МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа
по дисциплине «Численные и аналитические методы оптимизации»
на тему «Простейшая вариационная задача с подвижными границами»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика
Профиль подготовки – Вычислительная математика и компьютерные науки

Выполнил студент: _____ Симакова Е.А.
Группа: 19ВМ1

Руководитель:
к. ф.-м. н., доцент _____ Москалева М.А.

Работа защищена с оценкой _____
Преподаватель _____
Дата защиты _____

2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав. кафедрой МСМ
_____ Смирнов Ю.Г.

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу по дисциплине
«Численные и аналитические методы оптимизации»
Тема: «Простейшая вариационная задача с подвижными границами»

а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.

Руководитель работы, доцент Москалева М.А.

## Оглавление

**Введение** ..... **4**

**Глава I. Теоретическая часть** ..... **6**

§1. Простейшая задача с подвижными границами ..... 6

**Глава II. Практическая часть** ..... **13**

**Заключение** ..... **19**

**Список литературы** ..... **20**

## Введение

Наряду с задачами, в которых необходимо определить максимальные и минимальные значения некоторой функции $z = f(x)$, в задачах физики нередко возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых функционалами.

*Функционалами* называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций. Например, функционалами являются: длина дуги плоской кривой, площадь некоторой поверхности, моменты инерции, статистические моменты, координаты центра тяжести, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности, т. е. выбором функций, входящих в уравнение этой кривой или поверхности.

*Вариационное исчисление* изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются *вариационными задачами*.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать минимума или максимума. В такой формулировке эти законы носят название вариационных принципов механики или физики. К числу таких вариационных принципов или простейших следствий из них принадлежат: принцип наименьшего действия, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения момента количества движения и т. д.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской Академии наук Л. Эйлера (1707 – 1783 г.), которого с полным основанием можно считать создателем вариационного исчисления.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали три задачи: задача о брахистохроне, задача о геодезических линиях, изопериметрическая задача.

В теоретической части курсовой работы будет рассматриваться простейшая задача с подвижными границами.

В практической части курсовой работы будет рассматриваться решение задач по данной теории.

## Глава I. Теоретическая часть

### §1. Простейшая задача с подвижными границами

При исследовании функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

предполагалось, что граничные точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$ заданы. Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, – кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $y = y(x)$, и, следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие – функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Итак, кривые $y = y(x)$, на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалями.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными граничными точками такими условиями были

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y(x_1) = y_1.$$

В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума – равенства нулю вариации $\delta v$.

Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал $v[y(x, C_1, C_2)]$ превращается в функцию параметров $C_1$ и $C_2$ и пределов интеграции $x_0$ и $x_1$, а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции.

Для упрощения будем считать, что одна из граничных точек, например $(x_0,\ y_0)$, закреплена, а другая $(x_1,\ y_1)$ может перемещаться и переходит в точку $(x_1 + \Delta x_1,\ y_1 + \Delta y_1)$, или, как обычно обозначают в вариационном исчислении, $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$.

Допустимые кривые $y = y(x)$ и $y = y(x) + \delta y$ будем считать близкими, если модули вариаций $\delta y$ и $\delta y'$ малы, и малы модули приращений $\delta x_1$ и $\delta y_1$ (приращения $\delta x_1$ и $\delta y_1$ обычно называют вариациями предельных значений $x_1$ и $y_1$).

Экстремали, проходящие через точку $(x_0,\ y_0)$, образуют пучок экстремалей $y = y(x, C_1)$. Функционал $v[y(x, C_1)]$ на кривых этого пучка превращается в функцию $C_1$ и $x_1$. Если кривые пучка $y = y(x, C_1)$ в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то $v[y(x, C_1)]$ можно рассматривать как однозначную функцию $x_1$ и $y_1$, так как задание $x_1$ и $y_1$ определяет экстремаль пучка (рис. 1) и тем самым определяет значение функционала.

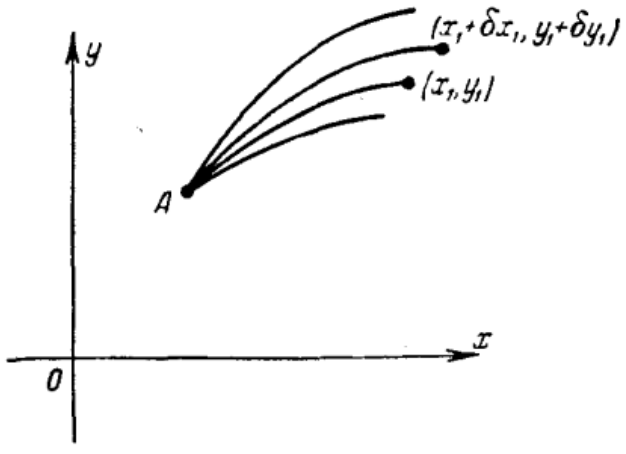


*рис. 1*

Вычислим вариацию функционала $v[y(x, C_1)]$ на экстремалях пучка $y = y(x, C_1)$ при перемещении граничной точки из положения $(x_1,\ y_1)$ в положение $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$. Так как функционал $v$ на кривых пучка превратился в функцию $x_1$ и $y_1$, то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции. Выделим из приращения $\Delta v$ главную линейную по отношению к $\delta x_1$ и $\delta y_1$ часть:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\, dx. \qquad (1)$$

Первое слагаемое правой части преобразуем с помощью теоремы о среднем значении:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1, \qquad \text{где } 0 < \theta < 1,$$

в силу непрерывности функции $F$ будем иметь:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 \to 0$ при $\delta x_1 \to 0$ и $\delta y_1 \to 0$.

Итак,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx = F(x, y, y')|_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1.$$

Второе слагаемое правой части (1) преобразуем путем разложения подынтегральной функции по формуле Тейлора

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y'\right]dx + R_1,$$

где $R_1$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\delta y$ или $\delta y'$. В свою очередь линейная часть

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y'\right)dx$$

может быть преобразована путем интеграции по частям второго слагаемого подынтегральной функции к виду

$$\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx.$$

Значения функционала берутся лишь на экстремалях, следовательно, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$. Так как граничная точка $(x_0,\ y_0)$ закреплена, то $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Следовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y'\right)dx = \left[F_{y'}\delta y\right]_{x=x_1}.$$

Заметим, что $\delta y|_{x=x_1}$ не равно $\delta y_1$ – приращению $y_1$, так как $\delta y_1$ – это приращение $y_1$ при перемещении граничной точки в положение $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$, а $\delta y|_{x=x_1}$ – это приращение ординаты в точке $x_1$ при переходе от экстремали, проходящей через точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$ к экстремали, проходящей через точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$ (рис. 2).

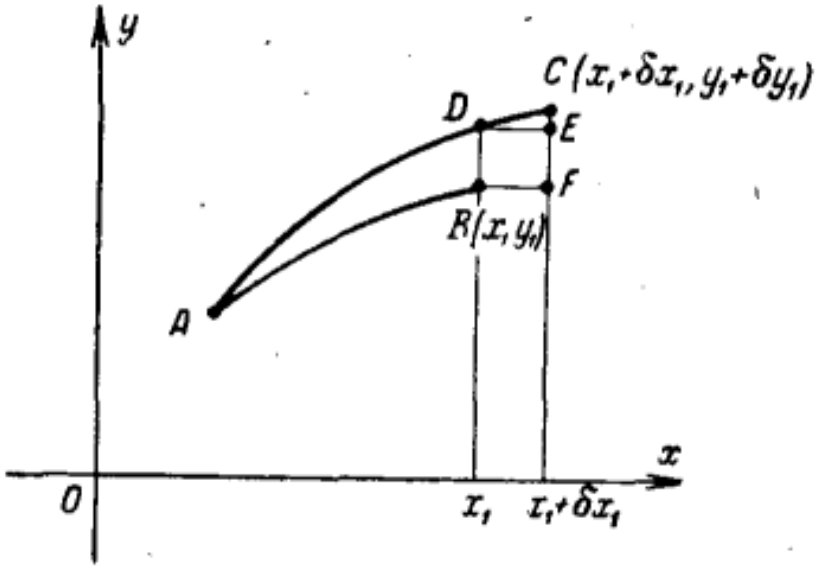


*рис. 2*

Из чертежа видно, что $BD = \delta y|_{x=x_1}$; $FC = \delta y_1$; $EC \approx y(x_1)\delta x_1$; $BD = FC - EC$

или

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1.$$

При этом приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Итак, окончательно имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} Fdx \approx F|_{x=x_1}\delta x_1;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx \approx F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1),$$

где приближенные равенства также справедливы с точностью до членов порядка выше первого относительно $\delta x_1$ и $\delta y_1$.

Следовательно, из (1) получим

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1)$$
$$= \left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1$$

или

$$\delta\bar{v}(x_1, y_1) = \left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1,$$

где $\bar{v}(x_1, y_1)$ – функция, в которую превратился функционал $v$ на экстремалях $y = y(x, C_1)$, а $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1,\ dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ – приращения координат граничной точки.

Основное необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ приобретает вид

$$\left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 = 0. \qquad (2)$$

Если вариации $\delta x_1$ и $\delta y_1$ независимы, то отсюда следует, что

$$\left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=x_1} = 0 \text{ и } F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0.$$

Однако чаще приходится рассматривать случай, когда вариации $\delta x_1$ и $\delta y_1$ зависимы.

Пусть, например, правая граничная точка $(x_1, y_1)$ может перемещаться по некоторой кривой

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

Тогда $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ и, следовательно, условие (2) принимает вид $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\delta x_1 = 0$ или, так как $\delta x_1$ изменяется произвольно, то $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1} = 0$. Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами $\varphi'$ и $y'$ в граничной точке. Оно называется *условием трансверсальности*.

Условие трансверсальности совместно с условием $y_1 = \varphi(x_1)$ позволяет, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка $y = y(x, C_1)$, на которых может достигаться экстремум. Если граничная точка $(x_0,\ y_0)$ может перемещаться по некоторой кривой $y_0 = \psi(x_0)$, то

совершенно так же обнаружим, что и в точке $(x_0,\ y_0)$ должно удовлетворяться условие трансверсальности

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0} = 0.$$

## Глава II. Практическая часть

*Задание №1*

Найти условие трансверсальности для функционалов вида:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

*Решение:*

Условие трансверсальности $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$ имеет в данном случае вид:

$$A(x,y)\sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y') \cdot \frac{A(x,y)\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

или

$$\frac{A(x,y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0;$$

предполагая, что $A(x,y) \neq 0$ в граничной точке, получим $1 + \varphi' y' = 0$ или $y' = -\frac{1}{\varphi'}$, т.е. условие трансверсальности свелось в данном случае к условию ортогональности.

*Задание №2*

Исследовать на экстремум функционал

$$v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx,$$

причем $y(0) = 0$, а $y_1 = x_1 - 5$ (рис. 3).

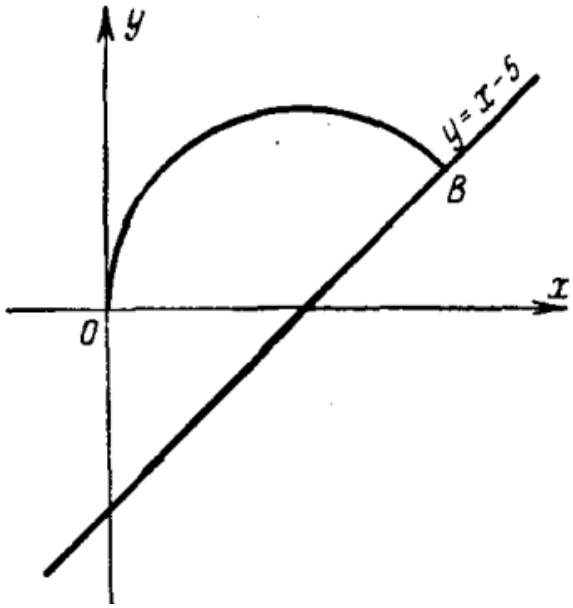


*рис. 3*

*Решение:*

Интегральными кривыми уравнения Эйлера являются окружности $(x - C_1)^2 + y^2 = {C_2}^2$. Первое граничное условие дает $C_1 = C_2$. Так как условие трансверсальности для данного функционала сводится к условию ортогональности, то прямая $y_1 = x_1 - 5$ должна быть диаметром окружности и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке $(5, 0)$ пересечения прямой $y_1 = x_1 - 5$ с осью абсцисс. Следовательно, $(x - 5)^2 + y^2 = 25$, или $y = \pm\sqrt{10x - x^2}$. Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности $y = \sqrt{10x - x^2}$ и $y = -\sqrt{10x - x^2}$.

Если граничная точка $(x_1, y_1)$ может перемещаться лишь по вертикальной прямой (рис. 4) и, следовательно, $\delta x_1 = 0$, то условие (2) переходит в $F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$.

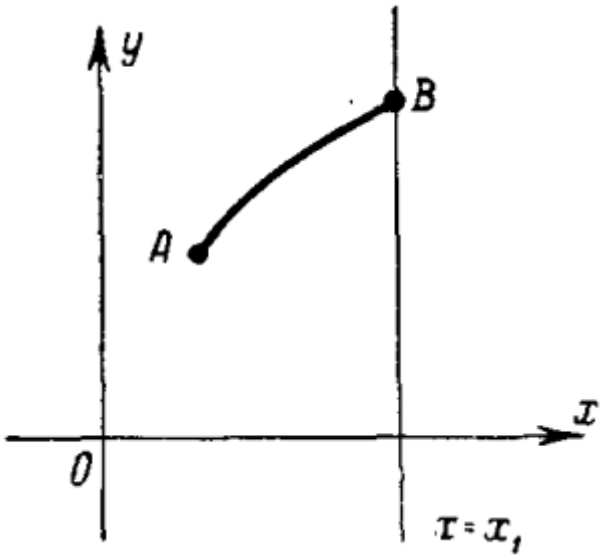


*рис. 4*

Пусть, например, в задаче о брахистохроне левая граничная точка закреплена, а правая может перемещаться по вертикальной прямой.

Экстремалями функционала $v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$ являются циклоиды, уравнения которых, если принять во внимание условие $y(0) = 0$, будут иметь вид

$$x = C_1(t - \sin t),$$
$$y = C_1(1 - \cos t).$$

Для определения $C_1$ используем условие $F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0$, которое в данном случае имеет вид

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1} = 0,$$

откуда $y'(x_1) = 0$.

То есть искомая циклоида должна пересекать прямую $x = x_1$ под прямым углом и, следовательно, точка $x = x_1$, $y = y_1$ должна быть вершиной циклоиды (рис. 5).

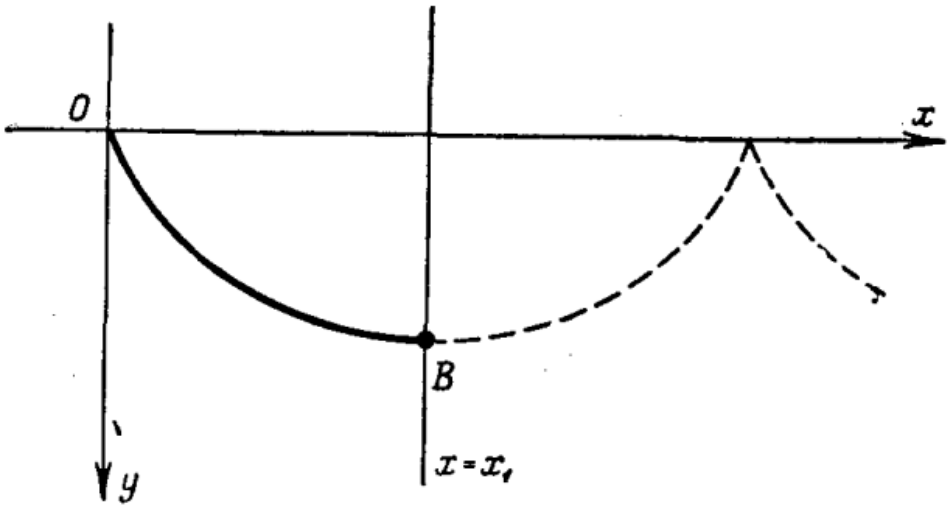


*рис. 5*

Так как вершине соответствует значение $t = \pi$, то $x_1 = C_1\pi$, $C_1 = \frac{x_1}{\pi}$. Следовательно, экстремум может реализовываться лишь на циклоиде

$$x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin t),$$

$$y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos t).$$

Если граничная точка $(x_1,\ y_1)$ в задаче об экстремуме функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

может перемещаться по горизонтальной прямой $y = y_1$, то $\delta y_1 = 0$ и условие (2), или условие трансверсальности, принимает вид

$$\left(F - y' F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0.$$

*Задание №3*

Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.

*Решение:*

Задача сводится к нахождению экстремального значения интеграла

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

при условии, что левый конец экстремали может перемещаться по кривой $y = x^2$, а правый – по прямой $y = x - 5$. Таким образом, в нашем случае имеем $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x - 5$. Общее решение уравнения Эйлера будет: $y = C_1 x + C_2$, $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, которые предстоит определить.

Условия трансверсальности имеют вид:

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0,$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

где $y' = C_1$. Уравнения принимают вид

$$\begin{cases} C_1 x_0 + C_2 = {x_0}^2, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5. \end{cases}$$

Итак, имеем системы четырех уравнений относительно четырех неизвестных $C_1, C_2, x_0, x_1$:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + {C_1}^2} + (2x_0 - C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1 + {C_1}^2}} = 0, \\ \sqrt{1 + {C_1}^2} + (1 - C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1 + {C_1}^2}} = 0, \\ C_1 x_0 + C_2 = {x_0}^2, \\ C_1 x_1 + C_2 = x_1 - 5. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим, что:

$$C_1 = -1, C_2 = \frac{3}{4}, x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{23}{8}.$$

Значит, уравнение экстремали есть $y = -x + \frac{3}{4}$ и расстояние между заданными параболой и прямой равно

$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2}x \ = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

## Заключение

В теоретической части курсовой работы была рассмотрена простейшая задача с подвижными границами.

В практической части курсовой работы были рассмотрены задачи по данной теории.

Вариационное исчисление – это раздел анализа, в котором изучаются вариации функционалов. Наиболее типичная задача – найти функцию, на которой заданный функционал достигает экстремального значения.

Методы вариационного исчисления широко применяются в различных областях математики. Например, в дифференциальной геометрии с их помощью ищут геодезические линии и минимальные поверхности. В физике вариационный метод – один из мощнейших инструментов получения уравнений движения, как для дискретных, так и для распределённых систем, в том числе и для физических полей. Методы вариационного исчисления также применимы и в статике.

## Список используемой литературы


1. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969 г. – 424 с.
2. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное уравнение: Учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006 г. – 488 с.
3. Краснов М. Л. Вариационное исчисление (Задачи и упражнения) / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. – М.: Наука, 1984 г. – 191 с.