МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение преобразований плоскости в рамках дополнительного образования как фактор профессионального самоопределения обучающихся»

Студент 6.05.25 (подпись, дата) Журавлева Ольга Александровна (ФИО полностью)

Руководитель 6.05.25 (подпись, дата) Сорокина М. В. (ФИО)

Нормоконтролер 23.06.25 (подпись, дата) Журавлева Е. Г. (ФИО)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 2.06.25 (подпись) Паньженский В. И.

Работа защищена с отметкой 5 (отл) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 8)

Секретарь ГЭК 27.06.25 (подпись) Журавлева Е. Г.

Пенза 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО САМООПРЕДЕЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В РАМКАХ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ 6
1.1 Профессиональное самоопределение личности как психолого-педагогическая проблема 6
1.2 Роль и значение дополнительного образования в профессиональном самоопределении обучающихся 11
1.3 Роль и место темы преобразования плоскости в школьном курсе геометрии 14
1.4 Понятие инверсии и ее свойства 20
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В 8-9 КЛАССАХ 23
2.1 Рабочая программа факультатива по теме «Преобразования плоскости» 23
2.2 Методические особенности изучения понятия инверсии в рамках кружкового занятия 26
2.2.1 Применение инверсии к решению задач по элементарной геометрии 26
2.2.2 Решение задач с использованием ключевых свойств инверсии 32
2.2.3 Организация изучения применения инверсии в инженерии и программировании 36
2.4 Организация учебного исследования в рамках взаимодействия слушателей различной профессиональной направленности 43
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 56
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 58

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире роль системы дополнительного образования в формировании профессионального самоопределения личности играет ключевую роль, потому что это помогает подросткам в профессиональном самоопределении и позволяет ребятам раскрыть свой потенциал и применить полученные знания.

Актуальность состоит в том, что система дополнительного образования играет важную роль в развитии личности подростков, а также способствует их подготовке к жизни и профессиональной карьере в условиях социальных перемен, потому что стране нужны конкурентоспособные кадры на рынке труда.

Таким образом, дополнительное образование играет ключевую роль в процессе формирования профессионального самоопределения личности, что является важной составляющей при формировании будущих специалистов и их профессиональном самоопределении.

В школьном курсе геометрии инверсия обычно не изучается, но умение решать задачи нестандартными способами – ключевой навык для современного выпускника. Способность находить оригинальные решения проблем важна как в профессиональной деятельности, так и в повседневной жизни. Поэтому, несмотря на мнение некоторых ученых, которые считают, что преподаванию инверсии в школе не стоит уделять пристального внимания, мы убеждены в необходимости сбалансированного подхода к её преподаванию. Инверсия, как нестандартный метод решения задач, играет важную роль в расширении кругозора и развитии гибкости мышления у школьников. Особое внимание следует уделить наглядности, которая существенно облегчает понимание материала для обучающихся с разными типами восприятия.

Именно поэтому наше исследование является актуальным и значимым. И поэтому в педагогической науке и практике методика обучению нестандартным подходам, включая метод инверсии занимает важное место.

Объектом исследования является преобразование плоскости.

Предмет исследования – влияние преобразования плоскости на профессиональное самоопределение обучающихся.

На основании вышеизложенного, можем сказать, что *цель работы* – определение роли изучения преобразований плоскости в кружках и на факультативах при выборе школьниками будущей профессии.

Для достижения цели исследования мы определили следующие *задачи*:

- выявить роль и значение дополнительного образования в профессиональном самоопределении обучающихся;
- определить роль и место темы «преобразования плоскости» в школьном курсе геометрии;
- изучить понятие инверсии и ее свойства;
- рассмотреть методические особенности изучения преобразований плоскости на факультативных занятиях в 8-9 классах;
- разработать рабочую программу факультатива по теме «Преобразования плоскости»;
- изучить методические особенности введения понятия инверсии в рамках кружкового занятия;
- показать применение инверсии к решению задач по элементарной геометрии;
- привести примеры решения задач на применение ключевых свойств инверсии;
- показать применение инверсии в инженерии и программировании;
- организовать учебное исследование в рамках взаимодействия слушателей различной профессиональной направленности.

Практическая значимость работы: разработанные занятия могут быть использованы учителем математики на факультативах или при проведении математического кружка.

Структура представленной работы состоит из двух логически связанных между собой глав, введения, заключения и списка использованной литературы. Главы разделены на параграфы, которые позволяют сделать акцент на отдельных вопросах и проблемах темы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО САМООПРЕДЕЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ В РАМКАХ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Профессиональное самоопределение личности как психолого-педагогическая проблема

Проблема профессионального самоопределения личности относится к числу активно разрабатываемых психолого-педагогических задач.

Рассматривая проблему профессионального самоопределения, остановимся, прежде всего, на определении данного понятии.

Профессиональное самоопределение личности – длительный и сложный процесс личностного развития и самооценки, который охватывает значительный период жизни человека и направлен на выбор подходящей профессии.

Профессиональное самоопределение по И.С. Кону – «многомерный и многоступенчатый процесс, который можно рассматривать под разными углами зрения. Во-первых, как серию задач, которые ставит общество перед формирующейся личностью и которые эта личность должна последовательно разрешить в течение определённого периода времени. Во-вторых, как процесс поэтапного принятия решений, посредством которых индивид формирует баланс между своими предпочтениями и склонностями, с одной стороны, и потребностями существующей системы общественного разделения труда – с другой. В-третьих, как процесс формирования индивидуального стиля жизни, частью которого является профессиональная деятельность» [19].

Е.А. Климов дает следующее определение: «профессиональное самоопределение – это одно из важных проявлений социальной активности субъекта деятельности. Подчёркивая социально-психологический аспект профессионального самоопределения и, выделяя его возрастные стадии, отмечается длительность протекания данного процесса» [18].

Под профессиональным самоопределением, отмечает Е.М. Борисова, понимается «процесс развития личности в профессиональной деятельности на

основе наиболее полного использования своих способностей и индивидуально-психофизиологических возможностей. Этот процесс не может быть ограничен лишь каким-то одним этапом, он занимает весь период активной трудовой деятельности» [10].

Исходя из анализа работ отечественных психологов, направленных на исследование профессионального самоопределения личности, Романова Е.С. [25] выделила 5 основных направлений, соответствующих зарубежным исследованиям в данной области (Рисунок 1).

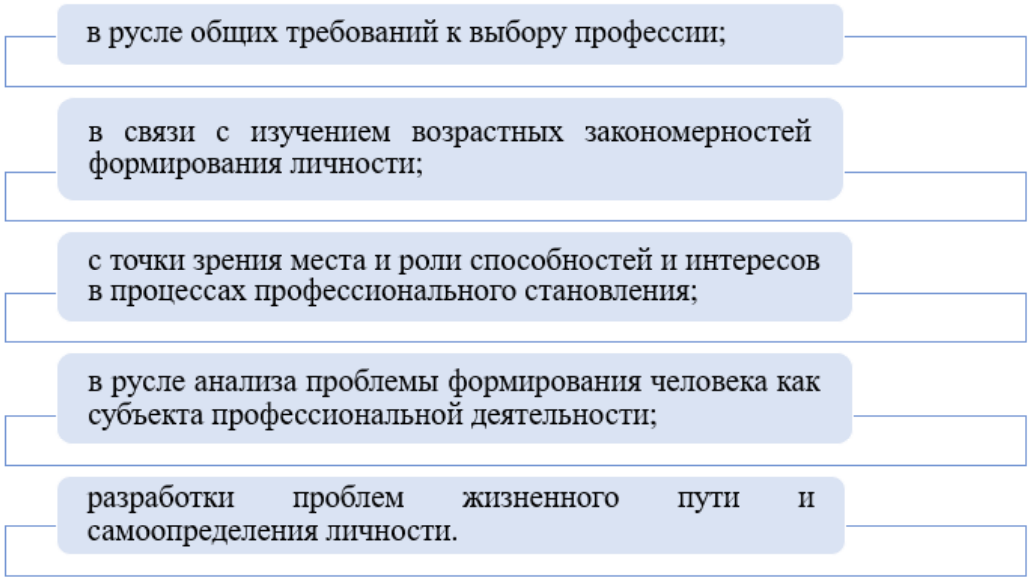


Рисунок 1

Е.М. Борисовой [10] было выделено 4 направления в исследованиях профессионального самоопределения (Рисунок 2).

Следовательно, подходы к профессиональному самоопределению, предложенные Романовой Е.С. и Борисовой Е.М. являются не взаимоисключающими, а, наоборот взаимодополняющими.

Опираясь на данные работы проблему самоопределения необходимо рассматривать в тесной взаимосвязи с изучением жизненного пути человека, а профессиональное самоопределение определять как мотивационный центр в социальной ситуации развития старшеклассника.

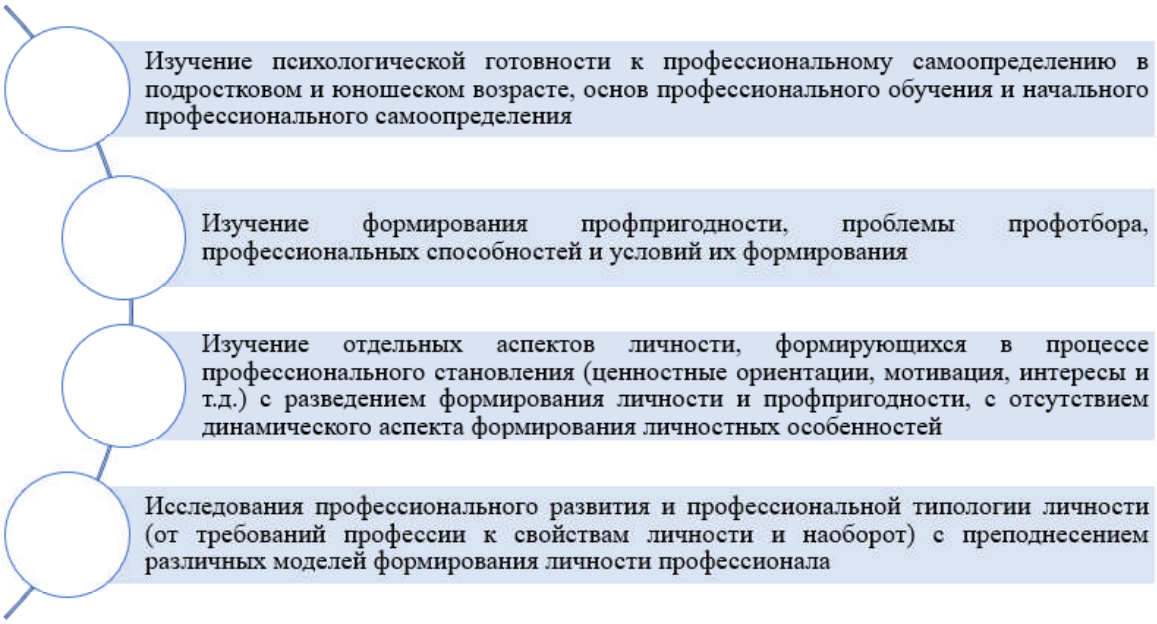


Рисунок 2

Мотивы, или основания, по которым подростки и старшеклассники выбирают свои будущие профессии, являются важными показателями психологической готовности школьников к труду, их профессиональной зрелости. Сознательный выбор профессии всегда хорошо мотивирован. Очень действенны те мотивы, которые подчеркивают общественное значение профессии. В то же время общественная направленность мотивов профессии в абсолютном большинстве случаев не устраняет мотивов личных, они взаимосвязано дополняют друг друга. Проблеме мотивации выбора профессии многие педагоги и психологи уделяли большое внимание. Классификация мотивов у исследователей данной проблемы различна. Мы остановимся на одной из самых популярных (Рисунок 3).

Психологи обычно выделяют следующие основные факторы выбора (мотивов) профессии: 1) субъективные (интересы; способности; темперамент; характер); 2) объективные (уровень подготовки, состояние здоровья, информированность о мире профессий); 3) социальные (социальное окружение, домашние условия, образовательный уровень родителей).

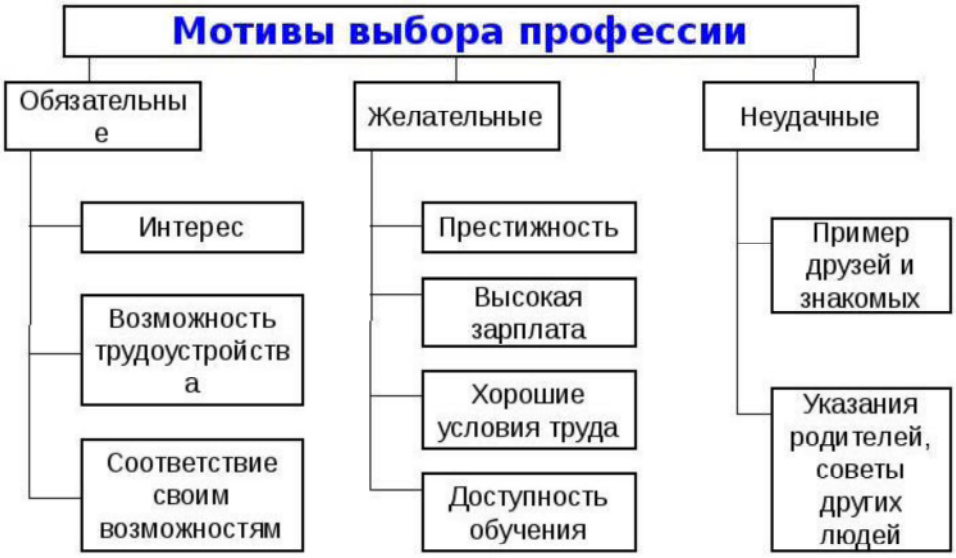


Рисунок 3

Е.А. Климов [18] выделил восемь основных факторов выбора (Рисунок 4).

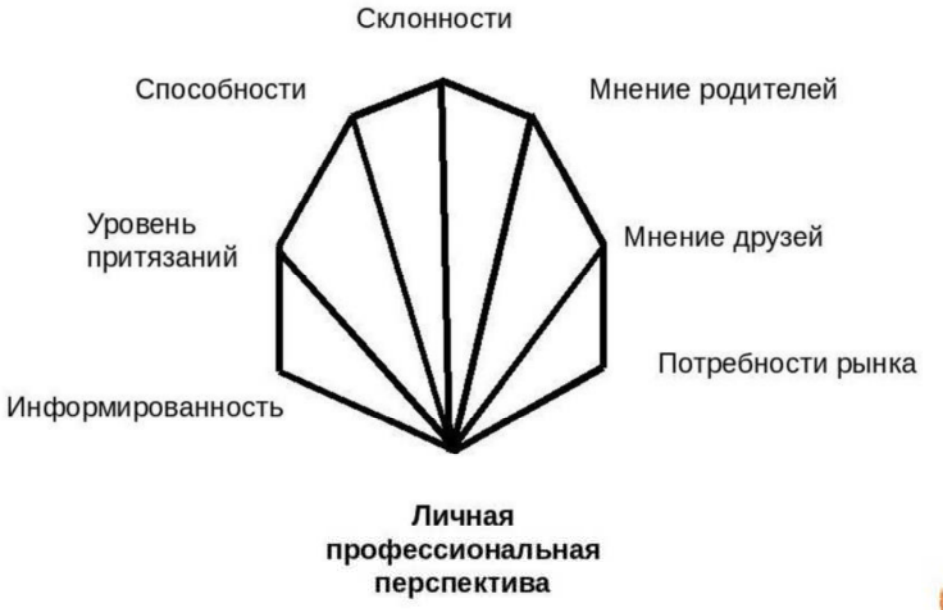


Рисунок 4

Согласно Е.А. Климову, [18] профессиональному самоопределению, характерному для старшего школьного возраста, предшествуют этапы, представленные на рисунке 5.

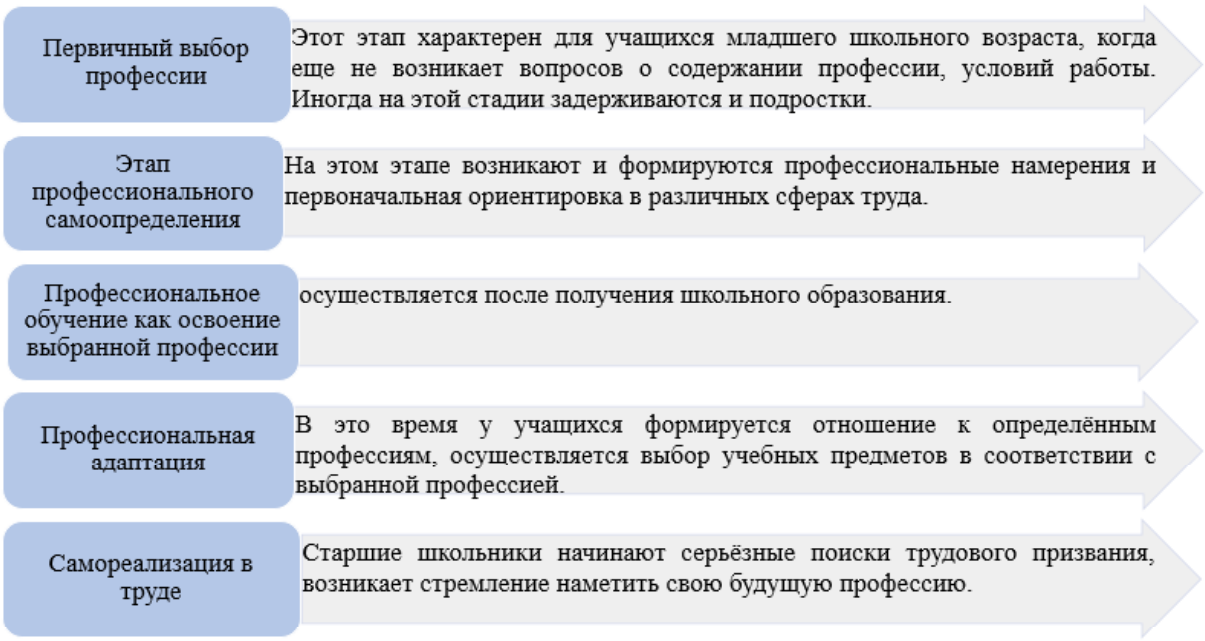


Рисунок 5

Итак, профессиональное самоопределение является процессом развития личности, самооценки своих возможностей и способностей по отношению к предполагаемой профессии, который характеризуется длительностью протекания, непрерывностью в соответствии с изменяющимися условиями и задачами целенаправленной деятельности индивида.

Учитывая современные тенденции цифровизации, роботизации, внедрения искусственного интеллекта во все сферы жизни, нельзя однозначно предсказать, каким образом будут изменяться сущностные характеристики или условия труда той или иной профессии, и, соответственно, не представляется возможным ни на одном уровне образования предоставить обучающемуся настолько полный комплекс знаний, умений и навыков, который будет для него достаточен на протяжении всего профессионального пути: он должен был готов, в том числе и психологически, к непрерывному самообучению, саморазвитию, и воспринимать перемены как возможность профессионального и личностного роста, а профессионализацию – как вектор развития. Поэтому формирование готовности к профессиональному самоопределению школьников должно начинаться как можно раньше, с воспитания ценности труда, ценности

познания и развития, ценности коллектива и успешного взаимодействия с ним, ответственности за результат своих действий, навыков командного взаимодействия, развития основ самоорганизации, социального и эмоционального интеллекта, критического мышления [9].

Вышеперечисленное выходит за рамки технической реализации профориентационного минимума, поскольку на данном этапе развития общества успешное профессиональное самоопределение обучающегося невозможно без его личностного самоопределения, достаточной субъектности, восприятия себя как элемента социума, гражданской идентичности. При этом важно учитывать роль социального пространства, в котором существует обучающийся, поскольку оно «выступает исходной схемой построения и результирующей повседневного бытия людей, обусловливая связанность, непрерывность, организованность социального процесса» [9].

Следовательно, все вышесказанное подчёркивает необходимость акцентуации профориентационной работы в образовательных учреждениях всех ступеней образования на осмысленный, самостоятельный, социально-востребованный выбор обучающегося в контексте профессионального самоопределения.

1.2 Роль и значение дополнительного образования в профессиональном самоопределении обучающихся

Система дополнительного образования детей в России возникла в 1992 году. Она явилась преемником внеклассной и внешкольной работы, внешкольного воспитания. Это тот базис, на котором выстраивается система, получившая в законодательстве название – дополнительное образование детей.

Ценность дополнительного образования детей в том, что оно усиливает вариативную составляющую общего образования и помогает ребятам в

профессиональном самоопределении, способствует реализации их сил, знаний, полученных в базовом компоненте.

Система дополнительного образования детей предоставляет широкие возможности для профессионального определения ребенка. Некоторые из них представлены на рисунке 6.

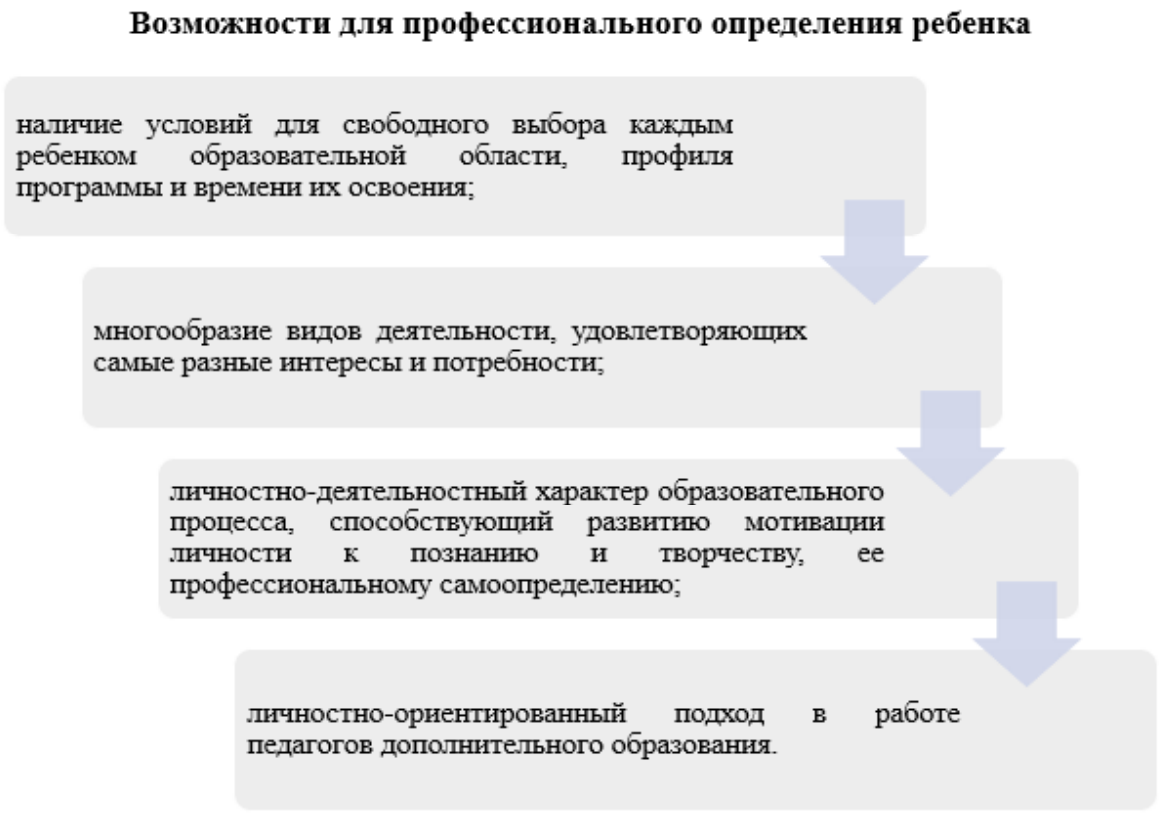


Рисунок 6

Профессиональное самоопределение является важной характеристикой социально-психологической зрелости личности, ее потребности в самореализации и самоактуализации, проявление развития личности в ее стремлении к профессиональному становлению.

Профессиональное самоопределение детей в возрасте 15-17 лет является важным этапом в их жизни. В этот период многие молодые люди начинают задумываться о выборе профессии и пытаются определиться со своими интересами, способностями и целями.

Например, изучение дополнительных предметов, таких как математика, физика или английский язык, может помочь детям развить свои интеллектуальные способности и повысить уровень знаний в выбранной ими области. Они могут попробовать различные виды деятельности, например, посетить мастер-классы по интересующей их теме или поучаствовать в проектах, связанных с будущей профессией. Это позволит им лучше понять свои интересы и склонности, а также выбрать наиболее подходящую для них профессию.

Профессиональное самоопределение на разных возрастных этапах имеет свои особенности (Рисунок 7).

Дошкольный возраст	Младший школьный возраст	Средний школьный возраст	Подростки	Старший школьный возраст
Ребенок наблюдает за профессиональной деятельностью взрослого, сравнивает ее внешние признаки и проявления, содержание разной деятельности. Особое значение – воспитание положительной мотивации к любой деятельности вообще.	Развитие способностей к концу младшего школьного возраста приводит к значительному возрастанию индивидуальных различий между детьми, что влияет на существенное расширение спектра профессиональных предпочтений.	Ребенок осознает свои способности и возможности на базе уже полученного опыта деятельности, что приводит к формированию представлений о желаемой профессии. На основе этой способности происходит обогащение представления о содержании различных видов труда, формируется умение понимать условность отдельных событий, воображать себя в определенной профессии.	Знают о мире профессионального труда и его составляющих, о рынке труда и образовательных услуг, о собственных способностях и профессионально важных качествах, а также уже умеют работать с источниками информации о путях продолжения образования и мире профессионального труда, умеют планировать, проектировать и организовывать собственную деятельность.	Профессиональное самоопределение начинает выступать как важная задача личностного развития, занятия в учреждениях дополнительного образования детей, для части обучающихся становятся основой профессионализации, но в конкретной сфере деятельности, которые оцениваются ими как наиболее вероятные направления освоения профессии.

Рисунок 7

У детей, прошедших через дополнительное образование, увеличивается возможность сделать безошибочный выбор. Система дополнительного

образования создаёт условия для самореализации, самопознания, самоопределения, позволяя ребёнку, подростку определиться личностно, социально и профессионально.

Таким образом, актуальность профориентационной работы в организациях дополнительного образования очевидна, так как она существенно расширяет знания о творческих возможностях человека и творческом потенциале обучаемых, она обеспечивает возможность успеха в избранной сфере и тем самым способствует развитию таких качеств личности, которые важны для успеха в любой сфере деятельности. Дополнительное образование создает возможность формирования круга общения на основе общих интересов, общих духовных ценностей.

1.3 Роль и место темы преобразования плоскости в школьном курсе геометрии

Проанализируем учебник Атанасяна Л.С. на предмет изучения геометрических преобразований [5].

В начале 8 класса предусматривается описательное знакомство с симметрией, а в конце 9 класса рассматривается общее понятие движения и его свойства, затем отдельно изучаются параллельный перенос и поворот. На эту тему отводится всего 8 часов.

Рассмотрение частных видов движений осуществляется по следующему примерному плану:

1. Выполняется построение и одновременно проговаривается определение того или иного вида движений (определение – генетическое); вводятся сопутствующие понятия.
2. Предлагаются задания на построение фигур, полученных путем, воздействия движением на данные фигуры.

3. Неявно вводится тождественное преобразование как преобразование, переводящее фигуру саму в себя.

4. Упражнения на распознавание.

5. Доказательство того, что данное преобразование является движением (преобразованием подобия) обычно предваряется задачей на построение и последующее измерение или вычисление расстояний.

6. Доказательство специфических свойств данного вида преобразований.

Материал о преобразованиях в учебнике представлен темой «Движения» в конце 9 класса, которая начинается с введения понятия отображения плоскости на себя.

Изучение темы начинается с повторения понятия точки, симметричной относительно данной точки (центральная симметрия) и данной прямой (осевая симметрия).

В 8 классе обучающиеся уже изучили центральную и осевую симметрию как свойство геометрических фигур. Эти понятия вводятся как примеры отображения плоскости на себя. В ходе повторения школьников следует подвести к понятию сохранения расстояния между точками. Поэтому, при изучении темы отображений плоскости на себя, эти виды симметрии можно использовать в качестве наглядных примеров. В процессе повторения необходимо акцентировать внимание на том, что при таких отображениях сохраняется расстояние между точками. Для иллюстрации этого свойства можно предложить обучающимся решить следующие задачи.

1. Построить точки A_1, B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой l (Рисунок 8).

2. Существует ли на плоскости такая точка, для которой нет точки, симметричной относительно данной прямой?

3. Докажите, что в каждом из случаев 2а – 2б $A_1 B_1 = AB$.

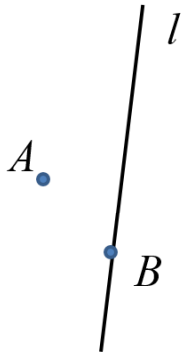


Рисунок 8а

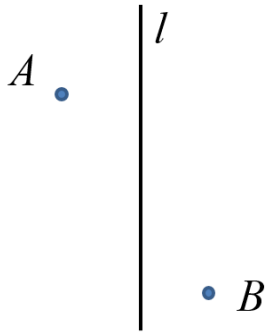


Рисунок 8б

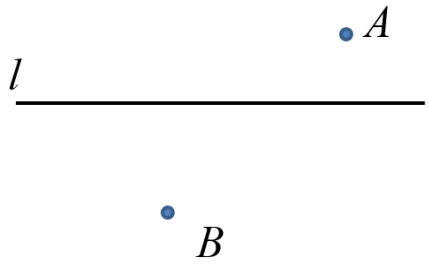


Рисунок 8в

Рисунок 8

4. Постойте точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно точки O, если а) точка O лежит на отрезке AB; б) точка O не лежит на прямой AB.

5. Существует ли такая точка в плоскости, для которой нет точки, симметричной относительно данной точки?

6. Докажите, что в каждом из рассмотренных в задаче 4 случаев $A_1B_1 = AB$. [5]

Затем можно ввести понятия отображения плоскости на себя и проиллюстрировать его примерами центральной и осевой симметрии. При этом необходимо акцентировать внимание обучающихся на то, что при отображении плоскости на себя выполняются 2 условия:

1) Каждой точке в плоскости ставится в соответствие какая-то одна точка плоскости;

2) Каждая точка плоскости оказывается поставлена в соответствие какой-то точке плоскости.

После этого можно решить задачи на закрепление данного понятия.

А затем, опираясь на задания 3 и 6, рассмотренные выше, вводим понятие движения:

«Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние» [5].

Далее доказываем, что центральная и осевая симметрии являются движениями.

После этого рассматривается теорема об отображении отрезка и следствие из неё.

Пункт «Наложение и движение» не входит в обязательную программу, но, его изучение остается на усмотрение учителя или выносится на факультатив. Понятие наложения, на основе которого определялось равенство фигур, относится в данном курсе геометрии к числу основных (неопределяемых) понятий. Наложения – это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах 7-13 учебника.

Движение – наоборот, определяемое понятие: это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние.

Следовательно, любое наложение является движением. Доказывается и обратное утверждение: любое движение является наложением.

Таким образом, понятие наложение совпадает с понятием движения.

Материал о параллельном переносе и повороте ещё двух видах движений – можно также преподнести в форме лекции, либо на факультативных занятиях. Полезно обратить внимание обучающихся на то, что при параллельном переносе прямая отображается на параллельную ей прямую или сама на себя. Отсюда следует простой способ построения образов прямых и отрезков при параллельном переносе.

В конце главы приведены геометрические задачи, для решения которых рекомендуется применять движения.

Основной целью темы является ознакомление обучающихся с понятием движения на плоскости, а также с конкретными видами движения: центральной и осевой симметрией, параллельным переносом, поворотом. Понятие отображения плоскости на себя рассматривается только как основа для введения понятия движения. Рассматривается отображение плоскости на себя

на наглядно-интуитивном уровне с привлечением уже известных школьникам понятий осевой и центральной симметрии.

Так как школьная программа по математике пока не предусматривает подробного изучения различных свойств указанных преобразований, то данную тему следует вынести факультативные занятия или рассмотреть на занятиях математического кружка.

В школе изучаются не все виды преобразований, а только два их вида: движение и преобразование подобия.

В 8 классе в главе VII рассматривается тема «Подобные треугольники», которая начинается с введения понятия пропорциональных отрезков. Объяснение темы начинается с объяснения того, что в повседневной жизни приходится иметь дело с предметами одинаковой формы, но разных размеров. Такие предметы и являются прообразами подобных геометрических фигур. Основное внимание уделяется подобным треугольникам. Подобие треугольников определяется не через преобразование подобия, а через равенство углов и пропорциональность сходственных сторон. Доказательство признаков подобия треугольников значительно упрощается благодаря применению теоремы: «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы» [5].

После доказательства признаков подобия показываем их применение к доказательству теорем и решению задач.

В очень краткой форме рассказано о том, как можно определить подобие произвольных фигур. Используется символика: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A_1B_1C_1$ (треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$). Даётся понятие центрально-подобных фигур: «каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причём $OM_1 = k{\cdot}OM$ (Рисунок 9). В результате такого сопоставления получается

фигура F_1, подобная фигуре F. В этом случае фигуры F и F_1 называются центрально-подобными» [5].

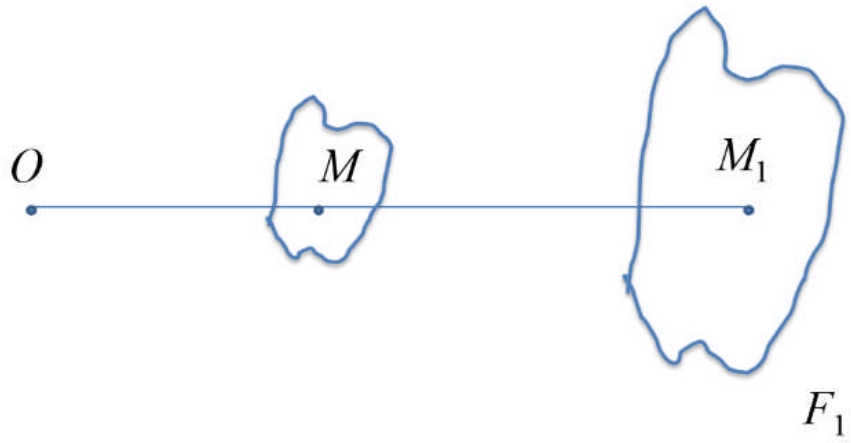


Рисунок 9

Преобразование подобия играет важную роль в геометрии. Это и понятно. Наше реальное пространство обладает группой подобия. Все геометрические объекты пространства, если они образованы из отрезков прямых, могут делиться на 2 множества: подобных и неподобных фигур. В множестве подобных фигур могут быть и равные. Понятие о подобии фигур у ребёнка возникает значительно раньше, чем понятие об их размерах. Это объясняется особенностями зрительного восприятия: две фигуры разных размеров, но одинаковые по форме им не различаются.

Метод преобразований используется при решении задач на доказательство, на построение, при решении так называемых геометрических задач на нахождение максимума и минимума. При этом используются все виды преобразований.

Однако подробно с применением этого метода при решении задач обучающихся на уроках геометрии не знакомят. Этот вопрос выносится на факультативные занятия или кружки.

Таким образом, мы видим, что в учебнике Атанасяна Л.С. понятию геометрического преобразования отводится достаточно скромное место:

рассматриваются движения плоскости/пространства и преобразования подобия, инверсия в данном пособии не изучается.

1.4 Понятие инверсии и ее свойства

Пусть на плоскости дана некоторая окружность ω (O, r).

И пусть точка P – произвольная точка плоскости, отличная от точки O. Сопоставим ей точку P', которая удовлетворяла бы двум условиям:

1) точка P' лежит на луче OP;

2) OP·OP' = r^2. (1)

Такую точку P' мы называем инверсной или обратной точке P относительно окружности ω. Окружность ω называется базисной окружностью инверсии, ее центр – центром инверсии, а радиус – радиусом инверсии.

Следовательно, инверсия – это преобразование, которое каждой точке некоторой фигуры ставит в соответствие другую точку, называемую инверсной. А фигура, образованная всеми точками, инверсными точками данной фигуры, называется инверсной по отношению к данной фигуре.

Обратим внимание на то, что при r = 1 OP'= $\frac{1}{OP}$, так что если точка P инверсна точке P', то расстояния OP и OP' являются взаимно обратными числами. С этим связано то, что точку P' называют обратной точке P, а рассматриваемое преобразование называется преобразованием обратных радиусов (расстояний), или же обращением.

Рассмотрим построение инверсных точек:

1 случай.

Если точка P ∈ ω, то P' = P (совпадают).

2 случай.

Пусть точка A – внутри базисной окружности.

Построение.

1. ω(O, r) и A – данная точка.

2. АК⊥OA, К ∈ ω.

3. КА – касательная к окружности. (Рисунок 10)

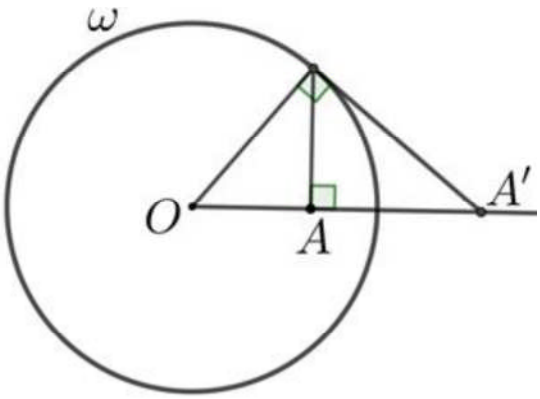


Рисунок 10

Доказательство.

Рассмотрим подобные треугольники ОАК и ОКА'. Из подобия следует: ОА·ОА' = r^2 . Точка А' Є ОА (по построению).

3 случай.

Точка Р вне базисной окружности. Тогда построение выполняем в обратном порядке.

Построение.

1. ω (О, r) и А – данная точка.

2. АК – касательная к окружности ω. К ∈ ω.

3. КА'⊥OA, А'∈ОА, А' — инверсна точке А.

Отметим простейшие свойства инверсии, непосредственно вытекающие из определения.

1. Если точка M' инверсна точке M, то и обратно: точка M инверсна точке M'.

2. Если при инверсии фигура Φ преобразуется в фигуру Φ', то фигура Φ' преобразуется в фигуру Φ.

3. Каждая точка окружности инверсии инверсна самой себе.

4. Если данная точка лежит вне окружности инверсии, то инверсная ей точка лежит внутри этой окружности, и наоборот.

5. Если точка, лежащая вне окружности инверсии, неограниченно удаляется от этой окружности, то инверсная ей точка (внутри базисной окружности) неограниченно приближается к центру инверсии. Верно и обратное предложение.

6. При инверсии луч, исходящий из центра инверсии, преобразуется в себя. При этом часть луча, внутренняя относительно окружности инверсии, преобразуется в его внешнюю часть, и наоборот.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В 8-9 КЛАССАХ

2.1 Рабочая программа факультатива по теме «Преобразования плоскости»

Школьная программа по математике содержит лишь самые необходимые, максимально упрощённые знания. А требования, которые налагаются на абитуриентов, поступающих в высшие учебные заведения гораздо выше. Поступить в вуз нашим выпускникам становится трудно не только в силу экономических и социально-политических условий, но и по причине несоответствия знаний выпускника, которого добросовестно учили по программе, и уровнем вступительных экзаменов в вуз. Поэтому учителя школ, заботясь о своих учениках, вынуждены организовывать для них разного рода дополнительные занятия. И в целях наилучшего результата делать это надо не только в последние годы обучения, но значительно раньше.

Дополнительное образование становится неотъемлемой частью учебно-воспитательной работы по математике в школе. Оно способствует углублению знаний обучающихся, развитию их дарований, логического мышления, расширяет кругозор. А также помогает заинтересовать обучающихся математикой, вовлечь их в серьезную самостоятельную работу.

Основной задачей программы является не только подготовка к экзамену, но и развитие самостоятельного мышления и творческого подхода к решению любых проблем. Это создаст условия для формирования ученика как профессионального математика. Однако даже в случае, если этого не произойдет, способность мыслить творчески и нестандартно будет полезна в любой сфере деятельности в будущем.

Именно поэтому мы создали программу факультатива по математике для 9 класса.

Программа факультативного курса «Преобразования плоскости»

Пояснительная записка.

Данный факультативный курс предназначен для обучающихся 9 классов. Программа рассчитана на 27 часов (1 час в неделю). Представленный курс направлен на развитие математической компетентности и коммуникативных навыков обучающихся с применением групповых форм организации их взаимодействия и использованием актуальных на данный момент образовательных ресурсов. С помощью внедрения в занятия ситуаций поиска рационального решения, возможности самостоятельного «открытия» новых знаний, разбора нетипичных способов рассуждения и использования элементов исследовательской деятельности обучающиеся смогут реализовать свой математический потенциал.

Задачи, включаемые в предложенную программу, должны быть не столько трудны в плане математического содержания, сколько нетипичны в плане математической ситуации. Иными словами, решая задачу, обучающийся должен отказаться от «образца» и типичного алгоритма решения, придумать новый ход действий, который приведет к нужному результату. Это поможет сформировать творческий подход к анализу задач, позволит развить сообразительность и находчивость.

Важно, чтобы в процессе решения задач курса дети научились видеть и выделять сходства и различия изучаемых объектов, формулировать необходимые утверждения, делать выводы. Задача педагога – научить обучающихся думать, рассуждать, искать наиболее рациональный подход, но в то же время научить их самостоятельности в рассматриваемых аспектах обучения.

Работа по данной программе способствует развитию мыслительной деятельности учащихся, освоению новых методов решения нестандартных геометрических задач, воспитанию творческого отношения к учебной деятельности математического характера.

Введение курса обосновано тем, что применение геометрических преобразований позволяет учащимся научиться решать сложные задачи, но эта тема не представлена в школьных учебниках (рассматриваются лишь частные случаи). Без изучения метода геометрических преобразований учащиеся испытывают затруднения при углубленном изучении в 10-11 классах темы «Преобразования в пространстве». Тематическое планирование разработанного курса представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование

№	Темы	Количество часов
		Всего
1.	Движения, виды и свойства движений	2
2.	Применение движений при решении задач на доказательство	4
3.	Применение движений при решении задач на построение	4
4.	Подобие. Гомотетия. Решение задач методом подобия	3
5.	Инверсия. Определение инверсии, метод построения инверсных точек, основные свойства.	2
6.	Решение задач с использованием ключевых свойств инверсии.	2
7.	Применение инверсии для решения задач повышенной сложности с использованием компьютерных программ. Инверсия в инженерии	4
8.	Решение исследовательской задачи с использованием компьютерной модели двойного инверсора и аналитическим обоснованием полученных выводов	4
9.	Завершающее занятие, обобщение изученного материала	2
Итого:		27

В современной системе общего образования факультативные занятия являются немаловажным звеном учебно-воспитательной работы. Многолетний опыт внедрения факультативных занятий в общеобразовательной школе подтверждает их позитивное влияние на достижение приоритетной цели образования – всестороннего развития личности обучающихся с учетом их потребностей и интересов.

2.2 Методические особенности изучения понятия инверсии в рамках кружкового занятия

В школьном курсе геометрии изучение преобразований плоскости является обязательным элементом программы в 9 классе. В силу абстрактности, раздел является для обучающихся сложным и вызывает затруднения при применении знаний на практике. Время, отведенное на раздел, посвященный геометрическим преобразованиям, не позволяет в полной мере раскрыть достаточно объемный теоретический материал, однако, в последнее время, в олимпиадных заданиях все чаще встречаются задачи, для которых самым эффективным инструментом будут преобразования плоскости. В связи с этим, в определенных классах необходимо отводить часы кружковых занятий изучению геометрических преобразований, в особенности, инверсии, так как данный вид не затрагивается в базовой школьной программе по математике. В свою очередь инверсия находит свое применение в решении многих задач на построение, принадлежности точек окружности или прямой, а также в некоторых задачах, связанных с фактом касания окружностей. Преобразование инверсии помогает решать сложные и достаточно объемные задачи значительно быстрее, чем, если бы решение проводилось классическим путём, без использования преобразования [15]. На первых занятиях кружка мы знакомились с инверсией и ее основными свойствами, а также учились применять инверсию к решению задач элементарной геометрии.

2.2.1 Применение инверсии к решению задач по элементарной геометрии

На первом занятии нам необходимо познакомить учащихся с понятием инверсии, сформулировать определение, представляем обучающимся основные свойства, которые следуют соответственно из определения. Далее представляем способ построения образа точки при инверсии относительно окружности,

обратим внимание, что построение проводим в 3 случаях: точка лежит на окружности, точка лежит вне окружности и точка лежит внутри окружности инверсии. После блока ознакомления с необходимой теорией, осуществляем переход непосредственно к решению задач для отработки полученных знаний.

Решение первой задачи основано на применении определения инверсии, благодаря которому мы доказываем, что треугольники подобны. Данный вывод пригодится при решении следующих задач.

1) Пусть точки X' и Y' – это образы соответственно точек X и Y при инверсии относительно окружности с центром O. Докажите, что треугольники OXY и OY'X' являются подобными.

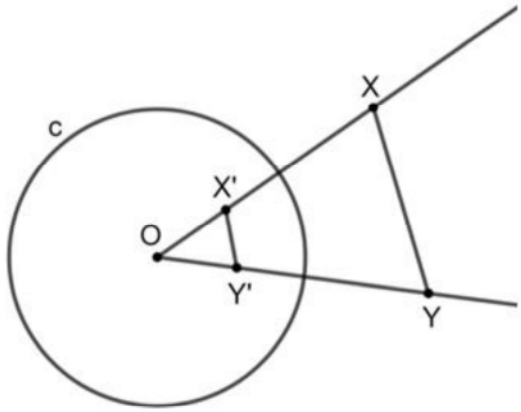


Рисунок 11

Доказательство:

Обозначим g – инверсия относительно окружности с центром в точке O и радиусом r. По условию: $X' = g(X),\ Y' = g(Y)$. Используя определение инверсии, получаем: $OX \cdot OX' = r^2;\ OY \cdot OY' = r^2 => OX \cdot OX' = OY \cdot OY'. \frac{OX}{OY'} = \frac{OY}{OX'}$ и ∠O – общий. =>△XOY∼△Y'OX'. Что и требовалось доказать.

- Учащийся не знает, как применить определение при доказательстве.

- Что называется степенью инверсии?

- Запиши формулу степени инверсии.

Во второй задаче мы используем доказанный в первой задаче факт подобия треугольников и доказываем формула, которую будем использовать при решении задач повышенной сложности.

2) Пусть точки X и Y, отличные от O, при инверсии относительно окружности (O;R), переходят в точки X' и Y'. Докажите, что выполняется равенство $X'Y' = XY \cdot \frac{R^2}{OX \cdot OY}$.

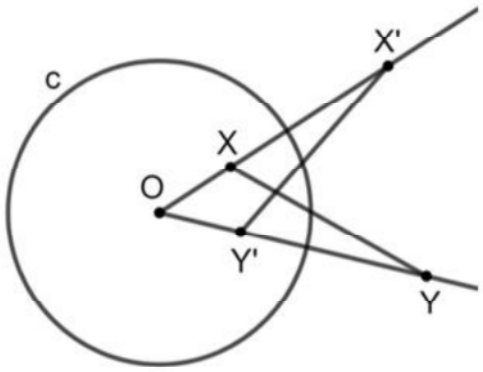


Рисунок 12

Доказательство:

Обозначим: g – инверсия относительно окружности с центром в точке O и радиусом R. Тогда: $X' = g(X), Y' = g(Y)$. По доказанному в задаче 1) $\Rightarrow \triangle XOY \sim \triangle Y'OX'$. $\Rightarrow \frac{XY}{X'Y'} = \frac{OY}{OX'}$ $\Rightarrow OX' \cdot XY = OY \cdot X'Y'$; $X'Y' = \frac{OX'}{OY} \cdot XY$ $\Rightarrow X'Y' = \frac{R^2}{OY \cdot OX} \cdot XY$. Что и требовалось доказать.

- Учащийся не знает, как доказать $X'Y' = XY \cdot \frac{R^2}{OX \cdot OY}$.

- Что следует из доказанного в первой задаче подобия треугольников?

В следующих двух задачах также ведется линия доказательств с использованием факта подобия треугольников, с последовательным усложнением рассуждений.

3) Пусть l – прямая, не проходящая через точку O, ψ – окружность, проходящая через O. Докажите, что при инверсии относительно c(O;R) прямая

l переходит в окружность, проходящую через O, а ψ переходит в прямую, не проходящую через O.

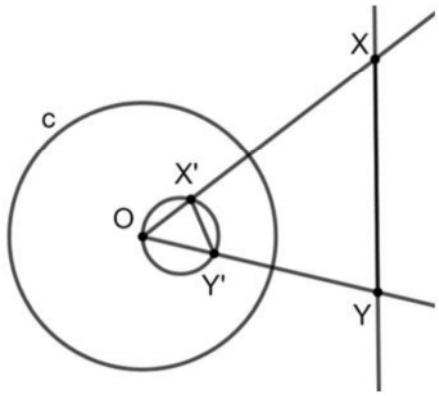


Рисунок 13

Доказательство:

Обозначим g – инверсия относительно окружности c(O;R). Построим OY⊄l. X – любая точка ∈ l. Пусть $Y' = g(Y)$, $X' = g(X)$. По доказанному в задаче 1):

△XOY∼△Y'OX'. =>∠OYX=∠OX'Y'=90° => ГМТ образов точек прямой будет окружность, для которой OY' – диаметр => образом l, не проходящей через точку O, будет окружность, проходящая через точку O, то есть, через центр инверсии. Так как $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = id \Rightarrow$ образом окружности ψ, проходящей через центр инверсии, будет прямая, не проходящая через центр инверсии. Что и требовалось доказать.

4) Пусть при инверсии относительно окружности c(O;R) точки X и Y переходят в точки X' и Y' соответственно. Докажите, что точки X, Y, X' и Y' принадлежат одной окружности.

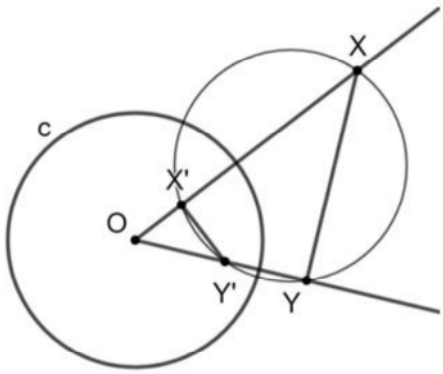


Рисунок 14

Доказательство:

Обозначим: g – инверсия относительно окружности c(O;R). Тогда по условию: $X' = g(X), Y' = g(Y)$. Используя полученный в задаче 1) факт подобия треугольников $\triangle XOY \sim \triangle Y'OX'$, делаем вывод: $\angle OX'Y' = \angle OYX = 180° - \angle XYY' \Rightarrow XX'YY'$ – вписанный в окружность четырехугольник $\Rightarrow X, X', Y, Y' \in$ окружности. Что и требовалось доказать.

Решение пятой и шестой задач основано на знании учащихся метода построения инверсных точек, причем при решении шестой задачи используется факт, который требуется доказать в ходе решения пятой задачи.

5) Пусть ω(O;R) – окружность инверсии. Точки $A, B \in \omega$. AP и BP – касательные к окружности в точках A и B, причем $AP \cap BP = P$. Докажите, что при инверсии относительно окружности ω середина хорды AB переходит в точку P.

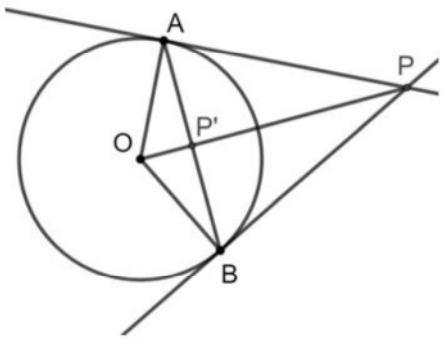


Рисунок 15

Доказательство:

Обозначим: g – инверсия относительно окружности ω(O;R). $P' = g(P)$. Тогда по построению образа точки P: [AP']⊥[OP), так как AP – касательная по условию, аналогично, $[BP'] \perp [OP)$. По теореме о единственности перпендикуляра, который можно восстановить в данной точке: $P' \in [AB]$.

$A \in \omega, B \in \omega \Rightarrow [OA] = [OB] = R \Rightarrow \triangle AOB$ – равнобедренный. $\angle AP'O = \angle BP'O = 90° \Rightarrow OP'$ – высота, биссектриса и медиана $\triangle AOB \Rightarrow [AP'] = [BP']$. Так как $P' = f(P)$ и $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = id \Rightarrow P = g(P')$. Что и требовалось доказать.

- Учащийся затрудняется в выборе свойства инверсии при доказательстве.

- При инверсии сохраняется касание окружностей и прямых, а также величина угла между окружностью и прямой является инвариантом при данном преобразовании плоскости.

6) Дана окружность ω(O;R). Точка A не лежит на ω. AX и AY – касательные к данной окружности, b – секущая, пересекающая окружность в точках Z и T, причем $A \in b$. M – середина хорды XY. Докажите, что точки Z, T, O, M лежат на одной окружности.

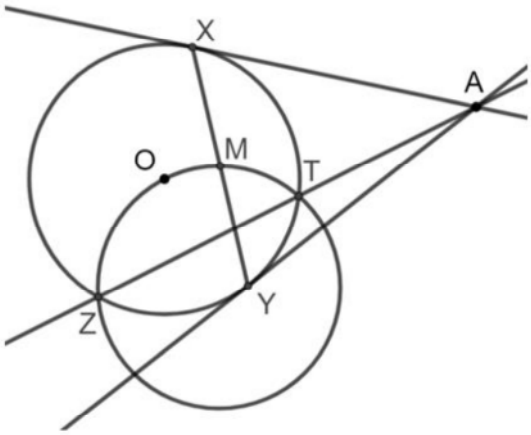


Рисунок 16

Доказательство:

Обозначим: g – инверсия относительно окружности ω(O;R). b≡(ZT) – секущая окружности ω. Секущая b не проходит через центр инверсии, тогда,

используя доказанный в задаче 3) факт, получаем: $g(b) = \psi$, где ψ – окружность, проходящая через центр инверсии O. $Z, T \in \omega \Rightarrow g(Z) = Z, g(T) = T \Rightarrow Z, T \in \psi$. По условию: A – точка пересечения касательных AX и AY к окружности ω, тогда по доказанному в задаче 5) => если M – середина хорды [XY], то A=g(M). Так как $A \in b \Rightarrow M \in \psi \Rightarrow O, M, Z, T \in \psi$. Что и требовалось доказать.

Можем сделать вывод, что результатом последовательного решения предложенных задач первого занятия является усвоение определения инверсии и способа построения образа точек при инверсии, а также доказанные утверждения и факты позволят решать задачи более высокого уровня сложности.

2.2.2 Решение задач с использованием ключевых свойств инверсии

Второе занятие посвящено ключевым свойствам инверсии. Основная цель занятия: ознакомление, усвоение и применение свойств инверсии. Как и на первом занятии, начинаем с теоретического блока, на котором обучающиеся знакомятся с основными свойствами. Обращаем внимание на уровень подготовки школьников, свойства могут быть доказаны. После теоретического блока переходим к решению практических задач, ориентированных на непосредственное применение рассмотренных свойств.

1) В $\triangle ABC$ вписана окружность ω. Что будет являться образом описанной около $\triangle ABC$ окружности ψ при инверсии относительно ω?

Доказательство:

Пусть f – инверсия относительно окружности ω с радиусом R. f: AB→ ω_1, с диаметром OM, (M – точка касания AB к ω(вписанная окружность)). f: BC → ω_2, AC→ ω_3 (рис. 17).

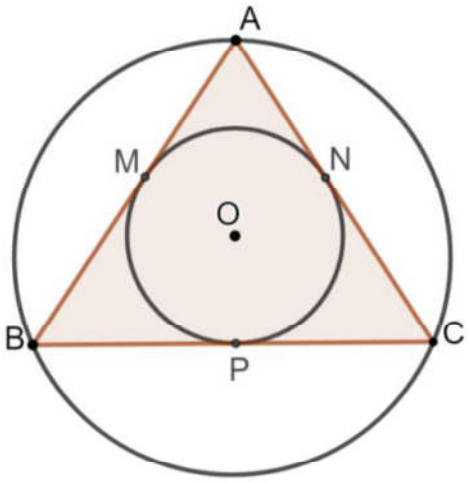


Рисунок 17

Эти три окружности пересекутся в точках A', B', C', так как их прообразы пересекаются в точках A, B, C. Окружность ψ – описанная около треугольника ABC => A,B,C ∈ ψ => A', B', C' ∈ ψ' => ψ' – окружность, проходящая через точки пересечения образов сторон треугольника.

2) Даны окружности ω_1,ω_2, ω_3, ω_4. Окружности ω_2, ω_4 касаются окружностей ω_1, ω_3. Пусть N, M, T, A – точки касания. Докажите, что M, T, A, N лежат на одной окружности (рис. 18).

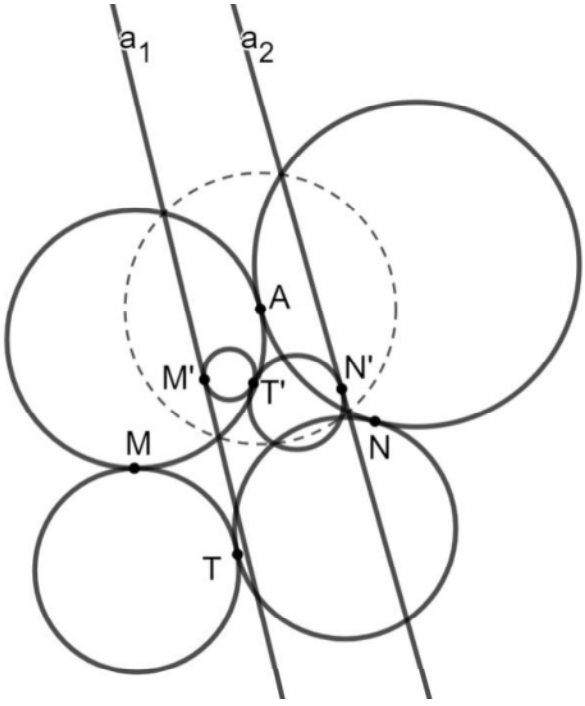


Рисунок 18

Доказательство:

Пусть A – точка касания ω_1 и ω_2. Рассмотрим инверсию f, относительно окружности с центром в точке A и радиусом R. f: $\omega_2 \to a_2, \omega_1 \to a_1, \omega_3 \to \psi_3, \omega_4 \to \psi_4$, где $a_1 \parallel a_2$.

ψ_3 касается ψ_4 в точке T', ψ_3 касается a_2 в точке N', ψ_4 касается a_1 в точке M'. Так как $a_1 \parallel a_2$, ψ_3 касается ψ_4 =>N', M', T' ∈ одной прямой (N'T'). При f: (N'T') → окружность n, которая проходит через центр инверсии A => M, T, A, N лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.

При решении представленных выше задач следует обратить внимание учащихся на сохранение факта касания при инверсии. Рассмотренный факт подчеркивает целесообразность использования инверсии при решении трудоемких задач, направленных на доказательство касания геометрических фигур на плоскости.

Если обучающиеся столкнулись с трудностями при решении следующей задачи, обращаем их внимание на доказанные факты занятия 1, в частности, задача 4).

3) Пусть S' – образ окружности S при инверсии относительно ω(O;R). Докажите, то O – центр гомотетии окружностей S и S'.

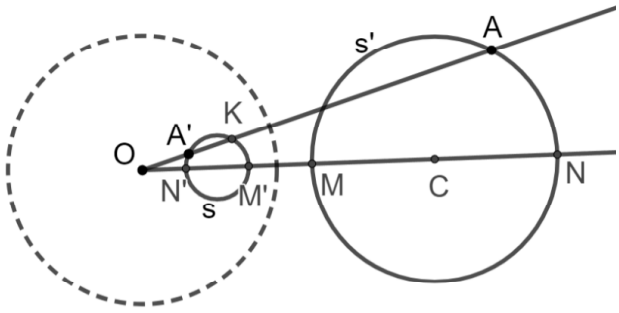


Рисунок 19

Доказательство:

Обозначим: g – инверсия относительно окружности ω(O;R). S – окружность с центром в точке C. $g: S \to S'$. Построим луч [OC). $[OC) \cap S = \{M, N\}$. $g(M) = M'$, $g(N) = N'$. A – любая точка ∈ S. $g(A) = A'$.

$K = [OA) \cap S'. \angle OKM' = 180° - \angle AN'M' = \angle ON'A' = \angle OAN$ => $KM' \parallel AN$ => O – центр гомотетии S→ S'. Что и требовалось доказать.

В результате решения предложенной задачи обучающиеся приходят к выводу, что образ окружности и сама окружность будут гомотетичны, причем центры гомотетии и окружности инверсии совпадают. Акцентируем внимание, что этот факт является мощным инструментом при решении задач, связанных с множеством окружностей.

Задача 4) является задачей повышенной сложности и направленна на работу с криволинейным треугольником – арбелосом. В доказательстве непосредственно используется факт, доказанный в задаче 3) рассматриваемого занятия.

4) Пусть точка $B \in [AC]$. S_1, S_2, S_3 – полуокружности, построенные на отрезках AB, BC, CA как на диаметрах. Построена окружность S, которая касается данных полуокружностей, причем расстояние между ее центром E и прямой (AC) равно a. Найдите радиус окружности S.

Решение.

Рассмотрим инверсию f относительно окружности с центром A и радиусом [AC]. (рис. 13) При данной инверсии $S_3 \to S'_3$, $S_2 \to S'_2, S_1 \to S'_1$, $S \to S'. S'_3 -$ прямая ⍰ $AC, C \in S'_3, S'_1 \parallel S'_3, S'_2$ касается S'_3 и S'_1 (1),

S'касается S'_3, S'_2 и S'_1(2). Из (1) и (2) =>$R_{S,} = R_{S'_2}$. По доказанному в задаче 3): S и S' гомотетичны относительно центра инверсии =>

$$\frac{KE}{EN} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2} => EK = \frac{a}{2}.$$

- Учащийся не знает, что такое гомотетия.

- Гомотетия – это преобразование, при котором каждой точке A ставится в соответствие точка A_1, лежащая на прямой OA, по правилу OA1=k·OA, где k – постоянное, отличное от нуля число, O – фиксированная точка. Точка O называется центром гомотетии, число k – коэффициентом гомотетии.

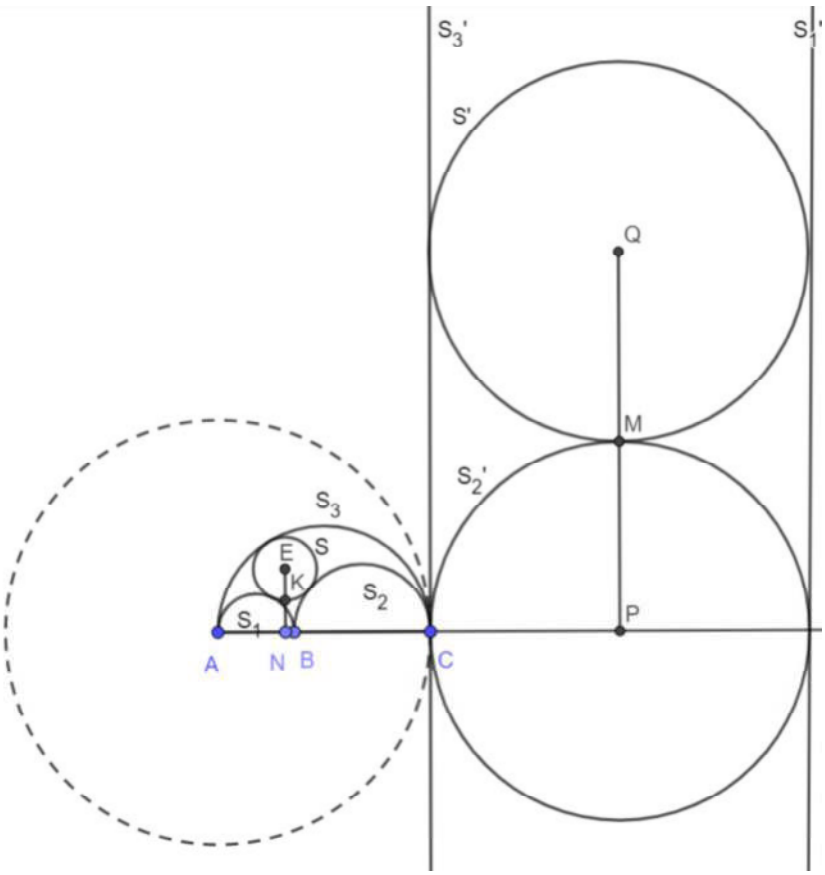


Рисунок 20

Таким образом, если мы последовательно предлагаем учащимся вышеприведенные задания второго занятия, то учащиеся сами смогут прийти к выводу о том, что инверсию можно и нужно применять при решении задач на касание прямых и окружностей, что значительно облегчит и упростит цепочку рассуждений.

2.2.3 Организация изучения применения инверсии в инженерии и программировании

На третьем занятии мы рассмотрим применение инверсии в геометрии, программировании и инженерии. Занятие служит примером интеграции разных школьных предметов: физики, информатики и математики. Для этого мы поделим детей на три группы. Первую группу назовем математиками, вторую – инженерами и третью – программистами.

Математики будут работать с задачами, последовательное решение которых приведет обучающихся к доказательству теоремы, которое без определенной подготовки является трудоемким и сложным для понимания.

Задача 1. Пусть ∆ABC – произвольный. ψ – вписанная в него окружность с центром I. ω – вневписанная окружность с центром I_a. Окружность ψ касается [BC] в точке *P*. Окружность ω касается [*B*C] в точке *Q*. Постройте вторую общую внутреннюю касательную к окружностям ω и ψ.

Перед решением задачи необходимо провести беседу с обучающимися:

– Итак, ребята, для данной задачи мы пока не используем инверсию, но мы можем использовать следующее: относительно биссектрисы угла треугольника, содержащей центр вписанной и вневписанной окружностей, стороны треугольника будут симметричны. Именно, с помощью этого факта в последующем мы будем демонстрировать свойство сохранения касания объектов при инверсии. Таким образом, мы получим $(A'C')$, где A' и C'- образы вершин треугольника при симметрии относительно биссектрисы угла A.

Задача 2. Пусть ∆ABC – произвольный. ψ – вписанная в него окружность с центром I. ω – вневписанная окружность с центром I_a. Выразите расстояние от середины стороны ∆ABC до точек касания с этой стороной окружностей ω и ψ.

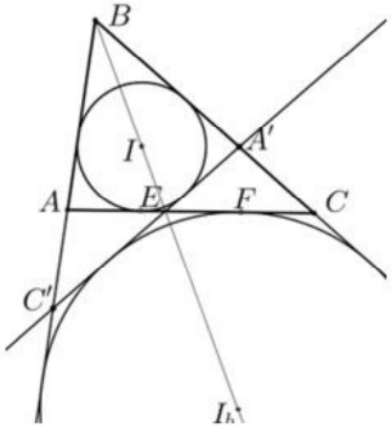


Рисунок 21

Обозначим *AB=c*, *BC=a*, *AC=b*, тогда получаем, что расстояния, которые нам необходимо вычислить, равны $r = \frac{|a-c|}{2}$. Это подводит обучающихся к построению вспомогательной окружности с центром в середине стороны ∆ABC и радиусом r, то есть серединной окружности.

Далее предлагаем с помощью программы Geogebra построить образы нескольких точек окружности ψ, при инверсии относительно построенной нами вспомогательной окружности. Учитель может обратить внимание, что изученные нами свойства позволяют сделать вывод, эта окружность ψ, не

проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, также не проходящую через центр инверсии. Заметим, что точка E неподвижна. В результате небольшого исследования делаем предположение, что вписанная окружность ψ является инвариантной. Данное предположение поможет при решении следующей задачи.

Задача 3. Пусть ∆ABC – произвольный. ψ – вписанная в него окружность. ω – вневписанная окружность. Докажите, что при инверсии с центром в точке M и степенью r^2, окружность ψ и окружность ω, переходят в себя. M – середина стороны треугольника, которой касается окружность ω.

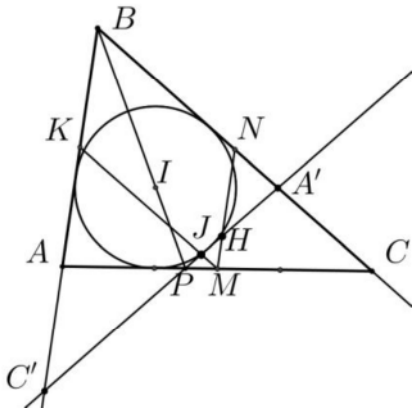


Рисунок 22

Доказательство основано на свойствах секущей и касательной, проведенных из точки M.

Используем доказанный на предыдущем занятии факт инвариантности касания окружностей и прямых. Замечаем, что чтобы доказать касание окружности ψ и окружности, проходящей через середины сторон треугольника, следует выяснить, в какую прямую переходит окружность девяти точек при рассматриваемой инверсии. Перед этим напоминаем детям определение окружности девяти точек. Переходим к следующей задаче.

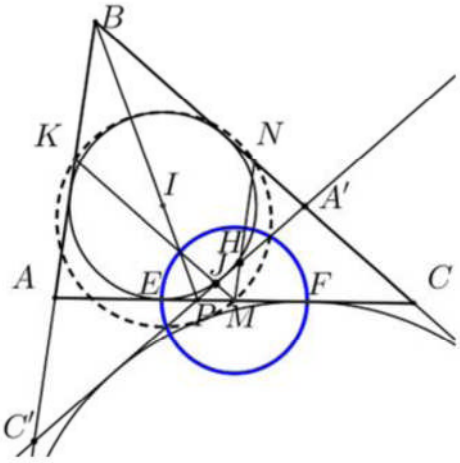


Рисунок 23

Задача 4. Пусть ∆ABC – произвольный. Окружность S проходит через середины сторон рассматриваемого треугольника (точки M, N, K). Найдите образ окружности S, при инверсии с центром в точке M и степенью r^2.

Обучающиеся уже осознают, что искомый объект – это прямая, т.к. окружность S проходит через центр инверсии. Также при

инверсии сохраняется касание, следовательно, искомая прямая должна касаться окружностей ω и ψ (где ψ – вписанная в треугольник окружность. ω – вневписанная окружность). Обучающиеся могут предположить, что это прямая $A'C'$. Приходим к необходимости дополнительного построения: $H = MN \cap A'C'$ и $J = MK \cap A'C'$. Докажем, что $MH \cdot MN = r^2 = \frac{(a-c)^2}{4}$. MN – средняя линия $\triangle ABC$ => $MN = \frac{c}{2}$. $\Delta APC' \sim \Delta MPH$ (P– основание биссектрисы угла B). Следовательно, $MH : AC' = PM : AP$. По свойству биссектрисы: $PM = \frac{b(a-c)}{2(a+c)}$, $AP = \frac{bc}{a+c}$. Получаем, что $MH = \frac{PM \cdot AC'}{AP} = \frac{b(a-c)^2}{2(a+c)} : \frac{bc}{a+c} = \frac{(a-c)^2}{2c}$ и $MH \cdot MN = \frac{(a-c)^2}{2c} \cdot \frac{c}{2} = \frac{(a-c)^2}{4} = r^2$. Для точки J рассуждения проводятся аналогично. Следовательно, образом окружности девяти точек служит $(A'C')$, которая касается окружностей ω и ψ.

После решения вышеприведенного цикла задач обучающиеся без труда могут сформулировать утверждение: при инверсии относительно серединной окружности вписанная и вневписанная окружности инвариантны, а окружность девяти точек переходит в общую внутреннюю касательную к ним. При этом прообразы попарно касаются. Таким образом, мы сформулировали и доказали теорему Фейербаха [2].

Параллельно работают направление инженеров. Дети решают задачу построения инверсора. Именно эта задача – спрямления движения по окружности в движение строго по прямой – положила начало удивительному сотрудничеству теории шарнирных механизмов и математики. До того инженеры обходились своим опытом и техническим чутьем.

Мы с обучающимися выяснили, что такое инверсор, историю его изобретения. Далее мы можем предложить «проверить» работу ранее изученных свойств инверсии.

Для этого инженерами был изготовлен инверсор из подручных материалов и проверен в действии.

Для изготовления инверсора использовали две деревянные линейки, которые разрезали вдоль, затем два отреза разрезали поперек пополам и соединили шарнирно (процесс изготовления показан на рисунке 24).

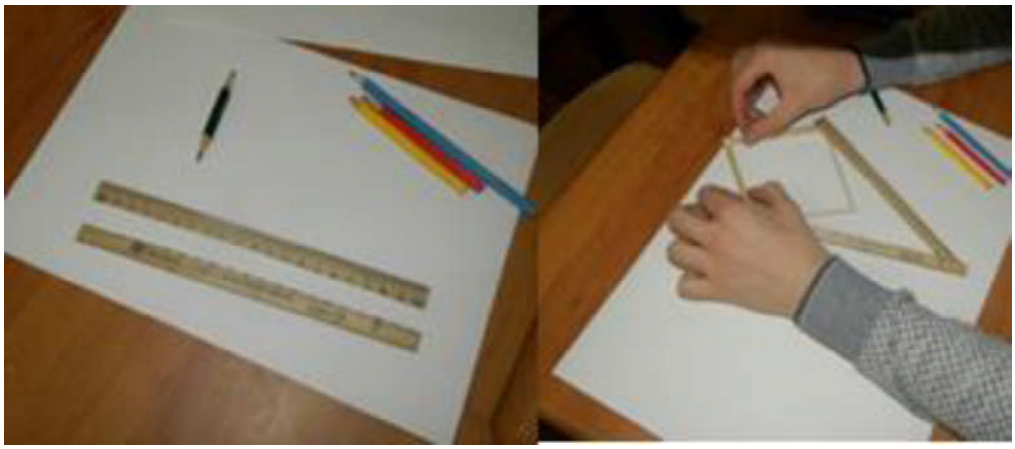


Рисунок 24

Саму конструкцию инверсора обучающимся представляет учитель, мы озвучиваем, что инверсор представляет собой шарнирный ромб, два равных между собой звена подвижно соединены с двумя противоположными вершинами этого ромба. Другие концы звеньев скреплены друг с другом закрепленным на поверхности шарниром.

С помощью полученного механизма обучающиеся демонстрируют работу усвоенных на первом занятии свойств и убеждаются, что механизм реализует инверсию относительно окружности с центром в закреплённом шарнире. С целью фиксирования траектории движения ведущего шарнира строго по окружности, проходящей через центр инверсии, предлагаем учащимся (в случае их затруднения) добавить еще одно звено, один конец которого будет в ведущем шарнире, а другой конец закреплен в центре инверсии. Причем длина звена равна радиусу окружности инверсии. Обращаем внимание, что движение ведомого шарнира будет прямолинейным. Далее предлагаем обучающимся доказать, что вершина ромба будет являться образом противоположной вершины при инверсии относительно окружности с центром в точке пересечения звеньев.

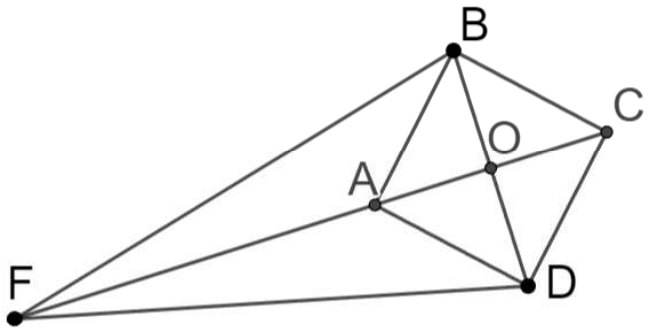


Рисунок 25

Доказательство:

Пусть ABCD – ромб, $[FB] = [FD]$. Покажем, что точка C лежит на прямой (FA). По условию: ABCD – ромб, => точки A, C, O лежат на серединном перпендикуляре к [BD]. $[FB] = [FD] \Rightarrow$ $\triangle FBD$ – равнобедренный, точка F лежит на серединном перпендикуляре к основанию BD, => точка C лежит на прямой (FA).

Докажем, что точка C – образ точки A при инверсии относительно окружности с центром в точке F, для этого докажем, что $FA \cdot FC = const$. Обозначим $FA = x, AO = y, BO = h$.

В полученных обозначениях:$FA \cdot FC = x(x + 2y) = x^2 + 2xy$.

Используя теорему Пифагора, получим:

$$FB^2 = (x + y)^2 + h^2 (1)$$

$$BC^2 = h^2 + y^2 \qquad (2)$$

Вычитая из (1) второе выражение, получаем: $FB^2 - BC^2 = (x + y)^2 + h^2 - h^2 - y^2 = x^2 + 2xy$.

Таким образом, приходим к тому, что произведение искомых отрезков равно константе, следовательно, точка C является образом точки A при инверсии относительно окружности с центром в точке F, причем радиус окружности инверсии зависит от выбранной длины звеньев и сторон ромба:

$$FA \cdot FC = FB^2 - BC^2.$$

Таким образом, полученные материалы можно использовать на дополнительных занятиях по математике, на занятиях математического кружка, на уроках в профильных классах.

Имеется возможность в наглядной форме демонстрировать учащимся работу инверсора в качестве демонстрационного пособия.

Это окажет существенную помощь учащимся, планирующих связать свою будущую профессию с математикой, инженерией, в понимании такого сложного преобразования плоскости как «инверсия».

Параллельно работает направление программистов: работают с программой Геогебра, в которой им следует придумать алгоритм построение образа точки при инверсии, не используя готовую функцию «инверсия», а используя только остальные функции в программе.

Итак, GeoGebra – свободно распространяемая динамическая геометрическая среда, которая даёт возможность создавать чертежи в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки.

Возможности программы по математике не ограничиваются только построением графиков. Программу GeoGebra можно будет использовать для интерактивных чертежей при решении геометрических задач.

Обучающиеся после реализации алгоритма построения образа точки при инверсии проверяют построенный алгоритм с помощью встроенной функции. Ранее изученные свойства инверсии обучающиеся проверяют с помощью встроенных функций. Далее предлагаем рассмотреть конструкцию инверсора первого порядка и предположить, как работу инверсора можно представить в программе GeoGebra.

Аналогично доказательству инженерного направления, обучающиеся доказывают реализацию инверсии в построенном механизме, только используя встроенные вычислительные алгоритмы программы и демонстрируя зависимость радиуса окружности от длины звеньев и сторон ромба.

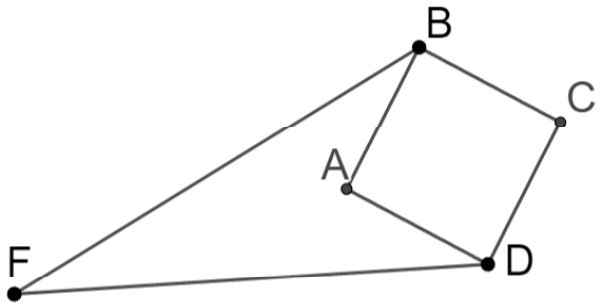


Рисунок 26

Итак, после проведенных занятий можно сделать вывод о том, что факультативные занятия имеют свои особенности так как они учитывают запросы отдельной группы учащихся и индивидуальные наклонности каждого ученика в отдельности. Эти занятия проводятся в разнообразных формах и позволяют учащемуся проявлять свой интерес к определённым видам занятий или труда, предусмотренным планом дополнительной работы.

2.4 Организация учебного исследования в рамках взаимодействия слушателей различной профессиональной направленности

На 5 занятии предполагается совместная деятельность всех трех групп, каждая из которых сделает свой вклад в общее решение задачи. Нашей целью будет кооперация трех групп, каждая при этом будет направлена на достижение общей цели, но своими способами. Предлагается решить задачу о двойном инверсоре совместными усилиями, то есть при взаимодействии всех трех групп.

Задача «Двойной инверсор». Дан шарнирный ромб AXBZ, его вершины соединены звеньями AO и BO (длины равны) с неподвижной точкой O, второй шарнирный ромб – OCZD, аналогично, YC и YD – звенья равной длины. Полученная конструкция – инверсор второго порядка, то есть наложенные друг на друга инверсоры первого порядка. Доказать, что когда точка Y описывает окружность, точка X будет описывать коническое сечение.

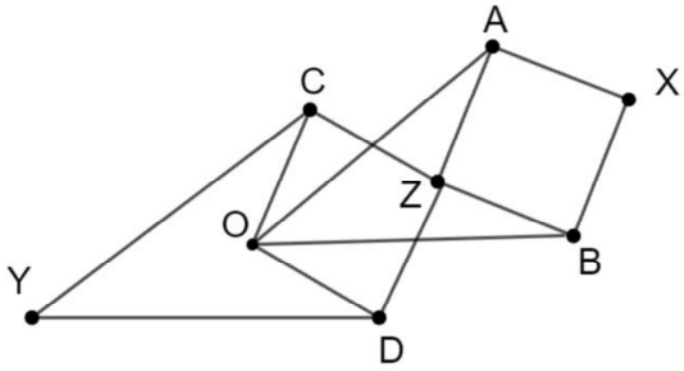


Рисунок 27

Сначала вместе с инженерами определим, что у нас вызывает сложность в изготовлении модели инверсора.

Во-первых, процесс сборки технически сложный и трудоемкий, нужен подходящий материал, нужно придумать подвижные соединения. Во-вторых, механизм «расшатывается» и поэтому необходимо подтягивать соединения. В-третьих, из-за погрешностей измерений механизм не дает идеально точной картины. И в-четвертых, каждая построенная модель дает только одну картину, чтобы получить другую, нужно менять длины звеньев.

Исходя из этого, мы пришли к выводу, что нам необходима помощь программистов, которые попробуют сделать эту модель в программе, инженерам необходимо рассказать суть работы инверсора, программисты должны понять, как сделать эту модель в программе, роль математиков – вывод формул, с помощью которых в решении задачи проверяются различные шаги.

С помощью программистов была построена модель двойного инверсора в программе GeoGebra.

Строим окружность инв1, центром которой является *Y*, радиус равен параметру m. Точку O(0,0) закрепляем в начале системы координат, при инверсии относительно окружности инв1 эта точка переходит в точку Z.

Проводим окружность инв2 (O;n). Далее строим точку с координатами (c,d) и окружность с центром в построенной точке и радиусом k. Движение точки Y будет происходить по этой окружности. Следовательно, движение точки X будет зависеть от взаимного расположения точки O и окружности инв1, в свою очередь, эта окружность будет двигаться с своим центром.

Удалось выяснить, что когда точка O оказывается внутри и вне окружности инв1, то точка X двигается по гиперболе. (Рис. 28)

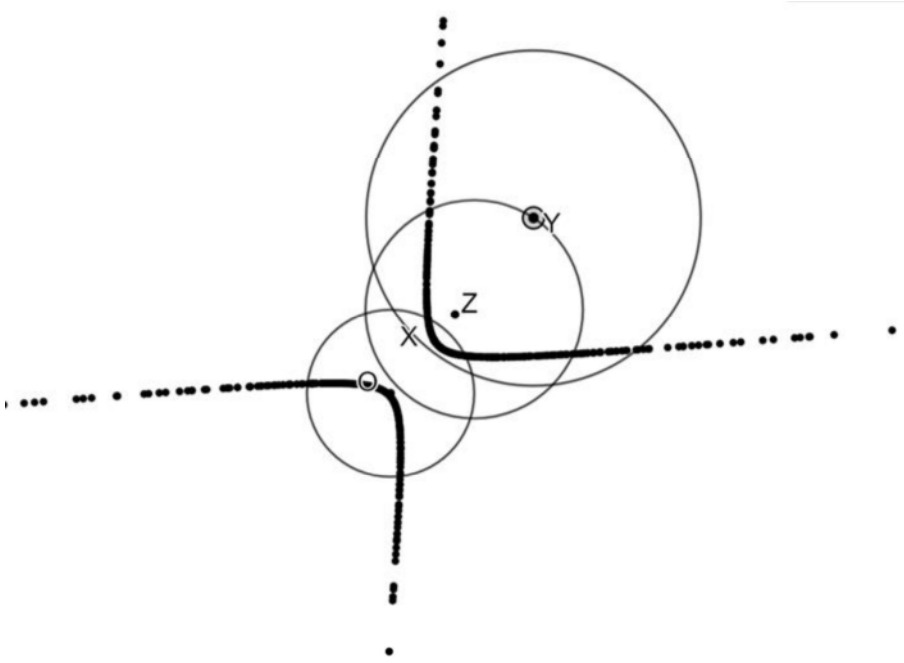


Рисунок 28

Второй случай – когда точка O всегда оказывается вне окружности инв1, тогда точка X двигается по эллипсу. (Рис. 29)

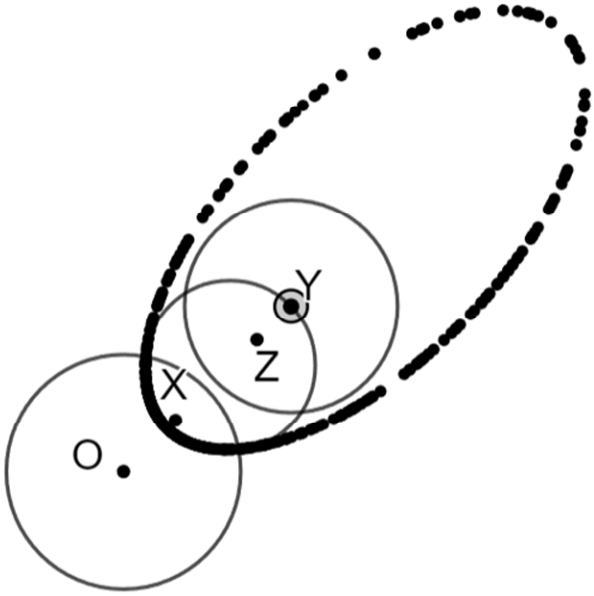


Рисунок 29

Третий случай, когда точка O находится на окружности инв1. Тогда траектория точки X – парабола. (Рис. 30)

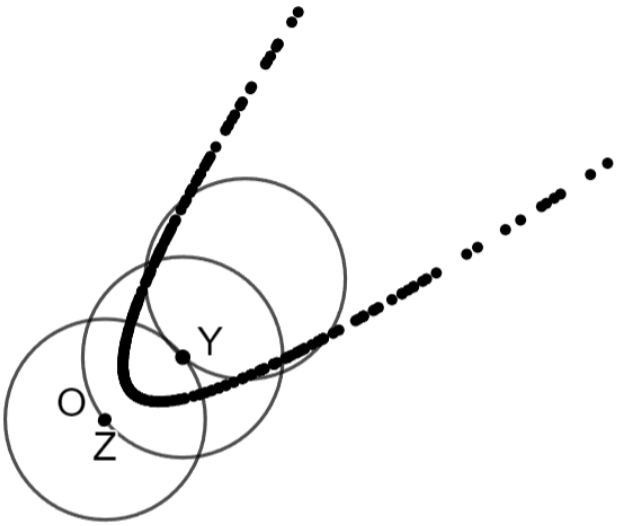


Рисунок 30

Таким образом, при совпадении точек Z и O (центры инверсии), получаются гипербола и парабола.

Решение поставленной задачи наводит на идею исследовать траекторию движения точки *Z*, если центр инверсии, описывает кривую.

С помощью математиков выводим уравнение движения точки *Z*. Имеем формулы преобразования координат точки при инверсии:

$$x_2 = \frac{(x_1-a)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} + a,\ y_2 = \frac{(y_1-b)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} + b.$$

Подставили координаты точек O(0, 0), Z(x, y), Y(a, b), радиус окружности инверсии R = m.

Получили: $0 = \frac{(x-a)m^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} + a;\ 0 = \frac{(y-b)m^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} + b.$

Выражаем координаты точки Y через координаты точки Z с помощью компьютерной программы, решающей системы уравнений.

Получили:

$$x = 0, y = 0, b = \pm\sqrt{m^2 - a^2}, m \neq 0;$$

$$x = 0, a = 0, b = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 + 4m^2}\right), y^3 \pm y^2\sqrt{y^2 + 4m^2} + 2ym^2 \neq 0;$$

$$x^2 + y^2 \neq 0,\ a = (x^3 - x\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + 4m^2} + xy^2)/2(x^2 + y^2),$$

$$b = (y^3 - y\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + 4m^2} + x^2y)/2(x^2 + y^2),$$

$$x^3 + x\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + 4m^2} + xy^2 + 2xm^2 \neq 0.$$

Зависимость координат точки Y от координат точки Z определяется следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}x\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2}{x^2+y^2}}\right),\ b = \frac{1}{2}y\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2}{x^2+y^2}}\right).$$

Исходя из полученных уравнений, координаты точки Z(x,y) удовлетворяют уравнению:

$$\left(\frac{1}{2}x\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2}{x^2+y^2}}\right) - c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2}{x^2+y^2}}\right) - d\right)^2 = k^2.$$

Итак, для чего же мы выводим формулы в данной задаче?

С помощью полученных формул мы смогли выразить радиус окружности инверсии, а также эти уравнения дают образ точки O(0,0), при инверсии относительно окружности радиуса*m*, с центром в точке Y(a, b).

А также вывод формул и уравнений необходим для построения кривых, так как каждая кривая имеет свое название и каждый полученный результат необходимо проверить с помощью уравнений, которые выведут «математики».

Дальнейшее исследование дало следующие результаты:

1. Точка *Y* движется по окружности, проходящей через точку O (0,0). Другими словами: $c^2 + d^2 = k^2$.

Точка *Z* движется по циссоиде. В зависимости от соотношения двух параметров m и k, меняется вид циссоиды.

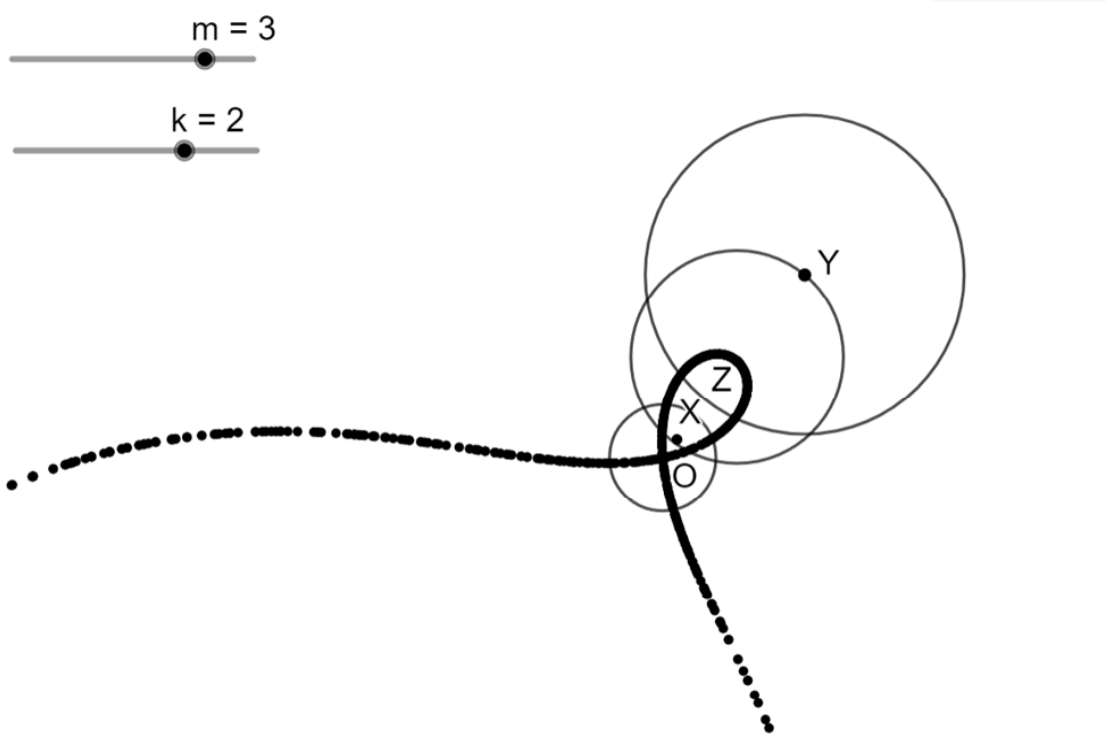


Рисунок 31

Если $m < 2k$, у циссоиды появляется петля. (Рис. 31). При $m = 2k$ петля исчезает, превращаясь в точку (Рис. 32).

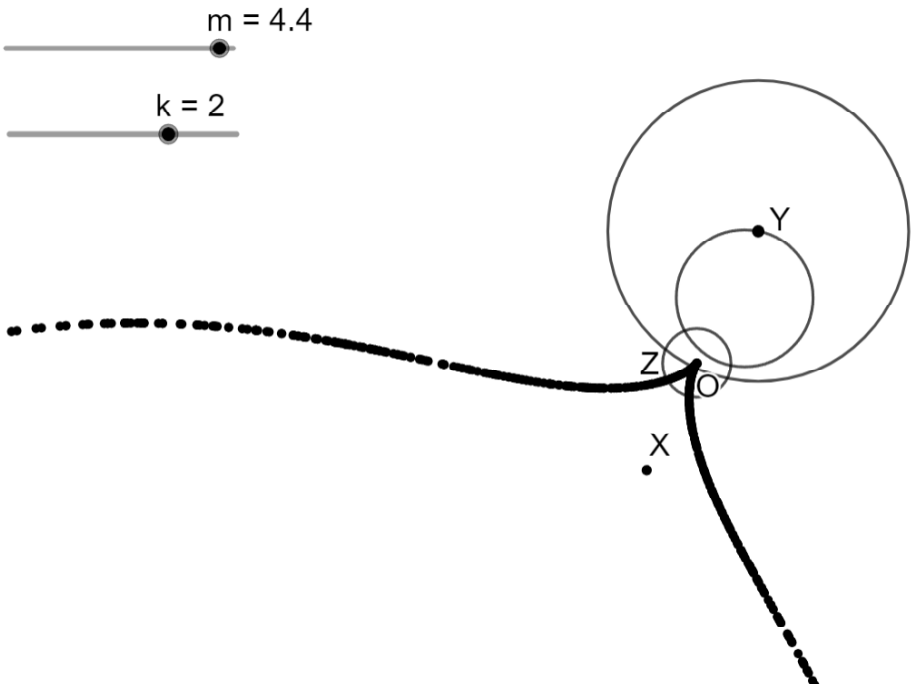


Рисунок 32

При $m > 2k$ циссоида начинает «распрямляться»(Рис. 33).

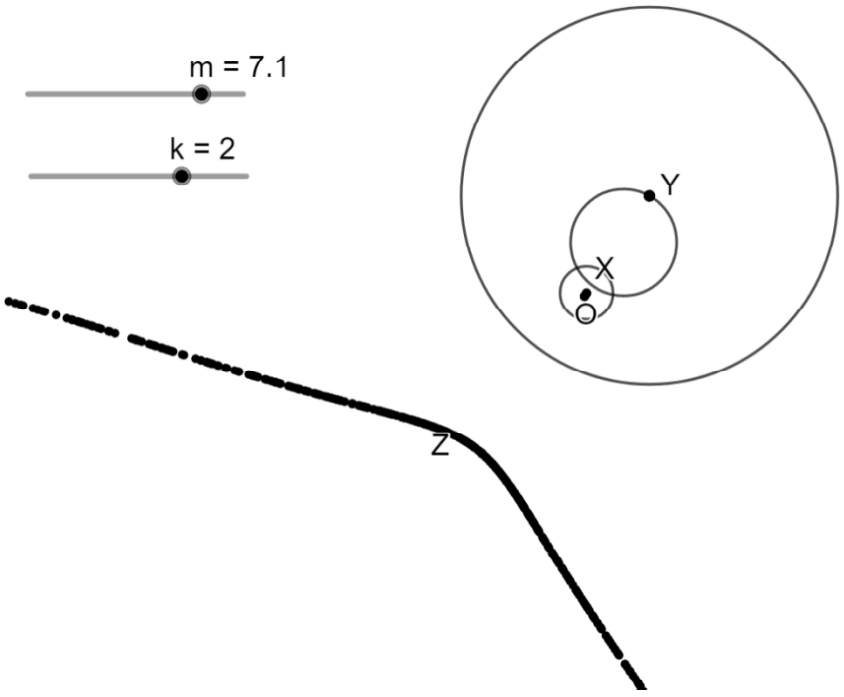


Рисунок 33

Проверим наши выводы с помощью построения кривых по уравнениям:

1) m = 3, k = 2, c = 0, d = 2.

(x/2(1±sqrt(1+36/(x²+y²)))-0)²+(y/2(1±sqrt(1+36/(x²+y²)))-2)²=2².

2) m = 4, k = 2, c = 0, d = 2

(x/2(1±sqrt(1+64/(x²+y²)))-0)²+(y/2(1±sqrt(1+64/(x²+y²)))-2)²=2².

3) m = 5, k = 2, c = 0, d = 2

(x/2(1±sqrt(1+100/(x²+y²)))-0)²+(y/2(1±sqrt(1+100/(x²+y²)))-2)²=2².

Получаем циссоиды трех видов (рис. 34). Результаты совпали, следовательно выводы получены верно.

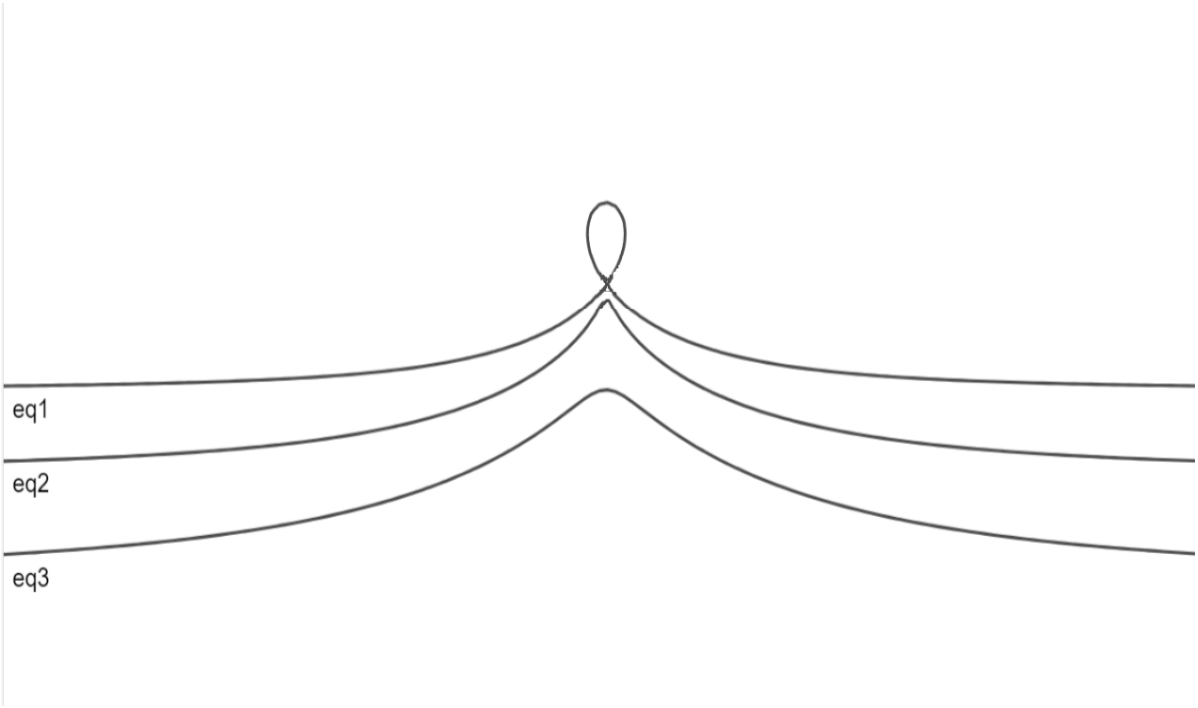


Рисунок 34

2. Точка *Y* движется по окружности, не проходящей через точку O(0,0).

Траектории движения точки Z – это лемниската и кардиоида. Вид кривых также зависит от соотношения параметров m и k и центра окружности (c, d).

Если $c^2 + d^2 > k^2$, то есть, O всегда находится вне окружности движения точки Y, то Z описывает лемнискату.

Когда точка O находится всегда вне окружности инв1., то получаем лемнискату с одним верхним лепестком (Рис. 35).

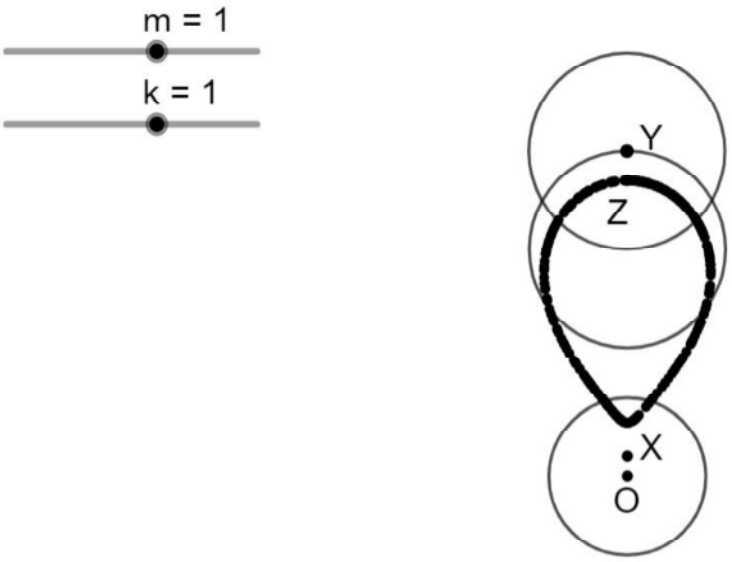


Рисунок 35

В случае, когда точка O может быть и внутри и вне окружности инверсии, получаем лемнискату с двумя лепестками (Рис. 36).

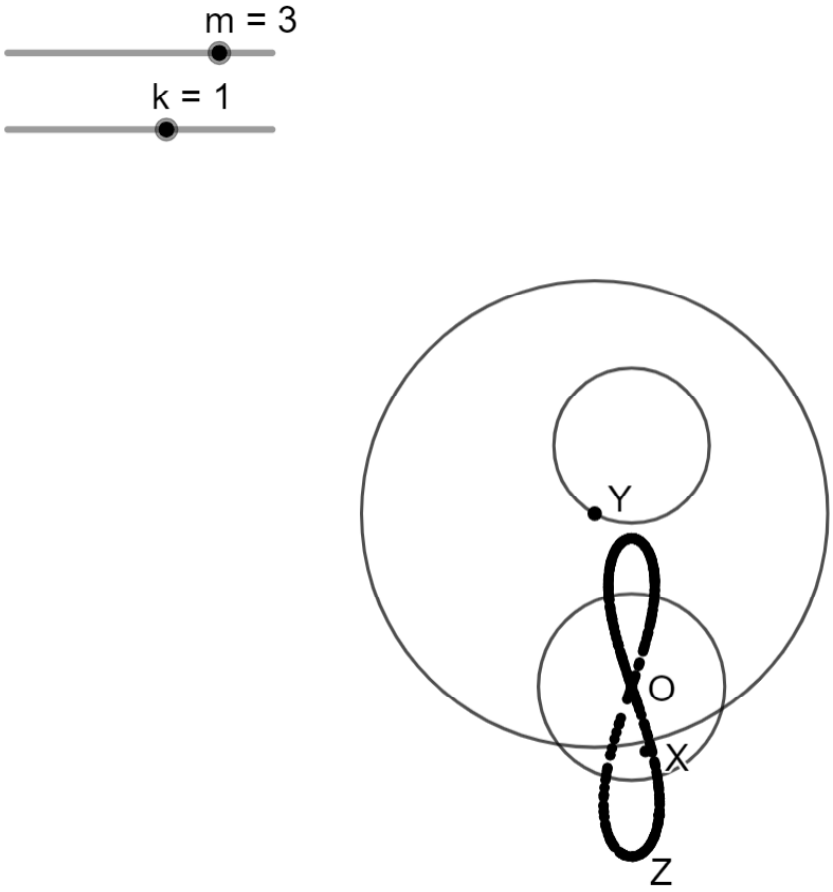


Рисунок 36

Когда точка O всегда находится внутри окружности инверсии, получаем лемнискату с одним нижним лепестком (рис. 37).

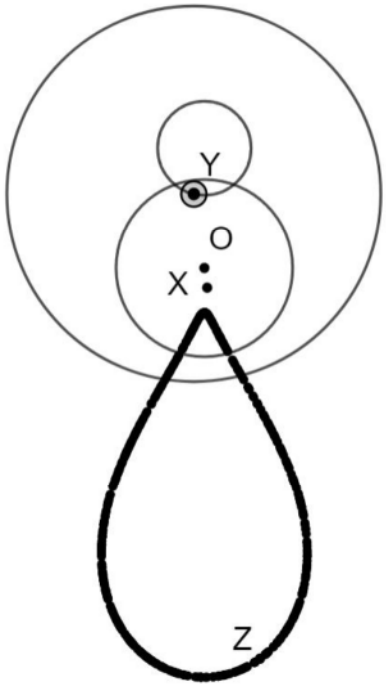


Рисунок 37

Проверим полученные результаты с помощью построения кривых по следующим уравнениям:

1) k =1, m = 1,c = 0, d = 2

$(x/2(1\pm sqrt(1+1/(x^2+y^2)))-0)^2+(y/2(1\pm sqrt(1+1/(x^2+y^2)))-2)^2=1^2$

2) k =1, m = 2,c = 0, d = 2

$(x/2(1\pm sqrt(1+16/(x^2+y^2)))-0)^2+(y/2(1\pm sqrt(1+16/(x^2+y^2)))-2)^2=1^2$

3) k =1, m = 3,c = 0, d = 2

$(x/2(1\pm sqrt(1+36/(x^2+y^2)))-0)^2+(y/2(1\pm sqrt(1+36/(x^2+y^2)))-2)^2=1^2$

Можем заметить, что случаи совпадают, следовательно, выводы получены верно (рис. 38).

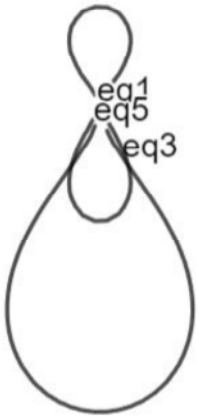


Рисунок 38

Переход от одного типа кардиоиды к другому получим, если точка O будет лежать внутри окружности инверсии и попадает на траекторию движения точки Y (рис. 39).

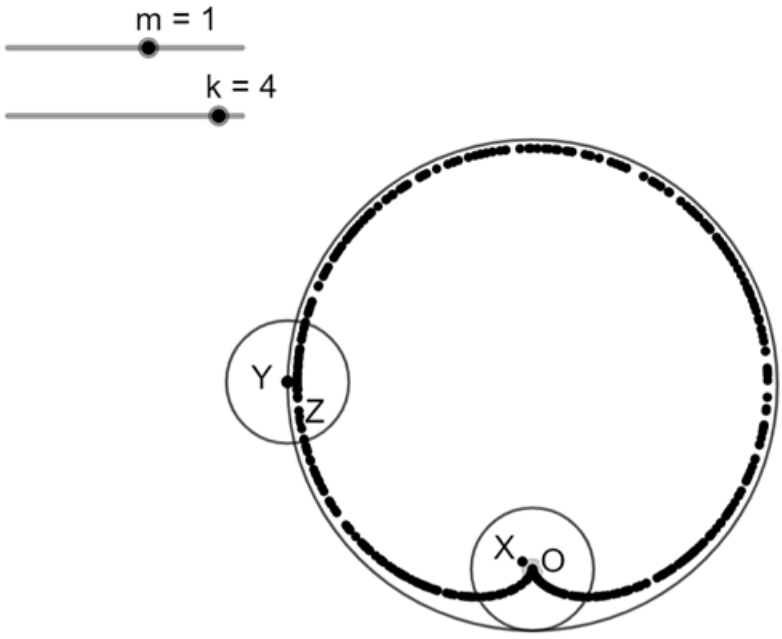


Рисунок 39

3. Точка O лежит внутри окружности, по которой двигается точка Y. Другими словами:$c^2 + d^2 < k^2$. Точка Z движется по кривой, называемой кардиоидой. Кардиоиду с двумя лепестками получаем при попадании O, вне и внутрь окружности инверсии. (Рис. 40).

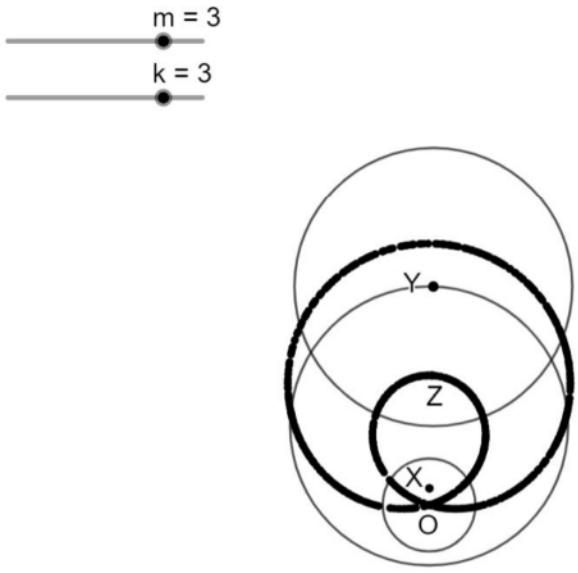


Рисунок 40

Если точка O не попадает внутрь окружности движения точки Y, то получаем однолепестковую кардиоиду (Рис. 41).

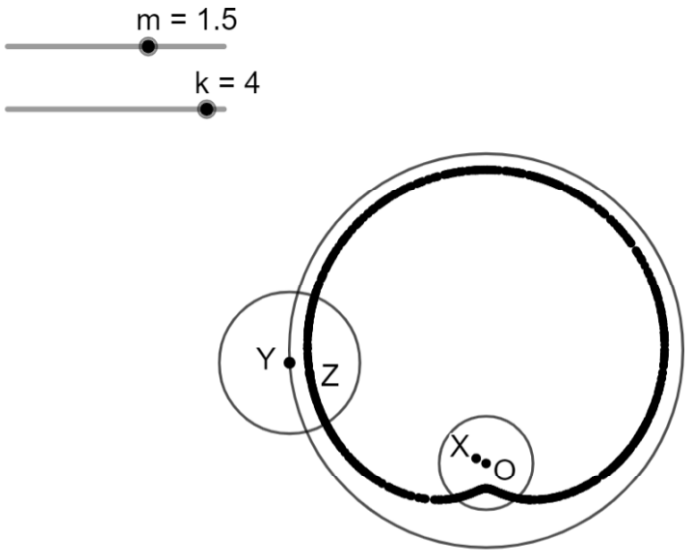


Рисунок 41

Как и в предыдущих случая, проверяем полученные результаты с помощью построения кривых по уравнению:

k = 3, m = 3, c = 0, d = 2.

$(x/2(1\pm\sqrt{1+36/(x^2+y^2)})-0)^2+(y/2(1\pm\sqrt{1+36/(x^2+y^2)})-2)^2=3^2$.

По рисунку 35 видим, что выводы получены верно.

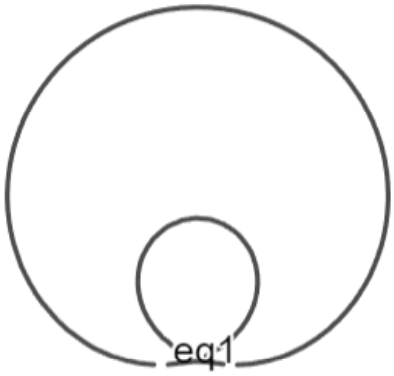


Рисунок 42

Инженеры тоже внесли свою лепту в решение задачи. Они разработали модель инверсора второго порядка, помогая при построении модели в программе.

Из изложенного видно, что при решении задач ключевым является «творческий» подход к решению задач, их специфичность, а также исследовательская направленность. Дети во время дифференцированной работы на 3 занятии и во время кооперативной работы на 4 и 5 занятиях погружались не только в работу по своей направленности, но и в две другие направленности. Они могли этим заинтересоваться и даже задуматься о дальнейшем продвижении в других направлениях, следовательно учитель этим циклом занятий способствовал профессиональному самоопределению учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема данной работы актуальна, так как геометрические построения могут сыграть серьезную роль в математической подготовке школьника.

Первая глава посвящена теоретическим аспектам организации профессионального самоопределения обучающихся в рамках дополнительного образования. Рассмотрены понятие профессионального самоопределения личности как психолого-педагогическая проблема, роль и место темы «преобразования плоскости» в школьном курсе геометрии. А также понятие инверсии и ее свойства.

Исходя из анализа учебника Атанасяна Л.С. 7-9 класс, пришли к выводу, что изучению преобразованию плоскости отводится очень мало часов. В основном рассматриваются движения плоскости и пространства и преобразования подобия, а инверсия вообще не изучается.

В современной системе общего образования приоритетным направлением является развитие личности, следовательно, возросла актуальность проблемы обучения школьников геометрическим преобразованиям.

Во второй главе мы рассмотрели методические особенности изучения преобразований плоскости на факультативных занятиях в 9 классе. Нами была разработана программа факультатива по теме «Преобразования плоскости», целью которой является всестороннее развитие личности обучающихся с учетом их индивидуальных интересов.

А также было представлено и разобрано большое количество практических задач, в которых подробно рассмотрена техника решения трудоемких задач с использованием преобразования инверсии. Нами было рассмотрено применение инверсии к решению задач по элементарной геометрии, а также использование инверсии в инженерии и программировании.

Мы пришли к выводу, что ключевым подходом к решению различных задач является «творческий». Дети во время дифференцированной работы и во время кооперативной работы погружались не только в работу по своей

направленности, но и в две другие направленности. Они могли этим заинтересоваться и даже задуматься о дальнейшем продвижении в других направлениях, следовательно учитель этим циклом занятий способствовал профессиональному самоопределению учащихся.

Таким образом, цель данной работы достигнута при помощи рассмотрения теории и решения задач различными способами на факультативных занятиях.

В заключение отметим, что ознакомление школьников с инверсией в рамках кружковых занятий и факультативов необходимо и целесообразно, причем не только для расширения кругозора учащихся, но и для совершенствования умений решения задач повышенного уровня сложности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргунов Б.И. Преобразования плоскости. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. М. : Просвещение, 1976. 80 с.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями. М. : Просвещение, 1954. 176 с.
3. Андрущенко А.В. Развитие пространственного воображения на уроках математики : пособие для учителя. М. : Владос, 2013. 133 с.
4. Ануфриенко С.А. Инверсия. Геометрия Мора-Маскерони : учеб. пособие. Екатеринбург : УрФУ, 2019. 40 с.
5. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9 : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян [и др.]. М. : Просвещение, 2005. 384 с.
6. Атанасян Л.С. Геометрия. В 2-х частях. Часть 1. Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. институтов / Л.С. Атанасян [и др.]. М. : Просвещение, 1986. 336 с.
7. Бакельман И.Я. Инверсия. Москва : Наука, 1966. 78 с.
8. Балк М.Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике. Пособие для учителей. М. : Учпедгиз, 2011. 218 с.
9. Боброва О.А., Солодовченко С.А., Ястребов Т.О. Профессиональное самоопределение обучающихся как педагогическая проблема // Известия Воронежского государственного педагогического университета. 2025. № 1. С. 21–27.
10. Борисова Е.М. Профессиональное самоопределение : личностный аспект : Автореф. дисс. ... докт. психол. наук. М. , 1995. 46 с.
11. Вайбородова Л.В. Внеурочная деятельность школьников в разновозрастных группах. М. : Просвещение, 2013. 177 с.
12. Горбунова Т.С. Развитие творческой активности в процессе обучения геометрии на внеклассных занятиях // Муниципальное образование : инновации и эксперимент. 2013. № 2. С. 56–60.

13. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах : учебное пособие. Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. 189 с.

14. Жижилкин И.Д. Инверсия. М. : Изд-во МЦНМО, 2019. 72 с.

15. Журавлева О.А., Сорокина М.В. Некоторые аспекты изучения инверсии в рамках кружковой работы по математике // Педагогический институт им. В.Г. Белинского: традиции и инновации. Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 83-летию Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета. Пенза, 2022. С. 114–117.

16. Заславский А.А. Геометрические преобразования. М. : МЦНМО, 2004. 86 с.

17. Каюмов О.Р. Преобразования плоскости и их применение к решению задач планиметрии. М. : Из-во «ФЛИНТА», 2014. 133 с.

18. Климов Е.А. Психология профессионального самоопределения. Ростов-на-Дону : Феникс, 1996. 509 с.

19. Кон И.С. Ребенок и общество; историко-этнографическая перспектива. М. : Наука, 1998. 272 с.

20. Любимова А.Б., Курносова Н.Г., Монахова О.А. Продолжение истории инверсора // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники: Сборник научных статей международной конференции : Алтайский государственный университет. 2018. С. 148–152.

21. Мишин В.И. Геометрические преобразования в курсе планиметрии средней школы. Автореф. дис .канд.пед.наук. М., 1953. 22 с.

22. Петросян Г.Г. Преобразования плоскости : учебное пособие. Воронеж : ВГПУ, 2022. 64 с.

23. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1 : Планиметрия, преобразования плоскости. Москва : МЦНМО, 2004. 312 с.

24. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Москва : Изд-во МЦНМО, 2000. 584 с.

25. Романова Е.С. Психология профессионального становления личности : Автореф. дисс. ... докт. психол. наук. М., 1992. 32 с.

26. Савин А.М. Инверсия и задача Аполлония // Квант. 1971. № 8. С. 23–28.

27. Соловьев Ю.П. Инверсоры // Квант. 1990. № 4. С. 23–29.

28. Труднев В.П. Внеклассная работа по математике в школе. М. : Просвещение, 2015. 175 с.

29. Уроев В.М. Инверсия // Квант. 1984. № 5. С. 26–32.

30. Яглом И.М. Геометрические преобразования ч. 2. Линейные и круговые преобразования. М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. 612 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 «Педагогическое образование»
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В. И.

Задание

по ВКР студента Журавлевой Ольги Александровны.
(ФИО полностью)

Тема работы: «Изучение преобразований плоскости в рамках дополнительного образования как фактор профессионального самоопределения обучающихся».

Утверждена приказом по университету от « 25. 12 » 2024 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 6 » мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь – ноябрь 2024	Выполнено
2.	Определение роли и значения дополнительного образования в профессиональном самоопределении обучающихся.	Декабрь 2024	Выполнено
3.	Выявление роли и места темы «Преобразования плоскости» в школьном курсе геометрии; изложение основных свойств инверсии и основных методов построения инверсных точек.	Январь – февраль 2025	Выполнено
4.	Разработка рабочей программы факультативного курса «Преобразования плоскости».	Март – апрель 2025	Выполнено
5.	Разработка конспектов факультативных занятий по теме «Инверсия».	Апрель 2025	Выполнено
6.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2025	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2025	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель _____ Сорокина М. В.
(подпись) (ФИО)

Задание приняла к исполнению

_____ Журавлева О. А.
(подпись) (ФИО)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Журавлевой Ольги Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Журавлева Ольга Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат.ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение преобразований плоскости в рамках дополнительного образования как фактор профессионального самоопределения обучающихся», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

(подпись)

6.05.25
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 6.05.25
(дата)

Руководитель ВКР (подпись) Сорокина М. В.
(ФИО)

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Изучение преобразований плоскости в рамках дополнительного образования как фактор профессионального самоопределения обучающихся»

студентки 4 курса Журавлевой Ольги Александровны

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

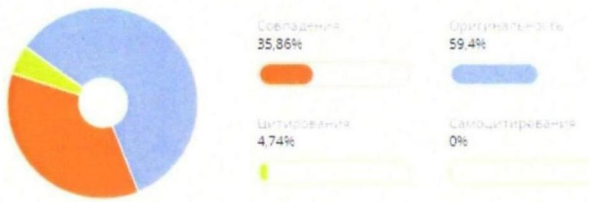
Автор: Сорокина Марина Валерьевна

Название документа: VKR_inversia_3_0

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 88,84% текста документа, исключено из проверки: 11,16% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» - это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 94

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 06.05.2025 14:20:39

Дата корректировки: 06.05.2025 14:59:22

Количество страниц: 61

Символов в тексте: 67529

Слов в тексте: 8871

Число предложений: 1936

06.05.25		М. В. Сорокина
(дата)	(подпись)	(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение преобразований плоскости в рамках дополнительного образования как фактор профессионального самоопределения обучающихся»
студентки Журавлевой Ольги Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Журавлевой О.А. посвящена изучению преобразований плоскости в рамках дополнительного образования. В работе разработан факультативный курс по преобразованиям плоскости для учащихся средней школы, обладающих высокими интеллектуальными способностями и проявляющих повышенный интерес к математике.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы. Во введении представлены цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы, выделены предмет и объект исследования. В первой главе излагаются определение и основные свойства инверсии, а также роль и значение дополнительного образования в профессиональном самоопределении обучающихся. Во второй главе представлена рабочая программа факультативного курса «Преобразования плоскости». Детально разработаны занятия по изучению инверсии с элементами дифференцированной и кооперативной работы в трех направлениях «инженеры», «математики», «программисты». Что отражает возможность влияния изучаемой темы на профессиональное самоопределение обучающихся. В заключении формулируются основные выводы, к которым пришел автор в ходе исследования.

Работа Журавлевой О.А. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации научно-исследовательской деятельности и подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к. ф.-м. н, доцент кафедры
«Математическое образование» _____ М. В. Сорокина