

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Задачи на построение как средство организации исследовательской
деятельности обучающихся классов с углубленным изучением математики»

Студент

Тугушева 20.05.24
(подпись, дата)

Тугушева Мадина Ильясовна
(ФИО полностью)

Руководитель

Сорокина 20.05.24
(подпись, дата)

Сорокина М. В.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 15.06.24
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.24 № 11)

Заведующий кафедрой

24.05.24 Пань
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 21.06.24 № 12)

Секретарь ГЭК

Журавлева 21.06.24
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Задачи на построение в курсе углубленного изучения математики	5
§1. Задачи на построение. История их возникновения	5
§2. Методы геометрических построений на плоскости	7
§3. Анализ рабочих программ базового и углубленного уровня.....	10
§4. Задачи на построение в школьных учебниках по геометрии	13
§5. Место задач на построение в школьном курсе геометрии.....	16
§6. Исследовательская деятельность обучающихся по математике в классах с углубленным изучением математики.....	19
Глава 2. Применение задачи на построение с целью организации исследовательской деятельности обучающихся	22
§1. Задача Аполлония и ее решение.....	22
§2. Исследование частного случая задачи Аполлония в GeoGebra и следствия из него.....	26
§3. Разработка методических рекомендаций по организации исследовательской деятельности на примере частного случая задачи Аполлония.....	43
Заключение	47
Список литературы	49

Введение

На сегодняшний день одним из наиболее популярных форм учебной работы является исследовательская деятельность учеников, которая способствует развитию творческого подхода к современной жизни. Такой вид деятельности готовит школьников к нестандартным способам решения проблем, побуждает к самообразованию, пополняет багаж знаний. Существует мнение, что в итоге исследовательской деятельности школьники должны прийти к объективно новым результатам. Однако, это не так. Поскольку мы рассматриваем исследование в образовательном процессе, то его основная особенность – то, что оно является учебным. Поэтому итог исследовательской деятельности – развитие личности.

Для организации исследовательской деятельности учащихся используют различные методы, приемы и средства обучения. Они позволяют формировать интерес к познавательной, творческой деятельности.

Актуальность темы связана с тем, что задачи на построение позволяют ученикам поставить перед собой учебную задачу, представить ход ее решения и организовать работу по решению поставленной задачи. Они способствуют формированию системы прочных знаний и овладению надпредметными умениями, то есть открывают возможности для исследовательской деятельности в школе.

Задачи на построение приобщают к самостоятельным исследованиям, которые посильны для учеников, развивают навыки решения проблем, позволяют отрабатывать теоретические знания.

Цель работы: организация исследовательской деятельности учеников на основе частного случая задачи Аполлония.

Объект исследования: исследовательская деятельность школьников.

Предмет исследования: организация исследовательской деятельности в процессе внеклассной работы.

Чтобы реализовать поставленную цель, необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить и структурировать теоретический материал по данной теме.
2. Познакомиться с историей возникновения задач на построение.
3. Рассмотреть методы геометрических построений на плоскости.
4. Проанализировать рабочие программы базового и углубленного уровня по математике.
5. Проанализировать школьные учебники на наличие задач на построение.
6. Рассмотреть роль исследовательской деятельности в процессе углубленного изучения математики.
7. Познакомиться с задачей Аполлония и исследовать один из ее частных случаев.
8. Разработать методические рекомендации по организации исследовательской деятельности на примере частного случая задачи Аполлония.

Гипотеза исследования: задачи на построение служат средством для организации исследовательской деятельности обучающихся классов с углубленным изучением математики.

В ходе написания работы использовались следующие *методы исследования*: анализ математической и методической литературы, обобщение и систематизация информации.

Практическая значимость работы заключается в возможности дальнейшего использования учителем полученных результатов при организации исследовательской деятельности с обучающимися в классах с углубленным изучением математики.

Глава 1. Задачи на построение в курсе углубленного изучения математики

§1. Задачи на построение. История их возникновения

Задача на построение – задача, где с помощью указанных инструментов требуется построить некий геометрический объект. Обычно, к этим инструментам относятся циркуль и линейка.

В любой задаче на построение можно выделить:

1. Условие задачи (элементы, с помощью которых необходимо построить требуемую фигуру);
2. Инструменты, которыми можно пользоваться для построения объекта;
3. Искомую фигуру.

Каждый инструмент дает возможность выполнить определенные построения, которые в одной литературе называются основными, а в другой простейшими. Например, с помощью линейки можно построить отрезок (прямую или луч), если даны две точки.

Выделяются также построения, которые можно выполнить с помощью циркуля: построить окружность, если даны точка – центр и отрезок, равный радиусу; построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если даны (построены) ее центр концы дуги.

Кроме вышеперечисленных можно выделить еще построения: построить точку пересечения двух данных непараллельных прямых; построить точки пересечения данных прямой и окружности (двух данных окружностей); построить точки принадлежащие (или не принадлежащие) прямой или окружности; построить произвольную прямую.

Смысл решения задач на построение – свести к задаче, которая уже ранее была решена. Такие задачи принято называть стандартными или элементарными.

Что значит решить задачу на построение? Решение таких задач осуществляется в четыре этапа. Рассмотрим каждый из них отдельно.

1. Анализ. Это важный этап, так как именно он приводит к решению задачи. В ходе анализа предполагаем, что задача решена. Далее перед нахождением плана построения требуемой фигуры строится чертеж-набросок, в котором изображаются искомая фигура и фигуры, которые были даны изначально и устанавливается связь между данными в условии фигурами и искомой фигурой.

2. Построение. Указывается последовательность основных (элементарных) построений, которые приведут к искомой фигуре. Графически (с помощью циркуля и линейки) оформляется каждый шаг, то есть реализуется план построения.

3. Доказательство. На данном этапе выясняется, действительно ли построенная фигура является искомой, то есть удовлетворяет ли она условиям задачи.

4. Исследование. На данном этапе нужно рассмотреть, при любом ли выборе данных задача имеет решение и сколько решений имеет задача при том или ином выборе [11].

На самом деле задачи на построение возникли очень давно. Решать простейшие задачи на построение приходилось древним землемерам, архитекторам, инженерам при составлении чертежа здания, отыскании красивых геометрических форм, их вместительности. Это способствовало возникновению и развитию наглядной геометрии, которая распространилась у древних народов Египта, Индии и т.д.

Но правила, которыми пользовались астрономы, землемеры не были отдельной наукой. Впервые систематично изложили теорию в Греции. Первым ученым, кто занимался такими задачами, был Фалес Милетский. Он определил расстояние от берега до корабля в море, пользуясь построением треугольника.

Пифагор тоже интересовался задачами на построение. Он вместе со своими учениками пытался все интуитивные правила собрать в одну науку, основанную на доказательствах. Также следует отметить Платона, который считал построение геометрическим, если оно выполнялось только с помощью циркуля и линейки.

В древности греческие математики столкнулись с тремя задачами на построение, которые никак не решались. Они носят название «знаменитые геометрические задачи древности».

1. Задача об удвоении куба – требуется построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного. Решение этой задачи предлагали Гиппократ, Платон, Эратосфен и др.;

2. Задача о трисекции угла – требуется разделить угол (произвольный) на три равные части (построить лучи, выходящие из вершины угла и делящие угол на три равные части);

3. Задача о квадратуре круга – требуется построить квадрат, равновеликий по площади данному кругу (с площадью, равной площади данного круга) [20].

Хочется еще отметить Евклида, который в «Началах» доказывал существование фигур их построением с помощью циркуля и линейки.

§2. Методы геометрических построений на плоскости

Выделяются три основных метода решения задач на построение:

1. Метод геометрических мест точек (или метод пересечений);
2. Метод геометрических преобразований;
3. Алгебраический метод.

Рассмотрим каждый метод отдельно.

Метод геометрических мест точек (или метод пересечений) заключается в том, что для построения искомой фигуры необходимо найти два условия,

которым она удовлетворяет. Для решения задач данным методом необходимо знать основные геометрические места точек. Данный метод развивает у учеников умение устанавливать причинно-следственные связи и на их основе делать выводы.

Суть метода геометрических преобразований состоит в том, что наряду с искомой фигурой, рассматривается фигура, которая может быть получена из искомой с помощью каких-то преобразований. К этим преобразованиям относятся: параллельный перенос, симметрия, поворот, гомотетия, инверсия. При решении задач этим методом школьники учатся мыслить логически и стратегически.

При параллельном переносе требуется перенести искомые элементы на некоторый вектор. Таким образом, построение искомой фигуры сводится к построению более простой фигуры.

Следующее преобразование – симметрия. Следует отметить, что симметрия может быть осевой (относительно прямой) или центральной (относительно точки). Рассмотрим каждый случай. При решении задач с помощью метода осевой симметрии строят точку, прямую или окружность симметрично данной точке, прямой или окружности относительно некоторой прямой. Обычно этот метод применяется к задачам, в которых искомая фигура имеет осевую симметрию. Центральная симметрия аналогична осевой, только фигуры строятся симметрично относительно точки, а не прямой.

Решая задачи на построение методом поворота, фигуру поворачивают на данный или найденный угол вокруг выбранного центра. Как и во всех методах, построение искомой фигуры сводится к построению более простой фигуры.

Задача решается методом гомотетии, если известны углы, отношение отрезков и линейный элемент. Найдя коэффициент подобия, строим фигуру, удовлетворяющую условиям задачи (кроме линейного размера) и гомотетичную искомой.

При решении задач методом инверсии наряду с искомыми и данными фигурами рассматриваются фигуры, инверсные им. Построив инверсную фигуру, можно построить искомую. Выделим основные свойства инверсии:

1. Инверсия – инволютивное преобразование (если точка A переходит в точку B , то и точка B переходит в точку A);
2. Точки, лежащие на окружности, переходят в самих себя;
3. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;
4. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии;
5. Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии;
6. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии;
7. Окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит сама в себя [3].

Если при решении задачи приходим к тому, что построение искомой фигуры сводится к построению отрезка, длина которого может быть выражена по некоторой формуле через длины данных отрезков, то в этом случае мы имеем дело с алгебраическим методом.

В школьном курсе геометрии рассматривают построение отрезка (длиной x) через формулы:

1. $x = a + b$;
2. $x = a - b$ ($a > b$);
3. $x = \frac{p}{q}a$ ($p, q \in N$);
4. $x = \frac{ab}{c}$;
5. $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального отрезка между двумя данными);
6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (гипотенуза прямоугольного треугольника);

7. $xa\sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$) (катет прямоугольного треугольника),
где a, b, c – длины данных отрезков [11].

§3. Анализ рабочих программ базового и углубленного уровня

Рассмотрим примерную основную образовательную программу базового уровня по геометрии для 7-9 классов (ФГОС ООО). На изучение геометрии на базовом уровне выделяется не менее 68 учебных часов в год, то есть за три года – не менее 204 учебных часов.

В 7 классе после изучения начальных понятий геометрии предполагается изучение симметричных фигур, то есть ученики знакомятся с осевой и центральной симметрией и их основными свойствами. Далее в содержании учебного курса идет тема: основные построения с помощью циркуля и линейки. После этого по программе должны рассматриваться треугольники, признаки их равенства, в частности и прямоугольный треугольник. В школьных учебниках после изучения данной темы рассматриваются задачи на построение треугольника по трем элементам, однако в примерной рабочей программе это отсутствует. По ней после изучения треугольников должно быть рассмотрено геометрическое место точек, биссектриса и серединный перпендикуляр к отрезку как геометрические места точек.

В 8 классе после изучения четырехугольников предполагается рассмотрение центральной симметрии. Здесь же школьников необходимо знакомить с подобием треугольников и с коэффициентом подобия. 8 класс по рабочей программе должен заканчиваться следующими темами: касательная к окружности, центральные и вписанные углы, вписанная и описанная окружности. Эти темы тоже содержат задачи на построение.

В 9 классе после изучения основных тригонометрических понятий в школе должно быть изучено преобразование подобия, подобие соответственных элементов. Затем изучаются теоремы, которые играют

большую роль при решении задач алгебраическим методом: теорема о квадрате касательной, о произведении отрезков хорд и произведении отрезков секущих. Так же в 9 классе школьники знакомятся с понятием вектора. И к концу учебного года изучаются: внутренняя симметрия фигур, параллельный перенос и вектор.

Далее в рабочей программе выделены планируемые предметные результаты. Относительно задач на построение в 7 классе прописано следующее: владеть понятием геометрического места точек, уметь определять как геометрическое место точек биссектрису угла и серединный перпендикуляр к отрезку, выполнять с помощью циркуля и линейки основные геометрические построения.

Касаемо 8 класса выделены следующие результаты: владеть понятиями вписанной и описанной окружности, уметь применять изученные теоремы при решении геометрических задач.

К концу 9 класса необходимо достичь следующих результатов: владеть понятием преобразование подобия, применять свойства подобия при решении задач, находить центры или оси симметрии фигур, уметь применять движения плоскости [21].

Перейдем к рассмотрению основной образовательной программы углубленного уровня по геометрии 7-9 классов (ФГОС ООО). При углубленном изучении геометрии в учебном плане на изучение математики выделяется 3 часа в неделю, всего не менее 306 учебных часов за три года.

Рассмотрим сначала 7 класс. В начале ученики должны овладеть первичными представлениями о симметрии, потом перейти к рассмотрению простейших построений и инструментов для построений. После изучения треугольников изучаются симметричные фигуры и свойства осевой симметрии. И уже в 7 классе ученики должны познакомиться со взаимным расположением прямой и окружности, касательной и секущей к окружности, и после этого рассмотреть простейшие построения с помощью циркуля и линейки. Далее по

программе идет геометрическое место точек, их примеры на плоскости. К биссектрисе угла и серединному перпендикуляру к отрезку здесь добавляется описанная окружность треугольника. К задачам на построение возвращаются в конце 7 класса, рассматривают их историю, простейшие построения и этапы решения.

По рабочей программе ученики 8 класса должны рассмотреть: центрально-симметричные фигуры, подобие треугольников, коэффициент подобия, вписанные и описанные окружности треугольника и четырехугольников. Так же как и в базовом уровне, изучаются взаимное расположение двух окружностей, их касание, общие касательные к двум окружностям.

В 9 классе рассматривают те же теоремы, которые были прописаны на базовом уровне. После их изучения вводится понятие гомотетии. После изучения векторов рассматриваются: центральная и осевая симметрия, фигуры, симметричные относительно некоторой оси, поворот, параллельный перенос. И в конце учебного года рассматривается движение и его свойства, а также композиция движений.

К примерным результатам в образовательной программе углубленного уровня добавляется: в 7 классе – пользоваться понятием геометрического места точек при решении задач и доказательства геометрических утверждений; в 8 классе – распознавать центрально-симметричные фигуры и применять их свойства при решении задач, иметь представление о преобразовании подобия и подобных фигурах; в 9 классе – иметь представление о гомотетии, о преобразованиях плоскости, находить оси и центры симметрии, центры поворота, находить композиции простейших преобразований [21].

Таким образом, анализ рабочих программ базового и углубленного уровня позволило ознакомиться с порядком изучения тем, необходимых для решения задач на построение.

§4. Задачи на построение в школьных учебниках по геометрии

Рассмотрим учебники, которые соответствуют ФГОСу 2023 года и сравним их с прошлогодними учебниками.

В учебнике Н. Я. Виленкина «Математика 5 класс» в главе «Натуральные числа» ученики встречаются с построением отрезка. Далее переходят к построениям многоугольника, прямых и лучей. Также автор предлагает рассмотреть сравнение отрезков с помощью циркуля. В конце 5 класса происходит знакомство с чертежным треугольником и построение с помощью него прямых углов [15], [16].

Продолжают пользоваться чертежным треугольником и в 6 классе. В учебнике Виленкина Н. Я. «Математика 6 класс» в конце главы «Рациональные числа» автор рассматривает перпендикулярные и параллельные прямые и их построение с помощью чертежного треугольника [17], [18].

Для сравнения рассмотрим учебники по математике для 5-6 классов, автором которых является Дорофеев Г. В.

В 5 классе ученики работают и с линейкой и с циркулем: строят прямые, проходящие через две точки, лучи и отрезки, а также сравнивают отрезки с помощью циркуля и строят окружности. В отличие от учебника Виленкина автор далее предлагает познакомиться с углами и их построением с помощью угольника. По данному учебнику школьники знакомятся с многоугольниками, в частности с треугольником и прямоугольником [13].

В учебнике для 6 класса присутствуют все темы, которые отмечались в учебнике Виленкина. Однако в данном учебнике материала, связанного с задачами на построение, гораздо больше. В 5 главе, например, рассматриваются касательные к окружности, взаимное расположение прямой и окружности. Также немало важно, что ученики встречаются с построением треугольника по трем сторонам и обращают внимание на осевую и центральную симметрию [14].

Рассмотрим учебник Атанасяна Л. С. по геометрии для 7-9 классов (2023 год). В главе «Треугольники» четвертый параграф называется «Задачи на построение», в которую входят темы: окружность, построения циркулем и линейкой, примеры задач на построение. Данный блок предполагает актуализацию знаний про построения с помощью циркуля и линейки и их применение при решении простейших задач на построение: построение отрезка (угла), равного данному отрезку (углу); построение биссектрисы угла; перпендикулярных прямых; середины отрезка.

В следующей главе «Параллельные прямые» ученики встречаются с уже известным построением – построение параллельных прямых с помощью угольника. Автор предлагает учащимся с помощью циркуля и линейки построить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку.

В следующей главе «Соотношения между сторонами и углами треугольника» автор рассматривает задачу на построение треугольника, если известны различные элементы (его стороны, две стороны и угол между ними, сторона и два прилежащих к ней угла). Заметим, что данная глава дает возможность для попыток самостоятельно решить задачи на построение, поскольку автор предоставляет список задач для самостоятельного решения. Данный подход позволяет формировать умение выдвигать гипотезы, логически рассуждать, доказывать и делать выводы по конкретной задаче. Далее ученики знакомятся с геометрическим местом точек, которые нужны для решения задач методом пересечений.

К концу 7 класса учеников знакомят с этапами решения задач на построение. В учебнике представлен пример решения одной задачи и список задач для самостоятельного решения.

В 8 классе после изучения многоугольников можно найти задачи на их построение, если заданы различные элементы. Перед этим ученикам напоминают про этапы решения задач на построение.

Так же автор знакомит учащихся с методом гомотетии. Предлагаются задачи на построение треугольника по данным отношениям.

Атанасян предлагает восьмиклассникам решить задачу на построение касательной к окружности через данную точку. Глава «Окружность» играет большую роль при обучении к решению задач на построение, поскольку ученики знакомятся со свойствами окружностями, а также с вписанными и описанными окружностями.

Хочется отметить, что в данном учебнике автор выделяет отдельно задачи на повторение, задачи повышенной сложности и т.д. В конце 8 класса в списке задач на повторение можно встретить несколько задач на построение и в списке задач повышенной сложности присутствует задача на построение равнобедренной трапеции по основаниям и диагонали.

В 9 классе ученики применяют изученные свойства окружности, но уже в главе «Правильные многоугольники». На данном этапе предлагается расширение знаний учащихся посредством построения различных правильных многоугольников в окружность. В списке дополнительных задач к главе «Длина окружности и площадь круга» можно найти задачи на построение.

В 9 классе ученики знакомятся с преобразованиями, которые необходимы для решения задач методом геометрических преобразований. В «Преобразования плоскости. Движения» изучаются параллельный перенос, поворот и симметрия, а в главе «Преобразование подобия. Подобие фигур» изучается гомотетия. После рассмотрения каждого преобразования Атанасян предлагает ряд задач на построение. Это позволяет ученикам лучше усвоить изученный материал и структурировать уже имеющиеся и новые знания [12].

Для сравнения рассмотрим учебник по геометрии для 7-9 классов, автором которого является Погорелов А. В.

В данном учебнике используется другой порядок рассмотрения тем, связанных с задачами на построение. В 7 классе рассматривается построение с помощью линейки и угольника параллельных прямых, а в параграфе «Смежные

и вертикальные углы» – построение перпендикулярных прямых. В самом начале изучения геометрии дается пояснение про решение задачи на построение и про простейшие построения.

В 8 классе учебники отличаются в том, что Погорелов, в отличие от Атанасяна, предлагает задачу на построение четвертого пропорционального отрезка и рассматривает тему «Движение» в 8 классе, а не в 9. Несмотря на различия, можно выделить и сходство учебников: геометрические преобразования и задачи на построение, связанные с ними рассматриваются авторами на одном этапе.

В 9 классе Погорелов знакомит школьников с преобразованиями гомотетии и подобия, рассматривает задачи, связанные с ними.

В 9 классе Погорелов рассматривает преобразование подобия и гомотетии и предлагает задачи на построение, решение которых основано на этих преобразованиях. Так же, как и Атанасян, Погорелов предлагает рассмотреть построение правильных многоугольников, задачи на построение описанных и вписанных окружностей около правильных многоугольников [19].

§5. Место задач на построение в школьном курсе геометрии

Говоря про задачи на построение в школьном курсе, следует отметить их межпредметные связи, в частности с алгеброй, черчением и физикой. Связь с алгеброй проявляется в алгебраическом методе решения задач на построение, которое было упомянуто во втором параграфе. Реализация межпредметных связей с черчением подразумевает обучение школьников правильному применению чертежных инструментов – линейки и циркуля, а так же формирование графической культуры обучающихся. Задачи на построение так же находят свое отражение в физике, например, в геометрической оптике.

Если задаться вопросом, какие функции выполняют задачи на построение, можно получить следующие ответы:

1. Способствуют развитию пространственного воображения и логического мышления, а также математической интуиции;
2. Позволяют реализовать такое направление воспитания, как эстетическое;
3. Формируют умения использования линейки и циркуля;
4. Позволяют лучше усвоить теоретический материал и систематизировать знания учеников [1].

Может возникнуть другой вопрос: что значит научить учеников решать задачи на построение? На этот вопрос тоже есть ответ: научить выполнять геометрические построения и, исходя из этого, найти ответ на вопрос задачи.

При анализе рабочих программ и школьных учебников по геометрии было отмечено, как задачи на построение связаны с материалом 5-9 класса. Это значит, что на каждом этапе обучения нужно уделять внимание этому материалу, чтобы реализовать вышесказанные цели.

Если школьники учатся геометрическим построениям с 5 класса, то когда целесообразнее их познакомить с этапами решения задач на построение? С каждым этапом учеников следует знакомить отдельно. Как правило, всегда начинают с этапа построения. Здесь подразумевается не просто простейшее построение, а описание процесса использования чертежного инструмента. Спустя время в качестве элементов построения могут выступать сложные по выполнению построения, с которыми знакомы ученики.

Далее чему необходимо обучить школьников – этап исследования. К нему можно подвести учеников при решении задачи на построение треугольника по трем элементам, задав вопрос: можно ли стороны треугольника выбрать произвольно. И через время учеников следует познакомить с фактом существования нескольких решений одной задачи.

Затем ученики должны познакомиться с этапом доказательства. Например, после изучения построения угла, равного данному, или отрезка,

равного данному, можно поставить вопрос, действительно ли построенная фигура равна данной (или требуемой)?

И самый последний этап, который необходимо рассмотреть с учениками – анализ. К этому можно прийти, задав вопрос ученикам, которые уже решили задачу: а как вы нашли решение? При этом постепенно объяснять ученикам, что процесс отыскания метода решения и есть анализ.

И только в конце 7 класса, в начале 8 на примере одной задачи следует показать всю схему решения задачи на построение. К этому времени ученики уже будут знакомы со всеми этапами.

Так же после анализа школьных учебников можно сделать вывод, что в учебниках, по которым учились в прошлых десятилетиях, задачам на построение уделялось гораздо больше внимания. В современном курсе геометрии, к сожалению, внимание к ним снизилось. Одна из причин – по программе геометрическим построениям уделяется мало учебных часов, вследствие чего их изучение становится поверхностным.

В последнее время у учеников обнаруживаются затруднения в изображении геометрических фигур, и связано это с тем, что у большинства не развито пространственное воображение и наглядность. Причиной всему этому может быть недооценка роли задач на построение. Для решения этой проблемы следует:

1. На начальных этапах организовать работу учащихся посредством зрительного восприятия: демонстрация фигур, моделирование, сравнение известных фактов;
2. Посредством рассуждений прийти к обоснованию геометрических понятий и утверждений, полученных на первом этапе;
3. Применение этих знаний для решения задач, в частности задач на построение.

Среди основных целей курса геометрии можно выделить развитие логического мышления. Эта цель достигается путем изучения понятий,

доказательства теорем и решения задач. Чтобы развивать у учащихся это качество одних вычислительных задач не хватит, поскольку они не требуют логических рассуждений, а направлены на закрепление формулировок теорем, формул, свойств и признаков фигур и т.д. Подводя итог вышесказанному, отметим, что развитию логического мышления учеников способствуют геометрические задачи на построение.

§6. Исследовательская деятельность обучающихся по математике в классах с углубленным изучением математики

Существуют разные подходы к определению понятия исследовательская деятельность. Например, Леонтович Александр Владимирович считает, что это есть технология для формирования научного мышления. А психолог Обухов Алексей Сергеевич понимает под исследовательской деятельностью творческую деятельность двух личностей по поиску решения чего-то неизвестного, направленная на формирование мировоззрения.

К основным составляющим исследовательской деятельности относятся: субъект, объект, процесс воздействия субъекта на объект. В качестве субъектов могут выступать весь класс, группа или пара учеников, один ученик. К объектам учебно-исследовательской деятельности относятся объекты живой и не живой природы, социальные или искусственные объекты, математические объекты. А под процессом воздействия субъекта на объект подразумевается процесс исследования объекта, его изучение.

В математике в зависимости от того, что нужно исследовать, различают:

1. Задачи на исследование расположения фигур (взаимное расположение фигур, отдельных элементов фигуры);
2. Задачи на исследование двух величин (отношение двух площадей, двух углов и т.п.);
3. Задачи на исследование существования геометрических фигур;

4. Задачи на сравнение.

В исследовательской деятельности по математике прибегают к конкретным методам решения поставленной задачи. Например, решение с помощью аппарата алгебры, то есть анализ полученных соотношений. Или, например, доказательство от противного или проверка всевозможных случаев.

Особенностью исследовательской деятельности по математике является факт, что ее результаты нельзя проверить экспериментальным путем. Так же в математике элементами такой деятельности являются логические операции над объектами: сравнение, логические операции, преобразование полученной информации.

Организация исследовательской деятельности учеников реализуется в следующей последовательности:

1. Выбор темы и цели исследовательской деятельности. Это важный этап, так как с одной стороны тема должна быть актуальной, с другой, должна соответствовать возрасту и уровню знаний учеников. При выборе темы учителю следует дать ученикам возможность самим найти интересную для них тему, и только потом предложить свои идеи. Если трудно сразу определиться с темой, следует сначала выбрать направление исследования и выслушать мнение учеников к каждому из них. Основная задача учителя на данном этапе – проследить, чтобы выбранные учениками темы были интересны и актуальны.

2. Сбор, анализ и оформление материала по выбранной теме. Здесь предполагается совместная деятельность учителя и учащихся: определиться с источниками информации, со способами сбора теоретического материала, со способами представления полученных результатов. Важно, чтобы ученики поняли проблему, которую им нужно решить, и только потом приступили к сбору информации. Целесообразность данного этапа заключается в том, что ученики анализируют материал, работают с литературой и оформляют свои результаты. Задача учителя – наблюдать за деятельностью учеников, оказывать помощь, вносить коррективы.

3. Подведение итогов. В большинстве случаев итог исследовательской деятельности – выступление (перед сверстниками, младшими школьниками, участие в научной конференции, написание статьи). Данный этап позволяет развивать коммуникативные навыки и знакомит учеников с разными способами представления итогов своей работы.

Исследовательскую деятельность можно организовать на каждом этапе обучения. В 5-6 классах цель исследовательской работы – осознание учениками смысла учения для себя. В 7-8 классах в силу подросткового возраста ученики очень активны, поэтому на данном этапе их силы можно направить на реализацию одного из следующих направлений: индивидуальная работа (каждый получает свое задание), групповая работа (эффективна, если тема исследования связана с разными предметными областями) и массовая работа (встречи с интересными людьми, организация олимпиад и конференций).

Исследовательская деятельность учеников, которые изучают математику на углубленном уровне, направлены на повышение уровня знаний, интеллектуальное развитие, развитие творческих способностей. Это можно реализовать через элективные, кружковые работы. Однако результат исследовательской деятельности зависит не только от ученика, но и от учителя. Поэтому учитель должен уметь подбирать темы под контингент аудитории, ставить и достигать цель, планировать и реализовывать совместную деятельность, расширять кругозор учеников [2].

В математике исследовательскую деятельность можно разделить на уровни: исследование математической модели и исследование различных ситуаций, используя математические средства исследования. Заметим, что второй уровень более высокий, так как включает в себя и первый уровень. В школах чаще организуется первый уровень, а второй уровень как раз подходит для классов с углубленным изучением математики.

Глава 2. Применение задачи на построение с целью организации исследовательской деятельности обучающихся

§1. Задача Аполлония и ее решение

Существует легенда, что задача, сформулированная Аполлонием Пергским примерно в 220 г. до н. э. была потеряна и восстановил ее лишь в 1600 году Франсуа Виет. Решить данную задачу удалось французскому математику Жозефу Жергонну в 1816 году. Задача Аполлония заключается в построении окружности, касающейся трех данных окружностей (с радиусами от нуля до бесконечности). Существует несколько частных случаев данной задачи:

1. Построить окружность, касающуюся трех точек.
2. Построить окружность, касающуюся двух точек и прямой.
3. Построить окружность, касающуюся точки и двух прямых.
4. Построить окружность, касающуюся трех прямых.
5. Построить окружность, касающуюся двух точек и окружности.
6. Построить окружность, касающуюся двух прямых и окружности.
7. Построить окружность, касающуюся прямой и двух окружностей.
8. Построить окружность, касающуюся точки, прямой и окружности.
9. Построить окружность, касающуюся точки и двух окружностей [2].

Остановимся на последнем случае: построить окружность, касающуюся точки (окружность нулевого радиуса) и двух окружностей.

Как было указано в первой главе, задача на построение состоит из четырех этапов. Рассмотрим решение данной задачи.

Дано: R, r .

Анализ. Предположим, что задача решена, то есть окружность, касающаяся двух данных окружностей (ω_1 и ω_2) и проходящая через данную точку E построена. Рассмотрим инверсию с центром в данной точке. Тогда окружность ω_1 перейдет в ω_1' , а ω_2 – в ω_2' . Так как искомая окружность

касается двух данных окружностей, то ее образом будет общая касательная к ω_1' и ω_2' . Задача сводится к построению этой касательной. Применив обратную инверсию, получим искомую окружность.

Построение.

1. Построим окружность инверсии c с центром в точке E (см. рисунок 1).

2. Построим окружность ω_1' – инверсную окружности ω_1 (см. рисунок 2). (Соединяем центры окружностей c и ω_1 . Получившаяся прямая пересекает окружность ω_1 в точках G и H . Строим касательные из этих точек к окружности инверсии c . Из точек касания I и J опускаем перпендикуляры на прямую (AE) – получаем точки K и L . Находим середину отрезка $[KL]$ – точку M и строим окружность радиуса MK).

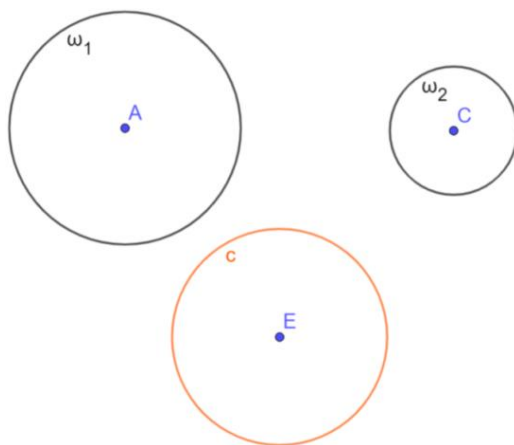


Рисунок 1

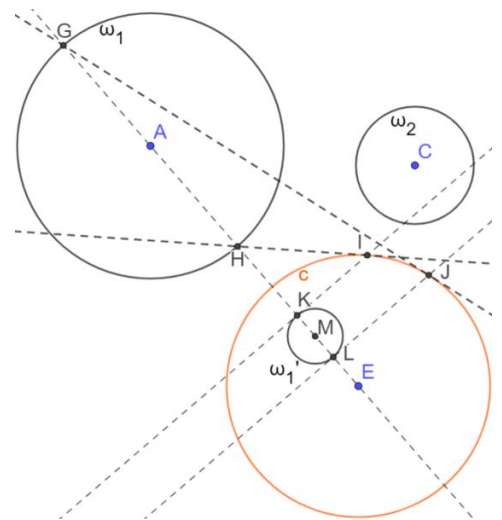
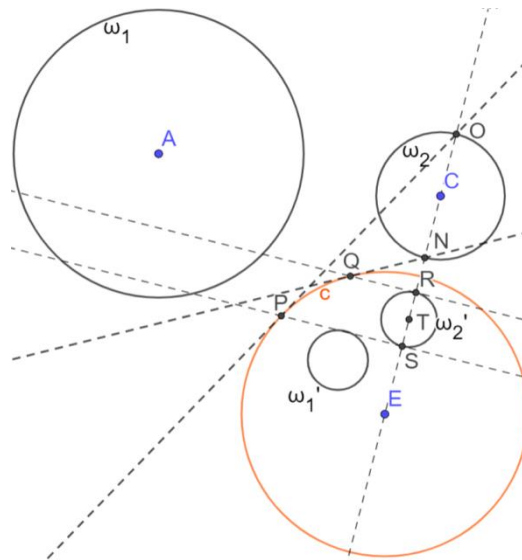
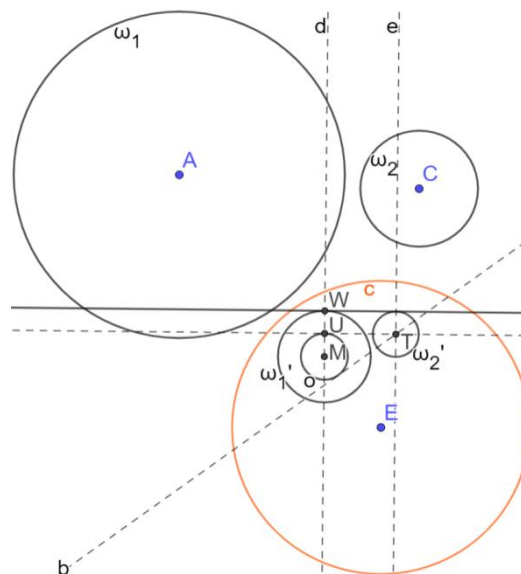


Рисунок 2

3. Построим окружность ω_2' – инверсную окружности ω_2 (см. рисунок 3).



4. Построим прямую l – общую касательную к окружностям ω_1' и ω_2' (см. рисунок 4). (Обозначим радиус ω_1' – R' , а радиус ω_2' – r' . Построим окружность с центром в точке M и радиусом, равным $|R' - r'|$. Строим касательную к получившейся окружности o из центра ω_2' . Она касается окружности в точке U . Прямая (MU) пересекает ω_1' в точке W . Строим радиус окружности ω_2' – TA_1 , параллельный радиусу MW . Строим прямую (WA_1) – общую касательную к окружностям ω_1' и ω_2').



5. Построим окружность ω – образ общей касательной (см. рисунок 5). (Общая касательная пересекает окружность инверсии в точках B_1 и C_1 . Строим окружность по трем точкам – B_1, C_1, E).

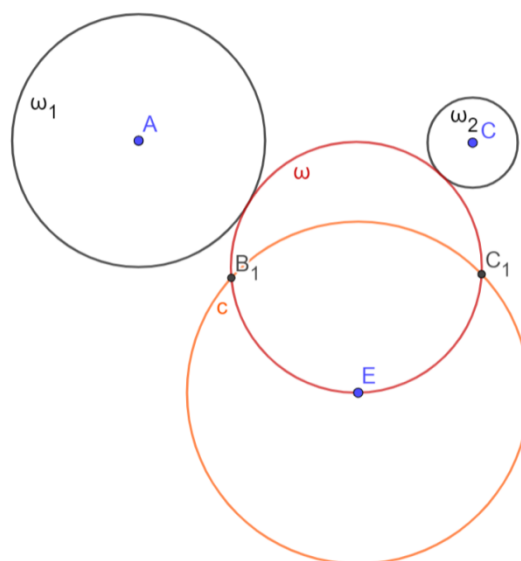


Рисунок 5

Искомая окружность построена.

Доказательство. По свойствам инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии. Так как искомая окружность должна проходить через центр инверсии, то есть точку E и касаться двух данных окружностей, то по свойствам инверсии она отобразится в прямую, не проходящую через центр инверсии. Это и есть общая касательная к двум окружностям – образам данных окружностей. Обратная инверсия отобразит эту касательную в окружность, которая будет касаться двух данных и проходить через точку E .

Исследование.

Если $R + r < \rho(A, C)$ и $|R - r| > \rho(A, C)$, то задача имеет четыре решения;

Если $R + r = \rho(A, C)$ и $|R - r| = \rho(A, C)$, то задача имеет три решения;

Если $R + r > \rho(A, C)$, то задача имеет два решения.

Заметим, что самым сложным и неочевидным этапом является исследование задачи на построение. Поскольку нельзя сразу ответить на

вопросы: «Всегда ли задача имеет решение?», «Сколько решений имеет задача?», «Есть ли частные случаи, требующие особого рассмотрения?»

Чтобы ученикам было легче ответить на вышеперечисленные вопросы, целесообразно использовать различные программные продукты образовательного назначения. Одной из таких программ, в которой можно конструировать модели геометрических задач, является GeoGebra. Она предоставляет возможность обучаться математике просто и наглядно. Основное преимущество в нашем случае – программа позволяет выполнять геометрические построения так, чтобы при изменении какого-либо одного объекта чертежа, остальные тоже изменяются, сохраняя при этом заданные соотношения.

Если сравнивать GeoGebra с геометрией «на бумаге», то можно выделить следующие преимущества:

1. Обладает большим числом элементарных операций, например, построение касательной к окружности;
2. Позволяет создавать динамичные чертежи при изучении геометрии, алгебры, математического анализа;
3. GeoGebra позволяет выдвигать гипотезы и устанавливать закономерности;
4. Позволяет расширять кругозор учащихся и развивать их познавательную активность.

Использование на уроках математики GeoGebra целесообразно при изучении тех тем, в которых кроме вычислений необходимо выполнять геометрические построения, что позволяет расширять кругозор учащихся и повышать их активность. Однако возможности программы хоть и велики, но и не безграничны. Могут встречаться ограничения в использовании, которые связаны с непродуманностью алгоритмов.

§2. Исследование частного случая задачи Аполлония в GeoGebra и следствия из него

Как отмечалось ранее, программа GeoGebra предоставляет возможность исследовать задачу и наглядно убедиться, всегда ли задача имеет решение, сколько решений имеет задачи при тех или иных данных.

Рассмотрим решение частного случая задачи Аполлония в GeoGebra.

Построим окружности ω_1 и ω_2 и точку E . Построим окружность произвольного радиуса c с центром в точке E . Воспользуемся интерфейсом программы и отобразим данные окружности относительно окружности симметрии c , получим окружности ω_1' и ω_2' (см. рисунок 6).

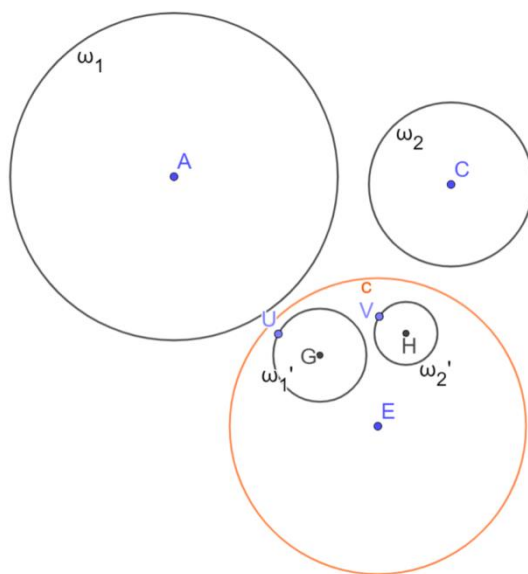


Рисунок 6

Построим общую касательную к окружностям ω_1' и ω_2' . Для этого построим окружность с центром в точке G и радиусом, равным $|GU - HV|$. Из точки H проведем касательные к ω_1' . Данные прямые пересекают полученную окружность в точке W и Z (см. рисунок 7).

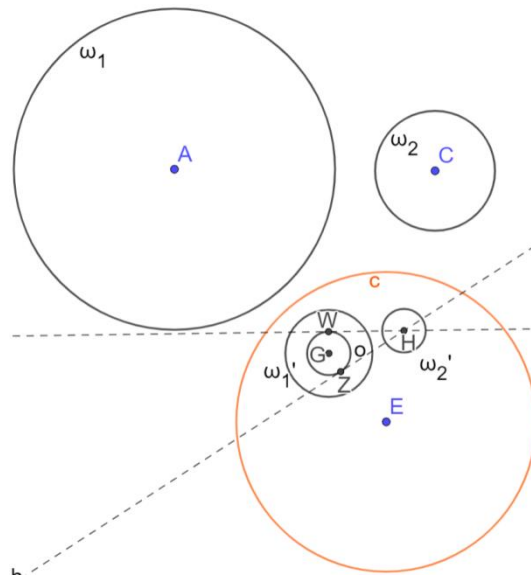


Рисунок 7

Прямая GW пересекает ω_1' в точке B_1 , а прямая GZ — в точке D_1 (см. рисунок 8).

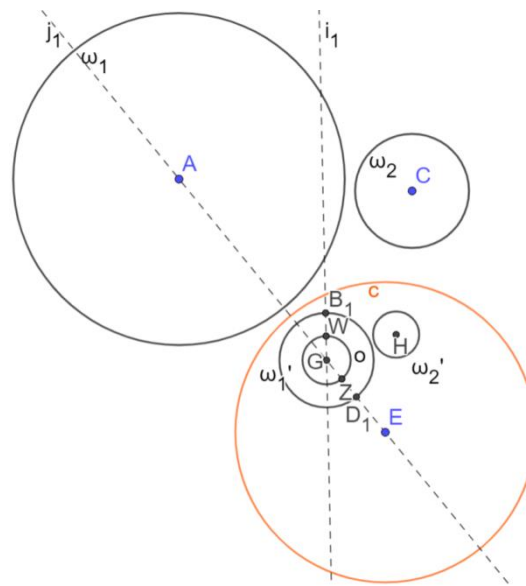


Рисунок 8

Проведем через точку B_1 прямую, параллельную прямой (WH) , а через точку D_1 прямую, параллельную (ZH) . Общие касательные к окружностям ω_1' и ω_2' построены (см. рисунок 9).

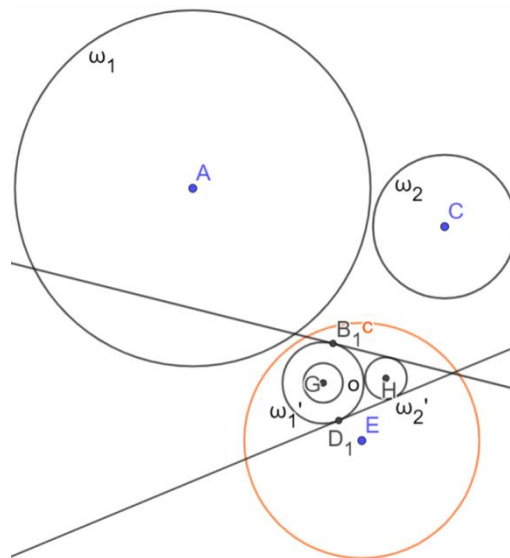


Рисунок 9

Отобразим полученные прямые относительно окружности инверсии и получим искомые окружности a' и b' (см. рисунок 10).

Посмотрим, как будут вести себя полученные окружности, если менять положение точки E . Заметим, что существует положение точки E , при котором окружности касаются только одной данной окружности, то есть условие задачи не выполняется (см. рисунок 11).

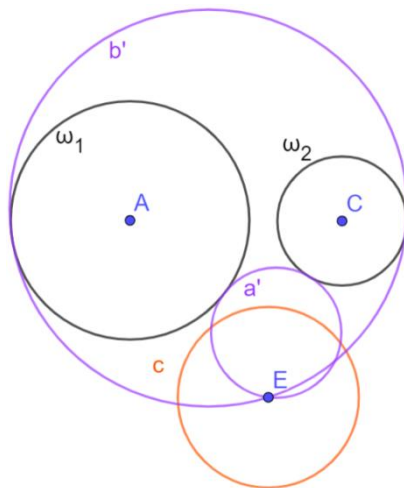


Рисунок 10

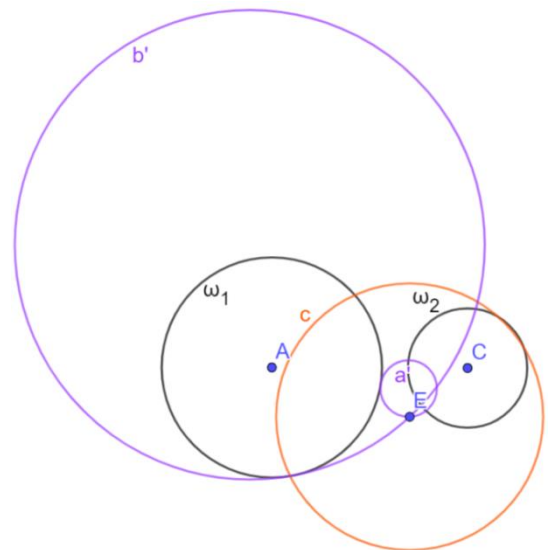


Рисунок 11

Можно сделать вывод, что предложенный нами алгоритм решения задачи работает не для всех случаев. Если анализировать каждый шаг, то все построения кроме общей касательной выполнялись с помощью готовых инструментов GeoGebra. А при построении касательной описанным выше методом мы заведомо берем, что радиус первой окружности больше, и в других случаях алгоритм не работает. Построим общие касательные, используя другой метод.

Для этого возьмем произвольную прямую, проходящую через центр ω_1' . Она пересекает окружность в точках T и F_1 . Через центр окружности ω_2' проведем прямую, параллельную прямой (TF_1) . Она пересекает вторую окружность в точках H_1 и G_1 . Прямые (TH_1) и (F_1G_1) пересекаются в точке I_1 — центр гомотетии (коэффициент гомотетии равен $\frac{R'}{r'}$) (см. рисунок 12).

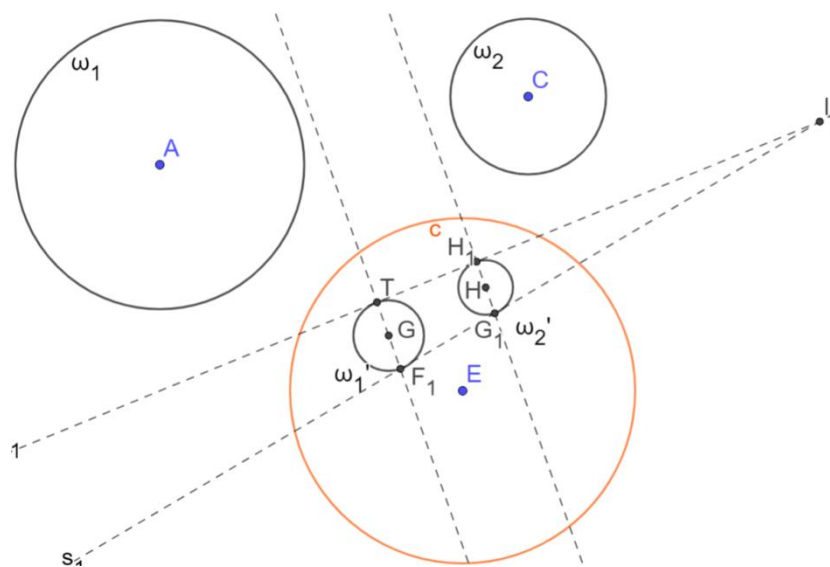


Рисунок 12

При гомотетии касательная, то есть прямая, имеющая единственную точку с окружностью, переходит в касательную, то необходимо из точки I_1 провести касательные к одной из окружностей. Они будут касательными и ко второй окружности (см. рисунок 13).

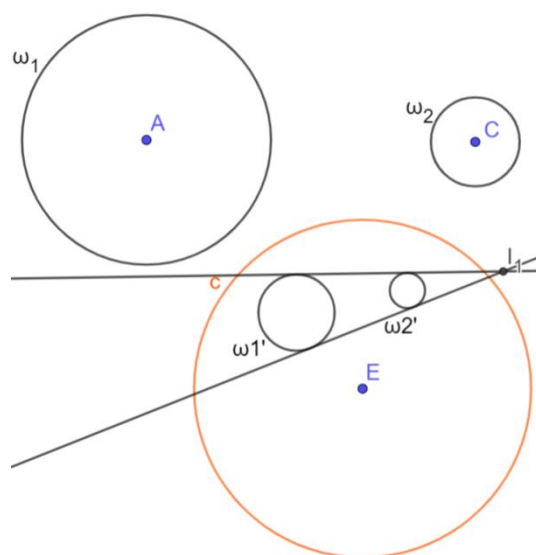


Рисунок 13

Отобразим полученные касательные относительно окружности инверсии и получим искомые окружности c_1 и d_1 (см. рисунок 14).

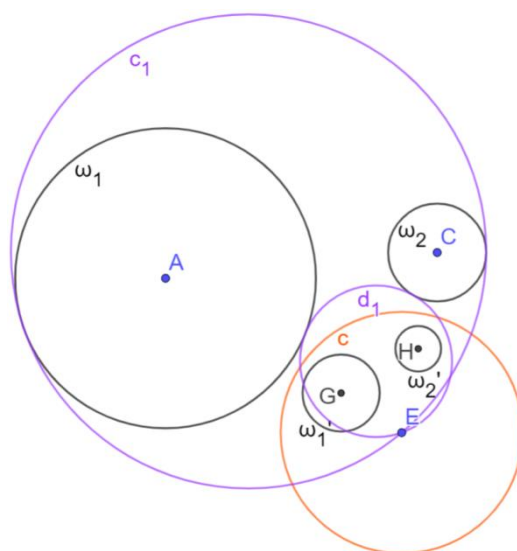


Рисунок 14

В данном случае, задача имеет решение при любом положении точки E (кроме внутренних областей окружности).

Можно сделать вывод, что в данном случае задача имеет два решения. Однако если вспомнить, что две окружности имеют не только две внешних касательных, но и две внутренних, то возникает вопрос: будет ли работать наш алгоритм для внутренних касательных? Точка K_1 – точка пересечения прямых

(TG_1) и (H_1F_1) будет центром гомотетии (коэффициент гомотетии равен $-\frac{R'}{r'}$) (см. рисунок 15).

Следовательно, касательные, проведенные из этой точки к одной окружности, будут касательными и ко второй (см. рисунок 16).

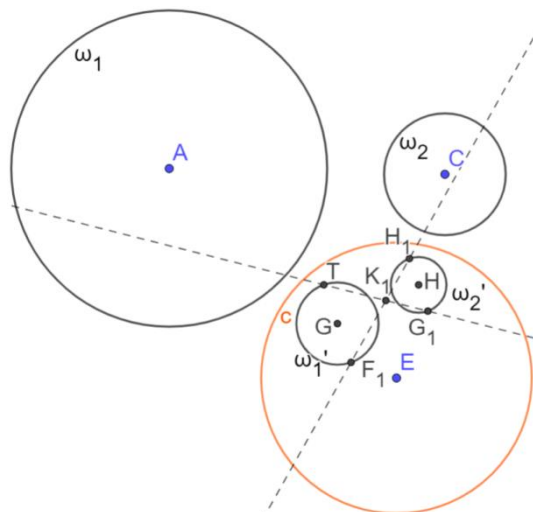


Рисунок 15

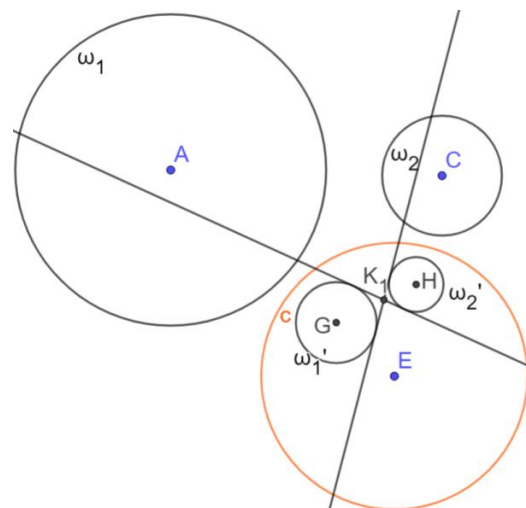


Рисунок 16

Отобразим полученные касательные относительно окружности инверсии и получим p_1 и e_1 (см. рисунок 17).

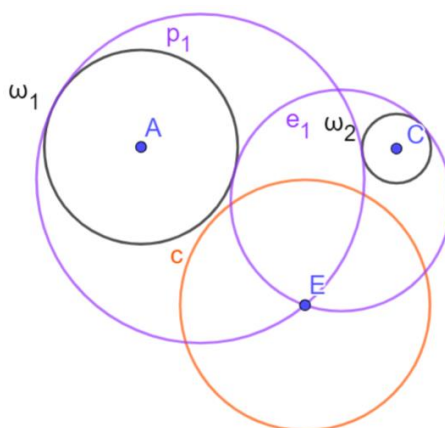


Рисунок 17

Можем сделать вывод, что при таком исходе данных получаем четыре решения – четыре окружности, касающиеся двух данных и проходящие через точку E (см. рисунок 18).

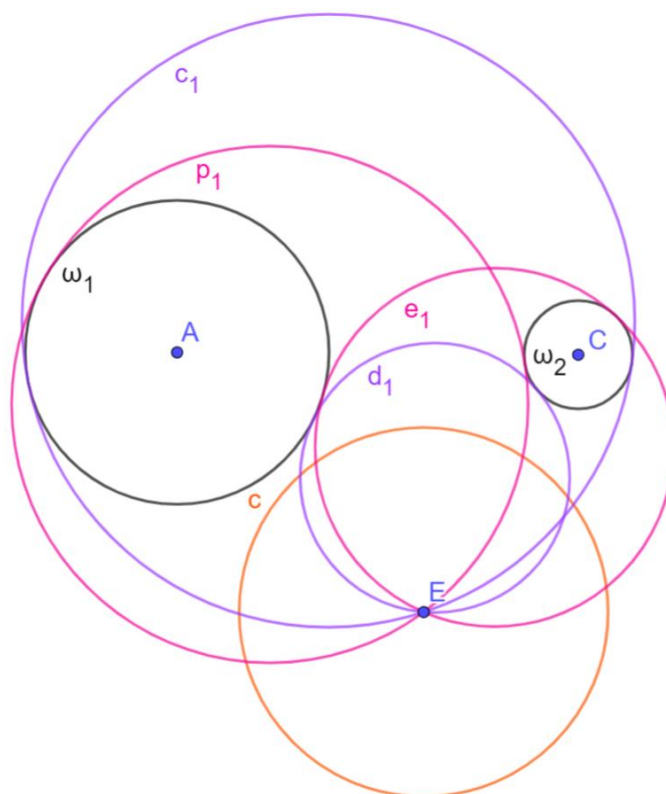


Рисунок 18

Как было отмечено ранее, GeoGebra позволяет выявлять закономерности при различных наборах данных. Для организации исследовательской деятельности данной задачи можно провести следующие рассуждения: какие объекты будем исследовать, какие дополнительные элементы нужно выделить в решении, положение какого объекта будем менять и т.д. Итогом таких рассуждений может быть, что при изменении положения точки E окружности тоже меняют свое положение. Можно выдвинуть предположение, что существует закономерность движения получившихся окружностей.

Найдем центры этих окружностей. Обозначим их разными цветами. Точки P_1 и E_1 – центры окружностей, которые являются образами внутренних касательных, а точки C_1 и D_1 – центры окружностей, являющихся образами внешних касательных (см. рисунок 19).

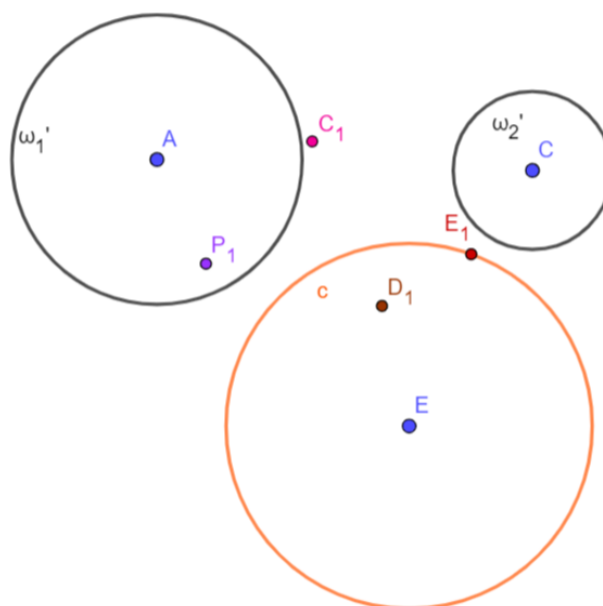


Рисунок 19

Воспользуемся возможностью GeoGebra – «оставлять след» и посмотрим, каким образом двигаются отмеченные точки (центры окружностей) при изменении положения точки E . Заметим, что точки P_1 и E_1 двигаются по одной гиперболе, а точки C_1 и D_1 – по другой. То есть множеством центров окружностей на плоскости, касающихся двух данных и проходящих через данную точку, является гипербола (см. рисунок 20).

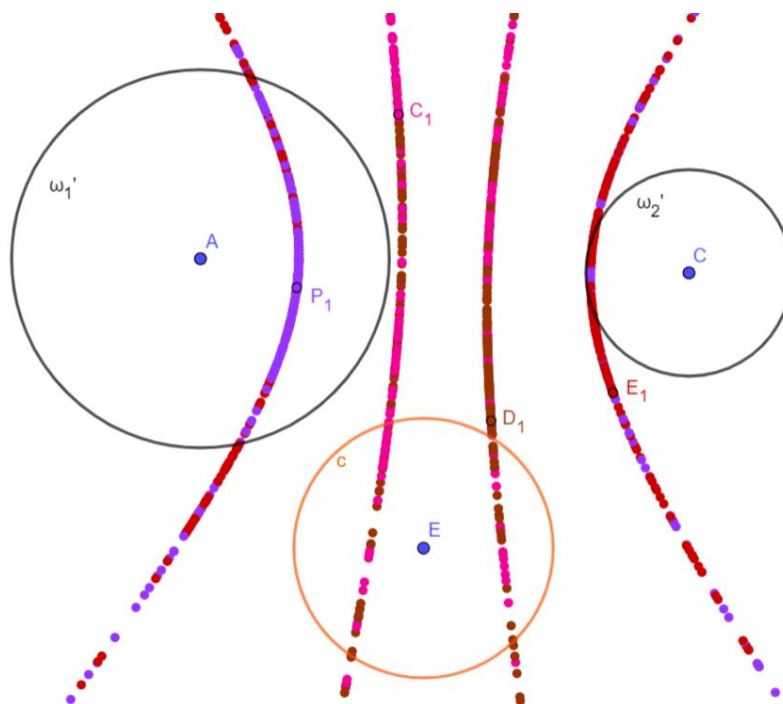


Рисунок 20

Попробуем доказать данный математический факт (см. рисунок 21).

Радиус окружности ω_1 обозначим как r_1 , радиус окружности ω_2 – r_2 , а радиус искомой окружности d_1 – R . Заметим, что точка K_1 удовлетворяет условию $|K_1A - K_1C| = |(R + r_1) - (R + r_2)| = |r_1 - r_2|$. Значит, центры таких окружностей лежат на гиперболе с фокусами в точках A и C . Прежде всего отметим, что $|K_1A - K_1C| = \text{const}$ при фиксированных r_1 и r_2 .

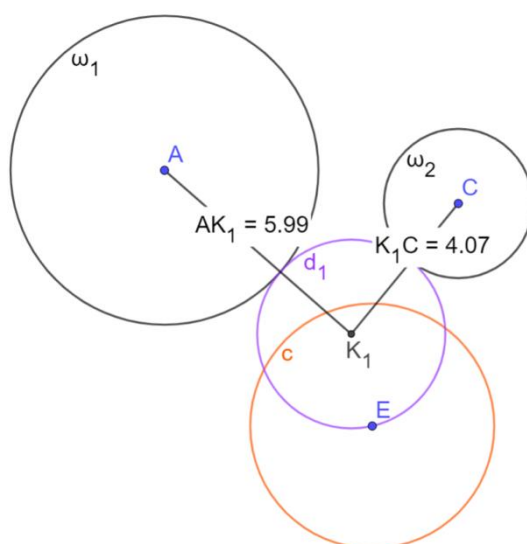


Рисунок 21

Инструменты GeoGebra позволяют строить гиперболу по трем точкам: A , C – центры данных окружностей и K_1 – центр искомой окружности (см. рисунок 22).

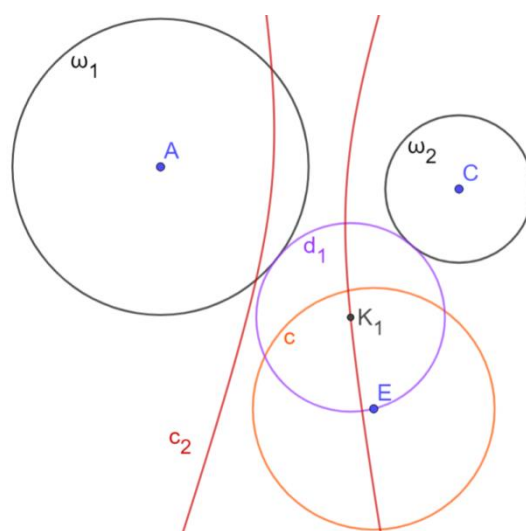


Рисунок 22

Сравним выполненные построения, изменяя радиусы r_1 , r_2 и R . Действительно, центры построенных окружностей лежат на гиперболе (см. рисунок 23).

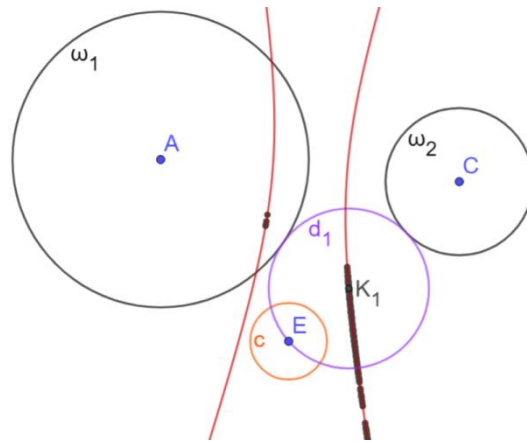


Рисунок 23

Если проследить, по какой линии движется центр искомой окружности, то убедимся, что она движется по построенной нами гиперболе. Аналогично с центром окружности, являющейся образом второй внешней касательной.

Напомним, гипербола – это множество точек на плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек есть величина постоянная, меньшая расстояния между этими точками.

Можно сделать вывод, что гипербола – это геометрическое место точек центров окружностей, касающихся двух данных и проходящих через данную точку. Так же с помощью GeoGebra можно заметить следующую закономерность: если центры окружностей лежат на ветви построенной гиперболы, расположенной ближе к окружности меньшего радиуса, то две данные окружности и искомая окружность касаются внешним образом. Если же лежат на ветви гиперболы, расположенной ближе к окружности большего радиуса, то искомая окружность расположена так, что две данные касаются ее внутри (см. рисунок 24).

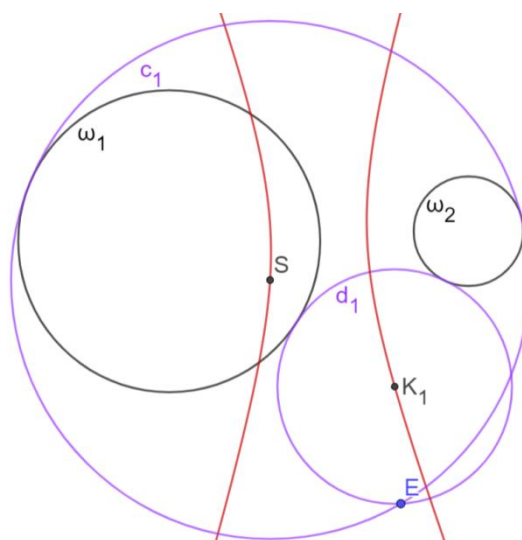


Рисунок 24

Так же можно обратить внимание на то, что при изменении радиусов данных окружностей меняется вид гиперболы. Чем эксцентриситет меньше, тем гипербола более вытянута (эксцентриситет E – это число, равное отношению фокусного расстояния к действительной полуоси) (см. рисунок 25).

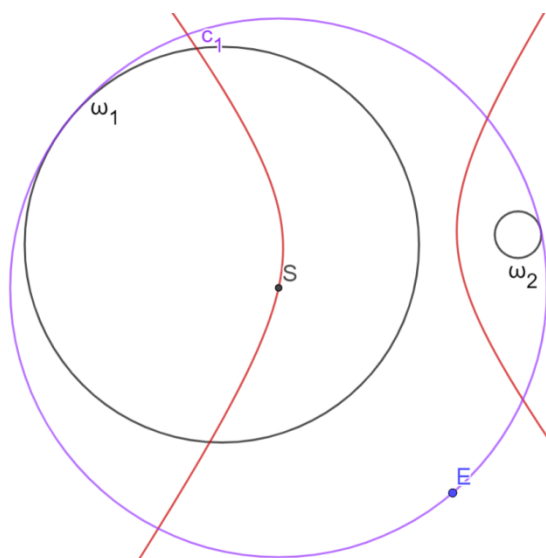


Рисунок 25

Аналогичные рассуждения проводятся для окружностей, которые являются образами внутренних касательных.

Таким образом, методом моделирования в GeoGebra мы убедились в том, что действительно, если $R + r < \rho(A, C)$, то задача имеет четыре решения, и что центры окружностей, удовлетворяющих условиям задачи, принадлежат

гиперболе. Так же установили, в каком случае меняется вид гиперболы и от чего зависит вид касания окружностей.

Однако возникает следующий вопрос: будет ли работать наш алгоритм построения, если взаимное расположение данных окружностей будет другим?

Рассмотрим случай, когда одна окружность находится внутри другой. Сразу отметим, что задача имеет решение только в том случае, если данная точка находится внутри окружности с большим радиусом. Строим касательные к образам данных окружностей по тому же алгоритму, что и в предыдущем случае (см. рисунок 26).

Отобразим полученные касательные относительно окружности инверсии c и получим окружности p' и q' , m' и n' (см. рисунок 27).

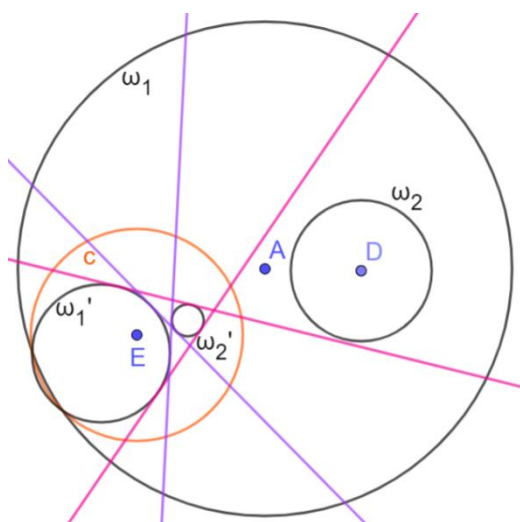


Рисунок 26

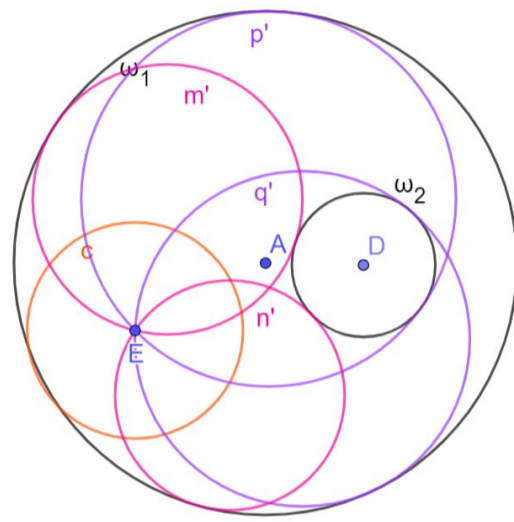


Рисунок 27

Найдем центры этих окружностей и обозначим их разными цветами. Воспользуемся функцией «оставлять след» и посмотрим, по какой кривой двигаются отмеченные точки при изменении положения точки E . В данном случае центры окружностей, являющихся образами и внутренних и внешних касательных, располагаются на эллипсах. Это происходит из-за того, что в первом случае точка E располагалась не внутри окружностей, а во внешней бесконечной области, и ветви гиперболы тоже уходят в бесконечность. В данном же случае точка E может располагаться только внутри окружности

большого радиуса, то есть в ограниченной области – поэтому мы получаем замкнутую кривую (см. рисунок 28).

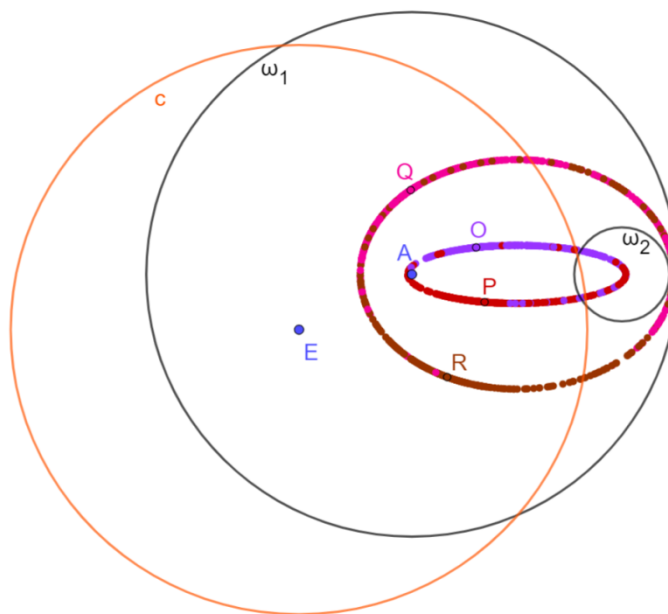


Рисунок 28

Таким образом, наглядно убедились, что если $|R-r| > \rho(A, D)$, то задача имеет также четыре решения.

Рассмотрим еще одно расположение данных окружностей – две данные окружности касаются внешним образом. Сразу можно отметить, что в данном случае искомая окружность может располагаться как во внешней области, так и внутри данных окружностей. Построим внутренние и внешние касательные и отобразим их относительно окружности инверсии (см. рисунок 29).

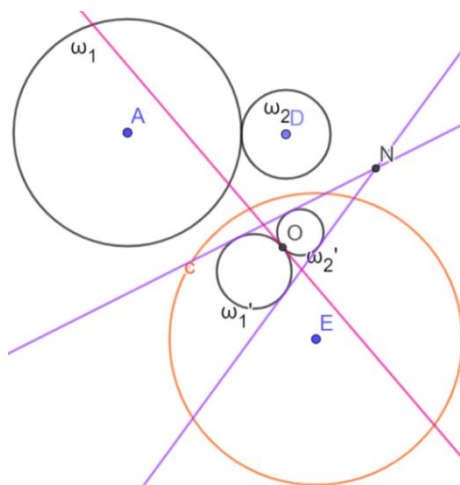


Рисунок 29

Так как окружности касаются, то внутренняя касательная будет единственная, следовательно, получим не четыре решения, как в предыдущих случаях, а три (см. рисунок 30).

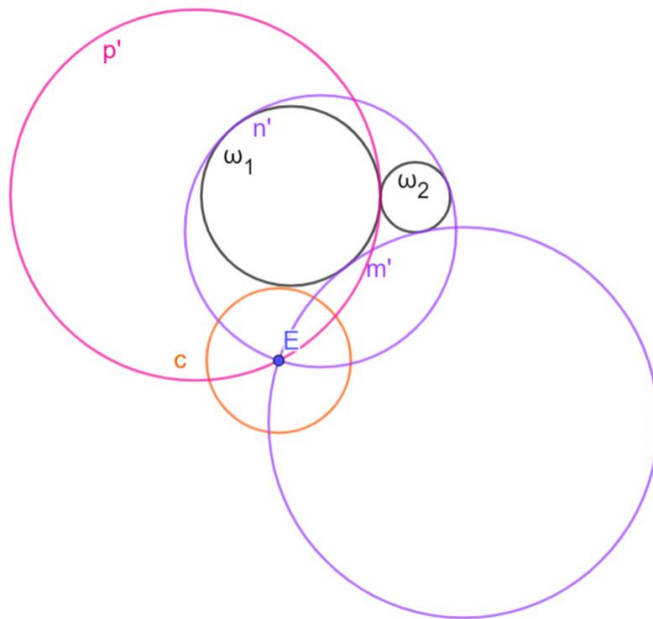


Рисунок 30

Обозначим центры полученных окружностей и проследим, по каким кривым двигаются данные точки. Точка, являющаяся центром окружности — образа внутренней касательной, движется по прямой. Это является следствием того, что если окружность, удовлетворяющая условию задачи находится внутри одной из окружностей, то ее центр будет лежать на прямой, соединяющей центры данных окружностей. Две другие точки располагаются на гиперболе, так как точка E может принадлежать внешней области, а она, как мы отмечали, бесконечна (см. рисунок 31).

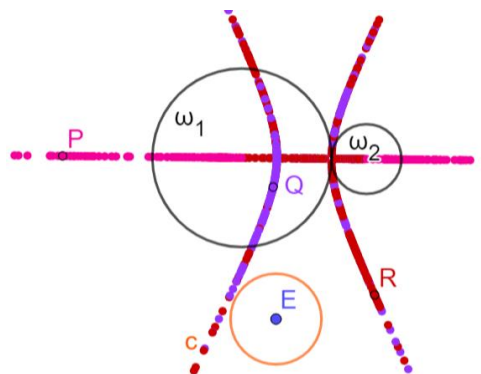


Рисунок 31

Таким образом, если $R + r = \rho(A, D)$, то задача имеет три решения.

Рассмотрим похожий случай – окружности касаются внутренним образом. При таком расположении окружностей искомая окружность может находиться внутри данных окружностей, либо же во внешней области. Ученики на данном этапе уже могут предположить, по каким линиям будут двигаться центры окружностей. Получим по тому же алгоритму нужные нам окружности. Заметим, что в данном случае, наоборот, внешняя касательная единственная (см. рисунок 32).

Отметим центры и посмотрим на траекторию их движения. В данном случае получаем, что если три окружности будут касаться в одной точке, то центр искомой окружности всегда будет лежать на линии центров искомых окружностей, то есть двигаться по прямой. Две другие точки будут двигаться по эллипсу, так как идет внутреннее касание и точка E лежит внутри окружности большего радиуса (см. рисунок 33).

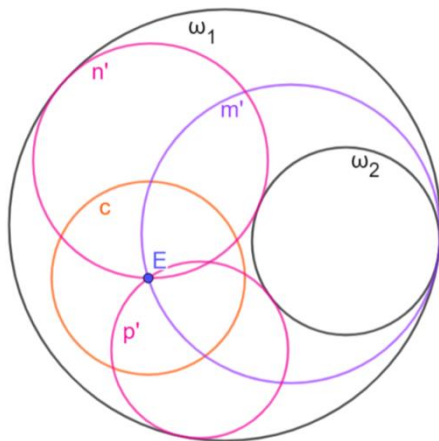


Рисунок 32

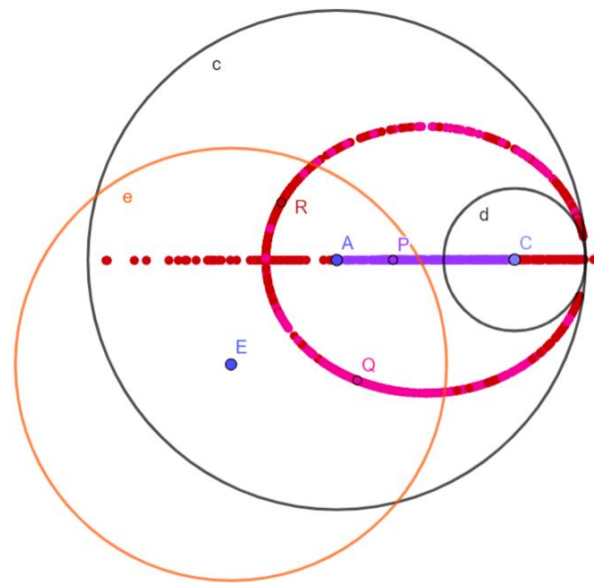


Рисунок 33

Наглядно убедились, что в данном случае, то есть при $|R - r| = \rho(A, D)$ задача имеет три решения.

И еще один вариант расположения окружностей – их пересечение.

Сразу заметим, раз окружности пересекаются, то внутренних касательных не будет. То есть искомая точка может располагаться в области пересечения окружностей, внутри каждой окружности и во внешней области. Ученики могут выдвигать свои гипотезы, к какому результату мы можем прийти. Посмотрим, работает ли наш алгоритм в данной ситуации. Построим внешние касательные и отобразим их относительно окружности инверсии s (см. рисунок 34).

Обозначим центры этих окружностей и посмотрим, какую кривую они образуют при изменении положения точки E . Если центр инверсии находится внутри одной из окружностей, не считая область их пересечения, то центры искомых окружностей двигаются по эллипсу. Если же точка E находится либо в пересечении окружностей, либо во внешней области, то траектория их движения – это гипербола (см. рисунок 35).

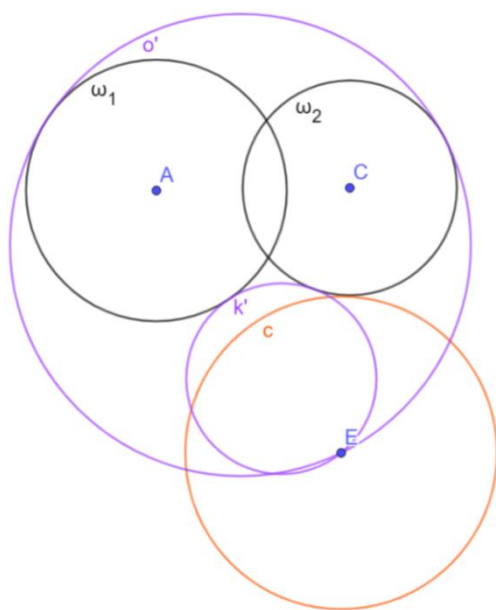


Рисунок 34

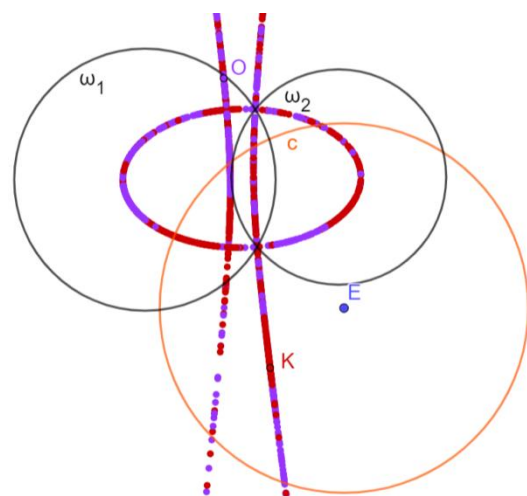


Рисунок 35

В данном случае можно обратить внимание учеников на следующий момент: почему задача имеет решение в точках пересечения окружностей? Можно заметить, что если точка E находится в этих точках, то центры полученных окружностей совпадают с E . это связано с тем, что GeoGebra

Еще один момент, который может заинтересовать учеников: в предыдущих случаях если точка E находилась в ограниченной области, мы получали эллипс. Здесь же, если точка E находится в ограниченной области пересечения окружностей, мы получаем часть гиперболы.

Рассмотрим $|AP - PC| = |(AR - r') - (TC - r')| = |AR - TC| = |R - r|$. Значит, центры таких окружностей лежат на гиперболе с фокусами в точках A и C (см. рисунок 36).

§3. Разработка методических рекомендаций по организации исследовательской деятельности на примере частного случая задачи Аполлония

43

убедились в том, что предложенный нами алгоритм работает при любом расположении данных окружностей. Выделим еще раз алгоритм построения и отметим вопросы, которые помогут ученикам прийти к правильному выводу.

1. Строим данные окружности и отмечаем данную точку E .

Предполагаем, что ученики при решении предложенной задачи уже знакомы с инверсией и имеют представление, при каких случаях задача решается этим методом.

Какое преобразование плоскости можем рассмотреть при таком наборе данных? (Инверсия). Какая окружность будет выступать в качестве окружности инверсии? (Окружность с центром в данной точке).

2. Строим окружность произвольного радиуса с центром в точке E .

3. Отображаем данные окружности относительно построенной окружности.

Здесь ученики могут построить образы данных окружностей через проведение линии центров и построение инверсных точек. Но это займет много времени, поэтому образ одной окружности можно построить описанным выше методом, а затем предложить альтернативный способ – познакомить учеников с функцией GeoGebra – отображение относительно окружности.

4. Строим все общие касательные к окружностям – образам данных окружностей.

Так как у нас исследовательская работа, то целесообразнее сначала построить общие касательные тем способом, где ссылаемся на радиусы окружностей. Затем при исследовании задачи, когда замечаем, что данный способ работает не во всех случаях, сделать вывод о построении общих касательных другим методом.

Если нам нужно построить окружность, которая касается двух данных, то какой математический объект необходимо построить, зная образы данных окружностей так, чтобы обратная инверсия нам дала искомую окружность? (Общую касательную к двум окружностям – образам данных окружностей). А

сколько всего есть общих касательных у двух окружностей? (Две внутренние и две внешние).

5. Отображаем полученные прямые относительно той же окружности, получаем искомые окружности, касающиеся двух данных окружностей и проходящие через данную точку.

На данном этапе у учеников можно спросить, как бы они поступили, если бы решали задачу циркулем и линейкой. Ответ очевиден – построили бы окружность через три точки. Но можно воспользоваться той же функцией GeoGebra – отображение относительно окружности и получить искомую окружность.

Вспомним, при инверсии прямая, не проходящая через центр инверсии переходит в какой математический объект? (Окружность, проходящую через центр инверсии). Через какие точки будет проходить искомая окружность? (Через точки, по которым касательная пересекает окружность инверсии и через данную точку E).

6. Отмечаем центры полученных окружностей и с помощью функции «оставлять след» исследуем траекторию движения этих точек при изменении положения точки E .

На данном этапе ученики уже знакомы с кривыми второго порядка, поэтому сделать вывод о траектории движения точек они смогут. Доказать полученный вывод можно исходя из определения кривых второго порядка.

Какие объекты будем исследовать? (Полученные окружности). Какие дополнительные элементы нужно выделить в решении? (Центры полученных окружностей). Положение какого объекта будем менять? (Положение данной точки E).

7. Исследование задачи при другом расположении искомых окружностей.

Целесообразнее рассматривать варианты расположения данных окружностей в таком порядке, в каком описано во втором параграфе. Подробно

рассмотрев и доказав первый случай, ученики уже смогут выдвигать свои предположения в остальных случаях.

Будет ли работать наш алгоритм, если данные окружности будут расположены по-другому? Какие варианты расположения двух окружностей необходимо рассмотреть? (Две окружности пересекаются, касаются внутренним и внешним образом, одна находится внутри другой). Все ли кривые второго порядка нам удалось получить? (Не получили параболу). Как вы думаете, в каком случае можно получить параболу? (В других частных случаях задачи Аполлония, где есть прямая (она будет директрисой параболы)).

Заключение

Проанализировав литературу и организовав исследовательскую деятельность обучающихся, можно сделать следующий вывод: задачи на построение формируют у учащихся такие исследовательские умения, как умение видеть проблемы, выдвигать гипотезы, делать выводы, доказывать свою точку зрения и т.д. Они позволяют организовать исследовательскую работу учеников, выполняя следующие функции:

1. Развивают пространственное мышление;
2. Позволяют реализовать проблемное обучение;
3. Систематизируют и обобщают знания учеников;
4. Формируют умения, связанные с использованием чертежных инструментов.

В ходе выполнения работы были выполнены следующие виды работ: изучена и структурирована информация по данной теме, проанализированы рабочие программы и школьные учебники, разработаны методические рекомендации по организации исследовательской деятельности на примере частного случая задачи Аполлония.

Решение учащимися частного случая задачи Аполлония, во-первых, знакомит учащихся с возможностями программы GeoGebra, во-вторых, знакомит с другим способом построения общих касательных к двум окружностям и, в-третьих, дает возможность выдвигать предположения и наглядно их доказать или опровергнуть.

Данная задача также подойдет в том случае, когда ученики знакомы с инверсией, но подробно с кривыми второго порядка не работали. Тогда больше внимания уделяется не самой задаче и ее исследованию, а именно определениям, формулам кривых второго порядка и их доказательствам.

Таким образом, все поставленные в выпускной квалификационной работе задачи были решены, цель достигнута.

Изучение рабочих программ и школьных учебников дало выяснить, что исследовательские умения формируются поэтапно, что выражается в готовности и способности выполнять операции, составляющие исследовательскую деятельность.

Можно сделать вывод, что сформулированная мною гипотеза верна, то есть задачи на построение действительно служат средством для организации исследовательской деятельности обучающихся классов с углубленным изучением математики.

Список литературы

1. Андреева Е. В. Задачи на построение как неотъемлемая часть курса геометрии в современной школе // Проблемы и перспективы развития образования в России : науч. библ. 2011. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/zadachi-na-postroenie-kak-neotemlemaya-chast-kursa-geometrii-v-sovremennoy-shkole> (дата обращения: 29. 10. 2023)
2. Беловол И. А. Об организации исследовательской деятельности старшеклассников по математике // Вопросы науки и образования : науч. библ. 2018. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-organizatsii-issledovatel'skoy-deyatelnosti-starsheklassnikov-po-matematike> (дата обращения: 23. 11. 2023)
3. Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Заглавная_страница (дата обращения 24. 12. 2023)
4. Волчкевич М. А. Математическая вертикаль. Геометрия. 7 класс : учеб. М. : Просвещение, 2020. 287 с.
5. Волчкевич М. А. Математическая вертикаль. Геометрия. 8 класс : учеб. М. : Просвещение, 2021. 292 с.
6. Волчкевич М. А. Математическая вертикаль. Геометрия. 9 класс : учеб. М. : Просвещение, 2021. 317 с.
7. Геометрия. 7 класс : учеб. / А. Д. Александров [и др.] ; под ред. А. Д. Александрова. М. : Просвещение, 2013. 176 с.
8. Геометрия. 8 класс : учеб. / А. Д. Александров [и др.] ; под ред. А. Д. Александрова. 4-е изд. М. : Просвещение, 2019. 176 с.
9. Геометрия. 9 класс : учеб. / А. Д. Александров [и др.] ; под ред. А. Д. Александрова. М. : Просвещение, 2014. 175 с.
10. Геометрия. 7 класс : учеб. / М. А. Волчкевич [и др.] ; под ред. И. В. Яценко. М. : Просвещение, 2020. 287 с.

11. Горшкова Л. С., Марина Е. В. Геометрические построения : учеб пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов. 2-е изд., доп. Пенза : Изд-во ПГПУ имени В. Г. Белинского, 2008. 140 с.
12. Математика. Геометрия. 7-9 классы : учеб. / Л. С. Атанасян [и др.] ; под ред. Л. С. Атанасяна. 14-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 416 с.
13. Математика. 5 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.] ; под ред. Г. В. Дорофеева. 12-е изд. М. : Просвещение, 2011. 303 с.
14. Математика. 6 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.] ; под ред. Г. В. Дорофеева. 8-е изд. М. : Просвещение, 2019. 287 с.
15. Математика. 5 класс. часть 1 : учеб. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 3-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 158 с.
16. Математика. 5 класс. часть 2 : учеб. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 3-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 174 с.
17. Математика. 6 класс. часть 1 : учеб. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 3-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 161 с.
18. Математика. 6 класс. часть 2 : учеб. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 3-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 145 с.
19. Погорелов. А. В. Геометрия. 7-9 классы : учеб. 2-е изд. М. Просвещение, 2014. 240 с.
20. Полещук А. С. Знаменитые задачи древности // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании : науч. журн. 2012. № 3. URL: <https://infed.ru/articles/95/> (дата обращения: 15. 10. 2023)
21. Примерная основная образовательная программа основного общего образования : [одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию 15.09.2022]. М. : Институт стратегии развития образования, 2022. 1418 с.
22. Рамазанова К. Ш., Тимербаева Н. В. Методы решения конструктивных задач на плоскости : учеб. пособие. Казань : Изд-во Казанский федеральный университет, 2013. 70 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«11» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Тугушевой Мадины Ильясовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Задачи на построение как средство организации исследовательской
деятельности обучающихся классов с углубленным изучением математики»

Утверждена приказом по Университету от «26.09» 2023 г. № 0971 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «20» 05 2024 г.

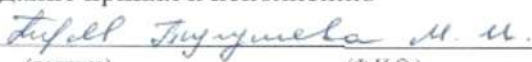
КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение психолого-педагогической литературы по теме исследования	Октябрь, 2023	выполнено
2.	Изучение возможностей анимации программы Geogebra	Ноябрь, 2023	выполнено
3.	Изучение методов решения задачи Апполония	Декабрь, 2023	выполнено
4.	Исследование конструкции, полученной на основе частного случая задачи Апполония в Geogebra	Февраль, 2024	выполнено
5.	Доказательство полученных фактов	Март, 2024	выполнено
6.	Разработка методических рекомендаций по организации исследовательской деятельности школьников	Апрель, 2024	выполнено
7.	Оформление текста работы и подготовка презентации	Май, 2024	выполнено

Дата выдачи задания «18» 09 2023 г.

Руководитель  Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Любимова М.М.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Тугушевой Мадины Ильясовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Тугушева Мадина Ильясовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Задачи на построение как средство организации исследовательской деятельности обучающихся классов с углубленным изучением математики» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
20.05.2024
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 20.05.2024
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  ПОДПИСЬ М.В. Сорокина
И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:
**«Задачи на построение как средство организации исследовательской
деятельности обучающихся классов с углубленным изучением
математики»**
студентки 4 курса Тугушевой Мадины Ильясовны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Сорокина М.В.

Отчет о проверке

Автор: Тугушева Мадина Ильясовна
Название документа: черновой вариант

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна
Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
31,2%

Оригинальность:
67,5%

Цитирование:
1,3%

Самодитирование:
0%

«Совпадения», «Цитирование», «Самодитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаемыми в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самодитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самодитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или редактором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самодитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самодитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированию относятся также шаблонные формы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определяющим корректности и пропорциональности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 51

Количество страниц: 49

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Символов в тексте: 56152

Дата проверки: 20.05.2024 20:36:02

Слов в тексте: 7285

Дата корректировки: Нет

Число предложений: 515

20.05.2024

Сорокина М.В.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Задачи на построение как средство организации
исследовательской деятельности обучающихся классов с углубленным
изучением математики»
студентки Тугушевой Мадины Ильясовны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 20ФПМ1

В настоящее время в образовании уделяется внимание развитию способностей обучающихся к исследовательской деятельности посредством приобщения к ней. Активная деятельность учителя при организации исследовательской деятельности школьников имеет важное значение в связи с реализацией федерального государственного образовательного стандарта, в котором отмечается необходимость «формирования компетенций обучающихся в области использования исследовательской деятельности»

Выпускная квалификационная работа Тугушевой М.И. посвящена изучению возможностей организации исследовательской деятельности школьников в рамках кружковых занятий по геометрии. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Первая глава работы носит теоретический характер. В ней рассмотрены понятие и отличительные особенности исследовательской деятельности, структурные компоненты исследовательской деятельности обучающихся, основные функции учебного исследования. Также дается характеристика задач на построение.

В следующей главе рассматривается конкретный пример организации исследовательской деятельности школьников с использованием программы GeoGebra. На конкретной геометрической конструкции представлен план исследования и доказательство открытых фактов. Также составлен рабочий лист для серии кружковых занятий.

Работа Тугушевой М.И. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации научно-исследовательской деятельности и подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина