsilon^{m-1}. \end{aligned} \quad (2,3)$$

Определение 2.3. Коммутативную и ассоциативную алгебру с умножением, определённым тождеством (2,3), при условии, что единица, дополнительный элемент ε и его степени $\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$ линейно независимы, обозначают $\mathbf{P}_m(\varepsilon)$ (или кратко $\mathbf{P}_m$) и называют *циклической алгеброй порядка m* над полем $\mathbf{P}$ а циклические числа – элементами алгебры $\mathbf{P}_m(\varepsilon)$. При этом алгебра $\mathbf{P}_m(\varepsilon)$ унитарная, и её единицей будет единица поля $\mathbf{P}$ [9].

В дальнейшем мы будем рассматривать только алгебры циклических чисел либо над полем $\mathbf{R}$, либо над полем $\mathbf{C}$. Число $x_0 \in \mathbf{P}$ называют *скаляром* циклического числа $\mathbf{x}$ и обозначают $s(\mathbf{x})$, а линейную комбинацию элементов $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$ называют *дополнением* (также *дополнительной* или *псевдомнимой* частью) числа $\mathbf{x}$ и обозначают $\text{pr } \mathbf{x} = x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + \dots + x_{m-1} \varepsilon^{m-1}$.

Заметим ещё, что алгебра циклических чисел $\mathbf{P}_m(\varepsilon)$ изоморфна факторалгебре $\mathbf{P}[x]/\mathbf{J}(x^m - 1)$.

2. Первым делом рассмотрим в алгебре двойных чисел $\mathbf{P}_2(\epsilon)$ линейное уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Оно эквивалентно системе скалярных уравнений

Поэтому для детерминанта числа $\mathbf{a} \in \mathbf{P}_\gamma(\varepsilon)$ получаем

Отсюда видно, что элемент $\mathbf{a} \in \mathbf{P}_2(\varepsilon)$ обратим тогда и только тогда, когда $\Delta(\mathbf{a}) \neq 0$, то есть, когда $a_0 \neq \pm a_1$. В этом случае система (3,3) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

Аналогичная ситуация имеет место и для любых алгебр $\mathbf{P}_m(\mathfrak{E})$. В силу (2,3) линейное уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Эквивалентно системе

Поэтому для детерминанта числа $\mathbf{a} \in \mathbf{P}_m(\mathfrak{E})$ получаем

$$\Delta_m(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{m-1} & \dots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_4 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} & \dots & a_0 & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (5,3)$$

Элемент $\mathbf{a} \in \mathbf{P}_m(\mathfrak{E})$ обратим тогда и только тогда, когда $\Delta_m(\mathbf{a}) \neq 0$. В этом случае система (4,3), а вместе с ней и уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Вычислим для примера $\Delta_3(\mathbf{a})$ и $\Delta_4(\mathbf{a})$:

$$\Delta_3(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2,$$

$$\Delta_4(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^4 - a_1^4 + a_2^4 - a_3^4 - 2a_0^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 -$$

$$- 4a_0^2a_1a_3 + 4a_1^2a_0a_2 - 4a_2^2a_1a_3 + 4a_3^2a_0a_2.$$

С ростом порядка m вычисление детерминантов $\Delta_m(\mathbf{a})$ становится технически трудной задачей. Поэтому желательно иметь общую формулу для вычисления $\Delta_m(\mathbf{a})$. Такая формула даётся следующей теоремой.

Теорема (о циркулянтах). Определители вида (5,3) называются *циркулянтами* и для их вычисления справедливо тождество [14]:

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_k \right) \equiv$$

$$\equiv (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1})(x_0 + \alpha_m x_1 + \alpha_m^2 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}) \times$$

$$\times (x_0 + \alpha_m^2 x_1 + \alpha_m^4 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-2} x_{m-1}) \dots (x_0 + \alpha_m^{m-2} x_1 + \alpha_m^{m-4} x_2 + \dots + \alpha_m^2 x_{m-1}) \times$$

$$\times (x_0 + \alpha_m^{m-1} x_1 + \alpha_m^{m-2} x_2 + \dots + \alpha_m x_{m-1}), \quad (6,3)$$

где $\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m) \equiv \sqrt[m]{1}$ – комплексный примитивный корень m -той степени из единицы.

Идею доказательства мы сначала поясним на примере. И для этого вычислим следующее произведение определителей

$$\begin{aligned} V(\alpha_3)\Delta_3(\mathbf{x}) &\equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \\ 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_0 + x_1 + x_2 & x_0 + x_1 + x_2 & x_0 + x_1 + x_2 \\ x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2 & \alpha_3(x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2) & \alpha_3^2(x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2) \\ x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2 & \alpha_3^2(x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2) & \alpha_3(x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2) \end{vmatrix} = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2)(x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \\ 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad (7,3) \end{aligned}$$

и так как $V(\alpha_3) = 3(\alpha_3^2 - \alpha_3) \neq 0$, то мы из тождества (7,3) получаем, что

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2)(x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2)$$

Для доказательства леммы в общем виде рассмотрим определитель Вандермонда, составленный из степеней комплексного числа α_m :

$$V(\alpha_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-1} \\ 1 & \alpha_m^2 & \alpha_m^4 & \dots & \alpha_m^{m-4} & \alpha_m^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-4} & \dots & \alpha_m^4 & \alpha_m^2 \\ 1 & \alpha_m^{m-1} & \alpha_m^{m-2} & \dots & \alpha_m^2 & \alpha_m \end{vmatrix}$$

и умножим его на детерминант произвольного элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_m(\mathfrak{E})$

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix}$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned}
& V(\alpha_m) \Delta_m(\mathbf{x}) = \\
& = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} x_k \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \alpha_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \alpha_m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \dots & \alpha_m^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^4 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \dots & \alpha_m^{m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \dots & \alpha_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \end{vmatrix} \\
& = \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \right) \dots \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \right) V(\alpha_m)
\end{aligned}$$

и так как для определителя Вандермонда [14]

$$V(\alpha_m) = \prod_{p>q} (\alpha_m^p - \alpha_m^q) \neq 0,$$

то

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \right) \dots \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что формула (6,3) справедлива как для комплексных циклических чисел, так и для вещественных циклических алгебр. И для вещественных циклических алгебр детерминант естественно будет вещественно величиной, а комплексные числа α_m в этом случае имеют вспомогательный характер и при перемножении линейных множителей дают вещественные квадратичные множители. Подобно тому, как в тождестве

$$x^4 - y^4 = (x + y)(x - y)(x + iy)(x - iy) = (x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$$

исчезает мнимая единица i .

Из формулы (6,3) получаются разложения на линейные и квадратичные множители некоторых многочленов. Например

$$\begin{aligned}
\Delta_3(\mathbf{x}) &= x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = \\
&= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \alpha_3x_1 + \alpha_3^2x_2)(x_0 + \alpha_3^2x_1 + \alpha_3x_2) = \\
&= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_0) =
\end{aligned}$$

$$= (x_0 + x_1 + x_2)((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_0)^2)/2,$$

где $\alpha_3 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = (-1 + \sqrt{3}i)/2$. Другие тождества будут приведены в последней главе.

3. Для двойного числа $x = x_0 + x_1\epsilon \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ число $\bar{x} = x_0 - x_1\epsilon \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ (по аналогии с комплексными числами) называется *сопряжённым*, а переход от $x \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ к $\bar{x} \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ называется *оператором сопряжения*.

Роль оператора сопряжения определяется таким тождеством:

$$x \cdot \bar{x} \equiv (x_0 + x_1\epsilon) \cdot (x_0 - x_1\epsilon) = x_0^2 - x_1^2 \quad (8,3)$$

то есть произведение двойного числа на сопряжённое ему двойное число будет просто числом. При этом нетрудно видеть, что оператор сопряжения является *инволютивным автоморфизмом* алгебры двойных чисел, то есть

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{x}} = x \quad (9,3)$$

для любых $x, y \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$.

Естественно возникает вопрос: какая конструкция будет обобщением оператора сопряжения в произвольных циклических алгебрах? Ответ на этот вопрос для комплексных циклических чисел даёт следующее определение.

Определение 3.3. Для любого $x = x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots + x_{m-1}\epsilon^{m-1} \in \mathbf{C}_m(\epsilon)$ циклическое число $x(\alpha_m) = x_0 + \alpha_m x_1\epsilon + \alpha_m^2 x_2\epsilon^2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}\epsilon^{m-1} \in \mathbf{C}_m(\epsilon)$ мы будем называть *резольвентой* циклического числа x , а оператор, переводящий циклическое число x в циклическое число $x(\alpha_m)$ – *резольвентным оператором*, или *оператором резольвенты*, и обозначать $\hat{\alpha}_m : \mathbf{C}_m(\epsilon) \rightarrow \mathbf{C}_m(\epsilon)$.

Применяя несколько раз к циклическому числу $x \in \mathbf{C}_m(\epsilon)$ резольвентный оператор, мы получим резольвенту k – того порядка

$$\hat{\alpha}_m^k(x) \equiv \underbrace{\hat{\alpha}_m(\hat{\alpha}_m(\dots(\hat{\alpha}_m(\hat{\alpha}_m(x))\dots))}_k = x(\alpha_m^k),$$

и для единообразия иногда будем писать $x \equiv x(1)$.

Нетрудно видеть, что резольвентный оператор является *мультиинволютивным* (m – того порядка) *автоморфизмом*, то есть

$$\hat{\alpha}_m(x + y) = \hat{\alpha}_m(x) + \hat{\alpha}_m(y), \quad \hat{\alpha}_m(x \cdot y) = \hat{\alpha}_m(x) \cdot \hat{\alpha}_m(y) \quad \text{и} \quad \hat{\alpha}_m^m(x) = x, \quad (10,3)$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ произвольные комплексные циклические числа.

Первое и последнее из этих тождеств очевидно, а среднее доказывается непосредственным перемножением резольвент. Например

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_3(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_3(\mathbf{y}) &\equiv (x_0 + \alpha_3 x_1 \epsilon + \alpha_3^2 x_2 \epsilon^2) \cdot (y_0 + \alpha_3 y_1 \epsilon + \alpha_3^2 y_2 \epsilon^2) = \\ &= (x_0 y_0 + x_2 y_1 + x_1 y_2) + \alpha_m (x_1 y_0 + x_0 y_1 + x_2 y_2) \epsilon + \alpha_m^2 (x_2 y_0 + x_1 y_1 + x_0 y_2) \epsilon^2 = \\ &= \hat{\mathbf{a}}_3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\end{aligned}$$

Заметим ещё, что мультиинволютивными автоморфизмами будут и резольвентные операторы любых порядков, хотя порядок инволютивности у них может быть меньшим m .

Очевидно, что в алгебре двойных чисел резольвентный оператор совпадает с оператором сопряжения, так как $\alpha_2 = -1$. Так что оператор резольвенты можно считать обобщением на произвольные циклические алгебры оператора сопряжения из алгебры двойных чисел. И так как резольвентный оператор обобщает оператор сопряжения, то можно предположить, что в циклических алгебрах произвольного порядка должны присутствовать тождества, аналогичные тождеству (8,3).

Такие тождества на самом деле существуют в любых циклических алгебрах, но прежде чем мы их предъявим, нам надо будет рассмотреть некоторые свойства резольвент циклических чисел.

4. Возьмём в произвольной циклической алгебре следующий элемент:

$$\epsilon_0 = \frac{1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{m-1}}{m}.$$

Нетрудно видеть, что этот элемент является *идемпотентом*, то есть удовлетворяет тождеству $\epsilon_0^2 \equiv \epsilon_0 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_0$; мы назовём его *главным идемпотентом алгебры $\mathbf{P}_m(\epsilon)$* . И основным свойством главного идемпотента, которое и определяет его роль в теории циклических алгебр, является тождество:

$$\epsilon_0 \cdot \mathbf{x} = \text{sp}(\mathbf{x}) \epsilon_0, \quad (11,3)$$

где величина $\text{sp}(\mathbf{x}) \equiv \text{sp}(x_0 + x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2 + \dots + x_{m-1} \epsilon^{m-1}) = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}$ называется *следом* циклического числа $\mathbf{x}$.

Рассмотрим теперь резольвенты всех степеней $\epsilon_0 \in \mathbf{C}_m(\epsilon)$:

Теорема (о строении циклических алгебр).

$$\mathbf{C}_m(\mathfrak{E}) \cong \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}}_m, \quad (17,3)$$

то есть алгебра $\mathbf{C}_m$ есть прямая сумма m полей комплексных чисел.

Для доказательства достаточно указать, что для любых

$$\mathbf{x} = x_0 \mathfrak{E}_0 + x_1 \mathfrak{E}_1 + \dots + x_{m-1} \mathfrak{E}_{m-1}, \quad \mathbf{y} = y_0 \mathfrak{E}_0 + y_1 \mathfrak{E}_1 + \dots + y_{m-1} \mathfrak{E}_{m-1} \in \mathbf{C}_m$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_0 + y_0) \mathfrak{E}_0 + (x_1 + y_1) \mathfrak{E}_1 + \dots + (x_{m-1} + y_{m-1}) \mathfrak{E}_{m-1},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_0 y_0 \mathfrak{E}_0 + x_1 y_1 \mathfrak{E}_1 + \dots + x_{m-1} y_{m-1} \mathfrak{E}_{m-1},$$

и потому любые алгебраические действия с циклическими числами в изотропном базисе производятся покомпонентно.

Из этой теоремы получается одно важное утверждение.

Следствие (из теоремы о строении циклических алгебр). Для любого комплексного циклического числа $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_m$ справедливо такое тождество

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}). \quad \square \quad (18,3)$$

Для доказательства заметим, что действие резольвентного оператора в изотропном базисе сводится к циклической подстановке координат, то есть для любого $\mathbf{y} = y_0 \mathfrak{E}_0 + y_1 \mathfrak{E}_1 + y_2 \mathfrak{E}_2 + \dots + y_{m-2} \mathfrak{E}_{m-2} + y_{m-1} \mathfrak{E}_{m-1} \in \mathbf{C}_m$

$$\hat{\alpha}_m(\mathbf{y}) = y_0 \mathfrak{E}_1 + y_1 \mathfrak{E}_2 + y_2 \mathfrak{E}_3 + \dots + y_{m-2} \mathfrak{E}_{m-1} + y_{m-1} \mathfrak{E}_0. \quad (19,3)$$

Возьмём теперь произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_m$, для него

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}) &= x'_0 x'_1 x'_2 \dots x'_{m-1} (\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \dots + \mathfrak{E}_{m-1}) = \\ &= \text{sp } \mathbf{x}(1) \text{sp } \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}) \text{sp } \mathbf{x}(\alpha_m^{m-2}) \dots \text{sp } \mathbf{x}(\alpha_m) = \prod_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_k \right) = \Delta_m(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

в силу (14,3), (15,3) и (19,3).

Формулу (18,3) можно считать обобщением тождества (8,3), так как для $m = 2$ мы имеем $\mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}(\alpha_2) = (x_0 + x_1 \mathfrak{E}) \cdot (x_0 - x_1 \mathfrak{E}) = x_0^2 - x_1^2 = \Delta_2(\mathbf{x})$.

Заметим ещё, что конструкцию резольвенты мы можем ввести в рассмотрение и в алгебрах $\mathbf{R}_m$, но она будет носить “вспомогательный характер”, подобно тому, как в алгебре многочленов $\mathbf{R}[x]$ мы в промежуточных выкладках можем использовать комплексные числа. Например, мы представим вещественнозначный многочлен $x^2 + 1$ как произведение комплексно-

значных двучленов $x+i$ и $x-i$. Так и вещественный многочлен $\Delta_m(\mathbf{x})$ мы в тождестве (18,3) представляем произведением комплекснозначных многочленов $\text{sp } \mathbf{x}(\alpha_m^k)$. Например, для $m=3$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}(\alpha_3) \cdot \mathbf{x}(\alpha_3^2) &= \\ (x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2) \cdot (x_0 + x_1\alpha_3\epsilon + x_2\alpha_3^2\epsilon^2) \cdot (x_0 + x_1\alpha_3^2\epsilon + x_2\alpha_3\epsilon^2) &= \\ = (x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2) \cdot ((x_0^2 - x_1x_2) + (x_2^2 - x_1x_0)\epsilon + (x_1^2 - x_2x_0)\epsilon^2) &= \\ = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = \Delta_3(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

так как $\alpha_3 + \alpha_3^2 = -1$.

5. Теперь мы введём ещё одну полезную конструкцию в алгебрах циклических чисел, которая опирается на формулу (19,3).

Определение 4.3. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_m(\epsilon)$ циклическое число

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}) \quad (20,3)$$

мы будем называть *сопряжённым* циклическому числу $\mathbf{x}$.

Нетрудно видеть, что для двойных чисел $\alpha_2 = -1$, и тогда согласно (20,3) $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\alpha_2) = x_0 - x_1\epsilon$, то есть оператор сопряжения, определённый по формуле (20,3) представляет собой (наряду с резольвентным оператором) обобщение сопряжения для двойных комплексных чисел.

Посмотрим, какими свойствами обладает сопряжение, определённое по формуле (20,3). Имеет место следующее предложение.

Теорема (о сопряжении). Для любых циклических чисел $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}_m$ справедливы тождества:

$$\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}} \quad (21,3), \quad \bar{\bar{\mathbf{x}}} = (\Delta_m(\mathbf{x}))^{m-2} \mathbf{x} \quad (22,3), \quad \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \Delta_m(\mathbf{x}) \quad (23,3).$$

Для доказательства тождества (21,3) заметим, что

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} &= \hat{\alpha}_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \hat{\alpha}_m^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \dots \cdot \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \\ &= \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\alpha}_m^2(\mathbf{x}) \cdot \dots \cdot \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\alpha}_m(\mathbf{y}) \cdot \hat{\alpha}_m^2(\mathbf{y}) \cdot \dots \cdot \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

доказательство тождества (22,3) выглядит так:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{x}}} &= \hat{\alpha}_m(\mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1})) \times \hat{\alpha}_m^2(\mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1})) \times \dots \times \\ &\times \hat{\alpha}_m^{m-1}(\mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1})) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}))^{m-2} = \end{aligned}$$

$$= (\Delta_m(\mathbf{x}))^{m-2} \mathbf{x}.$$

Например, для $m = 3$ мы будем иметь:

$$\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{a}}_3(\mathbf{x}(\alpha_3) \cdot \mathbf{x}(\alpha_3^2)) \cdot \hat{\mathbf{a}}_3^2(\mathbf{x}(\alpha_3) \cdot \mathbf{x}(\alpha_3^2)) = \mathbf{x}(\alpha_3^2) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_3) = (\Delta_m(\mathbf{x})) \mathbf{x},$$

а в случае $m = 4$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{a}}_4(\mathbf{x}(\alpha_4) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^2) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^3)) \cdot \hat{\mathbf{a}}_4^2(\mathbf{x}(\alpha_4) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^2) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^3)) \times \\ &\quad \times \hat{\mathbf{a}}_4^3(\mathbf{x}(\alpha_4) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^2) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^3)) = \\ &= \mathbf{x}(\alpha_4^2) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^3) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^3) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_4) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}(\alpha_4) \cdot \mathbf{x}(\alpha_4^2) = (\Delta_m(\mathbf{x}))^2 \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Наконец тождество (23,3) сразу следует из (18,3).

К слову, тождество $\overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}$ выполняется только в алгебре $\mathbf{C}_2(\mathfrak{E})$, а в произвольных алгебрах $\mathbf{C}_m(\mathfrak{E})$ это тождество не выполняется в силу (20,3).

Заметим теперь, что если $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_m(\mathfrak{E})$, то и $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_m(\mathfrak{E})$, так как перемножая вещественное циклическое число $\mathbf{x}$ на циклическое число $\bar{\mathbf{x}}$ мы получим вещественное число $\Delta_m(\mathbf{x})$, а потому $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1})$ будет вещественным циклическим числом.

Ещё заметим, что сопряжение в алгебрах $\mathbf{P}_m(\mathfrak{E})$ можно определить и не апеллируя к резольвентным операторам. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} & (x_0 + x_1 \mathfrak{E} + x_2 \mathfrak{E}^2 + \dots + x_{m-1} \mathfrak{E}^{m-1}) \cdot \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{vmatrix} x_1 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix} \mathfrak{E} + \begin{vmatrix} x_1 & x_0 & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix} \mathfrak{E}^2 + \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ x_2 & x_1 & \dots & x_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_1 \end{vmatrix} \mathfrak{E}^{m-1} \right) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

откуда, сравнивая с (23,3), мы видим, что

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix} \epsilon + \\ & + \begin{vmatrix} x_1 & x_0 & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix} \epsilon^2 + \dots + (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ x_2 & x_1 & \dots & x_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_1 \end{vmatrix} \epsilon^{m-1}. \end{aligned} \quad (24,3)$$

Например, для $x = x_0 + x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2 \in \mathbf{C}_3$ по формуле (24,3)

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 \end{vmatrix} \epsilon + \begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} \epsilon^2 = (x_0^2 - x_1 x_2) + (x_0^2 - x_1 x_2) \epsilon + (x_0^2 - x_1 x_2) \epsilon^2,$$

так что мы получаем

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2) & \left(\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 \end{vmatrix} \epsilon + \begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} \epsilon^2 \right) = \\ & = x_0 \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

с другой стороны по формуле (20,3)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_0 + \alpha_3 x_1 \epsilon + \alpha_m^2 x_2 \epsilon^2) \cdot (x_0 + \alpha_m^2 x_1 \epsilon + \alpha_3 x_2 \epsilon^2) = \\ &= (x_0^2 + x_1^2 \epsilon^2 + x_2^2 \epsilon + (\alpha_3 + \alpha_3^2) x_1 x_2 + (\alpha_3 + \alpha_3^2) x_0 x_2 \epsilon^2 + (\alpha_3 + \alpha_3^2) x_1 x_0 \epsilon = \\ &= (x_0^2 - x_1 x_2) + (x_0^2 - x_1 x_2) \epsilon + (x_0^2 - x_1 x_2) \epsilon^2. \end{aligned}$$

В алгебре двойных чисел обратное число к числу $x \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ выражается через сопряжённое число $\bar{x} \in \mathbf{P}_2(\epsilon)$ по формуле $x^{-1} = \bar{x} / \Delta_2(x)$. Аналогичная формула имеет место и для циклических алгебр любых порядков. То есть если $\Delta_m(x) \neq 0$ для $x \in \mathbf{P}_m(\epsilon)$, то

$$x^{-1} = (\Delta_m(x))^{-1} \bar{x}. \quad (25,3)$$

6. Выше мы рассматривали отдельно алгебры $\mathbf{C}_m(\epsilon)$ комплексных циклических чисел и алгебры $\mathbf{R}_m(\epsilon)$ вещественных циклических чисел. Однако, алгебры $\mathbf{R}_m(\epsilon)$ можно рассматривать и как подалгебры алгебр $\mathbf{C}_m(\epsilon)$.

В этом случае естественно поставить вопрос: как выглядят элементы $\mathbf{R}_m(\varepsilon) \subset \mathbf{C}_m(\varepsilon)$ в изотропном базисе алгебры $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$? Ответ на этот вопрос мы находим в формулах (15,3) и (16,3), так что

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + \dots + x_{m-1} \varepsilon^{m-1} = \\
&= x_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1}) + x_1(\varepsilon_0 + \alpha_m^{m-1} \varepsilon_1 + \alpha_m^{m-2} \varepsilon_2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{m-1}) + \\
&\quad + x_2(\varepsilon_0 + \alpha_m^{m-2} \varepsilon_1 + \alpha_m^{m-4} \varepsilon_2 + \dots + \alpha_m^2 \varepsilon_{m-1}) + \dots + \\
&\quad + x_{m-1}(\varepsilon_0 + \alpha_m \varepsilon_1 + \alpha_m^2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} \varepsilon_{m-1}) = \\
&= (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}) \varepsilon_0 + (x_0 + \alpha_m^{m-1} x_1 + \alpha_m^{m-2} x_2 + \dots + \alpha_m x_{m-1}) \varepsilon_1 + \\
&\quad + (x_0 + \alpha_m^{m-2} x_1 + \alpha_m^{m-4} x_2 + \dots + \alpha_m^2 x_{m-1}) \varepsilon_2 + \dots + \\
&\quad + (x_0 + \alpha_m x_1 + \alpha_m^2 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}) \varepsilon_{m-1} \equiv \\
&\equiv \varepsilon_0 \operatorname{sp} \mathbf{x} + \varepsilon_1 \operatorname{sp} \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1}) + \varepsilon_2 \operatorname{sp} \mathbf{x}(\alpha_m^{m-2}) + \dots + \varepsilon_{m-1} \operatorname{sp} \mathbf{x}(\alpha_m). \quad (26,3)
\end{aligned}$$

И необходимым и достаточным условием того, что $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_m(\varepsilon) \subset \mathbf{C}_m(\varepsilon)$ будет равенство $\overline{\operatorname{sp} \mathbf{x}(\alpha_m^k)} = \operatorname{sp} \mathbf{x}(\bar{\alpha}_m^k)$.

Заметим ещё, что если алгебру вещественных циклических чисел рассматривать независимо от алгебры комплексных циклических чисел, то мы не можем пользоваться изотропным базисом. Иначе говоря, в алгебрах вещественных циклических чисел, порядок которых больше двух, нет изотропного базиса, и потому алгебры $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ при $m > 2$ не являются прямыми суммами вещественных чисел. И лишь в алгебре $\mathbf{R}_2(\varepsilon)$ существует изотропный базис $\varepsilon_0 = (1 + \varepsilon)/2$ и $\varepsilon_1 = (1 - \varepsilon)/2$, так что $\mathbf{R}_2(\varepsilon) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$, и в связи с этим мы называем алгебру $\mathbf{R}_2(\varepsilon)$ *алгеброй двойных вещественных чисел*. В общем же случае строение алгебр $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ даётся таким изоморфизмом [9]:

$$\mathbf{R}_m(\varepsilon) = \begin{cases} \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \oplus \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}}_{k-1}, & \text{если } m = 2k \\ \mathbf{R} \oplus \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}}_k, & \text{если } m = 2k + 1 \end{cases}. \quad (27,3)$$

7. Ещё одной вещественной подалгеброй алгебры $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$ будет алгебра антициклических чисел $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon) \subset \mathbf{C}_m(\varepsilon)$. Эту подалгебру можно определить

как вещественную линейную оболочку, натянутую на единицу и следующие элементы алгебры $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha_{2m}\varepsilon, \quad \tilde{\varepsilon}^2 = \alpha_{2m}^2\varepsilon^2, \dots, \quad \tilde{\varepsilon}^{m-1} = \alpha_{2m}^{m-1}\varepsilon^{m-1}, \quad (28,3)$$

При этом имеет место тождество $\tilde{\varepsilon}^m = -1$, так как $\tilde{\varepsilon}^m = -1$.

Впрочем, так же как в случае алгебр $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ вещественных циклических чисел, алгебры $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ антициклических чисел можно определить независимо от алгебр $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$ как совокупность вещественных линейных комбинаций

$$x = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \dots + x_{m-1}\varepsilon^{m-1},$$

где $x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbf{R}$, а дополнительный элемент $\tilde{\varepsilon}$ и его степени $\tilde{\varepsilon}^2, \dots, \tilde{\varepsilon}^{m-1}$ линейно независимы и не принадлежат полю $\mathbf{C}$, но $\tilde{\varepsilon}^m = -1$.

Алгебры антициклических чисел $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ формально мало отличаются от алгебр циклических чисел $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$, но, по сути, эти алгебры дают нам две серии объектов с принципиально различными свойствами. Иначе говоря, в алгебрах $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ можно ввести в рассмотрение (почти) все конструкции алгебр $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$; как то: детерминант элементов, след, резольвенты, оператор сопряжения. Формально определения этих конструкций не будут отличаться от их определения в алгебрах $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$, и многие свойства перечисленных конструкций будут одинаковыми в алгебрах $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$, $\mathbf{C}_m(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$. В частности, сопряжение будет мультипликативным оператором, а детерминант антициклических чисел будет мультипликативной функцией, и вычислять его можно по формуле (1,9). И всё же $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ существенно различны.

С абстрактно-алгебраической точки зрения различия между алгебрами $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ заключаются в разном строении этих алгебр: если строение алгебры $\mathbf{R}_m(\varepsilon)$ даётся изоморфизмом (27,3), то для алгебры $\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon)$ справедлив следующий изоморфизм [9]:

$$\tilde{\mathbf{R}}_m(\varepsilon) = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}}_k, & \text{если } m = 2k \\ \mathbf{R} \oplus \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}}_k, & \text{если } m = 2k + 1 \end{cases}. \quad (29,3)$$

Однако формулы (27,3) и (28,3) не раскрывают глубинного различия между алгебрами $\tilde{\mathbf{R}}_m(\epsilon)$ и $\mathbf{R}_m(\epsilon)$. Более выпукло эти различия мы замечаем при сравнении детерминантов циклических и антициклических чисел.

Например, простейшей алгеброй циклических чисел является алгебра двойных вещественных чисел $\mathbf{R}_2(\epsilon)$, а простейшей алгеброй антициклических чисел будет алгебра $\tilde{\mathbf{R}}_2(\epsilon)$ изоморфная полю комплексных чисел. И если $\mathbf{x} = x_0 + x_1\epsilon \in \mathbf{R}_2(\epsilon)$, а $\tilde{\mathbf{x}} = x_0 + x_1\tilde{\epsilon} \in \tilde{\mathbf{R}}_2(\epsilon)$, то

$$\Delta_2(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2, \quad \text{а} \quad \Delta_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 + x_1^2.$$

В общем случае, если для $\mathbf{x} = x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2 + \dots + x_{m-1}\epsilon^{m-1} \in \mathbf{R}_2(\epsilon)$

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \dots & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_4 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-2} & x_{m-3} & x_{m-4} & \dots & x_0 & x_{m-1} \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_1 & x_0 \end{vmatrix}$$

то для $\tilde{\mathbf{x}} = x_0 + x_1\tilde{\epsilon} + x_2\tilde{\epsilon}^2 + \dots + x_{m-1}\tilde{\epsilon}^{m-1} \in \tilde{\mathbf{R}}_2(\tilde{\epsilon})$ мы будем иметь

$$\Delta_m(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_{m-1} & -x_{m-2} & \dots & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_{m-1} & \dots & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & -x_4 & -x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-2} & x_{m-3} & x_{m-4} & \dots & x_0 & -x_{m-1} \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_1 & x_0 \end{vmatrix}$$

так как $\tilde{\epsilon}^m = -1$.

Например, для $\tilde{\mathbf{x}} = x_0 + x_1\tilde{\epsilon} + x_2\tilde{\epsilon}^2 \in \tilde{\mathbf{R}}_3(\tilde{\epsilon})$ и $\tilde{\mathbf{y}} = y_0 + y_1\tilde{\epsilon} + y_2\tilde{\epsilon}^2 \in \tilde{\mathbf{R}}_3(\tilde{\epsilon})$

$$\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{y}} = (x_0y_0 - x_2y_1 - x_1y_2) + (x_1y_0 + x_0y_1 - x_2y_2)\tilde{\epsilon} + (x_2y_0 + x_1y_1 + x_0y_2)\tilde{\epsilon}^2,$$

и мы будем иметь

$$\Delta_3(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^3 - x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2$$

Возникает вопрос: как зная детерминант циклического числа вычислить детерминант антициклического числа? Или иначе, как найти формулу для вычисления детерминантов антициклических чисел?

Общую формулу для вычисления детерминанта элементов антициклических алгебр проще всего получить из тождества (6,3) представив алгебру антициклических чисел $\tilde{\mathbf{R}}_m(\tilde{\mathbf{\epsilon}})$ подалгеброй алгебры комплексных циклических чисел $\mathbf{C}_m(\mathbf{\epsilon})$, где $\tilde{\mathbf{\epsilon}} = \alpha_{2m}\mathbf{\epsilon}$. Тогда для любого элемента $\mathbf{x}$ антициклической алгебры мы будем иметь:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= x_0 + x_1\tilde{\mathbf{\epsilon}} + x_2\tilde{\mathbf{\epsilon}}^2 + \dots + x_{m-1}\tilde{\mathbf{\epsilon}}^{m-1} = \\ &= x_0 + \alpha_{2m}x_1\mathbf{\epsilon} + \alpha_{2m}^2x_2\mathbf{\epsilon}^2 + \dots + \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}\mathbf{\epsilon}^{m-1},\end{aligned}$$

откуда видно, что

$$\begin{aligned}\Delta_m(\tilde{\mathbf{x}}) &= \begin{vmatrix} x_0 & -x_{m-1} & -x_{m-2} & \dots & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_{m-1} & \dots & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & -x_4 & -x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-2} & x_{m-3} & x_{m-4} & \dots & x_0 & -x_{m-1} \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_0 & \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1} & \alpha_{2m}^{m-2}x_{m-2} & \dots & \alpha_{2m}^2x_2 & \alpha_{2m}x_1 \\ \alpha_{2m}x_1 & x_0 & \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1} & \dots & \alpha_{2m}^3x_3 & \alpha_{2m}^2x_2 \\ \alpha_{2m}^2x_2 & \alpha_{2m}x_1 & x_0 & \dots & \alpha_{2m}^4x_4 & \alpha_{2m}^3x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2m}^{m-2}x_{m-2} & \alpha_{2m}^{m-3}x_{m-3} & \alpha_{2m}^{m-4}x_{m-4} & \dots & x_0 & \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1} \\ \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1} & \alpha_{2m}^{m-2}x_{m-2} & \alpha_{2m}^{m-3}x_{m-3} & \dots & \alpha_{2m}x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} \alpha_{2m}^k x_k \right) \equiv (x_0 + \alpha_{2m}x_1 + \alpha_{2m}^2x_2 + \dots + \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}) \times \\ &\quad \times (x_0 + \alpha_m \alpha_{2m}x_1 + \alpha_m^2 \alpha_{2m}^2x_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}) \times \\ &\quad \times (x_0 + \alpha_m^2 \alpha_{2m}x_1 + \alpha_m^4 \alpha_{2m}^2x_2 + \dots + \alpha_m^{m-2} \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}) \dots \\ &\quad \times (x_0 + \alpha_m^{m-2} \alpha_{2m}x_1 + \alpha_m^{m-4} \alpha_{2m}^2x_2 + \dots + \alpha_m^2 \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}) \times \\ &\quad \times (x_0 + \alpha_m^{m-1} \alpha_{2m}x_1 + \alpha_m^{m-2} \alpha_{2m}^2x_2 + \dots + \alpha_m \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}). \quad (30,3)\end{aligned}$$

Например

$$\Delta_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & ix_1 \\ ix_1 & x_0 \end{vmatrix} = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = x_0^2 - (ix_1)^2 = x_0^2 + x_1^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(\tilde{\mathbf{x}}) &= \begin{vmatrix} x_0 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & \alpha_6^2 x_2 & \alpha_6 x_1 \\ \alpha_6 x_1 & x_0 & \alpha_6^2 x_2 \\ \alpha_6^2 x_2 & \alpha_6 x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_0 + \alpha_6 x_1 + \alpha_6^2 x_2)(x_0 + \alpha_6 \alpha_3 x_1 + \alpha_6^2 \alpha_3^2 x_2)(x_0 + \alpha_6 \alpha_3^2 x_1 + \alpha_6^2 \alpha_3 x_2) = \\ &= (x_0 + \alpha_6 x_1 + \alpha_6^2 x_2)(x_0 + \alpha_6^3 x_1 + \alpha_6^6 x_2)(x_0 + \alpha_6^5 x_1 + \alpha_6^4 x_2) = \\ &= x_0^3 + (\alpha_6 x_1)^3 + (\alpha_6^2 x_2)^3 - 3x_0(\alpha_6 x_1)(\alpha_6^2 x_2) = x_0^3 - x_1^3 + x_2^3 + 3x_0 x_1 x_2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что $\Delta_3(\tilde{\mathbf{x}})$, как и $\Delta_3(\mathbf{x})$ может быть как положительным, так и отрицательным вещественным числом. В то же время если $\Delta_2(\mathbf{x})$ может быть как положительным, так и отрицательным вещественным числом, то $\Delta_2(\tilde{\mathbf{x}})$ всегда неотрицательное число, и этим алгебра $\tilde{\mathbf{R}}_2(\tilde{\mathbf{\epsilon}}) \cong \mathbf{C}$ кардинально отличается от алгебры $\mathbf{R}_2(\mathbf{\epsilon})$.

Подобное отличие сохраняется и для всех алгебр антициклических чисел. Например, для $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_4(\mathbf{\epsilon})$

$$\begin{aligned} \Delta_4(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) = \\ &= ((x_0 + x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2)((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2). \end{aligned}$$

А для $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{R}}_4(\tilde{\mathbf{\epsilon}})$ по формуле (30,3) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_4(\tilde{\mathbf{x}}) &= \begin{vmatrix} x_0 & -x_3 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & -x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 \\ \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 \\ \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 \\ \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3)(x_0 + i\alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 - i\alpha_8^3 x_3) \times \\ &\times (x_0 - \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 - \alpha_8^3 x_3)(x_0 - i\alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 + i\alpha_8^3 x_3) = \\ &= (x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3)(x_0 + \alpha_8^3 x_1 + \alpha_8^6 x_2 + \alpha_8 x_3) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (x_0 + \alpha_8^5 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^7 x_3)(x_0 + \alpha_8^7 x_1 + \alpha_8^6 x_2 + \alpha_8^5 x_3) = \\
& = ((x_0 + \alpha_8^2 x_2)^2 - (\alpha_8 x_1 + \alpha_8^3 x_3)^2)((x_0 - \alpha_8^2 x_2)^2 + (\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3)^2) = \\
& = ((x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2)((x_0 - ix_2)^2 + i(x_1 - ix_3)^2) = \\
& = ((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3) + i(x_3^2 - x_1^2 + 2x_0 x_2)) \times \\
& \times ((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3) - i(x_3^2 - x_1^2 + 2x_0 x_2)) = \\
& = (x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3)^2 + (x_3^2 - x_1^2 + 2x_0 x_2)^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, если $\Delta_4(\mathbf{x})$ может быть как положительным, так и отрицательным вещественным числом, то $\Delta_4(\tilde{\mathbf{x}})$ всегда неотрицательное число.

8. Помимо вещественных подалгебр $\mathbf{R}_m(\mathbf{\epsilon})$ и $\tilde{\mathbf{R}}_m(\tilde{\mathbf{\epsilon}})$ алгебра $\mathbf{C}_m(\mathbf{\epsilon})$ содержит ещё одну любопытную вещественную подалгебру, которую образуют линейные комбинации с вещественными коэффициентами элементов изотропного базиса, то есть $\mathbf{x} = x_0 \mathbf{\epsilon}_0 + x_1 \mathbf{\epsilon}_1 + \dots + x_{m-1} \mathbf{\epsilon}_{m-1}$, где $\mathbf{\epsilon}_0, \mathbf{\epsilon}_1, \dots, \mathbf{\epsilon}_{m-1}$ — изотропный базис алгебры $\mathbf{C}_m$, а $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ вещественные числа. Мы обозначим эту алгебру $\mathbf{\Pi}_m$. Её элементы называют (вещественными) *поличислами*, а саму алгебру $\mathbf{\Pi}_m$ — *алгеброй (вещественных) поличисел*. Строение алгебры вещественных поличисел даётся изоморфизмом

$$\mathbf{\Pi}_m = \underbrace{\mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \oplus \dots \oplus \mathbf{R}}_m, \quad (31,3)$$

так как в изотропном базисе все алгебраические операции производятся покомпонентно.

Посмотрим ещё, какие координаты имеют вещественные поличисла в *натуральном базисе* $1, \mathbf{\epsilon}, \mathbf{\epsilon}^2, \dots, \mathbf{\epsilon}^{m-1}$ алгебры $\mathbf{C}_m(\mathbf{\epsilon})$: из (13,3) мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x_0 \mathbf{\epsilon}_0 + x_1 \mathbf{\epsilon}_1 + \dots + x_{m-1} \mathbf{\epsilon}_{m-1} = \\
&= x_0 (1 + \mathbf{\epsilon} + \mathbf{\epsilon}^2 + \dots + \mathbf{\epsilon}^{m-1})/m + \\
&+ x_1 (1 + \alpha_m \mathbf{\epsilon} + \alpha_m^2 \mathbf{\epsilon}^2 + \dots + \alpha_m^{m-1} \mathbf{\epsilon}^{m-1})/m + \\
&+ x_2 (1 + \alpha_m^2 \mathbf{\epsilon} + \alpha_m^4 \mathbf{\epsilon}^2 + \dots + \mathbf{\epsilon}^{m-2})/m + \dots + \\
&+ x_{m-1} (1 + \alpha_m^{m-1} \mathbf{\epsilon} + \alpha_m^{m-2} \mathbf{\epsilon}^2 + \dots + \alpha_m \mathbf{\epsilon}^{m-1})/m = \\
&= (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1})/m +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_0 + \alpha_m x_1 + \alpha_m^2 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}) \epsilon / m + \\
& + (x_0 + \alpha_m^2 x_1 + \alpha_m^4 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-2} x_{m-1}) \epsilon^2 / m + \dots + \\
& + (x_0 + \alpha_m^{m-1} x_1 + \alpha_m^{m-2} x_2 + \dots + \alpha_m x_{m-1}) \epsilon^{m-1} / m
\end{aligned}$$

Заметим ещё, что алгебру вещественных поличисел можно определить и независимо от алгебры комплексных циклических чисел, как прямую сумму нескольких полей вещественных чисел. И из этого представления, данного изоморфизмом (31,3), проистекают все свойства алгебры вещественных поличисел. Алгебры Π_m находят приложения в финслеровой геометрии [15].

9. Заметим ещё, что если порядок алгебры $C_m(\epsilon)$ (или $R_m(\epsilon)$) число составное, то алгебра $C_m(\epsilon)$ (или $R_m(\epsilon)$) содержит подалгебры, порядок которых равен тому или иному множителю числа m . При этом, если $m = k \cdot n$, то образующим элементом подалгебры $C_n(\epsilon)$ (или $R_n(\epsilon)$) будет элемент ϵ^k .

Например, если ϵ образующий элемент алгебры $R_6(\epsilon)$, то ϵ^2 будет образующим элементом алгебры $R_3(\epsilon^2)$, произвольным элементом которой будет сумма $x = x_0 + x_1 \epsilon^2 + x_2 \epsilon^4 \in R_6(\epsilon)$, где $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. С другой стороны ϵ^3 будет образующим элементом алгебры $R_2(\epsilon^3)$, произвольным элементом которой будет сумма $x = x_0 + x_1 \epsilon^3 \in R_6(\epsilon)$, где $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$.

Если же m простое число, то алгебры $R_m(\epsilon)$ не содержат циклических подалгебр. Однако, это не означает, что алгебры $R_m(\epsilon)$ вообще не содержат каких-либо подалгебр.

Возьмём, например алгебру $R_3(\epsilon)$ и обозначим L_2^3 линейное пространство, натянутое на единицу и элемент $\sigma \equiv \epsilon + \epsilon^2$. Нетрудно видеть, что пространство L_2^3 замкнуто относительно умножения, так как $\sigma^2 = 2 + \sigma$, и потому L_2^3 будет подалгеброй алгебры $R_3(\epsilon)$.

Аналогично, если взять алгебру $R_5(\epsilon)$ и обозначить L_2^5 линейное пространство, натянутое на единицу и элементы $\sigma_1 = \epsilon + \epsilon^4$, $\sigma_2 = \epsilon^2 + \epsilon^3$, то легко видеть, что L_2^5 замкнуто относительно умножения, так как

$$\sigma_1^2 = 2 + \sigma_2, \quad \sigma_2^2 = 2 + \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2,$$

и, следовательно, L_2^5 будет подалгеброй алгебры R_5 .

Нетрудно видеть, что любая циклическая алгебра $R_m(\epsilon)$, порядок которой будет простым числом, содержит подалгебру L_2^m , базисными элементами которой будет единица и суммы

$$\sigma_1 = \epsilon + \epsilon^{m-1}, \quad \sigma_2 = \epsilon^2 + \epsilon^{m-2}, \dots, \sigma_{(m-1)/2} = \epsilon^{(m-1)/2} + \epsilon^{(m+1)/2}.$$

Возьмём теперь алгебру $R_7(\epsilon)$ и обозначим L_3^7 линейное пространство, натянутое на элементы $\tau_1 = \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^4$ и $\tau_2 = \epsilon^3 + \epsilon^5 + \epsilon^6$. Тогда нетрудно заметить, что L_3^7 замкнуто относительно умножения, так как:

$$\tau_1^2 = \tau_1 + 2\tau_2, \quad \tau_2^2 = \tau_2 + 2\tau_1, \quad \tau_1 \cdot \tau_2 = 3 + \tau_1 + \tau_2$$

то есть L_3^7 будет подалгеброй алгебры $R_7(\epsilon)$.

И можно показать, что если порядок алгебры $R_m(\epsilon)$ простое число и число $m-1$ делится на три, то алгебра $R_m(\epsilon)$ содержит подалгебру L_3^m .

Заметим, что антициклические алгебры $\tilde{R}_m(\epsilon)$ содержат подалгебры, аналогичные подалгебрам алгебр $R_m(\epsilon)$.

Комплексные алгебры $C_m(\epsilon)$, где m простое число также имеют подалгебру $L_2^m(C)$, базисными элементами которой будет единица и суммы

$$\sigma_1 = \epsilon + \epsilon^{m-1}, \quad \sigma_2 = \epsilon^2 + \epsilon^{m-2}, \dots, \sigma_{(m-1)/2} = \epsilon^{(m-1)/2} + \epsilon^{(m+1)/2}.$$

И если порядок алгебры $C_m(\epsilon)$ простое число и число $m-1$ делится на три, то алгебра $C_m(\epsilon)$ содержит подалгебру $L_3^m(C)$.

Можно указать и другие подалгебры алгебр $C_m(\epsilon)$, $R_m(\epsilon)$ и $\tilde{R}_m(\epsilon)$.

Вообще, каждая циклическая алгебра имеет свои особенности и свои оригинальные приложения, и потому заслуживает отдельного исследования. Хотя есть и некоторые общие приложения для разных циклических алгебр. И некоторые такие приложения мы предъявим в следующей главе.

Глава 4. Приложения циклических алгебр в элементарной математике.

1. В этой заключительной главе мы рассмотрим некоторые приложения алгебр циклических чисел, которые эти алгебры находят в элементарной математике. И начнём мы с вывода некоторых тождеств. Вывод этих тождеств опирается на некоторые свойства алгебр циклических чисел, о которых говорилось в предыдущей главе.

Во-первых, формула (6,3)

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_k \right)$$

даёт нам набор тождеств, которые представляют собой разложения на линейные и квадратичные множители некоторых многочленов.

А) Как мы уже видели в предыдущей главе:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x + \alpha_3 y + \alpha_3^2 z)(x + \alpha_3^2 y + \alpha_3 z) = \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \\ &= (x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)/2. \end{aligned} \quad (1,4)$$

Б) Из (1,4) получается, что если $x + y + z = 0$, то

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \quad (2,4)$$

В) Если $x + y + z = 0$, то

$$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2). \quad (3,4)$$

Действительно, из (2,4) следует, что

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) &= \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + x^2 y^2 (x + y) + x^2 z^2 (x + z) + y^2 z^2 (y + z) = \\ &= x^5 + y^5 + z^5 - x^2 y^2 z - x^2 z^2 y - y^2 z^2 x = x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx) = \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + xyz(x^2 + y^2 + z^2)/2 = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

так как $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$. И мы получаем тождество (3,4).

Аналогично доказываются тождества [16]

$$\begin{aligned} 5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) &= 6(x^5 + y^5 + z^5), \\ 7(x^5 + y^5 + z^5)(x^2 + y^2 + z^2) &= 10(x^7 + y^7 + z^7), \end{aligned}$$

и некоторые другие подобные тождества.

Г) Сравнивая $\Delta_4(\mathbf{x})$ вычисленный напрямую и по формуле (6,3) мы получаем такое тождество:

$$\begin{aligned} x_0^4 - x_1^4 + x_2^4 - x_3^4 - 2x_0^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 - 4x_0^2x_1x_3 + 4x_1^2x_0x_2 - 4x_2^2x_1x_3 + 4x_3^2x_0x_2 = \\ = (x_0^2 + x_2^2 - 2x_1x_3)^2 - (x_1^2 + x_3^2 - 2x_0x_2)^2 = \\ = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3)(x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3) = \\ = ((x_0 + x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2)((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2). \end{aligned} \quad (4,4)$$

Д) Вычисляя напрямую детерминант $\Delta_5(\mathbf{x})$, мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta_5(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_0 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_4 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5x_0x_1x_2x_3x_4 - \\ &- 5x_0^3(x_1x_4 + x_2x_3) - 5x_1^3(x_0x_2 + x_3x_4) - 5x_2^3(x_1x_3 + x_4x_0) - \\ &- 5x_3^3(x_2x_4 + x_0x_1) - 5x_4^3(x_0x_3 + x_1x_2) + \\ &+ 5x_0(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) + 5x_1(x_0^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + 5x_2(x_1^2x_3^2 + x_4^2x_0^2) + \\ &+ 5x_3(x_2^2x_4^2 + x_0^2x_1^2) + 5x_4(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2). \end{aligned} \quad (5,4)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \Delta_5(\mathbf{x}) &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \times \\ &\times (x_0 + \alpha_5x_1 + \alpha_5^2x_2 + \alpha_5^3x_3 + \alpha_5^4x_4) \cdot (x_0 + \alpha_5^4x_1 + \alpha_5^3x_2 + \alpha_5^2x_3 + \alpha_5x_4) \times \\ &\times (x_0 + \alpha_5^2x_1 + \alpha_5^4x_2 + \alpha_5x_3 + \alpha_5^3x_4) \cdot (x_0 + \alpha_5^3x_1 + \alpha_5x_2 + \alpha_5^4x_3 + \alpha_5^2x_4). \end{aligned}$$

где $\alpha_5 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5) = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$

Вычислим теперь эти произведения:

$$(x_0 + \alpha_5x_1 + \alpha_5^2x_2 + \alpha_5^3x_3 + \alpha_5^4x_4) \cdot (x_0 + \alpha_5^4x_1 + \alpha_5^3x_2 + \alpha_5^2x_3 + \alpha_5x_4) =$$

$$\begin{aligned}
&= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0)(\alpha_5 + \alpha_5^4) + \\
&\quad + (x_0x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_0 + x_4x_1)(\alpha_5^2 + \alpha_5^3) = \\
&= -(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_0)(\alpha_5 + \alpha_5^4) + \\
&\quad - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_0x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_0 - x_4x_1)(\alpha_5^2 + \alpha_5^3) = \\
&= -((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_0)^2) \cos 72^\circ - \\
&\quad - ((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_0)^2 + (x_4 - x_1)^2) \cos 144^\circ.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&(x_0 + \alpha_5^2 x_1 + \alpha_5^4 x_2 + \alpha_5 x_3 + \alpha_5^3 x_4) \cdot (x_0 + \alpha_5^3 x_1 + \alpha_5 x_2 + \alpha_5^4 x_3 + \alpha_5^2 x_4) = \\
&= -((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_0)^2) \cos 144^\circ - \\
&\quad - ((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_0)^2 + (x_4 - x_1)^2) \cos 72^\circ.
\end{aligned}$$

Отсюда получается тождество

$$\begin{aligned}
&x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5x_0x_1x_2x_3x_4 - \\
&\quad - 5x_0^3(x_1x_4 + x_2x_3) - 5x_1^3(x_0x_2 + x_3x_4) - 5x_2^3(x_1x_3 + x_4x_0) - \\
&\quad - 5x_3^3(x_2x_4 + x_0x_1) - 5x_4^3(x_0x_3 + x_1x_2) + \\
&\quad + 5x_0(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2) + 5x_1(x_0^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + 5x_2(x_1^2x_3^2 + x_4^2x_0^2) + \\
&\quad + 5x_3(x_2^2x_4^2 + x_0^2x_1^2) + 5x_4(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) = \\
&= [((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_0)^2) \cos 72^\circ + \\
&\quad + ((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_0)^2 + (x_4 - x_1)^2) \cos 144^\circ] \times \\
&\quad \times [((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_0)^2) \cos 144^\circ + \\
&\quad + ((x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_0)^2 + (x_4 - x_1)^2) \cos 72^\circ] \times \\
&\quad \times (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \tag{6,4}
\end{aligned}$$

Это замечательное тождество можно конечно доказать и непосредственно, но это будет тяжёлая и нудная работа.

2. Другая серия тождеств следует из одного свойства детерминантов, которое мы сформулируем как теорему.

Теорема (о произведении детерминантов). Для любых циклических чисел $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}_m$ справедливо тождество

$$\Delta_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_m(\mathbf{x})\Delta_m(\mathbf{y}), \quad (7,4)$$

то есть детерминант – это мультипликативная функция.

Доказательство этой теоремы опирается на тождество (18,3):

$$\begin{aligned} \Delta_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(1) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\alpha_m) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\alpha_m^{m-1}) = \\ &= (\mathbf{x}(1) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m) \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{x}(\alpha_m^{m-1})) \cdot (\mathbf{y}(1) \cdot \mathbf{y}(\alpha_m) \cdot \mathbf{y}(\alpha_m^2) \cdot \dots \cdot \mathbf{y}(\alpha_m^{m-1})) = \\ &= \Delta_m(\mathbf{x})\Delta_m(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

так как $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\alpha_m^k) = \mathbf{x}(\alpha_m^k) \cdot \mathbf{y}(\alpha_m^k)$.

Из формулы (7,4) сразу получаются следующие тождества.

а) Тождество трёх кубов:

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) &= \\ &= (xa + yc + zb)^2 + (xb + ya + zc)^2 + (xc + yb + za)^2 - \\ &\quad - 3(xa + yc + zb)(xb + ya + zc)(xc + yb + za). \end{aligned} \quad (8,4)$$

Это тождество есть координатная запись формулы (7,4) при $m = 3$.

б) Тождество трёх квадратов:

$$\begin{aligned} ((x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_0)^2)((y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_0)^2) &= \\ &= 2((x_0 - x_1)y_0 + (x_2 - x_0)y_1 + (x_1 - x_2)y_2)^2 + \\ &\quad + 2((x_1 - x_2)y_0 + (x_0 - x_1)y_1 + (x_2 - x_0)y_2)^2 + \\ &\quad + 2((x_2 - x_0)y_0 + (x_1 - x_2)y_1 + (x_0 - x_1)y_2)^2. \end{aligned} \quad (9,4)$$

Доказательство этого тождества следует из формулы $\Delta_3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_3(\mathbf{x})\Delta_3(\mathbf{y})$ с учётом тождества (1,4).

г) Доказать, что если $y_0 = \mu x_0 + \nu x_2$, $y_1 = \mu x_1 + \nu x_0$, $y_2 = \mu x_2 + \nu x_1$, то

$$\frac{y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 - 3y_0y_1y_2}{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2} = \mu^3 + \nu^3. \quad (10,4)$$

Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned} &(\mu + \nu\epsilon)(x_0 + x_1\epsilon + x_2\epsilon^2) = \\ &= (\mu x_0 + \nu x_2) + (\mu x_1 + \nu x_0)\epsilon + (\mu x_2 + \nu x_1)\epsilon^2 = (y_0 + y_1\epsilon + y_2\epsilon^2), \\ &(\mu + \nu\alpha_3\epsilon)(x_0 + x_1\alpha_3\epsilon + x_2\alpha_3^2\epsilon^2) = \\ &= (\mu x_0 + \nu x_2) + (\mu x_1 + \nu x_0)\alpha_3\epsilon + (\mu x_2 + \nu x_1)\alpha_3^2\epsilon^2 = (y_0 + y_1\alpha_3\epsilon + y_2\alpha_3^2\epsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu + \nu \alpha_3^2 \epsilon)(x_0 + x_1 \alpha_3^2 \epsilon + x_2 \alpha_3 \epsilon^2) = \\
& = (\mu x_0 + \nu x_2) + (\mu x_1 + \nu x_0) \alpha_3^2 \epsilon + (\mu x_2 + \nu x_1) \alpha_3 \epsilon^2 = (y_0 + y_1 \alpha_3^2 \epsilon + y_2 \alpha_2 \epsilon^2).
\end{aligned}$$

Тогда, перемножив эти тождества, мы получим

$$\begin{aligned}
& y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 - 3y_0 y_1 y_2 = \\
& (y_0 + y_1 \epsilon + y_2 \epsilon^2)(y_0 + y_1 \alpha_3 \epsilon + y_2 \alpha_3^2 \epsilon^2)(y_0 + y_1 \alpha_3^2 \epsilon + y_2 \alpha_2 \epsilon^2) = \\
& = (x_0 + x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2)(x_0 + x_1 \alpha_3 \epsilon + x_2 \alpha_3^2 \epsilon^2)(x_0 + x_1 \alpha_3^2 \epsilon + x_2 \alpha_3 \epsilon^2) \times \\
& \times (\mu + \nu \epsilon)(\mu + \nu \alpha_3 \epsilon)(\mu + \nu \alpha_3^2 \epsilon) = (x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0 x_1 x_2)(\mu^3 + \nu^3).
\end{aligned}$$

г) Если $y_0 = \mu x_0 + \nu x_2$, $y_1 = \mu x_1 + \nu x_0$, $y_2 = \mu x_2 + \nu x_1$, и $\mu + \nu = 1$, то

$$\frac{(y_0 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_0)^2}{(x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_0)^2} = \mu^3 + \nu^3. \quad (11,4)$$

г) Для любых x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 , μ, ν справедливо тождество:

$$\frac{(S_1(y) - \varphi^2 S_2(y))(S_2(y) - \varphi^2 S_1(y))}{(S_1(x) - \varphi^2 S_2(x))(S_2(x) - \varphi^2 S_1(x))} = \frac{\mu^5 + \nu^5}{\mu + \nu}, \quad (12,4)$$

где $y_0 = \mu x_0 + \nu x_2$, $y_1 = \mu x_1 + \nu x_0$, $y_2 = \mu x_2 + \nu x_1$, $y_2 = \mu x_2 + \nu x_1$, $y_2 = \mu x_2 + \nu x_1$,

$$S_1(a) = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2$$

$$S_1(a) = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2$$

и $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ так называемое число Фидия или число золотого сечения.

3. Рассмотрим далее некоторые приложения циклических алгебр в элементарной геометрии. Но прежде чем дать здесь несколько примеров таких приложений необходимо ввести одну конструкцию, обобщающую структуру линейного пространства.

Определение 1.4 . *Левым $\mathbf{A}$ -модулем $\mathbf{E}_L(\mathbf{A})$ над унитарной алгеброй $\mathbf{A}$ называется линейное пространство $\mathbf{E}$ над полем $\mathbf{P}$, если для всех векторов $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ и всех элементов $\xi \in \mathbf{A}$ определено левое умножение $\xi \mathbf{u} \in \mathbf{E}_L(\mathbf{A})$, удовлетворяющее следующим условиям [9]*

$$1) \xi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \xi \mathbf{u}_1 + \xi \mathbf{u}_2;$$

$$2) (\xi_1 + \xi_2)\mathbf{u} = \xi_1 \mathbf{u} + \xi_2 \mathbf{u};$$

$$3) (\xi_1 \xi_2)\mathbf{u} = \xi_1(\xi_2 \mathbf{u});$$

4) $\delta u = u$, где δ – единица алгебры A ;

5) $a(\xi u) = (a\xi)u = \xi(au)$ для любых $a \in P$.

Аналогично, если задано произведение $u\xi$, удовлетворяющее аналогичным аксиомам, то говорят о *правом модуле* $E_R(A)$. Если левый модуль над алгеброй будет одновременно правым модулем и для любого $u \in E$ и любого $\xi \in A$ выполняется условие коммутативности $u\xi = \xi u$, то говорят о *двустороннем модуле* или о *пространстве $E(A)$ над алгеброй A* .

Множество элементов $\xi u \in E(A)$, где $u \in E$ фиксированный вектор линейного пространства E , а $\xi \in A$ пробегает всевозможные элементы алгебры A называется *орбитой* вектора u в пространстве над алгеброй [9]. Для приложений конструкции пространств над алгебрами в евклидовой геометрии орбиты векторов проектируются на эти вектора, и мы можем оперировать с элементами $E(A)$ по правилам векторной алгебры евклидова пространства.

В качестве иллюстрации *алгебраического метода* доказательства тех или иных утверждений евклидовой геометрии приведём два примера.

Теорема (о сторонах и диагоналях параллелограмма). Для любого параллелограмма $ABCD$ имеет место такое равенство:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$

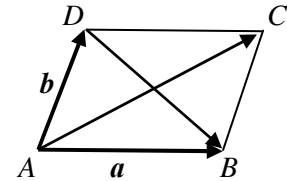


Рис. 1

Доказательство. Возьмём вектора a и b соединяющие точку A с точками B и D , как указано на рисунке 1, и образуем из них комплексный вектор $c = a + ib$. Скалярное произведение этого вектора на комплексно сопряжённый ему вектор $\bar{c} = a - ib$ даёт нам сумму квадратов длин смежных сторон параллелограмма, то есть

$$(c, \bar{c}) = ((a + ib), (a - ib)) = (a, a) + (b, b) = |AB|^2 + |AD|^2.$$

Умножая теперь комплексный вектор $c = a + ib$ на комплексное число $z = 1 + i$, мы получим комплексный вектор

$$d = zc = (1 + i)(a + ib) = (a - b) + i(a + b) = y + ix,$$

скалярное произведение которого на комплексно сопряжённый ему вектор $\bar{d} = y - ix$ даст сумму квадратов длин диагоналей:

$$(\mathbf{d}, \bar{\mathbf{d}}) = ((\mathbf{y} + i\mathbf{x}), (\mathbf{y} - i\mathbf{x})) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{BD}|^2 + |\mathbf{AC}|^2.$$

Но с другой стороны $(\mathbf{d}, \bar{\mathbf{d}}) = z\bar{z}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}}) = 2(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$, а поскольку у параллелограмма длины противоположных сторон равны, то из равенства

$$(\mathbf{d}, \bar{\mathbf{d}}) = |\mathbf{BD}|^2 + |\mathbf{AC}|^2 = 2(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}}) = 2|\mathbf{AB}|^2 + 2|\mathbf{AD}|^2$$

сразу следует утверждение теоремы.

Теорема (о сторонах и диагоналях параллелепипеда) Доказать, что для любого параллелепипеда $ABCDEFGH$ (рис. 2) справедливо такое тождество:

$$\begin{aligned} |\mathbf{AG}|^2 + |\mathbf{DE}|^2 + |\mathbf{EB}|^2 + |\mathbf{BD}|^2 &= \\ &= 3(|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2). \end{aligned}$$

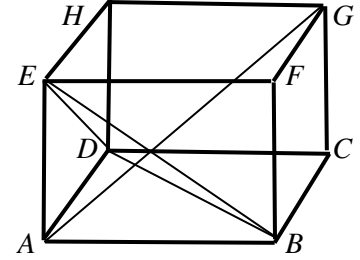


Рис. 2

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – кватернионный вектор, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ вектора, соединяющие точку A с точками B , D и E соответственно. Умножив скалярно этот кватернионный вектор на сопряжённый ему вектор $\bar{\mathbf{u}} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, мы получим, что

$$(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2.$$

Умножив теперь кватернионный вектор $\mathbf{u}$ на кватернион $\xi = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, получим кватернионный вектор $\xi\mathbf{u} = (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\mathbf{i} + (\mathbf{x} - \mathbf{z})\mathbf{j} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{k}$. Тогда, умножая скалярно кватернионный вектор $\xi\mathbf{u}$ на сопряжённый ему кватернионный вектор $\overline{\xi\mathbf{u}}$, мы получим, что

$$\begin{aligned} ((\xi\mathbf{u}), (\overline{\xi\mathbf{u}})) &= ((\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}), (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})) + \\ &+ ((\mathbf{z} - \mathbf{y}), (\mathbf{z} - \mathbf{y})) + ((\mathbf{x} - \mathbf{z}), (\mathbf{x} - \mathbf{z})) + ((\mathbf{y} - \mathbf{x}), (\mathbf{y} - \mathbf{x})) = \\ &= |\mathbf{AG}|^2 + |\mathbf{DE}|^2 + |\mathbf{EB}|^2 + |\mathbf{BD}|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны $((\xi\mathbf{u}), (\overline{\xi\mathbf{u}})) = \xi(\mathbf{u}, \mathbf{u})\bar{\xi} = \xi\bar{\xi}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, то есть

$$((\xi\mathbf{u}), (\overline{\xi\mathbf{u}})) = 3(|\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{AE}|^2),$$

так как $\xi\bar{\xi} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3$.

4. Разумеется обе вышеуказанные теоремы можно доказать и традиционными методами, но иногда “алгебраические методы” бывают предпочти-

тельное. А главное применение алгебр открывает нам некоторые факты из геометрии, которые связаны с теми или иными тождествами, и которые иначе могут остаться незамеченными. Примером здесь может служить следующее утверждение.

Теорема (о вставленных треугольниках). Пусть ABC произвольный треугольник и пусть точки A_1, B_1, C_1 взятые на его сторонах, делят эти стороны в отношении μ/ν , так что

$$\frac{CA_1}{A_1A} = \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{\mu}{\nu},$$

где $\mu + \nu = 1$ (как показано на рис. 3). Тогда справедливо тождество:

$$\frac{|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2}{|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2} = \mu^3 + \nu^3.$$

Доказательство. Возьмём комплексный вектор $x = a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c$, где вещественные вектора a, b, c соединяют произвольно взятую точку O с вершинами треугольника ABC (как показано на рисунке 3), а $\alpha_3 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$. Тогда для скалярного произведения вектора x на сопряжённый ему вектор $\bar{x} = a + \alpha_3^2 b + \alpha_3 c$ будем иметь такую цепочку тождеств:

$$\begin{aligned} (x, \bar{x}) &= (a, a) + (b, b) + (c, c) - (a, b) - (b, c) - (c, a) = \\ &= (((a - b), (a - b)) + ((b - c), (b - c)) + ((c - a), (c - a)))/2 = \\ &= (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)/2. \end{aligned}$$

Умножим теперь вектор x на комплексное число $\lambda = \mu + \nu\alpha_3$, в результате чего получим комплексный вектор

$$\begin{aligned} \lambda x &= (\mu + \nu\alpha_3)(a + \alpha_3 b + \alpha_3^2 c) = (\mu a + \nu c) + \alpha_3(\mu b + \nu a) + \alpha_3^2(\mu c + \nu b) = \\ &= a_1 + \alpha_3 b_1 + \alpha_3^2 c_1, \end{aligned}$$

где вещественные вектора a_1, b_1, c_1 соединяют произвольно взятую точку O с вершинами треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда

$$((\lambda x), (\overline{\lambda x})) = (|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2)/2.$$

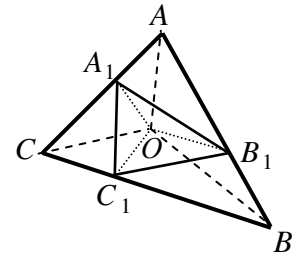


Рис. 3

Но с другой стороны $((\lambda x), (\overline{\lambda x})) = \lambda \bar{\lambda} (x, \bar{x}) = (\mu^3 + \nu^3)(x, \bar{x})$, откуда и следует доказываемое тождество.

5. Ниже мы предъявим ещё несколько задач, которые единообразно решаются с помощью циклических алгебр и относятся к различным конфигурационным свойствам n -угольников [17]. И модельным примером для нас будет известная теорема Вариньона.

Теорема (Вариньона о серединном четырёхугольнике). Если на сторонах произвольного четырёхугольника $ABCD$ взять точки A_1, B_1, C_1, D_1 , которые стороны четырёхугольника делят пополам, т. е.

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = 1,$$

то четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ будет параллелограммом (рис. 4).

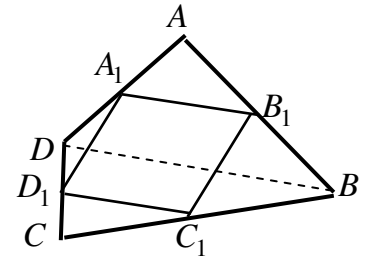


Рис. 4

Доказательство. Сначала заметим, что произвольный четырёхугольник $XYZT$ будет параллелограммом тогда и только тогда, когда $x - y + z - t = 0$, где x, y, z, t , вещественные вектора, соединяющие произвольно взятую точку O с вершинами четырёхугольника $XYZT$. Условие того, что $XYZT$ параллелограмм можно переписать иначе, если взять алгебраический вектор $u = x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 + t\varepsilon^3$, где $\varepsilon \in \mathbf{R}_4(\varepsilon)$, то есть ε образующий элемент циклической алгебры четвёртого порядка. Тогда четырёхугольник $XYZT$ будет параллелограммом в том и только том случае, когда $(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)u = 0$, так как

$$(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)(x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 + t\varepsilon^3) = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)(x - y + z - t).$$

Рассмотрим теперь алгебраический вектор $e = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3$, где a, b, c, d , вещественные вектора, соединяющие произвольно взятую точку O с вершинами четырёхугольника $ABCD$. Если мы умножим этот вектор на $\theta = (1 + \varepsilon)/2$, то получим алгебраический вектор $e_1 = a_1 + b_1\varepsilon + c_1\varepsilon^2 + d_1\varepsilon^3$, где a_1, b_1, c_1, d_1 , вещественные вектора, соединяющие произвольно взятую точку O с серединами сторон четырёхугольника $ABCD$, так как

$$(1 + \varepsilon)(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3) = (d + a) + (a + b)\varepsilon + (b + c)\varepsilon^2 + (c + d)\varepsilon^3.$$

Но $(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)e_1 = 0$, так как

$$(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)e_1 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)(1 + \varepsilon)e = 0,$$

и, следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмм.

Мы приведём ещё “школьное” доказательство этой теоремы. Поскольку A_1B_1 – это средняя линия треугольника DAB , то $A_1B_1 \parallel DB$ и $2|A_1B_1| = |DB|$. Аналогично, C_1D_1 средняя линия треугольника BCD , и потому $C_1D_1 \parallel DB$ и $2|C_1D_1| = |DB|$. Тогда $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ и $|A_1B_1| = |C_1D_1|$, а потому $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмм.

Из приведённых доказательств видно насколько “школьное” доказательство теоремы Вариньона проще *алгебраического* доказательства. Однако фундаментальным преимуществом алгебраического доказательства являются открывающиеся возможности множества разнообразных обобщений теоремы Вариньона. Приведённые ниже задачи как раз и представляют собой различные модификации этой классической теоремы.

5. Теорему Вариньона можно обобщить на другие многоугольники.

Определение 2.4. $2n$ – угольник называется n – *параллелограммом*, если его противоположные стороны параллельны и равны по величине.¹

Например, 6 – угольник $ABCDEF$ будет 3 – параллелограммом, если для него выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} AB \parallel ED \text{ и } |AB| = |ED|, \quad BC \parallel FE \text{ и } |BC| = |FE|, \\ CD \parallel AG \text{ и } |CD| = |AG|. \end{aligned}$$

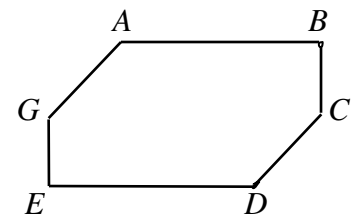


Рис. 5

На рисунке 5 (в качестве иллюстрации) изображён 3 – параллелограмм.

В связи с таким определением возникает естественный вопрос: можно ли для данного произвольного шестиугольника найти шесть точек, которые образовали бы 3 – параллелограмм. Можно по аналогии с теоремой Вариньона предположить, что середины сторон произвольного шестиугольника образуют 3 – параллелограмм. Однако непосредственная проверка показывает нам, что это не так. Тем не менее, задача трансформирования произвольного

¹ Иногда такой многоугольник называют $2n$ – *параллелограммом*.

шестиугольника в 3–параллелограмм имеет решение, которое даётся следующим утверждением.

Теорема (о 3–параллелограммах). В любом 6–угольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ центры масс *обрамляющих* его треугольников

$$A_5A_6A_1, A_6A_1A_2, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, A_4A_5A_6$$

образуют 3–параллелограмм.

Доказательство. Заметим сначала, что шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ будет 3–параллелограммом тогда и только тогда, когда его главные диагонали A_1A_4 , A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке и в ней делятся пополам.

В произвольном 6–угольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ обозначим O середину отрезка A_1A_4 , и пусть $\mathbf{a}_k$ – вектор, соединяющий точку A_k с точкой O . Тогда $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ будет 3–параллелограммом в том и только в том случае, если выполняются тождества: $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 = 0$ и $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6 = 0$ (тождество $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = 0$ выполняется в силу выбора точки O).

При помощи циклической алгебры $\mathbf{R}_6(\epsilon)$ это условие можно переписать так: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ будет 3–параллелограммом в том и только в том случае, если алгебраический вектор $\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\epsilon + \mathbf{a}_3\epsilon^2 + \mathbf{a}_4\epsilon^3 + \mathbf{a}_5\epsilon^4 + \mathbf{a}_6\epsilon^5$ при умножении на элемент $\xi = 1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5 \in \mathbf{R}_6(\epsilon)$ даёт нулевой вектор.

Действительно:

$$\begin{aligned} \xi \mathbf{u} &= (1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5)(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\epsilon + \mathbf{a}_3\epsilon^2 + \mathbf{a}_4\epsilon^3 + \mathbf{a}_5\epsilon^4 + \mathbf{a}_6\epsilon^5) = \\ &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\epsilon + \mathbf{a}_3\epsilon^2 + \mathbf{a}_4\epsilon^3 + \mathbf{a}_5\epsilon^4 + \mathbf{a}_6\epsilon^5 - \mathbf{a}_1\epsilon^2 - \mathbf{a}_2\epsilon^3 - \mathbf{a}_3\epsilon^4 - \mathbf{a}_4\epsilon^5 - \mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_6\epsilon + \\ &+ \mathbf{a}_1\epsilon^3 + \mathbf{a}_2\epsilon^4 + \mathbf{a}_3\epsilon^5 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5\epsilon + \mathbf{a}_6\epsilon^2 - \mathbf{a}_1\epsilon^5 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\epsilon - \mathbf{a}_4\epsilon^2 - \mathbf{a}_5\epsilon^3 - \mathbf{a}_6\epsilon^4 = \\ &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4)(1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5) + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5)(1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5)\epsilon + \\ &+ (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6)(1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5)\epsilon^2 \end{aligned}$$

тогда, если $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = 0$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 = 0$ и $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6 = 0$, то и $\xi \mathbf{u} = 0$. Справедливо и обратное. Если $\xi \mathbf{u} = 0$, то $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = 0$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 = 0$ и $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6 = 0$ в силу линейной независимости единицы, элемента ϵ и элемента ϵ^2 .

Умножим теперь составленный для любого 6–угольника алгебраический вектор $\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\epsilon + \mathbf{a}_3\epsilon^2 + \mathbf{a}_4\epsilon^3 + \mathbf{a}_5\epsilon^4 + \mathbf{a}_6\epsilon^5$ на элемент $\eta = (1 + \epsilon + \epsilon^2)/3$, в результате получим алгебраический вектор

$$\begin{aligned}
\eta u &= (a_1 + a_5 + a_6)/3 + (a_2 + a_6 + a_1)\epsilon/3 + (a_3 + a_1 + a_2)\epsilon^2/3 + \\
& (a_4 + a_2 + a_3)\epsilon^3/3 + (a_5 + a_3 + a_4)\epsilon^4/3 + (a_6 + a_4 + a_5)\epsilon^5/3 = \\
& \equiv b_1 + b_2\epsilon + b_3\epsilon^2 + b_4\epsilon^3 + b_5\epsilon^4 + b_6\epsilon^5,
\end{aligned}$$

где вектора $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ соединяют точку O с точками $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, которые представляют собой центры масс треугольников, обрамляющих шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. И если далее алгебраический вектор ηu умножить на ξ , то мы будем иметь $\xi(\eta u) = 0$, так как

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^5) = 0.$$

А это и означает, что 6-угольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 3-параллелограмм.

Эта теорема имеет обобщение: в любом $2n$ -угольнике центры масс обрамляющих его n -угольников образуют n -параллелограмм, что сразу проистекает из следующего тождества:

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^n)(1 - \epsilon^{n-1} + \epsilon^n - \epsilon^{2n-1}) = 0.$$

Например:

$$\begin{aligned}
& (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3)(1 - \epsilon^3 + \epsilon^4 - \epsilon^7) = \\
& + 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 - \epsilon^3 - \epsilon^4 - \epsilon^5 - \epsilon^6 + \epsilon^4 + \epsilon^5 + \epsilon^6 + \epsilon^7 - \epsilon^7 - 1 - \epsilon - \epsilon^2 = 0.
\end{aligned}$$

6. Имея в виду теорему Вариньона, естественно поставить вопрос: получим ли мы специальный класс $2n$ -угольников, если у произвольных $2n$ -угольников будем брать середины их сторон? Ответ на этот вопрос даёт нам утверждение, которое мы приведём ниже. Но предварительно дадим следующее определение.

Определение 3.4. $2n$ -угольник называется *двойным*, если его стороны, взятые через одну, образуют n -угольник.

Заметим здесь, что не любой $2n$ -угольник будет двойным. Например, на рисунке 6 изображён 3-параллелограмм, который не является двойным, так как его стороны A_2A_3 , A_4A_5 и A_1A_6 не образуют треугольник.

Теорема (о серединных $2n$ -угольниках). В любом $2n$ -угольнике середины сторон образуют двойной $2n$ -угольник.

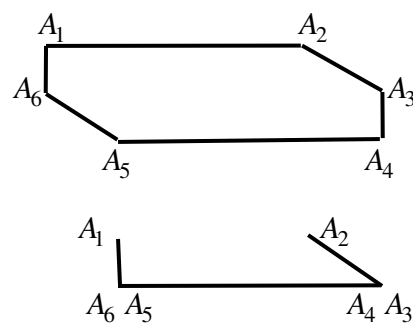


Рис. 6

Доказательство. Набор n векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ тогда и только тогда образует замкнутый n – угольник, когда их сумма равна нулю. Отсюда следует, что $2n$ – угольник $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$ будет двойным тогда и только тогда, когда будет выполняться тождество

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 + \dots + \mathbf{a}_{2n-1} - \mathbf{a}_{2n} = 0.$$

Это условие можно переписать так: $2n$ – угольник $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$ будет двойным тогда и только тогда, когда будет выполняться тождество:

$$(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{2n-2} - \varepsilon^{2n-1})(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon + \mathbf{a}_3 \varepsilon^2 + \dots + \mathbf{a}_{2n} \varepsilon^{2n-1}) = 0$$

где $\mathbf{a}_k$ вектора, соединяющие произвольную точку O с вершинами данного $2n$ – угольника $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$, а $\varepsilon \in \mathbf{R}_{2n}(\varepsilon)$. Например, для $n = 3$

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5)(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon + \mathbf{a}_3 \varepsilon^2 + \mathbf{a}_4 \varepsilon^3 + \mathbf{a}_5 \varepsilon^4 + \mathbf{a}_6 \varepsilon^5) = \\ = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_6)(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5). \end{aligned}$$

Умножив теперь вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon + \mathbf{a}_3 \varepsilon^2 + \dots + \mathbf{a}_{2n} \varepsilon^{2n-1}$ на циклическое число $\xi = (1 + \varepsilon)/2$, мы получим алгебраический вектор

$$\xi \mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \varepsilon + \mathbf{b}_3 \varepsilon^2 + \mathbf{b}_4 \varepsilon^3 + \mathbf{b}_5 \varepsilon^4 + \mathbf{b}_6 \varepsilon^5,$$

где $\mathbf{b}_k$ вектора, соединяющие произвольную точку O с серединами сторон данного $2n$ – угольника $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$. Тогда легко видеть, что

$$(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{2n-2} - \varepsilon^{2n-1}) \xi \mathbf{x} = 0.$$

так как $(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{2n-2} - \varepsilon^{2n-1})(1 + \varepsilon) = 0$.

7. Все приведённые выше *конфигурационные теоремы* получаются по общему правилу: многоугольнику $A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m$ ставится в соответствие алгебраический вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \varepsilon + \mathbf{a}_3 \varepsilon^2 + \dots + \mathbf{a}_m \varepsilon^{m-1}$, тогда умножение этого вектора на циклическое число, представляющее собой делитель нуля, выделяет некоторый класс многоугольников, который получается геометрической интерпретацией умножения алгебраического вектора на взятый нами делитель нуля. Таким образом, те или иные выражения в циклической алгебре, содержащие делители нуля дают нам некоторые утверждения, относящиеся к конфигурационным свойствам многоугольников.

Например, тождество

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \text{ где } \varepsilon \in \mathbf{R}_8(\varepsilon)$$

получает следующую геометрическую интерпретацию.

Если в любом восьмиугольнике $A_1A_2 \dots A_7A_8$ взять середины сторон B_k , а в восьмиугольнике $B_1B_2 \dots B_7B_8$ взять середины C_h хордовых отрезков B_1B_3 , B_2B_4 , B_3B_5 , B_4B_6 , B_5B_7 , B_6B_8 , B_7B_1 , B_8B_2 , то восьмиугольник $C_1C_2 \dots C_7C_8$ будет 4 – параллелограммом. $\square$

А если мы возьмём тождество

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^4) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7, \text{ где } \varepsilon \in \mathbf{R}_{16}(\varepsilon)$$

то получим ещё одно утверждение из элементарной геометрии.

Если в любом 16 – угольнике $A_1A_2 \dots A_{15}A_{16}$ взять середины сторон B_k , а в 16 – угольнике $B_1B_2 \dots B_{15}B_{16}$ взять середины C_h хордовых отрезков B_1B_3 , B_2B_4 , B_3B_5 , и так далее, и если затем в 16 – угольнике $C_1C_2 \dots C_{15}C_{16}$ взять середины D_h хордовых отрезков C_1C_5 , C_2C_6 , C_3C_7 , и так далее, то 16 – угольник $D_1D_2 \dots D_{15}D_{16}$ будет 8 – параллелограммом.

Затем тождество

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^4)(1 + \varepsilon^8) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{15}, \text{ где } \varepsilon \in \mathbf{R}_{32}(\varepsilon)$$

даёт нам такое утверждение о 32 – угольниках.

Если в любом 32 – угольнике $A_1A_2 \dots A_{31}A_{32}$ взять середины сторон B_k , а в 32 – угольнике $B_1B_2 \dots B_{31}B_{32}$ взять середины C_h хордовых отрезков B_1B_3 , B_2B_4 , B_3B_5 , и так далее, затем в 32 – угольнике $C_1C_2 \dots C_{31}C_{32}$ взять середины D_h хордовых отрезков C_1C_5 , C_2C_6 , $C_3C_7, \dots$, и наконец, в 32 – угольнике $D_1D_2 \dots D_{31}D_{32}$ взять середины E_h хордовых отрезков D_1D_9 , D_2D_{10} , $D_3D_7, \dots$, то 32 – угольник $E_1E_2 \dots E_{31}E_{32}$ будет 16 – параллелограммом.

И вообще, тождество

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^4) \dots (1 + \varepsilon^{2^n}) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{2^{n+1}-1}$$

даёт нам серию конфигурационных теорем о 2^n – угольниках.

8. Покажем ещё как решаются линейные уравнения и системы линейных уравнений в циклических алгебрах на примерах в алгебре двойных чисел.

$$1) (1 - \varepsilon) \cdot x = 1.$$

Предположим, что это уравнение имеет решение x_0 , тогда $(1-\varepsilon) \cdot x_0 = 1$ будет верным равенством. Умножим это равенство на $(1+\varepsilon)$, тогда

$(1+\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon) \cdot x_0 = (1+\varepsilon)$ или $0 \cdot x_0 = (1+\varepsilon)$, так как $(1+\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon) = 1^2 - \varepsilon^2 = 0$. то есть $0 = (1+\varepsilon)$. Это противоречие показывает, что уравнение $(1-\varepsilon) \cdot x = 1$ не имеет решения.

2) $(1-\varepsilon) \cdot z = 1-\varepsilon$, где $z = x + y\varepsilon$

Это уравнение эквивалентно системе линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\}$$

так как $(1-\varepsilon) \cdot z \equiv (1-\varepsilon) \cdot (x + y\varepsilon) = (x - y) + (-x + y)\varepsilon$. Поэтому решением данного уравнения будут любые двойные числа вида $z = (1+t) + t\varepsilon$, где t – произвольное действительное число.

3) $(1-\varepsilon) \cdot z = a(1+\varepsilon)$, где $a \in \mathbf{R}$.

Как и в первом примере, умножив обе части этого уравнения на $1+\varepsilon$, мы будем иметь $0 \cdot z = 2a(1+\varepsilon)$, то есть уравнение не имеет решения.

4) $(2+\varepsilon) \cdot z = \varepsilon$.

Это уравнение эквивалентно системе линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

так как $(2+\varepsilon) \cdot z \equiv (2+\varepsilon) \cdot (x + y\varepsilon) = (2x + y) + (x + 2y)\varepsilon$. Поэтому решением данного уравнения будет двойное число $z = -1/3 + 2/3\varepsilon$.

5) $\varepsilon \cdot z = 1$. Очевидно, решением будет $z = \varepsilon$.

6) Решим ещё систему

$$\left. \begin{array}{l} (1+\varepsilon) \cdot x + 2y = 2+\varepsilon \\ -3x + (1-\varepsilon) = 1 \end{array} \right\}.$$

Эта система эквивалентна следующей системе

$$\left. \begin{array}{l} x_0 + x_1 + 2y_0 = 2 \\ x_0 + x_1 + 2y_1 = 1 \\ -3x_0 = 0 \\ -3x_1 = 1 \end{array} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{array}{l} y_0 = 7/6 \\ y_1 = 2/3 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = -1/3 \end{array} \right\}$$

то есть $x = -1/3$, $y = (7 + 4\varepsilon)/6$ есть решение данной системы.

Заключение

Приложения циклических алгебр, конечно, не ограничены лишь некоторыми примерами из элементарной геометрии. Сами по себе циклические алгебры являются источником геометрических структур, отличных от евклидовой геометрии. Такие структуры определяются на линейных пространствах циклических алгебр, где в качестве фундаментальной формы, определяющей различные геометрические величины, берётся детерминант текущего элемента алгебры. При этом движениями будут преобразования линейного пространства алгебры, задаваемые линейными алгебраическими функциями.

То, что такие преобразования существуют, проистекает из мультипликативного свойства детерминанта текущего элемента алгебры, а так же из следующего свойства циклических алгебр.

Лемма (об детерминанте экспоненты). Если положить

$$\exp(x\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\epsilon)^n}{n!} = E_0^n(x) + \epsilon E_1^n(x) + \epsilon^2 E_2^n(x) + \dots + \epsilon^{m-1} E_{m-1}^n(x),$$

то

$$\Delta(\exp(x\epsilon)) = \begin{vmatrix} E_0^n(x) & E_{m-1}^n(x) & \dots & E_1^n(x) \\ E_1^n(x) & E_0^n(x) & \dots & E_2^n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{m-1}^n(x) & E_{m-2}^n(x) & \dots & E_0^n(x) \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда, для линейных алгебраических функций $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(t\epsilon)$ будет выполняться тождество $\Delta(\mathbf{x}') = \Delta(\mathbf{x})$, так как $\Delta(\mathbf{x}') = \Delta(\mathbf{x})\Delta(\exp(t\epsilon))$, а это и означает, что преобразования линейного пространства циклической алгебры, задаваемые линейными алгебраическими функциями вида $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(t\epsilon)$, сохраняет детерминант текущего элемента. То есть такие преобразования будут движениями в линейном пространстве циклической алгебры, где в качестве фундаментальной формы взят детерминант текущего элемента.

Литература

1. Денисова Н. С., Тесля О. Ю. «Построение евклидовой геометрии на основе систем аксиом Вейля». Изд. «Прометей», Москва, 2016 г.
2. Александрова Н. В. «Из истории векторного исчисления». Москва, URSS, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013 г.
3. Султанов А. Я. «Линейные алгебры, их дифференцирования и линейные связности». Изд. Пензенского государственного педагогического университета. Пенза, 2010 г.
4. Скопец З. А. «Геометрические миниатюры», составитель Глейзер Г. Д. Изд. «Просвещение», Москва, 1990 г.
5. Кострикин А. И., Манин Ю. И. «Линейная алгебра и геометрия». Изд. «Лань», Москва, 2008 г.
6. Кострикин А. И. «Введение в алгебру». Изд. «ФИЗМАТЛИТ», Москва, 1977 г.
7. Курош А. Г. «Курс высшей алгебры». Изд. «Лань», Москва, 2013 г.
8. Постников М. М. «Линейная алгебра» (Лекции по геометрии II семестр). Изд. «Ленанд», Москва, 2017 г.
9. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. «Пространства над алгебрами». Издательство КГУ, Казань, 1985 г.
10. Кантор И. Л., Солодовников А. С. «Гиперкомплексные числа». Изд. «Наука», Москва, 1973 г.
11. Шафаревич И. Р. «Основные понятия алгебры». Изд. URSS, Москва 2019 г.
12. Диментберг Ф. М. «Винтовое исчисление и его приложения в механике». Изд. «Наука», Москва, 1965 г.
13. Розенфельд Б. А. «Неевклидовы геометрии». ГИТТЛ (Государственное издательство технико-теоретической литературы), Москва, 1955 г.
14. Проскуряков И. В. «Сборник задач по линейной алгебре» Изд. «Наука», Москва, 1967 г.
15. Гарасько Г. И. «Начала финслеровой геометрии для физиков». Изд. Тетру, Москва 2009 г.
16. Кречмар В. А. «Задачник по алгебре». Изд. «Наука», Москва, 1968 г.
17. Бахман Ф., Шмидт Э. « n – угольники». Изд. «Мир», Москва, 1973 г.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 30 » 08 20 19 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Бурлакова Валерия Михайловича

(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение свойств алгебры комплексных
чисел на факультативных занятиях в школе»

Утверждена приказом по Университету от « 15.10 » 20 19 г. № 113 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы « 23 » мая 20 20 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Подборка и изучение литературы по теме ВКР «Изучение свойств алгебры циклических чисел на факультативных занятиях в школе».	Октябрь 2019	выполнено
2.	Сбор и изучение материала по теории векторных пространств.	Ноябрь 2019	выполнено
3.	Сбор и изучение материала по теории линейных алгебр.	Декабрь 2019	выполнено
4.	Написание первой главы ВКР «Векторные пространства над полем».	Январь 2020	выполнено
5.	Оформление второй главы ВКР «Линейные алгебры над полем».	Февраль 2020	выполнено
6.	Сбор материала и оформление третьей главы ВКР «Алгебры циклических чисел».	Март 2020	выполнено
7.	Написание четвёртой главы ВКР «Приложения циклических алгебр в элементарной математике».	Апрель 2020	выполнено
8.	Оформление ВКР (дипломной работы)	Май 2020	выполнено

Дата выдачи задания «23» сентября 2019 г.

Руководитель С Султанов А.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Бур Бурманов В. М.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения

Бурлаков Валерия
Михайловича

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бурлаков Валерий Михайлович,
Ф.И.О. студента

студент(ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему « Изучение свойств алгебры
циклических чисел на гранулятивных
замкнутых в шкеле »,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная
квалификационная работа обучающихся по образовательным программам
высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета
и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата
является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

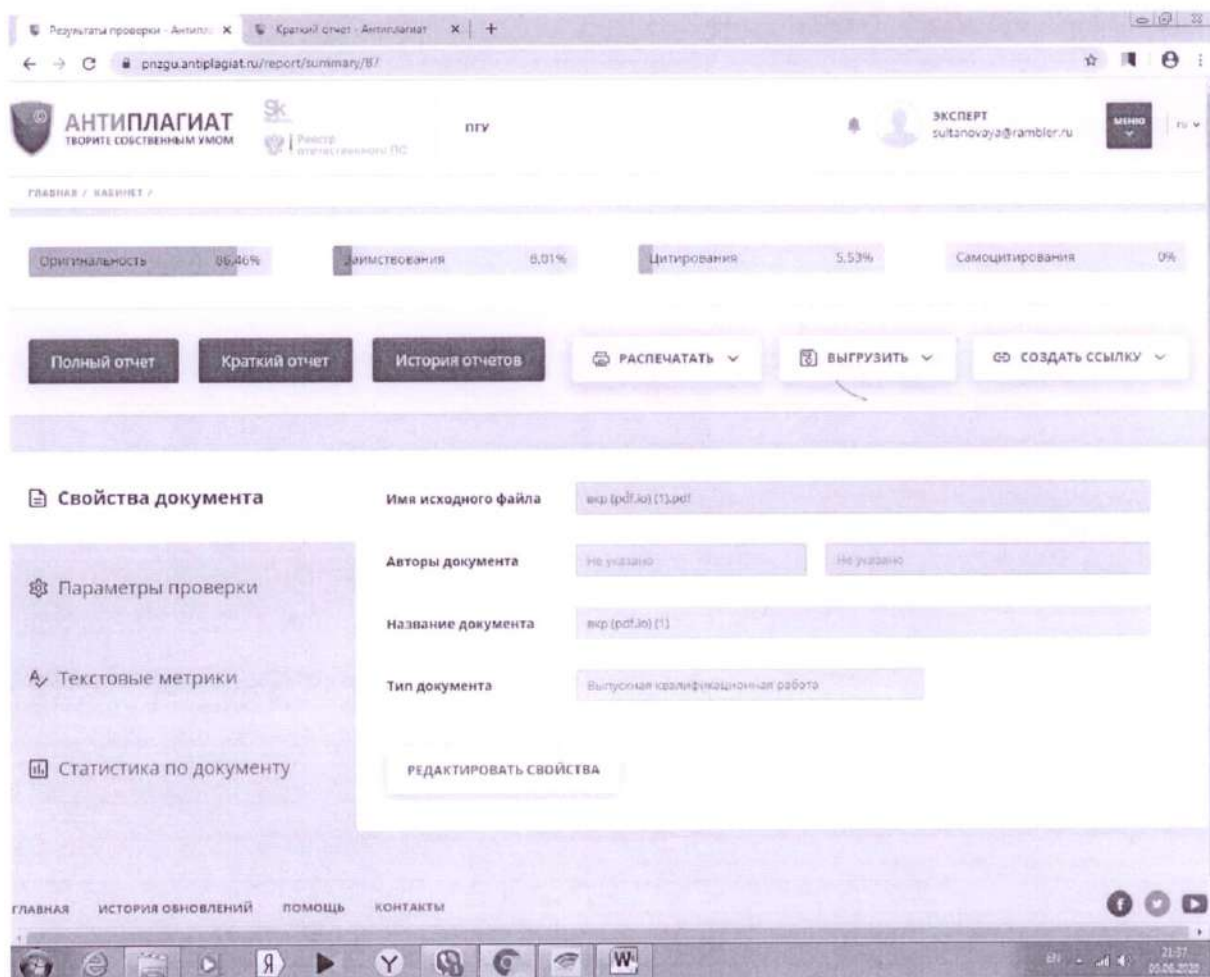
Бур
подпись
04.06.2020
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 08.06.2020
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР С Суданов А.В.
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему «Изучение свойств алгебры
циклических чисел на факультативных занятиях в школе»
студента 5 курса заочной формы обучения Бурлакова Валерия Михайловича
направления подготовки 44.03.01
«Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Султанов Адгам Яхиевич



«9» июня 2020 г.

Руководитель ВКР Султанов А.Я. Султанов А.Я.

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение свойств алгебры циклических чисел на факультативных занятиях в школе» студента Бурлакова Валерия Михайловича факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», гр. 15 ЗФПМ 51

Работа посвящена изучению одного важного класса линейных алгебр, имеющего приложения в различных областях геометрии, как то пространства над алгебрами, неевклидовы пространства, и в том числе в геометрии евклидова пространства. Циклические алгебры представляют собой непосредственное обобщение алгебры комплексных чисел. И потому изучение циклических алгебр может составить факультативный курс для школ с углублённым изучением математики. Эти алгебры имеют интересные приложения к решению геометрических задач. И этим определялся выбор темы.

Развитие этой темы требует рассмотрение, во-первых, линейных пространств, затем общего понятия линейных алгебр. И на этой базе изучаются циклические алгебры и их приложения к геометрическим задачам. Такова логика построения выпускной квалификационной работы.

Работа изложена на 64 страницах и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы.

Во введении даётся исторический обзор тематики, а также указаны отечественные геометрические школы, в которых развиваются исследования линейных алгебр и их приложений.

В первой главе излагаются основные положения теории линейных или векторных пространств, поскольку эта теория даёт базу для построения любых линейных алгебр.

Вторая глава посвящена теории линейных алгебр. В ней вводятся общие понятия, относящиеся к этой теории. И даются примеры линейных алгебр, иллюстрирующие те или иные их свойства, а также конструкции, присущие произвольным алгебрам.

В третьей главе дано краткое описание основных свойств и особенностей циклических алгебр (или алгебр циклических чисел). И эти свойства иллюстрируются на конкретных примерах алгебр циклических чисел различных порядков.

Наконец, четвёртая глава посвящена некоторым приложениям циклических алгебр к вопросам элементарной математики. В частности, показано как мультипликативность детерминантов циклических чисел даёт ряд элемен-

тарно-алгебраических тождеств. А существование в циклических алгебрах делителей нуля позволяет просто доказывать различные конфигурационные теоремы о многоугольниках, аналогичные известной теореме Вариньона о серединном параллелограмме произвольного четырёхугольника.

Эти приложения могут быть использованы в педагогической практике в средних школах и гимназиях с углублённым изучением математики, а так же во внеклассной работе математических кружков и факультативных занятий. И, прежде всего, это относится к изучению метрических и конфигурационных свойств многоугольников.

В заключении указывается возможность приложений алгебр циклических чисел различного порядка к изучению геометрии пространств с неевклидовой метрической структурой.

При написании выпускной квалификационной работы Бурлаков В. М. показал высокий уровень владения предметными знаниями. В разработке темы выпускной квалификационной работы он проявил самостоятельность и творческую инициативу. Все выводы, данные в выпускной квалификационной работе достоверны и аргументированы.

Выпускная квалификационная работа Бурлакова В. М. оформлена аккуратно, и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к оформлению выпускных квалификационных работ.

Выпускная работа Бурлакова Валерия Михайловича представляет собой вполне законченное исследование, намеченные цели достигнуты. При написании автором работы изучена обширная литература по теме. Работа написана на достаточно высоком научно-методическом уровне.

Доклад, подготовленный Бурлаковым В. М. по выпускной квалификационной работе, адекватно отражает её содержание.

Считаю, что работа Бурлакова В. М. удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и заслуживает оценки "отлично".

Руководитель ВКР Адгам Яхиевич Султанов, кандидат физ-мат наук, доцент кафедры «Математическое образование» Педагогического института им. В. Г. Белинского Пензенского государственного университета.



(подпись)