

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

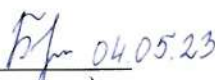
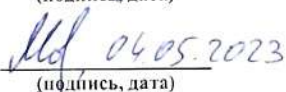
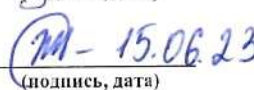
Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

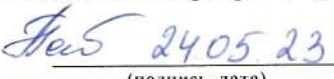
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

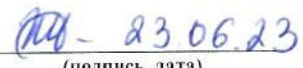
«Тригонометрия в олимпиадных задачах»

Студент	<u> 04.05.23</u> (подпись, дата)	<u>Бородина Валерия Александровна</u> (ФИО полностью)
Руководитель	<u> 04.05.2023</u> (подпись, дата)	<u>Монахова О. А.</u> (фамилия, инициалы)
Нормоконтролер	<u> 15.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е. Г.</u> (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.23 № 12)

Заведующий кафедрой	<u> 24.05.23</u> (подпись, дата)	<u>Паньженский В. И.</u> (фамилия, инициалы)
---------------------	---	---

Работа защищена с отметкой отлично (протокол заседания ГЭК от 23.06.23 № 10)

Секретарь ГЭК	<u> 23.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е. Г.</u> (фамилия, инициалы)
---------------	---	---

Пенза 2023

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические аспекты обучения решению тригонометрических задач олимпиадного уровня в старшей школе.....	7
1.1 Роль интеллектуальных состязаний в системе российского образования. Перечень олимпиад по математике, утверждённых Министерством науки и высшего образования РФ.....	7
1.2 Линия тригонометрии в перечневых олимпиадах по математике: классификация и основные методы решения тригонометрических олимпиадных задач.....	15
Глава 2. Содержательно-методическое обеспечение обучения школьников 10-11 классов решению тригонометрических задач олимпиадного уровня.....	40
2.1 Методические разработки «Нетривиальная тригонометрия» в помощь педагогам, осуществляющим олимпиадную подготовку в старшей школе, и указания по проведению занятий с их использованием.....	40
2.2 Методические рекомендации по организации олимпиадной подготовки обучающихся старших классов.....	81
Заключение.....	86
Список использованных источников.....	90

Введение

С внедрением Федеральных государственных образовательных стандартов в содержание образования российских школ начался плавный переход от традиционного подхода в определении компонентов дидактической системы к личностно-ориентированному обучению. Фундаментом новой образовательной парадигмы послужило признание неповторимости, самобытности личности каждого ученика, рассмотрение его не как реализатора определенных моделей поведения и носителя социальных функций, зафиксированных в общественном заказе, а в качестве индивида, наделенного неповторимым жизненным опытом.

В рамках такого подхода содержание образования, методы и средства обучения структурируются таким образом, что дают ученику возможность раскрыть и реализовать в полной мере свой потенциал. Целью обучения становится не вооружение обучающегося суммой теоретических знаний, а создание необходимых условий для развития индивидуальных черт ребенка и их последующего преобразования в социально значимые формы поведения, адекватные выработанным обществом нормам.

Одной из наиболее эффективных форм педагогической работы, позволяющих достигнуть заявленной цели, являются массовые интеллектуальные состязания. Предметные олимпиады и конкурсы становятся осознанной стратегией формирования образовательной траектории обучающихся, которые обнаруживают высокий уровень развития способностей в соответствующей предметной области [12].

В связи с вышесказанным педагогу имеет смысл обратить внимание старшеклассников, испытывающих познавательный интерес в отношении математической науки, на математические олимпиады.

В свою очередь линия тригонометрии традиционно включается в кодификатор основных тем олимпиадных заданий по математике, поскольку изучение тригонометрии требует овладения большим количеством нетривиальных методов решения задач и тем самым способствует обогащению математической культуры обучающихся.

Олимпиадная подготовка школьников должна быть последовательной, упорядоченной, всесторонней и вариативной, однако во многих российских школах она имеет узкую направленность (педагоги стремятся подготовить детей к определённым видам олимпиад) и сводится к разбору олимпиадных заданий прошлых лет. Таким образом, **проблема** исследуемой темы заключается в противоречии между дидактическими принципами, предъявляемыми к системе олимпиадной подготовки школьников, и настоящим положением дел.

Практическое следование вышеизложенным идеям перед системой образования ставит вопрос о недостаточной разработке методологической базы обучения школьников 10-11 классов решению тригонометрических задач олимпиадного уровня. Данный факт обуславливает **актуальность** работы на тему: «Тригонометрия в олимпиадных задачах».

Объект исследования: подготовка обучающихся 10-11 классов к участию в математических олимпиадах.

Предмет исследования: процесс обучения решению тригонометрических задач олимпиадного уровня в старшей школе.

Цель исследования: разработка методических материалов по решению нестандартных тригонометрических задач в помощь педагогам, осуществляющим олимпиадную подготовку обучающихся старших классов.

Чтобы реализовать поставленную цель, необходимо решить **ряд задач:**

- 1) Определить место и роль интеллектуальных состязаний в системе российского образования.

- 2) Произвести анализ заданий из архивов математических олимпиад, включенных в Перечень олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год.
- 3) Выявить типы тригонометрических задач, в разное время предлагаемых участникам перечневых олимпиад, методы и приемы их решения.
- 4) Разработать комплексы нестандартных тригонометрических задач, описать способы их решения и изложить методические указания педагогам по проведению занятий с использованием данных материалов.
- 5) Сформулировать методические рекомендации по организации олимпиадной подготовки обучающихся старших классов.

Новизна исследования состоит, во-первых, в распределении тригонометрических задач, в разное время предлагаемых участникам перечневых олимпиад, по группам на основе требования, выраженного в их условии, а во-вторых, в разработке методических материалов по решению нестандартных тригонометрических задач.

Теоретическая значимость исследования заключается в разработке методических рекомендаций по организации олимпиадной подготовки обучающихся старших классов.

Методические материалы, представленные в данной работе, могут быть использованы в практической деятельности педагогов. В частности, подробные разъяснения решений и указания по работе с задачными листками удобно использовать в виде опорного конспекта для факультативного занятия. Листочки с задачами, решения и комментарии к ним могут быть также полезны ученикам, которые стремятся к углублению собственных знаний и предпочитают заниматься самостоятельно. Вышесказанное обосновывает **практическую значимость** работы.

В соответствии с поставленными задачами определена и структура выпускной квалификационной работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

В первой главе работы раскрывается роль интеллектуальных состязаний в системе российского образования, дается подробный обзор математических олимпиад, включенных в Перечень олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год. Описывается классификация олимпиадных тригонометрических задач, устанавливается соответствие между выявленными типами задач и преобладающими методами их решения.

Вторая глава работы посвящена вопросам содержательно-методического обеспечения обучения школьников 10-11 классов решению тригонометрических задач олимпиадного уровня. Предлагаются методические разработки «Нетривиальная тригонометрия» по решению нестандартных тригонометрических задач, формулируются методические указания по организации таковой с использованием разработанных материалов.

В заключении подводятся итоги и формулируются общие выводы.

Глава 1. Теоретические аспекты обучения решению тригонометрических задач олимпиадного уровня в старшей школе

1.1 Роль интеллектуальных состязаний в системе российского образования. Перечень олимпиад по математике, утверждённых Министерством науки и высшего образования РФ

Традиционно к участию в интеллектуальных состязаниях привлекаются обучающиеся, которые обнаруживают высокий уровень развития специальных способностей. Такой подход обусловлен тем, что одаренным детям в большей степени, чем их сверстникам, свойственно стремление к познанию, исследованию окружающего мира [20].

Участие школьников в олимпиадах и конкурсах способствует расширению их кругозора, развитию эрудиции и логического мышления, а также умения нестандартно мыслить и творчески подходить к принятию решений. Участникам олимпиад недостаточно умения действовать по образцу и обладать массивом предметных знаний – они должны уметь правильно применять их в нетипичных, непривычных ситуациях.

Олимпиады и конкурсы задают импульс к самосовершенствованию, непрерывному творческому поиску. Период отрочества же является наиболее благоприятным для обогащения творческого потенциала личности, ведь именно в этом возрасте школьники начинают подвергать сомнению устоявшиеся взгляды и ищут новые пути самоутверждения [16].

Важность развития творческой активности школьников велика, поскольку они зачастую инфантильны и сомневаются в своих возможностях, а круг их интересов ограничен. Интеллектуальные и творческие состязания развивают воображение, фантазию, благодаря чему обучающиеся оказываются вовлеченными в процесс обучения и прилагают усилия для освоения нового.

Предметные олимпиады позволяют одаренным ученикам сравнить степень сформированности собственных знаний и умений в определенной предметной области с уровнем подготовки своих сверстников. Выявленные упущения и ошибки становятся объектом дальнейшей работы, а полученный опыт – стимулом к интеллектуальному и личностному росту.

Наиболее значимы в профессиональном плане интеллектуальные массовые состязания для учеников среднего звена. Участие старшеклассников в профильных конкурсах способствует их осознанному выбору направления профессиональной деятельности и определению траектории дальнейшего развития в целом.

Ученик, готовящийся принять участие в профильной олимпиаде, увеличивает свои шансы на поступление в вуз своей мечты. Кроме того, предметные олимпиады и конкурсы, проводимые в тестовом формате с последующей компьютерной обработкой результатов, готовят к такому же формату проверки знаний на государственном экзамене. Из года в год школьники охотно принимают участие в международных конкурсах, задания которых представлены в виде теста. К ним относятся следующие конкурсы:

- «Кенгуру» (математика);
- «Русский медвежонок» (языкознание);
- «КИТ» (информатика);
- «Британский Бульдог» (английский язык);
- «Золотое руно» (история культуры);
- «Пегас» (литература);
- «Человек и природа» (естествознание).

Каждый ученик получает сертификат участника – дополнение к портфолио индивидуальных образовательных достижений.

Некоторые олимпиады считаются более престижными, и именно на них следует акцентировать внимание выпускников. Так, ежегодно Министерство науки и высшего образования Российской Федерации утверждает *Перечень*

олимпиад школьников и их уровней. Согласно критериям присвоения уровней олимпиадам, включенным в данный Перечень, предусматривается следующее ранжирование олимпиад:

- олимпиады I уровня (не менее 30 субъектов РФ, представители которых приняли участие в олимпиаде; не менее 35% участников невыпускных классов от общего числа участников; не менее 70% оригинальных нестандартных задач);
- олимпиады II уровня (не менее 20 субъектов РФ, представители которых приняли участие в олимпиаде; не менее 30% участников невыпускных классов от общего числа участников; не менее 50% оригинальных нестандартных задач);
- олимпиады III уровня (не менее 10 субъектов РФ, представители которых приняли участие в олимпиаде; не менее 25% участников невыпускных классов от общего числа участников; не менее 30% оригинальных нестандартных задач).

Победа в перечневых олимпиадах способствует не только профессиональному самоопределению выпускника, но и гарантирует абитуриенту преимущество при поступлении в выбранный вуз (например, возможно поступление без вступительных испытаний или автоматическое получение максимального балла ЕГЭ по предмету, соответствующему профилю олимпиады). Но нужно отметить, что каждый вуз самостоятельно ранжирует соревнования и устанавливает соответствие между профильными олимпиадами, вступительными испытаниями и специальностями [15].

В Перечне олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год перечислены 278 соревнований (из них – 81 олимпиада) по следующим профилям: астрономия, биология, генетика, география, геология, гуманитарные и социальные науки, дизайн, естественные науки, журналистика, инженерные науки, иностранный язык, информатика, информационная безопасность, история, лингвистика, литература, математика, обществознание, политология,

право, психология, рисунок, робототехника, русский язык, социология, теория и история музыки, физика, филология, философия, финансовая грамотность, химия, экология, экономика [14].

В связи с нарастанием информационного потока на протяжении последних лет приоритетную роль в жизни общества заняла базовая междисциплинарная наука – *математика*, и наблюдается усиление роли математического моделирования. Развитое логическое мышление исследователей позволяет устанавливать истинные количественные отношения и пространственные формы действительного мира.

В связи с вышесказанным имеет смысл обратить внимание старшеклассников аналитического склада ума на перечневые олимпиады школьников по техническим и точным наукам. Остановимся на характеристике перечневых интеллектуальных состязаний по математическому профилю.

Высшая школа экономики отвечает за проведение Всероссийской олимпиады школьников «*Высшая проба*». К участию допускаются обучающиеся 7-11 классов. Отборочный этап олимпиады проходит дистанционно: в назначенное время участники входят в систему и выполняют тестовые задания закрытого типа. После подведения итогов победители первого этапа приглашаются на региональные площадки. Для решения заданий необходим нестандартный подход.

Похожим образом устроены такие перечневые математические олимпиады, как *Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций*, *Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников*, *Олимпиада Курчатов*, *Олимпиада Юношеской математической школы*, *Открытая олимпиада школьников*, *Университетская олимпиада школьников «Бельчонок»*.

Московская олимпиада школьников ежегодно проводится в МГУ имени М. В. Ломоносова вплоть с 1935 года. Организационный комитет олимпиады в разные годы возглавляли крупнейшие математики, в числе которых

основоположник современной теории вероятности А. Н. Колмогоров и автор работ в топологии, теоретической механики В. И. Арнольд. К участию в олимпиаде допускаются обучающиеся 5-11 классов. Чтобы участвовать в очном финале, нужно пройти онлайн-отбор. Для 6-7 классов проводится олимпиада «Математический праздник».

Отдельно проводимая МГУ многопрофильная олимпиада «*Ломоносов*» проходит под девизом «*via scientiarum*», что в переводе с латыни означает «путь к знаниям». Данная олимпиада включает два независимых тура. Школьник может принять участие в обоих турах, но в этом случае ему необходимо уведомить членов комиссии о том, какую из работ следует проверить.

Турнир имени М. В. Ломоносова представляет собой ежегодное соревнование по математике, физике, астрономии и другим наукам. Попробовать свои силы в состязании могут ученики 6-11 классов. Особенностью Турнира является свобода перемещения участников: в течение пяти отведенных часов школьники могут переходить из одной аудитории в другую и выполнять олимпиадные задания по любому выбранному предмету. Исключение – одиннадцатиклассники, все задания они выполняют в одной аудитории.

Олимпиада «*Покори Воробьевы горы!*» проводится МГУ совместно с издательским домом «Московский Комсомолец». Отборочный этап длится около месяца, и школьники 5-9 классов могут выполнять задания в течение всего этого времени. Для учащихся 10-11 классов на это отведена сессия (семь суток). Показавшие лучшие результаты ученики приглашаются на очное состязание, причем для иногородних участников предусмотрен льготный проезд до места проведения, если на такую площадку их распределили организаторы.

Ведущим техническим вузом страны МФТИ проводится олимпиада «*Физтех*». Онлайн-этап проходит каждые выходные в течение месяца. Еженедельно участники могут предпринимать новую попытку в решении

олимпиадных заданий по математике и физике. Для получения права принять участие в заключительном этапе достаточно одной успешной попытки.

Всесибирская открытая олимпиада школьников проводится под эгидой Президиума Сибирского отделения Российской академии наук и является одной из первых крупных олимпиад СССР – она берет свое начало в 1962 году. Тогда олимпиада была физико-математическая, но впоследствии в список предметов добавились химия, биология, информатика и астрономия. Для участия в финале состязания необходимо стать призером минимум одного из двух предварительных этапов, проводимых как дистанционно, так и очно.

В ряде городов России (Нижем Новгороде, Сарове, Ярославле, Белгороде, Пензе, Красноярске, Екатеринбурге, Оренбурге, Барнауле, Симферополе, Воронеже, Томске, Ставрополе, Калининграде и Казани) проводится турнир *«Будущие исследователи – будущее науки»*. Отборочный этап предусматривает решение контрольных заданий по выбранному предмету и проведение исследовательской работы. На заключительном этапе проходит предметная олимпиада и защита проектов.

Научно-образовательное соревнование *«Шаг в будущее»* включает подготовку научно-исследовательской работы по многим направлениям, в том числе по инженерному делу, компьютерному моделированию и графике, программированию, математике и физике.

Межрегиональная олимпиада школьников им. И. Я. Верченко по математике и криптографии может быть рекомендована ученикам, которые проявляют интерес к способам обеспечения информационной безопасности (в частности, к сохранению конфиденциальности данных).

Обучающимся, способным к физике, предлагается принять участие в олимпиаде *«Шаг в будущее. Космонавтика»* с расширенной программой посещения ведущих предприятий ракетно-космической отрасли, либо в отраслевой физико-математической олимпиаде школьников *«Росатом»*.

Финансовым университетом при Правительстве Российской Федерации проводится многопрофильная олимпиада школьников *«Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»*. Победители и призеры олимпиады, поступившие на очное обучение в профессиональные организации и учреждения высшего образования, получают право на присуждение Гранта Президента Российской Федерации.

В Санкт-Петербурге традиционно проводится *олимпиада школьников Санкт-Петербургского государственного университета*. Спектр дисциплин, который охватывает эта олимпиада, один из самых больших во всем олимпиадном мире. Целью проведения олимпиады заявлено выявление и развитие творческих способностей обучающихся через включение их в научно-исследовательскую деятельность.

Особого внимания заслуживает *Санкт-Петербургская олимпиада школьников*. Она проводится с 1934 года и считается старейшим в России математическим соревнованием для школьников. Особенность олимпиады – проведение заключительных туров в устном формате (участники не только выполняют решение предложенных задач, но и разъясняют членам жюри ход своих мыслей, беседуя с ними).

В числе олимпиад, вошедших в Перечень на 2022/23 учебный год, *Межрегиональные предметные олимпиады федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*. Они ориентированы на учеников, осваивающих образовательные программы среднего общего образования. Победители и призеры очного тура предшествующего года могут принять участие в заключительном этапе олимпиады по соответствующему предмету, минуя отборочный этап.

Отдельно следует рассмотреть олимпиаду, проводимую на международном уровне – *«Innopolis Open»*. За последние семь лет ее участниками стали более 60 тысяч детей из регионов России и более полусотни

стран. Олимпиада «Innopolis Open» проводится на базе инновационного Университета Иннополис, ориентированного на мировые стандарты подготовки в сфере IT-технологий и робототехники.

В более чем 30 странах мира дважды в год (осенью и весной) проводится математическая олимпиада «*Турнир городов*». Предусмотрен очный формат решения задач, причем участникам засчитывают баллы только за три наиболее сложных задачи, с которыми им удалось справиться. Для показавших высочайшие результаты участников организуется Летняя математическая конференция Турнира городов.

В последние годы набирает популярность сетевая социально-педагогическая программа «Формула единства», предоставляющая возможность школьникам из разных регионов России получить дополнительное предметное образование. Желающие могут стать участниками дистанционных кружков по философии, русскому языку, программированию или посещать их очно (в Санкт-Петербурге, Карелии, Архангельской области). Участники очных кружков получают право на льготную путевку смены лагеря «Формула единства». Для одаренных детей проводится объединенная международная олимпиада «*Формула единства*»/ «*Третье тысячелетие*».

Перед призерами и победителями перечневых олимпиад и конкурсов открываются новые перспективы, но, чтобы занять почетное место на пьедестале, требуется усердная длительная подготовка.

1.2 Линия тригонометрии в перечневых олимпиадах по математике: классификация и основные методы решения тригонометрических олимпиадных задач

Тригонометрические функции являются первыми трансцендентными функциями, изучаемыми в школьном курсе математики. Их место и роль определяются следующими обстоятельствами:

- тригонометрические функции дают замечательный вычислительный аппарат для решения разнообразных задач планиметрии и стереометрии;
- геометрические образы тригонометрических функций позволяют продемонстрировать важнейшие свойства функций: периодичность, четность и нечетность, ограниченность, монотонность и т. д.;
- тригонометрические функции дают обучающимся возможность совершенствовать навыки тождественных преобразований;
- знакомство с тригонометрическими функциями способствует расширению знаний школьников об уравнениях и неравенствах, которые, в свою очередь, выступают инструментом решения многих практико-ориентированных задач;
- введение тригонометрических функций позволяет реализовать практическую направленность курса математики, поскольку они применяются для измерительных работ на местности и являются моделью многих периодических процессов (биение сердца, гармонические колебания, звуковые волны и т.д.) [1].

Задания по тригонометрии включены в раздел олимпиадной математики, поскольку изучение тригонометрии требует овладения большим количеством нетривиальных методов решения задач и тем самым способствует развитию математической культуры школьников.

Поскольку основной объем изучаемого материала по тригонометрии приходится на долю 10 класса, *тригонометрические задания преобладают в олимпиадах, ориентированных на учеников 11 классов.*

Анализ тригонометрических задач из архивов перечневых олимпиад по математике показал, что на отборочных этапах участникам обычно предлагаются *задания повышенного уровня сложности, соответствующие школьной программе, а на заключительных – нестандартные задачи.*

От школьной задачи повышенного уровня сложности нестандартную задачу отличают следующие признаки:

- 1) естественность и внешняя, зачастую обманчивая простота формулировки условия (осмысление условия предполагает раскрытие авторской идеи с применением математической теории);
- 2) отсутствие шаблона решения (алгоритмы и правила могут служить для выявления этапов решения задачи, но подвести нестандартную задачу под алгоритм целиком нельзя);
- 3) обращение к нетривиальным приемам решения уравнений и неравенств, изучение которых не предусмотрено в учебной программе.

Детальное изучение архивов перечневых математических олимпиад позволило произвести классификацию олимпиадных тригонометрических задач и вывести методы решения заданий, относящихся к одному типу.

I. Задания на установление свойства тригонометрической функции, заданной аналитическим способом: периодичности, четности (нечетности), наибольшего и наименьшего значения.

Наиболее часто в олимпиадных задачах данного типа необходимо сделать замену и рассмотреть функцию новой переменной.

Пример 1.1 («Будущие исследователи – будущее науки», заключительный этап, 2021 год, 11 класс). Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$.

Решение:

Тригонометрические функции, обратные синусу и косинусу, связаны известным соотношением: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. Выразив из данного выражения второе слагаемое, получим: $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ (1).

Подставим (1) в уравнение заданной функции. Тогда $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$ перепишется в виде $y = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) (\arcsin(x)) = \frac{\pi}{2} \arcsin(x) - (\arcsin(x))^2$.

Осуществим замену: $\arcsin(x) = k$ и рассмотрим квадратичную функцию $y(k) = \frac{\pi}{2}k - k^2$. Графиком ее является парабола. Так как старший коэффициент меньше нуля, то ветви параболы направлены вниз. Это означает, что наибольшего значения функция $y(k)$ достигает в вершине параболы, которую можно найти по формуле $k_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 \cdot (-1)} = \frac{\pi}{4}$. Соответственно, $x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$.

Множество значений $k = \arcsin(x)$ составляет отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому для того, чтобы найти наименьшее значение функции $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$, необходимо в уравнение функции подставить крайнее значение аргумента из данного промежутка: при $k = -\frac{\pi}{2}$ находим $x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, откуда $y = \arcsin(-1) \cdot \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}$. На правой границе (при $k = \frac{\pi}{2}$) $x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, тогда $y = \arcsin(1) \cdot \arccos(1) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$.

Мы убедились, что наименьшее значение функция $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$ принимает на левой границе отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi^2}{2}$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi^2}{16}$, $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi^2}{2}$.

Таким образом, рассмотренная задача была сведена к рассмотрению квадратичной функции и определению ее наибольшего и наименьшего

значений на отрезке, соответствующем множеству значений замененного в данном случае $\arcsin(x)$.

Но для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке бывает более удобен аппарат дифференциального исчисления (при условии, что рассматриваемая функция непрерывна и дифференцируема на этом промежутке) [19].

Пример 1.2 («Высшая проба», заключительный этап, 2011 год, 11 класс).
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$.

Данная задача любопытна уже тем, что в рассмотрение берется функция, представляющая собой композицию элементарной функции со сложными функциями. Вполне применим алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной. Тогда задача может быть сведена к решению системы из трех уравнений, одно из которых является простейшим. Но для решения остальных требуется метод оценки.

Решение:

Функция $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$ непрерывна и дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$. Исследуем ее с помощью производной:

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin(\cos(\cos x)).$$

Найдем критические точки, решая уравнение $f'(x) = 0$:

$$-\sin x \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin(\cos(\cos x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin(\cos x) = 0 \\ \sin(\cos(\cos x)) = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы относится к простейшим тригонометрическим уравнениям: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решение оставшихся двух уравнений системы требует оценки: $\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $|\cos a| \leq 1$, можно сделать вывод, что $n = 0$. Тогда $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично: $\sin(\cos(\cos x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(\cos x) = \pi t, t \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $|\cos a| \leq 1$, можно сделать вывод, что $t = 0$. Тогда $\cos(\cos x) = 0$. Значит,

$\cos x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $|\cos a| \leq 1$, можно сделать вывод, что $l = 0$. Значит, $\cos x = \frac{\pi}{2}$. Так как $\frac{\pi}{2} > 1$, то это уравнение не имеет решения.

Таким образом, система имеет два решения:

$$\begin{aligned}x_1 &= \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\x_2 &= \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Значения функции $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$ в точках x_1 и x_2 равны $\cos(\cos 1)$ и $\cos 1$ соответственно.

Поскольку $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\cos 1) > \cos 1$.

Таким образом, $\cos(\cos 1)$ – наибольшее значение, $\cos 1$ – наименьшее.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \cos(\cos 1)$, $y_{\text{наим}} = \cos 1$.

II. Вычисление значения тригонометрического выражения.

Доказательство тригонометрических тождеств.

Кроме основных тригонометрических тождеств, формул двойного и половинного аргумента, суммы (разности) аргументов функции, суммы (разности) одноименных функций, формул понижения степени, формул приведения и вычисления обратных тригонометрических функций, участникам олимпиад полезно знать формулы тройного аргумента, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (разность), формулу дополнительного угла, владеть универсальной тригонометрической подстановкой [18].

Задания такого типа соответствуют школьной программе, но имеют повышенный уровень сложности.

Пример 2.1 (объединенная межвузовская математическая олимпиада, заключительный этап, 2020 год, 11 класс). Вычислите: $tg\left(\frac{\pi}{43}\right)tg\left(\frac{2\pi}{43}\right) + tg\left(\frac{2\pi}{43}\right)tg\left(\frac{3\pi}{43}\right) + \dots + tg\left(\frac{k\pi}{43}\right)tg\left(\frac{(k+1)\pi}{43}\right) + \dots + tg\left(\frac{2019\pi}{43}\right)tg\left(\frac{2020\pi}{43}\right)$.

Сложность у участников возникает с тем, чтобы догадаться, как представить произведение тангенсов. В остальном данная задача не требует

знаний, выходящих за рамки школьной программы: достаточно знать формулу разности тангенсов и правило приведения.

Решение:

Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ выразим произведение тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - 1.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{43}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{43}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43} - \frac{k\pi}{43}\right)} - 1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{43}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{43}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{43}\right)} - 1.$$

Складывая все эти равенства для всех k от 1 до 2019 получаем, что выражение из условия равно

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2020\pi}{43}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{43}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{43}\right)} - 2019 \quad (2).$$

Заметим, что $\operatorname{tg}\left(\frac{2020\pi}{43}\right) = \operatorname{tg}\left(47\pi - \frac{\pi}{43}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{43}\right)$, а значит, (2) равняется -2021 .

Ответ: -2021 .

При решении многих задач важно проявить не только внимательность, но и находчивость.

Пример 2.2 (объединенная межвузовская математическая олимпиада, отборочный этап, 2020 год, 11 класс). Вычислите значение выражения $2\arctg 3 + \arcsin \frac{3}{5}$.

Как и большинство задач отборочных туров, данная задача посильна каждому ученику, знающему основные тригонометрические формулы. В решении раскрыт довольно распространенный прием вычисления значения тригонометрического выражения: рассматривается тригонометрическая функция и ищется ее значение в точке, соответствующей значению выражения. Решение тригонометрического уравнения в данном случае требует оценки [8].

Решение:

Вычислим тангенс суммы $\operatorname{tg}\left(2\arctg 3 + \arcsin \frac{3}{5}\right)$, используя известную формулу тригонометрии.

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arcsin}\frac{3}{5}\right) = \frac{\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3) + \operatorname{tg}(\operatorname{arcsin}\frac{3}{5})}{1 - \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcsin}\frac{3}{5})} \quad (3).$$

Применив формулу тангенса двойного угла и воспользовавшись тем, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) = x$, получим:

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1 - (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3))^2} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Сложность у ученика, не знающего формулу, может возникнуть с нахождением $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsin}\frac{3}{5}\right)$. Чтобы справиться с затруднением, нужно обратиться к определению синуса и теореме Пифагора.

Чтобы установить значение $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsin}\frac{3}{5}\right)$, необходимо рассмотреть прямоугольный треугольник $\triangle ONP_\alpha$ с прямым углом $\angle ONP_\alpha$ на единичной окружности (рисунок 1).

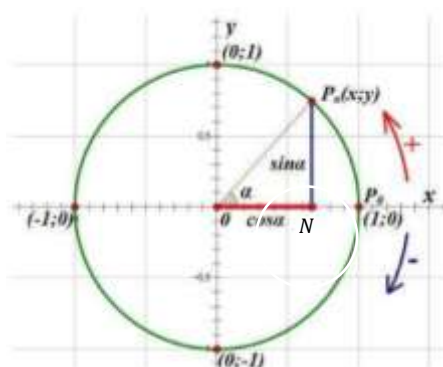


Рисунок 1 – Определение функции $y = \sin \alpha$

Нетрудно установить, что углу $\angle OP_\alpha N$ соответствует $\operatorname{arcsin}\frac{3}{5}$, либо $P_\alpha N = \frac{3}{5}$. Гипотенуза $OP_\alpha = 1$ как радиус единичной окружности. По теореме Пифагора находим длину второго катета: $ON = \sqrt{P_\alpha O^2 - P_\alpha N^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{tg}(\angle OP_\alpha N) = \frac{\sin \angle OP_\alpha N}{\cos \angle OP_\alpha N} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$. Другими словами, углу $\angle OP_\alpha N$ соответствует $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsin}\frac{3}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

Подставим найденные значения $2\operatorname{arctg}$ и $\operatorname{arcsin}\frac{3}{5}$ в формулу (3):

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arcsin}\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4}}} = 0.$$

Известно, что решением уравнения $\operatorname{tg}x = 0$ является множество $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. По определению, $0 < \operatorname{arcsin}\frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \operatorname{arctg}3 < \frac{\pi}{2}$.

Тогда $2 \cdot 0 - 0 < 2\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arcsin}\frac{3}{5} < 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$, или $0 < 2\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arcsin}\frac{3}{5} < \frac{3\pi}{2}$. Учитывая эти два условия, заключаем, что выражение равно π .

Ответ: π .

Следует также обратить внимание учеников на приемы доказательства тригонометрических тождеств:

- сведение левой части тождества к правой части (и наоборот);
- сведение обеих частей тождества к одинаковому виду;
- сведение к нулю разности частей тождества.

Чаще всего используется сведение обеих частей тождества к одинаковому виду. Например, чтобы доказать тождество $\operatorname{arcsin}(x) + \operatorname{arccos}(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcctg}(x)$, необходимо показать, что сумма слагаемых в обеих частях равенства одинакова и равна $\frac{\pi}{2}$.

III. Решение тригонометрических уравнений с последующим отбором корней на заданном отрезке и подсчетом их количества, их систем.

Решение любого тригонометрического уравнения происходит в два этапа:

- 1) преобразование уравнения для получения его простейшего вида;
- 2) решение полученного уравнения.

В школьном курсе алгебры после освоения решения простейших тригонометрических уравнений учащиеся последовательно открывают для себя группу стандартных методов решения тригонометрических уравнений:

- алгебраический метод (замена, подстановка);
- разложение на множители;
- приведение к однородному уравнению;
- переход к половинному углу;

- введение вспомогательного угла;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование универсальной тригонометрической подстановки [2].

Нередко у школьников возникают трудности с решением комбинированных уравнений, содержащих тригонометрическую функцию под знаком корня, модуля или под логарифмом. При решении таких задач важно не забывать об области допустимых значений функции, без труда оперировать такими алгебраическими приемами, как добавление и вычитание одинаковых слагаемых, применение формул сокращенного умножения, выделение полного квадрата, замена переменной [11].

Отдельного внимания заслуживают олимпиадные тригонометрические уравнения, решение которых требует догадки.

Пример 3.1 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2013 год, 10-11 классы). Решите уравнение $\sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \dots + \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1$.

Для решения данной задачи необходимо рассмотреть сумму радиус-векторов с концами в точках вида $x + n \cdot \frac{2\pi}{7}$ ($n = 0, 1, \dots, 6$) на тригонометрической окружности и заключить, что она равна нулю. Благодаря этому исходное уравнение сводится к простейшему.

Решение:

Преобразуем слагаемые в правой части, используя правило приведения:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \sin\left(x + 3^3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \\ \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \sin\left(x + 3^4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \\ \sin\left(x + 3^2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \sin\left(x + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим точки $x + n \cdot \frac{2\pi}{7}$ ($n = 0, 1, \dots, 6$) на тригонометрической окружности. Они образуют вершины правильного семиугольника.

Сумма радиус-векторов с концами в этих точках равна нулевому вектору (так как при повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ вокруг начала координат набор этих векторов не меняется, не меняется и вектор, равный их сумме, а значит, он является нулевым), поэтому сумма ординат этих векторов равна нулю:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + 0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \\ + \sin\left(x + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \sin\left(x + 0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3.2 (Московская олимпиада школьников, заключительный этап, 2012 год, 11 класс). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 - \sin \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \pi \end{cases}$$

Решение:

Представим систему в другом виде:

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 + \alpha_1 = \sin \alpha_2 + \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 + \alpha_2 = \sin \alpha_3 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \pi. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(\alpha_k) = \sin \alpha_k + \alpha_k$. Поскольку $f'(\alpha_k) = \cos \alpha_k + 1$, $-1 \leq \cos \alpha_k \leq 1$, заключим, что $f'(\alpha_k) \geq 0$ и значит, функция $f(\alpha_k)$ строго возрастающая.

$f'(\alpha_k) = 0$ при $\alpha_k = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, поэтому каждое свое значение $f(\alpha_k)$ принимает при одном и только одном значении переменной. Значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Примем во внимание, что $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ (по условию). Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi$.

$$\text{Ответ: } (\pi; \pi; \pi).$$

На протяжении длительного периода неотъемлемой частью олимпиадных заданий и вступительных испытаний в ведущие институты страны являются уравнения с параметром. Тригонометрические уравнения не исключение.

Пример 3.3 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2013 год, 10-11 классы). Найдите все значения a , при которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$3\operatorname{tg} a \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin x + 3\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0$$

меньше или равно $\frac{\pi}{2}$.

Решение:

Выполним преобразования левой части:

$$\begin{aligned} 3\operatorname{tg} a \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin x + 3\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a &= \\ &= 3\operatorname{tg} a \cdot (2\cos^2 x - 1) + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin x + 3\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = \\ &= 6\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} a + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin x - \operatorname{ctg} a. \end{aligned}$$

Условие означает, что $x = \pm \frac{\pi}{4}$. После постановки получаем:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} a + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg} a = 0 \\ 6\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} a + 3\sqrt{2} \cos 3a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg} a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\operatorname{tg} a + 3 \cos 3a - \operatorname{ctg} a = 0 \\ 3\operatorname{tg} a - 3 \cos 3a - \operatorname{ctg} a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3a = 0 \\ 3\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos a (4\cos^2 a - 3) = 0 \\ \frac{1}{\operatorname{tg} a} (3\operatorname{tg}^2 a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 a = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Значит, $a = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $a = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы развивать широту, гибкость и критичность мышления учащихся, их нужно знакомить с нестандартными методами решения тригонометрических уравнений.

Среди всех нестандартных методов решения тригонометрических уравнений на олимпиадах чаще всего встречается метод оценки. Данный метод состоит в использовании оценок значений выражений, отвечающих частям решаемого уравнения, для обоснования отсутствия решений или для перехода к равносильной системе уравнений [4].

Пример 3.4 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2014 год, 10-11 классы). Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi(x-y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(y-x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1. \\ x^2 + y^2 \leq 10 \end{cases}$$

Особенность данной задачи в том, что метод оценки работает не отдельно для функций $\operatorname{tg}^2 \alpha$ и $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, а для их суммы как суммы квадратов взаимно обратных функций.

Решение:

Оценивая каждую из частей неравенства, получаем:

$$2 \leq \operatorname{tg}^2 \pi(x-y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(y-x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 \leq 2$$

Равенство достигается только при $x = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \pi(y-1) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2\pi(y-1)}{1 + \cos 2\pi(y-1)} = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos 2\pi(y-1) = \\ &= 1 + \cos 2\pi(y-1) \Leftrightarrow 2 \cos 2\pi(y-1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi(y-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\pi(y-1) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} + 1, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{2n+5}{4}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $y^2 \leq 9$, $\left(\frac{2n+5}{4}\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow n \in [-8,5; 3,5]$. Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -8, -7, \dots, 3$.

Ответ: $\left(1; \frac{2n+5}{4}\right), n = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

На практике весьма редко применяется функционально-графический метод решения тригонометрических уравнений. При данном подходе выполняется схематичное построение графика тригонометрической функции, используются формулы корней соответствующих уравнений. Рассмотрим несложный пример, иллюстрирующий данный метод.

Пример 3.5. Решите уравнение $\cos x - 3x - 1 = 0$.

Решение:

Преобразуем уравнение к виду: $\cos x = 3x + 1$. Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x + 1$ (рисунок 2).

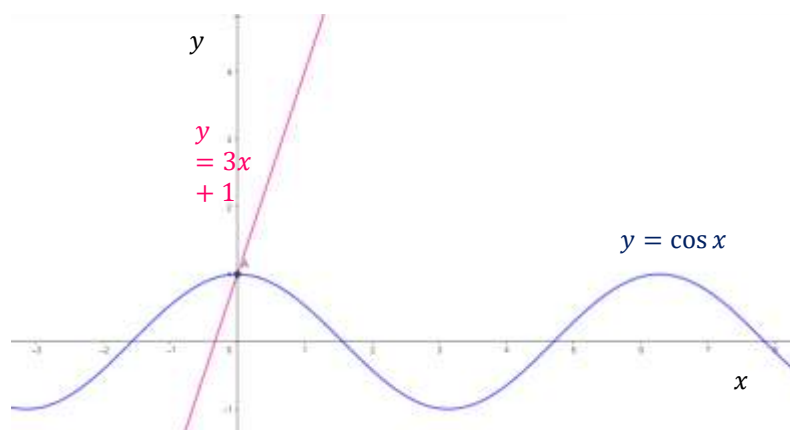


Рисунок 2 – Функционально-графический метод решения уравнения $\cos x - 3x - 1 = 0$

Графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x + 1$ пересекаются в точке A с координатами $(0; 1)$. Отсюда можно сделать вывод, что $x = 0$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Вместе с учениками нужно выявить преимущества и недостатки функционально-графического метода решения тригонометрических уравнений. С одной стороны, выполняется геометрическая иллюстрация наличия (отсутствия) решений исходного уравнения. С другой, графики неэлементарных функций бывает непросто построить. Если же удастся справиться с этой задачей, то точки пересечения могут быть не такими

«хорошими», как в специально подобранных примерах, а то и вовсе могут оказаться за пределами чертежа. Для получения корней уравнения с большей степенью точности следует использовать численные методы.

Так, в некоторых случаях для решения тригонометрического уравнения необходимо воспользоваться одним из методов искусственных преобразований:

- умножение обеих частей уравнения на одну и ту же тригонометрическую функцию;
- прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа, тригонометрической функции;
- тождественные преобразования одной из частей уравнения (прибавление и вычитание одного и того же выражения);
- использование свойств пропорции [6].

Важно помнить о том, что применение перечисленных преобразований может привести к появлению посторонних корней, поэтому в конце необходимо выполнить проверку.

Пример 3.6. Решите уравнение $\frac{2\sqrt{3} \cos 10^\circ + 1}{2 \sin 10^\circ + 1} = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$D(y): \sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos 3x \neq 0, \text{ где } y(x) = \frac{2\sqrt{3} \cos 10^\circ + 1}{2 \sin 10^\circ + 1} = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

Воспользуемся следующим свойством пропорции: при $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ справедливо равенство $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. Тогда исходное уравнение примет такой вид:

$$\frac{\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ + 1}{\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{\sin 4x}{\sin 2x}.$$

Выражение $\sqrt{3} \cos 10^\circ + \sin 10^\circ$ упростим, используя метод вспомогательного угла и правило приведения: $2 \sin(10^\circ + 60^\circ) = 2 \sin(90^\circ - 20^\circ) = 2 \cos 20^\circ$.

$$\text{Преобразуем правую часть равенства: } \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x.$$

$$\text{Теперь уравнение принимает такой вид: } \frac{2 \cos 20^\circ + 1}{2 \cos 20^\circ} = 2 \cos 2x.$$

Числитель дроби можно представить в виде суммы косинусов: $2 \cos 20^\circ + 1 = 2 \cos 20^\circ + 2 \cos 60^\circ$. Сократив числитель и знаменатель дроби на 2, получим: $\frac{\cos 20^\circ + \cos 60^\circ}{\cos 20^\circ} = 2 \cos 2x$.

Воспользуемся известной формулой суммы косинусов: $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ = 2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ$. Получим: $\cos 2x = \cos 40^\circ$.

Решим полученное несложное уравнение:

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos 40^\circ &\Leftrightarrow \cos 2x - \cos 40^\circ = 0 \Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{2x - 40^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{2x + 40^\circ}{2}\right) = \\ &= 0 \Leftrightarrow \sin(x - 20^\circ) \sin(x + 20^\circ) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение $\sin(x - 20^\circ) \sin(x + 20^\circ) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(x - 20^\circ) = 0 \\ \sin(x + 20^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 20^\circ = 180^\circ n, n \in \mathbb{Z} \\ x + 20^\circ = 180^\circ n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Таким образом, $x = \pm 20^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm 20^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.

Среди малоизвестных методов решения тригонометрических уравнений также можно отметить метод скалярного произведения векторов (его также называют геометрическим). Сформулируем его идею для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1; b_2\}$. Так как $|\cos \varphi| \leq 1$, то

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad [7].$$

Пример 3.7. Решите уравнение $\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$.

Решение:

Введем векторы $\vec{a}\{\sin x; \cos x\}$ и $\vec{b}\{\sqrt{1 + \cos^2 x}; \sqrt{1 + \sin^2 x}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \\ &\leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2}. \end{aligned}$$

Но так как $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2} = \sqrt{3}$, получаем, что

$$\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{3}.$$

Исходное уравнение можно записать в виде $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, но это равенство выполняется только в том случае, когда синус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю. Тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Значит, их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. По свойству пропорции: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Заметим, что $\sin x$ и $\cos x$ одного знака.

$$\begin{aligned} \sin x \sqrt{1+\sin^2 x} &= \cos x \sqrt{1+\cos^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^4 x - \sin^4 x \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Из первоначального уравнения следует, что $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$ (с учетом, что они одного знака). Поэтому $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

IV. Решение тригонометрических неравенств повышенного уровня сложности, их систем. Доказательство неравенств.

В последние годы в олимпиадных бланках все чаще встречаются тригонометрические неравенства, решаемые с помощью метода оценки.

Пример 4.1 («Покори Воробьёвы горы», заочный тур, 2011 год, 11 класс).

Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1$.

Решение:

Так как $|\sin \alpha| \leq 1$, то исходное неравенство может выполняться, только если $|\sin x| = |\sin 1755x| = |\sin 2011x| = 1$.

Рассмотрим случаи:

$$\begin{aligned} 1) \sin x &= 1. \quad \text{Тогда} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \sin\left(1755\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \\ \sin\left(2011\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) &= -1 \Rightarrow \sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = 1. \end{aligned}$$

2) $\sin x = -1$. Тогда $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \sin\left(1755\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

$\sin\left(2011\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = 1 \Rightarrow \sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Чтобы решить неравенство, содержащее тригонометрические функции, можно воспользоваться графическим методом. Рассмотрим его сущность на отдельном примере.

Пример 4.2. Решите неравенство $\cos x - x^2 - \frac{\pi}{2}x - \frac{2}{\pi}x - 1 \geq 0$.

Решение:

Преобразуем данное неравенство к виду: $\cos x \geq x^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)x + 1$.

В одной системе координат построим графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)x + 1$ (рисунок 3).

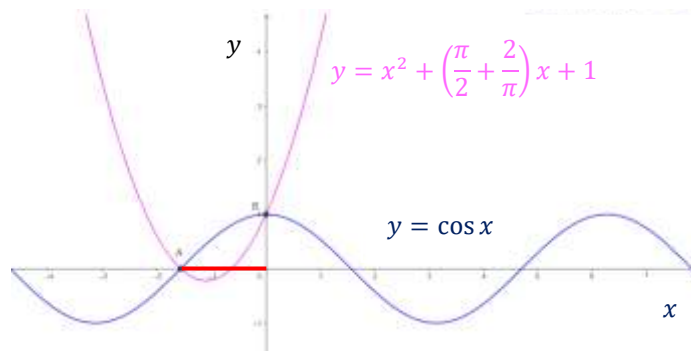


Рисунок 3 – Графический метод решения неравенства

$$\cos x - x^2 - \frac{\pi}{2}x - \frac{2}{\pi}x - 1 \geq 0$$

Точки $A(0; 1)$ и $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ являются общими для построенных графиков функций. На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ точки графика функции $y = \cos x$ находятся выше точек графика функции $y = x^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)x + 1$, значит, $\cos x \geq x^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right)x + 1$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Иногда тригонометрическое неравенство с помощью замены получается свести к алгебраическому (рациональному или иррациональному) неравенству.

Пример 4.3. Решите неравенство $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

Решение:

В область определения функций, содержащихся в этом неравенстве, не входят $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos \alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Исходное неравенство можно записать следующим образом:

$$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} > 1.$$

Выполним замену: $\operatorname{tg} 2x = k$. Получим:

$$\frac{2k}{1+k^2} + \frac{1-k^2}{1+k^2} \cdot \frac{1}{k} > 1.$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{2k}{1+k^2} + \frac{1-k^2}{1+k^2} \cdot \frac{1}{k} > 1 &\Leftrightarrow \frac{k^3 - k^2 + k - 1}{k(1+k^2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(k-1)(1+k^2)}{k(1+k^2)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{k-1}{k} < 0. \end{aligned}$$

Решим последнее неравенство методом интервалов (рисунок 4).

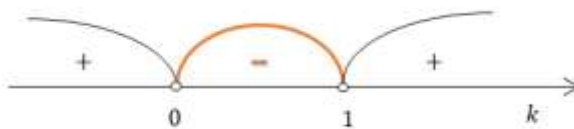


Рисунок 4 – Решение неравенства $\frac{k-1}{k} < 0$ методом интервалов

Получим: $0 < k < 1 \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg} 2x < 1 \Leftrightarrow \pi n < 2x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

(последнее следует из анализа графика функции $y = \operatorname{tg} 2x$).

Таким образом, $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

Важно отметить, что подстановка, которая была определена формулами $\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и $\cos \alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ теряет смысл при $\alpha = \pi + 2\pi n$ или (так как $\alpha = 4x$) при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, а эти значения могут быть решениями исходного неравенства, непосредственная проверка опровергает это.

В решении тригонометрических неравенств вида $f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ особенно эффективен метод интервалов. При данном подходе приходится иметь дело с бесконечной системой интервалов знакопостоянства функции $f(x)$.

Чтобы преодолеть указанную трудность, вместо числовой оси используется тригонометрическая окружность, которая корнями соответствующих тригонометрических уравнений разбивается на дуги, аналогичные интервалам на числовой оси.

На дугах, полученных в результате разбиения, тригонометрическое выражение, соответствующее решаемому неравенству, имеет постоянные знаки, для определения которых можно использовать правило отдельной «удобной» точки и свойство кратности корней.

Интервалы, где функция положительна, принято изображать вне окружности, а те интервалы, где она отрицательна, внутри. В точках нечетной кратности дуга пересекает окружность, а в точках четной кратности не пересекает [17].

Схему использования метода интервалов в решении тригонометрических неравенств лучше рассмотреть на примере.

Пример 4.4. Решите неравенство $4\cos^2 t - 1 < 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(t) = 4\cos^2 t - 1$. $D(f) = \mathbb{R}$.

Найдем нули функции $f(t)$ на отрезке $[0; 2\pi]$:

$$4\cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos t - 1)(2\cos t + 1) = 0.$$

Последнее уравнение сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 2 \cos t - 1 = 0 \\ 2 \cos t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ \cos t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Решениями данной системы на отрезке $[0; 2\pi]$ (нулями функции $f(t)$) являются точки $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{2\pi}{3}$, $t = \frac{4\pi}{3}$, $t = \frac{5\pi}{3}$. Эти точки делят окружность на 4 дуги, соответствующие интервалам знакопостоянства функции $f(t)$. Так как знаки чередуются, достаточно установить знак $f(t)$ в одном из интервалов, например, в $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$: для $t = \frac{\pi}{4}$ $f(t) = 4\cos^2 t - 1 > 0$. Учитывая это, получим указанные на рисунке 5 распределения знаков.

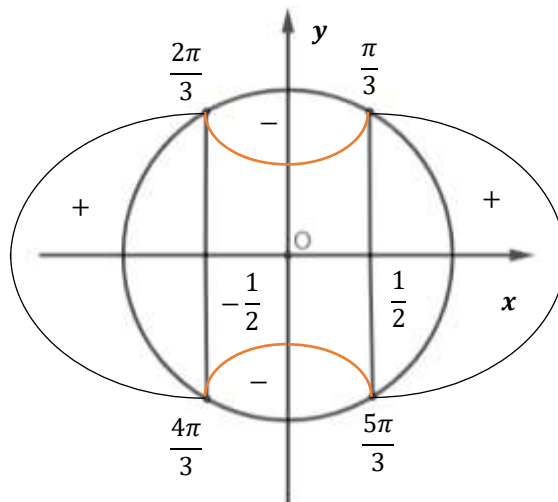


Рисунок 5 – Решение неравенства $4\cos^2 t - 1 < 0$ методом интервалов

Значит, $t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n) \cup (\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ можно записать более кратко: $t \in (\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $t \in (\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Использовать числовую окружность непосредственно для решения исходного тригонометрического неравенства методом интервалов можно, если все функции, через которые записано неравенство, имеют наименьший

положительный период 2π или $\frac{2\pi}{m}$, где m – некоторое целое положительное число. В остальных случаях нужно работать на числовой оси.

Аналогом метода параллельных числовых осей при решении систем рациональных неравенств является метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств [3].

Рассмотрим сущность метода концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств на примере.

Пример 4.5. Решите систему

$$\begin{cases} \sin t < \frac{1}{2} \\ \cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg}(t) > 1 \end{cases}$$

Решение:

Сначала решим каждое неравенство системы отдельно (рисунок 6).

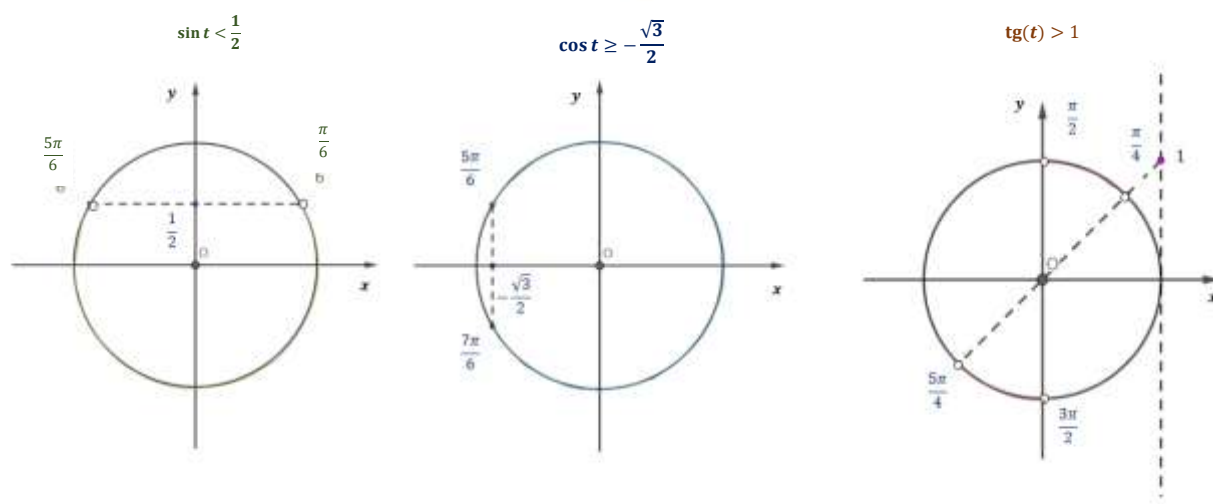


Рисунок 6 – Решение неравенств $\sin t < \frac{1}{2}$, $\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}(t) > 1$ с помощью единичной окружности

Построим систему концентрических окружностей для аргумента t . Изобразим окружность и заштрихуем ее согласно решению первого

неравенства, затем построим окружность большего радиуса и заштрихуем ее согласно решению второго. Далее построим окружность для третьего неравенства и базовую окружность. Из центра системы через концы дуг проведем лучи так, чтобы они пересекли все окружности. На базовой окружности формируется решение (рисунок 7).

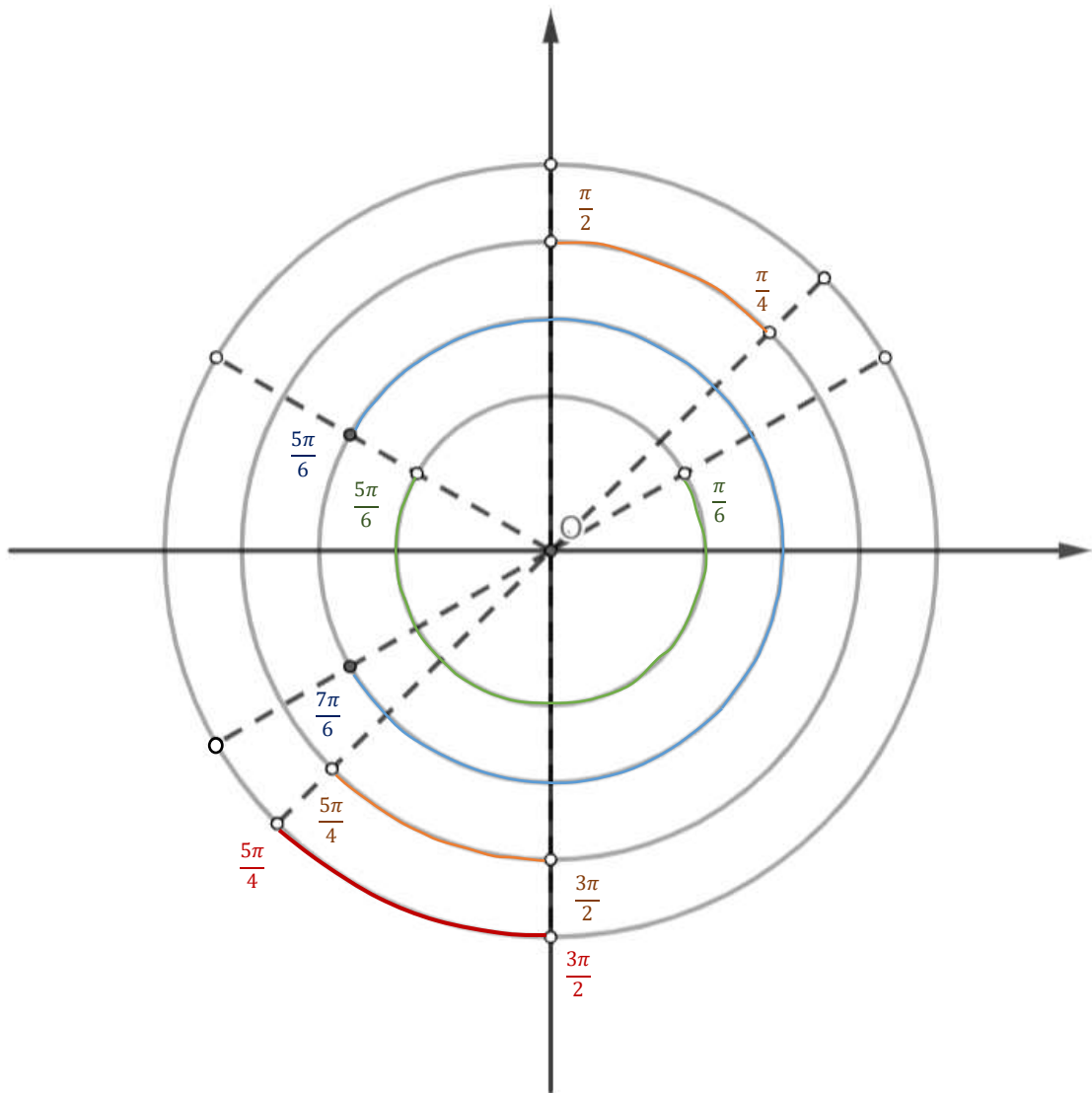


Рисунок 7 – Решение системы тригонометрических неравенств методом концентрических окружностей

Ответ: $t \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

V. Геометрические задачи, для которых тригонометрические функции являются инструментом решения.

Некоторые задачи планиметрии сводятся к решению прямоугольного треугольника, соотношения между сторонами и углами которого выражают тригонометрические функции. Вполне вероятно, что «ключом» к решению трудной на первый взгляд задачи является аппарат тригонометрии.

Пример 5.1 («Будущие исследователи – будущее науки», отборочный этап, 2021 год, 11 класс). Докажите, что треугольник, углы α и β которого удовлетворяют соотношению $\sin \alpha - \cos \alpha = \cos \beta - \sin \beta$, является прямоугольным.

Доказательство:

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \cos \alpha = \cos \beta - \sin \beta &\Leftrightarrow (\sin \alpha + \sin \beta) - (\cos \alpha + \cos \beta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$, поскольку в противном случае $\alpha - \beta = \pi$, поэтому на $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ можно разделить обе части равенства, и тогда $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

С другой стороны, синус и косинус одного и того же угла не могут быть равны нулю одновременно, поэтому последнее равенство можно разделить на $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ или $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, тогда выявим $\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1$ или $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1$. В любом случае можно сделать вывод, что $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся теоремой о сумме углов треугольника и найдем третий угол $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Утверждение доказано.

Особый интерес представляют геометрические задачи, анализ условия которых не дает сразу понять, что для их решения потребуется рассмотрение тригонометрических функций.

Пример 5.2 («Турнир городов», осенний тур, 2019 год, 10-11 классы). В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b . Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

Доказательство:

Рассмотрим треугольники XZC и YZC (рисунок 8).

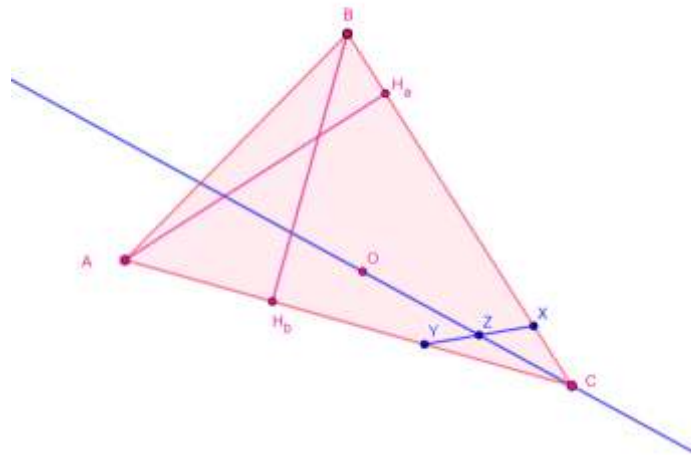


Рисунок 8 – Геометрическая конфигурация, описанная в задаче (примере 5.2)

$$S_{XZC} = \frac{1}{2} \cdot XZ \cdot CZ \cdot \sin \angle XZC, S_{YZC} = \frac{1}{2} \cdot YZ \cdot CZ \cdot \sin \angle YZC.$$

Рассмотрим отношение площадей треугольников XZC и YZC :

$$\frac{S_{XZC}}{S_{YZC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot XZ \cdot ZC \cdot \sin \angle XZC}{\frac{1}{2} \cdot YZ \cdot ZC \cdot \sin \angle YZC} = \frac{XZ \cdot \sin \angle XZC}{YZ \cdot \sin \angle YZC}.$$

Заметим, что $\angle YZC = 180^\circ - \angle XZC$, поэтому $\sin \angle YZC = \sin(180^\circ - \angle XZC) = \sin \angle XZC$. Соответственно, $\frac{S_{XZC}}{S_{YZC}} = \frac{XZ \cdot \sin \angle XZC}{YZ \cdot \sin \angle XZC} = \frac{XZ}{YZ}$.

Площади треугольников XZC и YZC можно найти другим способом:

$$S_{XZC} = \frac{1}{2} \cdot XC \cdot CZ \cdot \sin \angle OCX, S_{YZC} = \frac{1}{2} \cdot YC \cdot CZ \cdot \sin \angle OCY.$$

Снова составим отношение площадей треугольников XZC и YZC :

$$\frac{S_{XZC}}{S_{YZC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot XC \cdot CZ \cdot \sin \angle OCX}{\frac{1}{2} \cdot YC \cdot CZ \cdot \sin \angle OCY} = \frac{XC \cdot \sin \angle OCX}{YC \cdot \sin \angle OCY}.$$

Значит, $\frac{XZ}{YZ} = \frac{XC \cdot \sin \angle OCX}{YC \cdot \sin \angle OCY}.$

Так как точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA , то $\frac{XC}{YC} = \frac{BH_a}{AH_b}.$

Рассмотрев треугольники ABH_a и ABH_b , получим соответственно отношения:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \angle B = \frac{BH_a}{AB} \\ \cos \angle A = \frac{AH_b}{AB} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{BH_a}{AH_b} = \frac{\cos \angle B}{\cos \angle A}.$$

$\angle B$ и $\angle AOC$ опираются на одну и ту же дугу, причем $\angle B$ – вписанный, а $\angle AOC$ – центральный, поэтому $\angle AOC = 2\angle B$. Основание серединного перпендикуляра к стороне AC обозначим буквой T . Рассмотрим треугольник OTC : $\angle OTC = 90^\circ$, $\angle TOC = \frac{\angle AOC}{2} = \angle B$. Тогда $\angle OCT = 90^\circ - \angle B$. Значит, $\sin \angle OCY = \sin(90^\circ - \angle B) = \cos \angle B$.

Аналогично показывается, что $\cos \angle A = \sin \angle OCX$.

Тогда $\frac{\cos \angle B}{\cos \angle A} = \frac{\sin \angle OCY}{\sin \angle OCX}.$

Таким образом, $\frac{XC}{YC} = \frac{\sin \angle OCY}{\sin \angle OCX}.$

Отсюда

$$\frac{XZ}{YZ} = \frac{XC \cdot \sin \angle OCX}{YC \cdot \sin \angle OCY} = \frac{\sin \angle OCY \cdot \sin \angle OCX}{\sin \angle OCX \cdot \sin \angle OCY} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение доказано.

Знакомство школьников с описанными методами и приемами решения тригонометрических олимпиадных задач является неотъемлемой частью их подготовки к участию в математических олимпиадах.

Глава 2. Содержательно-методическое обеспечение обучения школьников 10-11 классов решению тригонометрических задач олимпиадного уровня

2.1 Методические разработки «Нетривиальная тригонометрия» в помощь педагогам, осуществляющим олимпиадную подготовку в старшей школе, и указания по проведению занятий с их использованием

Методические разработки «Нетривиальная тригонометрия» по решению нестандартных тригонометрических задач предназначены в основном для педагогов, которые осуществляют олимпиадную подготовку обучающихся старших классов. Также листочки с задачами, решения и комментарии к ним могут быть полезны ученикам, которые стремятся к углублению собственных знаний и предпочитают заниматься самостоятельно.

Каждая методическая разработка соответствует одному факультативному занятию и состоит из двух частей: листка с задачами для выдачи ученикам и материалов для наставника, которые включают условия задач, подробные разъяснения решений и замечания по работе с некоторыми листками. Эти материалы удобно использовать в виде конспекта.

Занятия с использованием методических разработок «Нетривиальная тригонометрия» рекомендуется проводить по следующей *схеме*:

- *До занятия* учитель самостоятельно решает предложенные задачи, изучает замечания по работе с листком и выполняет самопроверку.
- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и самостоятельно предпринимает попытку решить первую из них. На первом занятии важно объяснить ученикам, что задачи лучше решать по порядку, потому что каждый предлагаемый им набор задач имеет одинаковую основу и сформулирован таким образом, что каждая следующая задача обогащает опыт предыдущей. Как только задача (по мнению ученика) поддаётся решению, нужно поднять руку и

приготовиться обсуждать решение с педагогом и остальными обучающимися. Как правило, в начале занятия не требуется объяснение теоретических сведений: задачи составлены так, чтобы решающий, постепенно обобщая опыт каждой предыдущей задачи, смог самостоятельно раскрыть идею всей подборки. Иногда до раздачи новых листков осуществляется разбор решений задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* ученики обдумывают и решают задачи. После первой поднятой руки начинается обсуждение предлагаемого хода решения. Чтобы научить детей осмысленно и доказательно говорить, педагогу следует задавать побуждающие к размышлению вопросы и поощрять учеников, пожелавших высказать свою точку зрения. Если предложенное решение верно, ученика следует поздравить с решенной задачей. В противном случае нужно предложить остальным ученикам поделиться своими соображениями.

Олимпиадная подготовка школьников должна быть упорядоченной и последовательной, поэтому дополнительные занятия по математике для старшеклассников, проявляющих элементы одаренности и готовящихся принять участие в перечневых олимпиадах, целесообразно организовать в форме факультатива.

На этапе подготовки к предметным олимпиадам между учениками и наставником формируется особый социально-психологический климат. Благоприятный для личностного развития обучающихся климат группы характеризуют доброжелательность и взаимная поддержка, всеобщий оптимизм как устремленность группы к радостным перспективам, желание проявлять инициативу и отсутствие страха ошибиться, господствующее чувство безопасности и комфорта.

Коммуникативная компетентность учителя позволяет ему управлять процессом взаимодействия в любой учебной ситуации, непосредственно воздействуя на атмосферу в классной комнате, изменяя и воссоздавая ее

посредством общения со своими воспитанниками. На результат подготовки к олимпиаде может негативно повлиять завышенный или заниженный уровень притязаний ученика, а также повышенная тревожность, порождаемая чувством ответственности перед школой. Поэтому в учениках нужно поддерживать здоровую амбициозность, поощрять стремление к победе, избегая субъективизма в оценке деятельности отдельных обучающихся [20].

Чтобы ученики не испытывали страха ошибиться или поделиться своим мнением, не рекомендуется ставить оценки за работу на факультативе, проводить проверочные работы. Оценивание достигнутых результатов в обучении должно опираться на индивидуальные особенности ученика. Нужно поощрять старания, усилия, инициативу.

На факультативных занятиях ученик должен испытывать глубокий интерес, любопытство «первооткрывателя» и, несомненно, радость решения математических задач. Школьники чувствуют восторг, если сами преодолевают весь путь в решении задачи, поэтому превращать факультативное занятие в разбор всех готовых решений у доски недопустимо. Вместо этого можно давать подсказки к решению и использовать эвристические приемы (например, аналогию, инверсию, «мозговой штурм», наводящие вопросы). Представление о том, каким образом можно выстроить обсуждение решения задачи, можно получить из комментариев, разработанных для наставника.

Если ученики все же не могут справиться с предложенными задачами, следует адаптировать задания согласно познавательным возможностям группы обучающихся, либо подобрать к следующему занятию аналогичные, но более простые задачи. На каждом факультативном занятии должна создаваться ситуация успеха: ученик должен ощущать удовлетворение от результата, совпавшего с его надеждами, ожиданиями (или, строго говоря, с уровнем притязаний) или даже превзошедшего их. Когда у школьника формируется положительная самооценка своих возможностей, у него развивается познавательный интерес [9].

**Листок 1. Геометрия и комплексная арифметика в олимпиадных
тригонометрических задачах**

Задача 1. Центром правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ является точка O . Верно ли, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$?

Задача 2. Докажите следующие равенства:

a) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$;

b) $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Задача 3. Докажите тождество:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = \\ = \cos x + \cos \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Задача 4. Вычислите:

$$\cos x + \cos \left(x + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(x + \frac{4\pi}{5} \right) + \cos \left(x + \frac{6\pi}{5} \right) + \cos \left(x + \frac{8\pi}{5} \right).$$

Задача 5. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \cos \left(x + 7^0 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(x + 7^1 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(x + 7^2 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(x + 7^3 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) = \\ = 1. \end{aligned}$$

Задача 6. Найдите хотя бы одну пару чисел $(p; q)$ таких, что

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} \cos \left(\pi + p^\alpha \frac{2\pi}{q} \right) = 1.$$

Конспект к листку 1

Задача 1. Центром правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ является точка O . Верно ли, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$?

Решение:

Угол между векторами $\overrightarrow{OA_i}$ и $\overrightarrow{OA_{i+1}}$ составляет $\frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 3$). Рассмотрим поворот радиус-векторов $\overrightarrow{OA_i}$ ($i = \overline{1, n-1}$) вокруг точки O на угол $\frac{2\pi}{n}$.

$$R_{\frac{2\pi}{n}}^O: \overrightarrow{OA_i} \rightarrow \overrightarrow{OA_{i+1}} \Bigg| \Rightarrow \sigma = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \rightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \Rightarrow R_{\frac{2\pi}{n}}^O(\sigma) = \sigma$$
$$0 < \frac{2\pi}{n} < 2\pi \Rightarrow \sigma = \vec{0}.$$

Действительно, при повороте на угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ вокруг начала координат набор радиус-векторов не меняется, поэтому не меняется и вектор, равный их сумме, а значит, он является нулевым.

Утверждение верно.

Задача 2. Докажите следующие равенства:

- a) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$;
b) $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Доказательство:

Рассмотрим единичную окружность. Отложим от положительного направления оси абсцисс углы с величинами $\frac{2\pi i}{n}$ ($i = \overline{0, n-1}$). Отметим точки, образующиеся при пересечении сторон углов с единичной окружностью.

Рассмотрим n -угольник с вершинами в отмеченных точках. Абсциссы вершин построенного n -угольника совпадают со значениями косинусов углов $\frac{2\pi i}{n}$ ($i = \overline{0, n-1}$), а ординаты – со значениями синусов этих же углов.

В задаче 1 доказано, что сумма радиус-векторов, общим началом которых является центр n -угольника, а концами – его вершины, равна нулевому вектору.

Следовательно, суммы абсцисс и ординат вершин правильного n -угольника равны нулю.

Так как $\cos \frac{2\pi \cdot 0}{n} = 1$, а $\sin \frac{2\pi \cdot 0}{n} = 0$, то получим равенства а) и б).

Равенства доказаны.

Задача 3. Докажите тождество:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = \\ = \cos x + \cos \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Доказательство:

В задаче 2 описано построение правильного n -угольника, вписанного в единичную окружность. При повороте этого n -угольника вокруг его центра на угол x , получим правильный n -угольник, координаты вершин которого определяются следующим образом: $\left(\cos \left(x + \frac{2\pi i}{n} \right); \sin \left(x + \frac{2\pi i}{n} \right) \right)$.

В задаче 1 доказано, что сумма радиус-векторов, общим началом которых является центр n -угольника, а концами – его вершины, равна нулевому вектору. Следовательно, суммы абсцисс и ординат вершин правильного n -угольника равны нулю:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0; \\ \cos x + \cos \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(x + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Мы показали, что выражения в левой и правой части доказываемого равенства принимают одинаковые значения при любых допустимых значениях переменных. Отсюда можно сделать вывод, что они тождественно равны.

Тождество доказано.

Задача 4. Вычислите:

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right).$$

Решение:

Данная сумма имеет вид правой части тождества из задачи 3 при $n = 5$. В задаче 3 доказано, что она равна нулю.

Ответ: 0.

Задача 5. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \cos\left(x + 7^0 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + 7^1 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + 7^2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + 7^3 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) = \\ = 1. \end{aligned}$$

Решение:

Преобразуем слагаемые в левой части по правилу приведения:

$$\begin{aligned} \cos\left(x + 7^0 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) &= \cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right), \\ \cos\left(x + 7^1 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) &= \cos\left(x + \frac{14\pi}{5}\right) = \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right), \\ \cos\left(x + 7^2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) &= \cos\left(x + \frac{28\pi}{5}\right) = \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right), \\ \cos\left(x + 7^3 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) &= \cos\left(x + \frac{686\pi}{5}\right) = \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$$\cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right) = 1 (*).$$

В задаче 4 показано, что

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$

Учитывая (*):

$$\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Найдите хотя бы одну пару чисел $(p; q)$ таких, что

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} \cos\left(\pi + p^\alpha \frac{2\pi}{q}\right) = 1.$$

Идея задачи:

Воспользуемся результатом задачи 5. Будем искать слагаемые в виде:
 $\cos\left(\pi + p^\alpha \frac{2\pi}{q}\right) = \cos\left(\pi + \frac{2\pi i}{q}\right)$ ($i = 1, \dots, q-1$). Равенство выполняется при

$$\begin{cases} \pi + \frac{2\pi i}{q} = \pi + p^\alpha \frac{2\pi}{q} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi + \frac{2\pi i}{q} = -\pi - p^\alpha \frac{2\pi}{q} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно оба случая.

Случай 1:

$$\pi + \frac{2\pi i}{q} = \pi + p^\alpha \frac{2\pi}{q} + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{i}{q} = \frac{p^\alpha}{q} + n \Leftrightarrow p^\alpha = i - nq, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как значения $i = 1, \dots, q-1$ образуют систему вычетов по модулю q и $p^\alpha \equiv i \pmod{q}$, то остатки от деления p^α ($\alpha = 0, \dots, q-2$) на q должны образовывать систему различных вычетов по модулю q .

Случай 2:

$$\pi + \frac{2\pi i}{q} = -\pi - p^\alpha \frac{2\pi}{q} + 2\pi m \Leftrightarrow \frac{i}{q} = -1 - \frac{p^\alpha}{q} + m \Leftrightarrow p^\alpha = -i + (m-1)q.$$

Этот случай сводится к первому.

Среди пар $(p; q)$ необходимо рассмотреть такие, что p и q – различные простые числа. Объясним это.

Рассмотрим последовательность степеней $p^0, p^1, \dots, p^{q-1}, \dots$. По теореме Ферма, $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow \{p^0, p^1, \dots, p^{q-2}\}$ образуют циклическую мультипликативную группу порядка $q-1$. Остатки от деления элементов этой группы на q различны и образуют нужную последовательность значений $i = 1, \dots, q-1$. В противном случае если $p^\alpha \equiv p^\beta \pmod{q}$ ($\alpha, \beta = 0, \dots, q-1$)

$-2, \beta > \alpha$), то $p^{\beta-\alpha} \equiv 1 \pmod{q}$ и в силу того, что $0 < \beta - \alpha \leq q - 2$, то порядок элемента p , порождающего группу, меньше порядка этой группы.

В качестве примера рассмотрим остатки от деления степеней 3 на 7:

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1 \pmod{7}, & 3^3 &\equiv 6 \pmod{7}, \\ 3^1 &\equiv 3 \pmod{7}, & 3^4 &\equiv 4 \pmod{7}, \\ 3^2 &\equiv 2 \pmod{7}, & 3^5 &\equiv 5 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Покажем справедливость равенства

$$\begin{aligned} &\cos\left(\pi + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 3^2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \\ &+ \cos\left(\pi + 3^3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 3^4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1 \quad (**). \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в левой части по правилу приведения:

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \cos\left(\pi + 3^3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \\ \cos\left(\pi + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \cos\left(\pi + 3^4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \\ \cos\left(\pi + 3^2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \cos\left(\pi + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Тогда левую часть равенства можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\pi + 1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \\ &+ \cos\left(\pi + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Обозначим эту сумму σ .

Точки $\pi + n \cdot \frac{2\pi}{7}$ ($n = 0, 1, \dots, 6$) образуют вершины правильного семиугольника на тригонометрической окружности. По доказанному, сумма абсцисс радиус-векторов с концами в этих точках равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\pi + 0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sigma &= 0 \\ \cos\left(\pi + 0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) &= -1 \end{aligned} \right| \Rightarrow \sigma = 1.$$

Значит, равенство (**) верно.

Замечание к листку 1

Задача 2 может быть решена другим способом: с обращением к тригонометрической форме записи комплексного числа:

Положим $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Тогда $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0$, так как $z^n = 1$.

С другой стороны, $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i \left(\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$ (по формуле Муавра).

Действительная и мнимая части найденного числа равны нулю. Отсюда следуют равенства а) и б) задачи 2. Равенства доказаны.

В таком случае задача 1 может быть решена на основе доказанных равенств задачи 2 следующим образом: расположим правильный n -угольник так, чтобы одна из его вершин совпала с точкой $(1; 0)$.

Угол между векторами $\overrightarrow{OA_l}$ и $\overrightarrow{OA_{l+1}}$ составляет $\frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 3$). Рассмотрим суммы ординат и абсцисс радиус-векторов: $0 + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$ и $1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

По утверждению, доказанному в задаче 2, $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$ и $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$.

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi i}{n} = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi i}{n} = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \left(\cos \frac{2\pi i}{n}; \sin \frac{2\pi i}{n} \right) = (0; 0) = \vec{0}.$$

Утверждение верно.

При данном подходе целесообразно поменять задачи 1 и 2 местами.

Листок 2. Метод оценки в решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль. Метод оценки необходим для обоснования отсутствия решений или для перехода к равносильной системе уравнений. В некоторых уравнениях приходят на помощь оценки $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$, $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$.

Метод оценки используется, если в одной части соотношений стоят ограниченные функции, а в другой конкретные числа.

1. Решите уравнение:

- a) $4 \cos 2x + 5 \cos x = 9$;
- b) $\cos 3x + \cos 5x = 2$;
- c) $\cos x \cos 4x = 1$;
- d) $\cos \pi\sqrt{x} \cos \pi\sqrt{x+4} = 1$;
- e) $\sin^7 x + \cos^5 x = 1$;
- f) $\sin^2 5x + 5 \sin 8x + 2 \cos^6 x = 9$.

В целом же метод оценки состоит в использовании оценок значений выражений, отвечающих частям решаемого уравнения. Рассмотрим более сложные примеры.

2. Решите уравнение:

- a) $\cos \frac{3\pi}{8} x = x^2 + 1$;
- b) $4 \sin 7x = x^2 + 6x + 13$;
- c) $2 \cos(0,3x) = 3^x + 3^{-x}$;
- d) $4 \cos^4 \frac{x}{4} = \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 2x$;
- e) $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$;
- f) $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0$.

Конспект к листку 2

1. Решите уравнение:

- a) $4 \cos 2x + 5 \cos x = 9$;
- b) $\cos 3x + \cos 5x = 2$;
- c) $\cos x \cos 4x = 1$;
- d) $\cos \pi \sqrt{x} \cos \pi \sqrt{x+4} = 1$;
- e) $\sin^7 x + \cos^5 x = 1$;
- f) $\sin^2 5x + 5 \sin 8x + 2 \cos^6 x = 9$.

Решение:

a) Так как оба косинуса не превосходят единицы, то данное равенство выполняется только в том случае, если они равны единице одновременно:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

b) По тем же соображениям, что и в примере под пунктом а), данное равенство выполняется только в том случае, если справедлива система:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\pi n \\ 5x = 2\pi m \end{cases}, n, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{2\pi m}{5} \end{cases}, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Остается выяснить, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Отличием этого примера от примера под пунктом а) в том, что поиск пересечения множеств решений уравнений системы представляет собой нетривиальную задачу.

Имеем: $\frac{2\pi n}{3} = \frac{2\pi m}{5}$. Умножив обе части на 15 и сократив на 2π , получим:

$$5n = 3m \Rightarrow m : 5, n : 3 \Rightarrow m = 5k, n = 3t, k, t \in \mathbb{Z}.$$

Находим x : $x = \frac{2\pi n}{3} = \frac{2\pi \cdot 3t}{3} = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

с) Чтобы произведение двух различных чисел было равно единице, они должны быть взаимно обратными. Так как $|\cos \varphi| \leq 1$, то число, обратное ему, по модулю больше либо равно единице. Соответственно, равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases}.$$

Остается решить полученные системы и объединить решения. Это не сложно, но занимает продолжительное время. *Рациональнее другой способ решения:* можно умножить обе части исходного равенства на 2 и преобразовать его левую часть в сумму косинусов: $\cos(x - 4x) + \cos(x + 4x) = 2$.

Тем самым будет получена одна система, и работа будет сокращена вдвое: $\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos 5x = 1 \end{cases}$. Решение этой системы представлено в пункте б).

Решение исходного уравнения *без использования метода оценки* можно представить следующим образом:

1) Осуществим перенос слагаемого из правой части и решим уравнение $\cos x \cos 4x - 1 = 0$.

2) Применим формулу двойного угла: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, выполним подстановку. После раскрытия скобок получим: $\cos x - 2 \cos x \sin^2 2x - 1 = 0$.

3) Применим формулу двойного угла для $\sin 2x$. Уравнение примет вид: $\cos x - 2 \cos x (2 \sin x \cos x)^2 - 1 = 0$. Нужно раскрыть скобки: $\cos x - 8 \sin^2 x \cos^3 x - 1 = 0$.

4) Выразим из основного тригонометрического тождества квадрат синуса: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Подставим это значение в уравнение $\cos x - 8 \sin^2 x \cos^3 x - 1 = 0$. Получим: $\cos x - 8(1 - \cos^2 x) \cos^3 x - 1 = 0$.

5) Осуществим замену: $\cos x = t$. Теперь нужно решить уравнение $t - 8(1 - t^2)t^3 - 1 = 0$.

6) Разложим многочлен в левой части полученного уравнения на множители: $(t - 1)(8t^4 + 8t^3 + 1)$. Уравнение $t - 8(1 - t^2)t^3 - 1 = 0$ запишется в виде $(t - 1)(8t^4 + 8t^3 + 1) = 0$.

7) Покажем, что уравнение $(t - 1)(8t^4 + 8t^3 + 1) = 0$ имеет лишь одно решение: $t = 1$. Для этого рассмотрим графическое решение уравнения $8t^4 + 8t^3 + 1 = 0$.

$$8t^4 + 8t^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 8t^4 + 8t^3 = -1.$$

Рассмотрим графики функций $y = 8t^4 + 8t^3$ и $y = -1$. Покажем, что они не имеют общих точек. Найдем производную $(8t^4 + 8t^3)'$:

$$(8t^4 + 8t^3)' = 32t^3 + 24t^2 = 8t^2(4t + 3).$$

Найдем критические точки функции $y = 8t^4 + 8t^3$:

$$8t^2(4t + 3) = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{3}{4}, t_2 = 0.$$

Точка t_1 является минимумом функции. Найдем значение функции $y = 8t^4 + 8t^3$ в точке t_1 : $-8\left(-\frac{3}{4}\right)^4 - 8\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{32} > -1$. Для обеспечения наглядности можно выполнить построение графиков функций $y = 8t^4 + 8t^3$ и $y = -1$ на доске (рисунок 9).

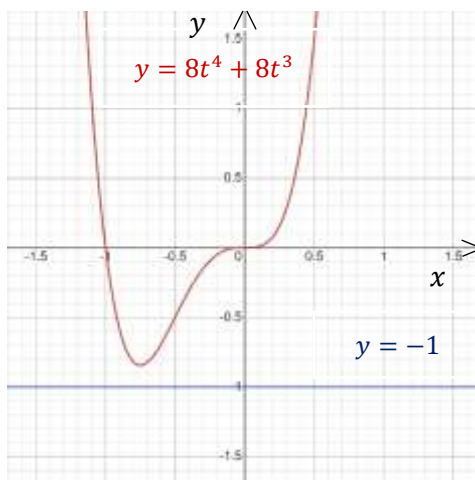


Рисунок 9 – Графическое решение уравнения $t^4 + 8t^3 + 1 = 0$

Действительно, графики функций $y = 8t^4 + 8t^3$ и $y = -1$ не имеют общих точек, поэтому уравнение $8t^4 + 8t^3 + 1 = 0$ не имеет решений.

8) Выполним обратную замену: $t = \cos x$. Остается решить простейшее уравнение: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Следует предложить ученикам решить уравнение с) без использования метода оценки самостоятельно. Так они актуализируют ранее полученные знания (в частности, о способах решения уравнений четвертой степени), а также убедятся в оптимальности изучаемого метода.

д) Из тех же соображений, что при решении примера под пунктом с), заключим, что при умножении можно получить единицу в одном из случаев:

$$\begin{cases} \cos \pi\sqrt{x} = 1 \\ \cos \pi\sqrt{x+4} = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos \pi\sqrt{x} = -1 \\ \cos \pi\sqrt{x+4} = -1. \end{cases}$$

Важно заметить, что решениями являются значения x не меньше 0, поскольку выражения x и $(x+4)$ находятся под знаком арифметического квадратного корня. Учитывая этот факт, рассмотрим отдельно оба случая.

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ \cos \pi\sqrt{x} = 1 \\ \cos \pi\sqrt{x+4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi\sqrt{x} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi\sqrt{x+4} = 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x+4} = 2l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ k \geq 0 \\ l \geq 0 \\ x = 4k^2, k \in \mathbb{Z} \\ x = 4l^2 - 4, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ \cos \pi\sqrt{x} = -1 \\ \cos \pi\sqrt{x+4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi\sqrt{x} = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \pi\sqrt{x+4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x+4} = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 + 2m \geq 0 \\ 1 + 2n \geq 0 \\ x = (1 + 2m)^2, m \in \mathbb{Z} \\ x = (1 + 2n)^2 - 4, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ m \geq -\frac{1}{2} \\ n \geq -\frac{1}{2} \\ x = (1 + 2m)^2, m \in \mathbb{Z} \\ x = (1 + 2n)^2 - 4, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: $x = 0$.

е) Оценим каждое слагаемое в сумме $\sin^7 x + \cos^5 x$. $\sin^7 x \leq \sin^2 x$, так как $\sin^7 x - \sin^2 x = \sin^2 x(\sin^5 x - 1) \leq 0$, так как $|\sin x| \leq 1$. Аналогично, $\cos^5 x \leq \cos^2 x$. Следовательно, $\sin^7 x + \cos^5 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, причем равенство возможно в том и только в том случае, когда $\begin{cases} \sin^7 x = \sin^2 x \\ \cos^5 x = \cos^2 x \end{cases}$.

Решим первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} \sin^7 x = \sin^2 x &\Leftrightarrow \sin^7 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^5 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^5 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^5 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} \cos^5 x = \cos^2 x &\Leftrightarrow \cos^5 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(\cos^3 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \cos^3 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ \cos^3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Остается найти общие корни:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2\pi l, n, l \in \mathbb{Z}$.

Отличие данного примера от примеров под пунктами а) и б) в том, что для оценки значений функции требуется обращение к основному тригонометрическому тождеству.

г) Из тех же соображений, что при решении примера под пунктом е), заключим, что $\sin^2 5x \leq 1$, $5 \sin 8x \leq 5$, $2\cos^6 x \leq 2$, поэтому $\sin^2 5x + 5 \sin 8x + 2\cos^6 x \leq 8$. Можно сделать вывод, что решений нет.

Ответ: решений нет.

2. Решите уравнение:

- a) $\cos \frac{3\pi}{8} x = x^2 + 1$;
b) $4 \sin 7x = x^2 + 6x + 13$;
c) $2 \cos(0,3x) = 3^x + 3^{-x}$;
d) $4 \cos^4 \frac{x}{4} = \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 2x$;
e) $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$;
f) $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0$.

Решение:

a) Оценим левую часть уравнения: $-1 \leq \cos \frac{3\pi}{8} x \leq 1$. Затем рассмотрим правую часть: $x^2 + 1 \geq 1$.

Соответственно, равенство достигается при

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} x = 1 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} x = 1 \Rightarrow \cos(0) = 1. \\ x = 0 \end{cases}$$

Равенство $\cos(0) = 1$ верно. Значит, $x = 0$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = 0$.

b) Оценим левую часть уравнения: $-4 \leq 4 \sin 7x \leq 4$. Выделим полный квадрат в правой части: $x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 4 \geq 4$.

Соответственно, чтобы исходное равенство было верным, необходимо, чтобы обе его части были численно равны 4:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 \sin 7x = 4 \\ x^2 + 6x + 13 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ (x + 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \sin(-21) = 1. \end{aligned}$$

Равенство $\sin(-21) = 1$ неверно, так как $-7\pi \leq -21 \leq -\frac{13\pi}{2}$.

Ответ: решений нет.

c) Оценим левую часть уравнения: $-2 \leq 2 \cos(0,3x) \leq 2$. Правая часть уравнения представляет собой сумму взаимно обратных функций. Покажем, что эта сумма принимает значения не меньше 2.

Обозначим $3^x = a, a > 0$.

$$(a - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Из вышесказанного следует, что равенство достигается при условии, что

$$\begin{cases} 2 \cos(0,3x) = 2 \\ 3^x + 3^{-x} = 2. \end{cases}$$

Рационально сначала решить второе уравнение системы, а затем проверить, является ли полученное решение корнем первого уравнения:

$$3^x + 3^{-x} = 2 \Leftrightarrow 3^x - 2 + \frac{1}{3^x} = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0.$$

Осуществим замену: $3^x = t, t > 0$.

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Выполним обратную замену и найдем корень показательного уравнения:

$$3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Нетрудно убедиться, что корень $x = 0$ является корнем и первого уравнения.

Ответ: $x = 0$.

d) Используем формулу понижения степени и получим:

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{2} \right)^2 &= \cos \frac{x}{2} + 2 \left(\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{2} \right) \cos 2x \Leftrightarrow \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \\ &= \cos \frac{x}{2} + \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) \cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \\ &= - \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) + \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) \cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \\ &= \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) (\cos 2x - 1). \end{aligned}$$

Так как $1 + \cos \frac{x}{2} \geq 0$ и $(\cos 2x - 1) \leq 0$, то равенство возможно, если

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

е) Применим метод вспомогательного угла к выражению в скобках:
 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Тогда исходное уравнение можно записать следующим образом: $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin 3x = 2$. Представим левую часть полученного равенства в виде разности косинусов и получим:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - 3x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + 3x\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) = 2.$$

Так как $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right| \leq 1$ и $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)\right| \leq 1$, то равенство выполняется, если

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

ф) Нетрудно заметить, что исходное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = 1$, $b = 2(\sin y + \cos y)$, $c = 2$. Исходное уравнение имеет решения, если его дискриминант неотрицателен:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{2(\sin y + \cos y)}{2}\right)^2 - 1 \cdot 2 = (\sin y + \cos y)^2 - 2 = \\ &= \sin^2 y + 2 \sin y \cos y + \cos^2 y - 2 = \\ &= (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2 \sin y \cos y - 2 = 1 + \sin 2y - 2 = \sin 2y - 1. \end{aligned}$$

$\sin 2y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2y \geq 1$. Так как $|\sin 2y| \leq 1$, то решение возможно, если $\sin 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Тогда } \sin y + \cos y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \pm\sqrt{2}.$$

Исходное уравнение сводится к решению системы:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 2 = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\operatorname{tg} x + \sqrt{2})^2 = 0 \\ (\operatorname{tg} x - \sqrt{2})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{2} \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \arctg \sqrt{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \pm \arctg \sqrt{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Листок 3. Графическая интерпретация решения тригонометрического неравенства (системы, включающей тригонометрическое неравенство)

Задача 1. Найдите графическое представление линейного неравенства:

$$|5x + 6y| + |4x - 6y| \leq 9x.$$

Задача 2. Вычислите длину меньшей дуги единичной окружности, концы которой определяются углами α и β , о которых известно:

а) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \sin \beta = -\frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \sin \beta = -\frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$.

Задача 3 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2012 год, 11 класс). Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства $|2 \sin x + 3 \cos x| + |\sin x - 3 \cos x| \leq 3 \sin x$ на отрезке $[0; 4\pi]$.

Задача 4 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2017 год, 11 класс). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2)$.

Задача 5 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2012 год, 11 класс). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}$.

Задача 6 («Ломоносов», заочный этап, 2012 год, 11 класс). Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y) , удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2 \text{ и } \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x (4 \sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

Конспект к листку 3

Задача 1. Найдите графическое представление линейного неравенства:

$$|5x + 6y| + |4x - 6y| \leq 9x.$$

Решение:

$$|(5x + 6y) + (4x - 6y)| \leq |5x + 6y| + |4x - 6y| \text{ (по свойству модуля).}$$

Заметим, что $|(5x + 6y) + (4x - 6y)| = |9x|$. И перепишем последнее неравенство: $|9x| \leq |5x + 6y| + |4x - 6y|$.

С другой стороны, по условию, $|5x + 6y| + |4x - 6y| \leq 9x$. Но $|5x + 6y| + |4x - 6y| \geq 0$, так как $|5x + 6y| \geq 0$ и $|4x - 6y| \geq 0$. Поэтому $9x \geq 0$. Значит, с выражения $|9x|$ можно снять знак модуля: $9x \leq |5x + 6y| + |4x - 6y|$.

Из вышесказанного следует, что $|5x + 6y| + |4x - 6y| = 9x$ ($x \geq 0$). Это уравнение имеет решения только при

$$\begin{cases} 5x + 6y \geq 0 \\ 4x - 6y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{5x}{6} \\ y \leq \frac{2x}{3} \end{cases}.$$

Решение системы представлено на координатной плоскости в виде точек закрашенной области (рисунок 10).

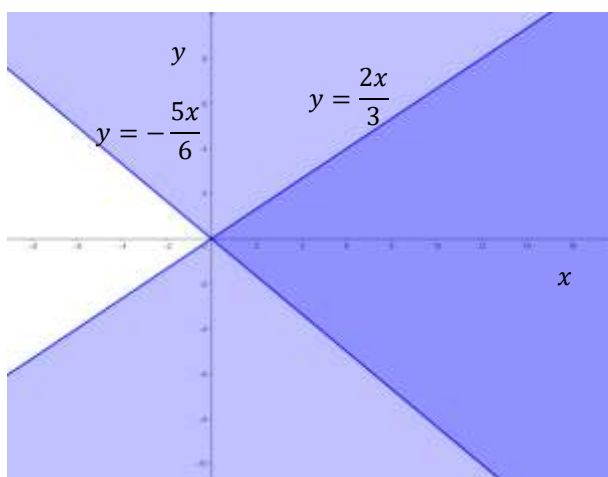


Рисунок 10 – Графическое решение неравенства

$$|5x + 6y| + |4x - 6y| \leq 9x$$

Задача 2. Вычислите длину меньшей дуги единичной окружности, концы которой определяются углами α и β , удовлетворяющими условиям:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \sin \beta = -\frac{2}{3}$; b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \sin \beta = -\frac{2}{3}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$.

Решение:

Длину дуги окружности, выраженную в радианной мере, находят по формуле: $L = \varphi \cdot R$ (L – длина дуги окружности, φ – число ее радиан, R – радиус окружности).

Соответственно, для единичной окружности: $L = \varphi$.

В каждом пункте найдем величину центрального угла φ , на который опирается меньшая дуга, концы которой определяются углами α и β .

a) Решим уравнения $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\sin \beta = -\frac{2}{3}$ с помощью единичной окружности (рисунок 11).

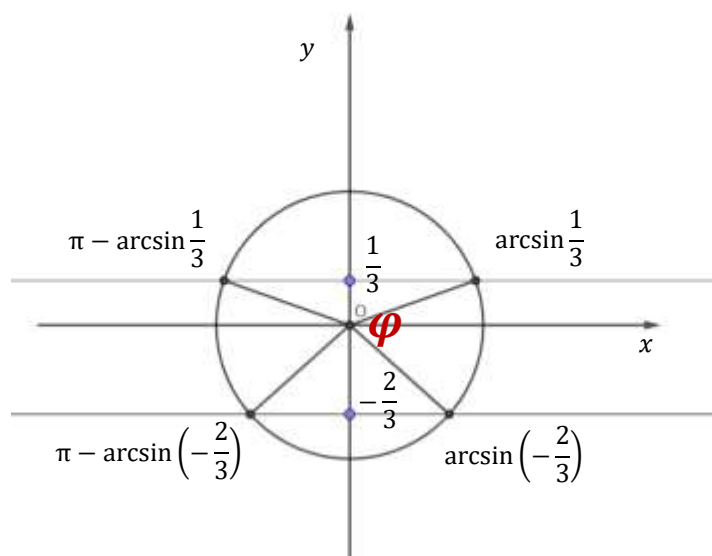


Рисунок 11 – Решение уравнений $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\sin \beta = -\frac{2}{3}$

с помощью единичной окружности на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Меньшая дуга, концы которой определяются углами α и β , заключена между $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\frac{1}{3}$ (между $\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ и $\left(\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$).

Найдем величину центрального угла φ , на который опирается эта дуга:

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{3} - \arcsin \left(-\frac{2}{3} \right) = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{2}{3}.$$

Вычислим синус угла φ :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{2}{3} \right) = \\ &= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \cos \left(\arcsin \frac{2}{3} \right) + \cos \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \sin \left(\arcsin \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9} \right)$.

Примечание. Косинус от арксинуса можно вычислить по формуле: $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$ ($-1 \leq a \leq 1$). Эта формула следует из определений синуса, косинуса и арксинуса.

б) Решим уравнения $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin \beta = -\frac{2}{3}$ с помощью единичной окружности (рисунок 12).

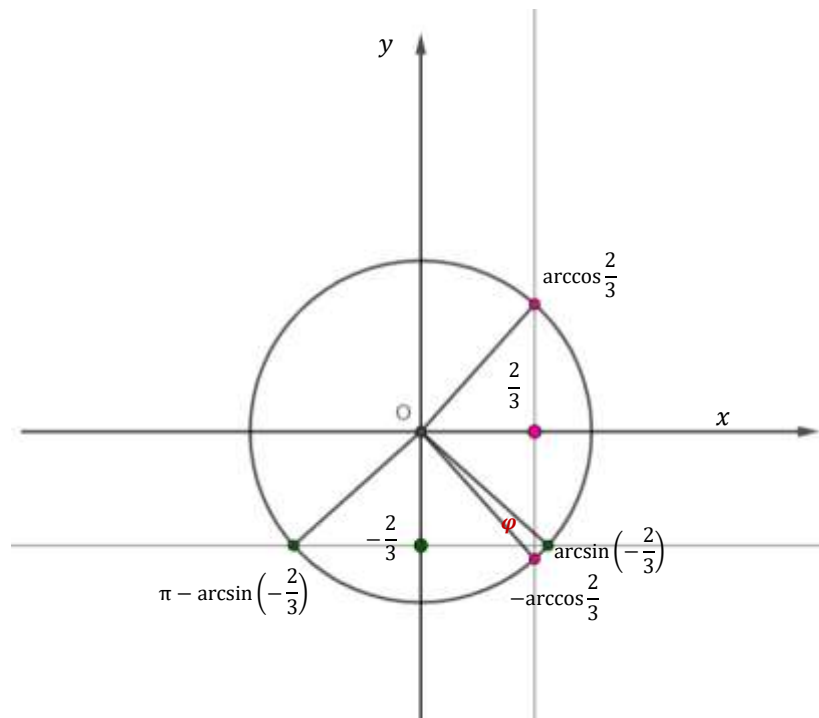


Рисунок 12 – Решение уравнений $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin \beta = -\frac{2}{3}$

с помощью единичной окружности на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$

Меньшая дуга, концы которой определяются углами α и β , заключена между $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\left(-\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Найдем величину центрального угла φ , на который опирается эта дуга:

$$\varphi = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\arccos\frac{2}{3}\right) = \arccos\frac{2}{3} - \arcsin\frac{2}{3}.$$

Вычислим синус угла φ :

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \sin\left(\arccos\frac{2}{3} - \arcsin\frac{2}{3}\right) = \\ &= \sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) \cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) - \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) \sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Примечание. Синус от арккосинуса можно вычислить по формуле: $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$ ($-1 \leq a \leq 1$). Эта формула следует из определений синуса, косинуса и арккосинуса.

Таким образом, $\varphi = \arcsin\frac{1}{9}$.

с) Решим уравнения $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$ с помощью единичной окружности (рисунок 13).

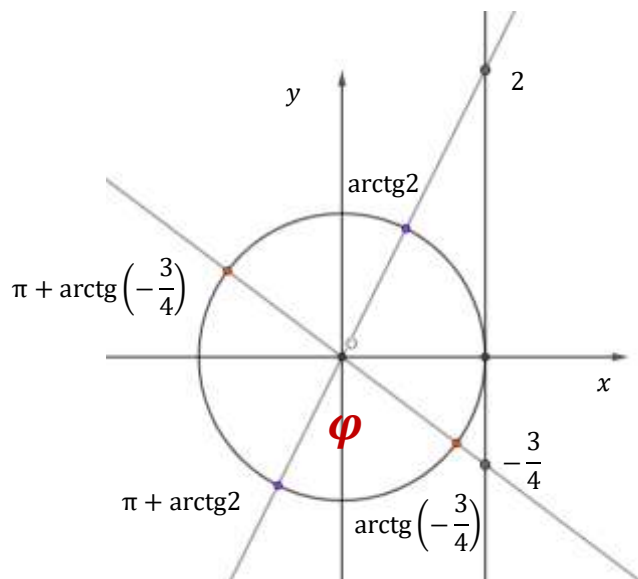


Рисунок 13 – Решение уравнений $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$

с помощью единичной окружности на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

Меньшая дуга, концы которой определяются углами α и β , заключена между $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $(\pi + \operatorname{arctg}2)$ (между $(\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right))$ и $\operatorname{arctg}2$).

Найдем величину центрального угла φ , на который опирается эта дуга:

$$\varphi = 2\pi - (\pi + \operatorname{arctg}2) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Вычислим тангенс угла φ (заметим, что угол $(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}2)$ – тупой):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg}\left(\pi - \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = \\ &= -\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)} = -\frac{2 + \frac{3}{4}}{1 - 2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{11}{2}$.

Ответ: а) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{9}\right)$; б) $\arcsin\frac{1}{9}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{11}{2}$.

Задача 3. («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2012 год, 11 класс). Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства $|2\sin x + 3\cos x| + |\sin x - 3\cos x| \leq 3\sin x$ на отрезке $[0; 4\pi]$.

Решение:

Введем следующие обозначения: $\sin x = a$, $\cos x = b$. Рассмотрим неравенство $|2a + 3b| + |a - 3b| \leq 3a$. Решение аналогичного неравенства представлено в задаче 1. Рассуждая тем же образом, заключим, что

$$\begin{cases} 2a + 3b \geq 0 \\ a - 3b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{3}{2}b \\ a \geq 3b \end{cases}.$$

Важно помнить о том, что в неравенстве $|2a + 3b| + |a - 3b| \leq 3a$ a и b – ограниченные функции, которые связывает соотношение: $a^2 + b^2 = 1$.

Из вышесказанного следует, что на плоскости решение исходного неравенства представляет собой дугу единичной окружности, находящуюся в верхней полуплоскости между прямыми $a = -\frac{3}{2}b$ и $a = 3b$ (рисунок 14).

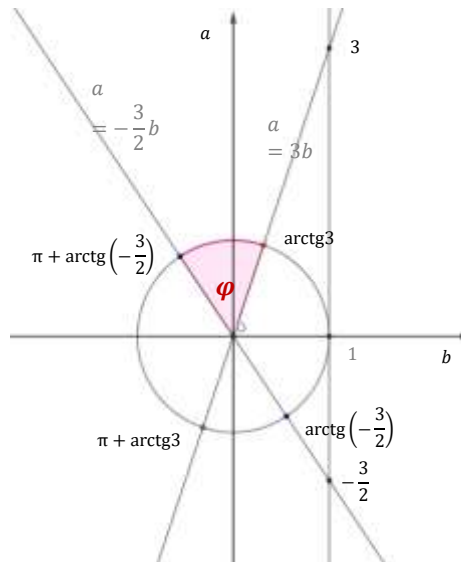


Рисунок 14 – Графическое решение неравенства

$$|2 \sin x + 3 \cos x| + |\sin x - 3 \cos x| \leq 3 \sin x$$

Чтобы вычислить длину рассматриваемой дуги, поступим таким же образом, что и в задаче 2. Найдем величину центрального угла φ , на который опирается эта дуга:

$$\varphi = \left(\pi + \arctg\left(-\frac{3}{2}\right) \right) - \arctg 3 = \pi - \left(\arctg \frac{3}{2} + \arctg 3 \right).$$

Вычислим тангенс угла φ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \left(\pi - \left(\arctg \frac{3}{2} + \arctg 3 \right) \right) = -\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{3}{2} + \arctg 3 \right) = \\ &= -\frac{\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{3}{2} \right) + \operatorname{tg}(\arctg 3)}{1 - \operatorname{tg} \left(\arctg \frac{3}{2} \right) \operatorname{tg}(\arctg 3)} = -\frac{\frac{3}{2} + 3}{1 - \frac{3}{2} \cdot 3} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi = \arctg \frac{9}{7}$.

С учетом того, что решение нужно искать на промежутке $[0; 4\pi]$, указанную дугу надо посчитать дважды.

Ответ: $2\arctg \frac{9}{7}$.

Задача 4 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2017 год, 11 класс). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2)$.

Решение:

По области определения $-0,5 \leq x \leq 0,5$.

Так как $\arcsin(2x) + \arccos(2x) = \frac{\pi}{2}$, то $-2 \leq y \leq 2$.

Остается вычислить площадь квадрата $\{-0,5 \leq x \leq 0,5, -2 \leq y \leq 2\}$. Она равна 4.

Ответ: 4.

Задача 5 («Покори Воробьёвы горы», заключительный тур, 2012 год, 11 класс). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}$.

Решение:

Область допустимых значений неравенства определяется системой

$$\begin{cases} \arcsin x \geq 0 \\ \arccos y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Если $-1 \leq y \leq 0$, то $\arccos y \geq \frac{\pi}{2} \geq \arcsin x$. Как и в задаче 4, необходимо вычислить площадь S_1 квадрата $\{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$ (рисунок 15).

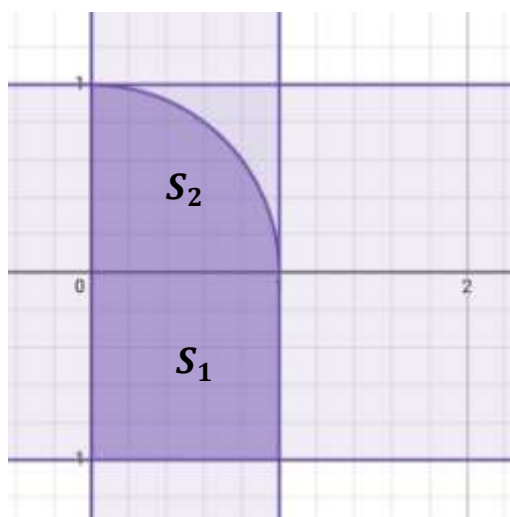


Рисунок 15 – Фигура, точки (x, y) которой удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}$$

На оставшемся множестве $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ справедливы неравенства $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$ и, так как функция $\sin t$ возрастает при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, получим равносильные неравенства:

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y) \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Поэтому решением также является четверть единичного круга, площадь S_2 которого $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $1 + \frac{\pi}{4}$.

Задача 6 («Ломоносов», заочный этап, 2012 год, 11 класс). Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y) , удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2 \text{ и } \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x (4 \sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

Решение:

Фигура, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2$ при всех t представляет собой круг, заданный условием $x^2 + y^2 < \pi^2$.

Преобразуем второе неравенство:

$$\begin{aligned} \cos y &< 2 + \cos 2x + \cos x (4 \sin t - 1) - \cos 2t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos y &< 2 + (2\cos^2 x - 1) + 4\cos x \sin t - \cos x - (1 - 2\sin^2 t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos y &< 2\cos^2 x + 4\cos x \sin t - \cos x + 2\sin^2 t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(\cos x + \sin t)^2 &> \cos y + \cos x. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что (x, y) , удовлетворяющие ему при всех t , это в точности (x, y) , удовлетворяющие неравенству $\cos y + \cos x < 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} < 0$.

Ввиду периодичности задачи по каждой переменной, выпишем решение последнего неравенства на периоде:

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} > 0 \\ \cos \frac{x-y}{2} < 0 \\ \cos \frac{x+y}{2} < 0 \\ \cos \frac{x-y}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - \pi < y < -x + \pi \\ x + \pi < y < x + 3\pi \\ -x + \pi < y < -x + 3\pi \\ x - \pi < y < x + \pi. \end{cases}$$

Фигура, заданная этими неравенствами, представляет собой два квадрата, а с учетом периодичности – «паркет» из квадратов (рисунок 16).

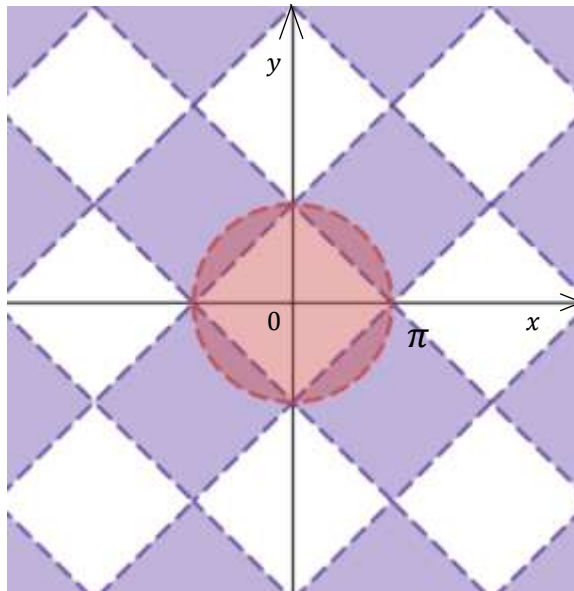


Рисунок 16 – Фигура, точки (x, y) которой удовлетворяют неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 \text{ и } \cos x + \cos y < 0$$

Пересечение круга с «паркетом квадратов» состоит из четырех круговых сегментов, суммарную площадь которых нужно искать как площадь дополнения к квадрату, заданному условием $|x| + |y| \leq \pi$ в круге $x^2 + y^2 < \pi^2$. Поэтому искомая площадь равна: $\pi^3 - 2\pi^2$.

Ответ: $\pi^3 - 2\pi^2$.

Листок 4. Свойства и график функции $y = \sin x$

Часть А. Преобразование графика функции $y = \sin x$

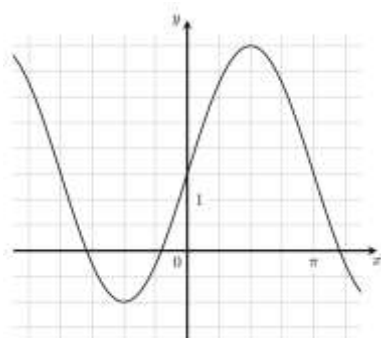


Рисунок 17 – График функции

$$f(x) = a \sin x + b$$

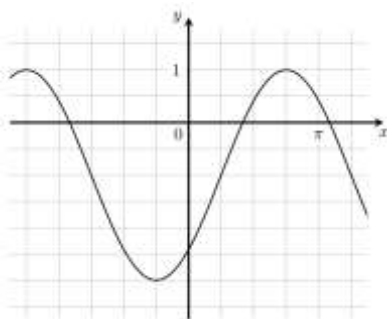


Рисунок 18 – График функции

$$g(x) = c \sin(x + d) + e$$

Задача 1. На рисунке 17 изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$.

Найдите a и b .

Задача 2. На рисунке 18 изображен график функции $g(x) = c \sin(x + d) + e$.

Найдите e .

Задача 3 (*Московская математическая олимпиада, заключительный этап, 2011 год, 11 класс*). Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы её начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

Задача 4 (*Всероссийская олимпиада по математике, региональный этап, 2011 год, 11 класс*). Даны различные натуральные числа a , b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное

число c , отличное от a , b , и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

Задача 5 (Информационно-поисковая система задач по математике «Problems.ru», задача №35252). На листе бумаги нарисован график функции $y = \sin x$. Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на 2π , совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.

Часть В. Задачи на построение

Задача 1. На плоскости задана прямоугольная система координат. С использованием циркуля и чертежного угольника постройте такой *невыпуклый* угол α , что а) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$; б) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Примечание. Предполагается, что на стороны чертежного угольника не нанесены единицы деления.

Задача 2. С помощью циркуля и линейки постройте *острый* угол β такой, что: а) $\operatorname{tg} \beta = 0,2$; б) $\operatorname{ctg} \beta = 0,2$.

Задача 3. Дан отрезок c . Как построить угол α , тангенс которого равен c ?

Задача 4. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом, и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Каким образом с помощью циркуля и линейки восстановить масштаб изображения, если: а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Задача 5 (Московская математическая олимпиада, заключительный этап, 2009 год, 11 класс). На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом, и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной точке, если: а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Конспект к листку 4

Часть А. Преобразование графика функции $y = \sin x$

Задача 1. На рисунке 17 изображен график функции

$$f(x) = a \sin x + b.$$

Найдите a и b .

Решение:

По графику, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, тогда $a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 4 \Leftrightarrow a + b = 4$. Далее, по графику, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, тогда $a \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -1 \Leftrightarrow -a + b = -1$.

Остается решить систему:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 + b = 4 \\ a = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2,5 \\ b = 1,5 \end{cases}.$$

Ответ: $a = 2,5$, $b = 1,5$.

Задача 2. На рисунке 18 изображен график функции

$$g(x) = c \sin(x + d) + e.$$

Найдите e .

Решение:

Заметим, что наибольшее значение функции $\sin(x + d)$ равно 1, а наименьшее ее значение равно (-1) .

Тогда при $c > 0$ наибольшее значение функции $g(x)$ равно $(c + e)$, а наименьшее равно $(-c + e)$. При $c < 0$, наоборот, наибольшее значение функции $g(x)$ равно $(-c + e)$, а наименьшее равно $(c + e)$.

Сложим наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$:

$$(c + e) + (-c + e) = 2e.$$

Судя по графику, наибольшее значение функции $g(x)$ равно 1, а наименьшее равно (-3) .

Тогда окончательно имеем: $1 + (-3) = 2e \Leftrightarrow e = -1$.

Ответ: -1 .

Задача 3 (Московская математическая олимпиада, заключительный этап, 2011 год, 11 класс). Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы её начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

Решение:

Пусть $y = \sin x$.

Воспользуемся формулой понижения степени и правилом приведения:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)}{2}.$$

Значит, при $x = \frac{\pi}{2} + 2t$ и $z = \frac{1-y}{2}$ (или, что то же самое, при $y = -2z + 1$) получим $z = \sin^2 t$.

Начало координат O' новой системы координат $O'tz$ относительно старой системы Oxy имеет координаты $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, а единицы измерения на осях новой системы в два раза больше по сравнению со старой системой.

Ответ: Да, может. Например, начало координат новой системы координат относительно старой системы может иметь координаты $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Единицы измерения на осях новой системы в два раза больше по сравнению со старой системой.

Примечание. Для решения задачи 1 необходимо предъявить хотя бы одну искомую систему координат, существуют и другие возможные решения.

Можно заметить, что $\cos 2t = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)$. Случай « $\cos 2t = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$ » рассмотрен.

$$\text{Если } \cos 2t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right), \text{ то } \sin^2 t = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)}{2} = \frac{1 + \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)}{2}.$$

Значит, то при $x = 2t - \frac{\pi}{2}$ и $z = \frac{1+y}{2}$ (или $y = 2z - 1$) получим $z = \sin^2 t$.

В этом случае начало координат O' новой системы координат $O'tz$ относительно прежней системы Oxy имеет координаты $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$, а единицы длины на осях новой системы в два раза больше относительно исходных.

Объединим решения. С учетом периодичности функции синуса, в общем виде новая система координат может иметь центр с координатами $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, (-1)^{n+1}\right)$ ($n \in \mathbb{Z}$) в старой системе. Единицы измерения на осях новой системы должны быть в два раза больше по сравнению со старой системой.

Задача 4 (Всероссийская олимпиада по математике, региональный этап, 2011 год, 11 класс). Даны различные натуральные числа a, b . На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c , отличное от a, b , и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

Доказательство:

Пусть для определённости $a > b$.

Если (x_0, y_0) – одна из точек пересечения, то $\sin ax_0 = \sin bx_0$. Тогда $\sin ax_0 - \sin bx_0 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{ax_0 - bx_0}{2} \cos \frac{ax_0 + bx_0}{2} = 0$. Это уравнение сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \sin \frac{ax_0 - bx_0}{2} = 0 \\ \cos \frac{ax_0 + bx_0}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 - bx_0 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ ax_0 + bx_0 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значит, одно из чисел $(a - b)x_0$ или $(a + b)x_0$ «кратно» π . Следовательно, $(a^2 - b^2)x_0$ «кратно» π .

Положим $c = 2(a^2 - b^2) + a$. Тогда число $cx_0 - ax_0 = 2(a^2 - b^2)x_0$ «кратно» 2π . Значит, $\sin cx_0 = \sin ax_0 = y_0$, что и требуется.

Утверждение доказано.

Задача 5 (Информационно-поисковая система задач по математике «Problems.ru», задача №35252). На листе бумаги нарисован график функции $y = \sin x$. Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на 2π , совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.

Доказательство:

Чтобы свернуть лист в цилиндр так, чтобы все точки, абсциссы которых отличаются на 2π , были совмещены, достаточно добиться совмещения точек с абсциссами $x = 0$ и $x = 2\pi$. Длина окружности основания цилиндра в этом случае равна 2π , следовательно, радиус его основания равен единице.

Покажем, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости. Для этого введем в пространстве систему координат $Ouvz$ следующим образом: ось Oz направим вдоль оси цилиндра, а оси Ou и Ov проведем в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра так, чтобы ось Ou проходила через точку цилиндра, имевшую координаты $(0; 0)$ до свертывания листа.

Рассмотрим некоторую точку $A(u; v)$ на окружности $\{z = 0; u^2 + v^2 = 1\}$, являющейся сечением цилиндра плоскостью $z = 0$. Пусть φ – угол между положительным направлением оси Ou и радиусом OA (φ может принимать значения от 0 до 2π). Тогда после свертывания листа в цилиндр точка $(u; v; \sin \varphi)$ лежит на синусоиде, и все точки свернутой синусоиды представимы в таком виде.

Так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}$, то $\sin \varphi = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = v$. Отсюда видно, что точки вида $(u; v; \sin \varphi)$ на самом деле имеют вид $(u; v; v)$, и, следовательно, лежат в плоскости $z = v$.

Утверждение доказано.

Часть В. Задачи на построение

Задача 1. На плоскости задана прямоугольная система координат. С использованием циркуля и чертежного угольника постройте такой *невыпуклый* угол α , что:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$;

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Если задача имеет не единственное решение, покажите это на чертеже.

Примечание. Предполагается, что на стороны чертежного угольника не нанесены единицы деления.

Построение:

Построим единичную полуокружность с центром O в начале координат. Точки $(1; 0)$, $(0; 1)$ и $(-1; 0)$ обозначим соответственно A , B и C .

a) Проведем прямую $y = \frac{3}{4}$. Для этого нужно предварительно разделить отрезок OB на 4 равные части. Обозначим точки пересечения прямой $y = \frac{3}{4}$ с полуокружностью M и N . Проведем лучи OA , OM и ON (рисунок 19).

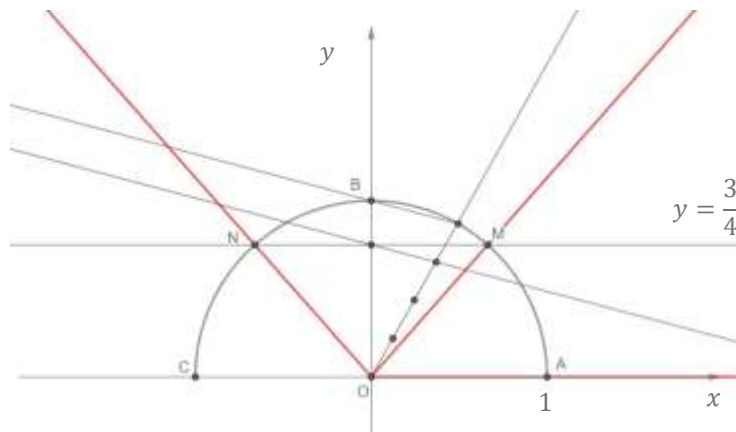


Рисунок 19 – Построение угла α такого, что $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

$\angle AOM$ и $\angle AON$ – искомые. Задача имеет 2 решения.

б) Проведем прямую $x = -\frac{2}{3}$. Для этого нужно предварительно разделить отрезок OC на 3 равные части. Обозначим точку пересечения прямой $x = -\frac{2}{3}$ с полуокружностью буквой K . Проведем лучи OA и OK (рисунок 20).

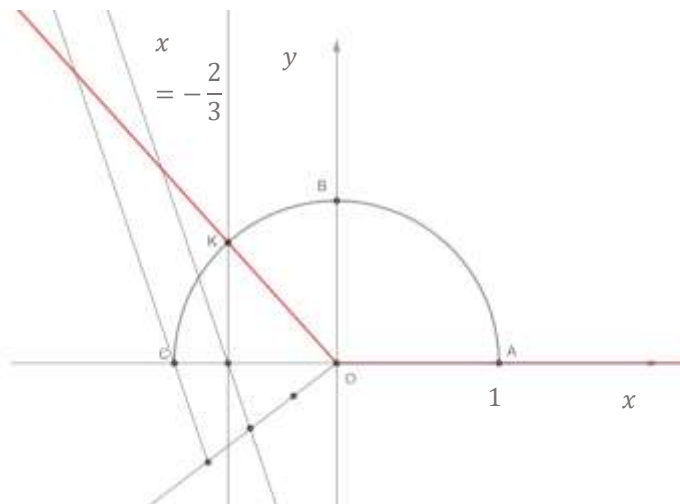


Рисунок 20 – Построение невыпуклого угла α такого, что $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$

$\angle AOK$ – искомый. *Задача имеет единственное решение.*

Задача 2. С помощью циркуля и линейки постройте *острый* угол β такой, что:

а) $\operatorname{tg} \beta = 0,2$;

б) $\operatorname{ctg} \beta = 0,2$.

Построение:

Построим прямоугольный треугольник, у которого отношение катетов $2:10 = 1:5$. Для этого построим прямую a и выберем на ней точку A .

Отложим на прямой a от точки A отрезок произвольной длины. Вторым концом отрезка обозначим буквой C .

В точке C восстановим перпендикуляр b к прямой a . От точки C на прямой b отложим последовательно пять отрезков, равных отрезку AC . Концом отложенного в последнюю очередь отрезка обозначим буквой B .

Соединим точки A и B отрезком.

Треугольник ABC с заданным отношением катетов построен (рисунок 21).

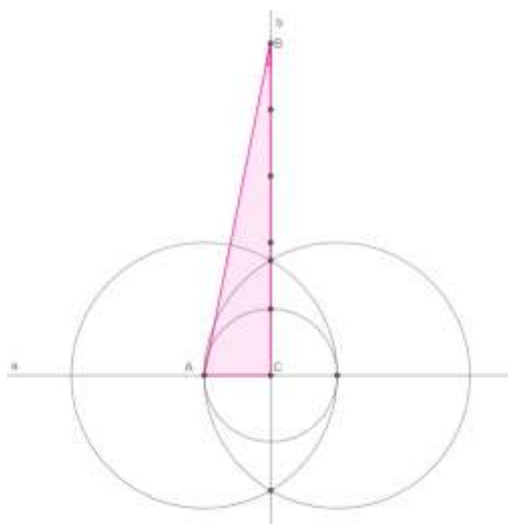


Рисунок 21 – Построение прямоугольного треугольника с заданным отношением катетов (1 к 5)

а) $\angle ABC$ – искомый.

б) $\angle BAC$ – искомый.

Задача 3. Дан отрезок c . Как построить угол α , тангенс которого равен c ?

Решение:

Так как $c > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Обратившись к опыту задач 1 и 2, заключим, что для построения угла α необходимо построить прямоугольный треугольник, у которого отношение катетов $c:1$. Тогда угол, противолежащий катету c , будет искомым.

Задача 4. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом, и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Каким образом с помощью циркуля и линейки восстановить масштаб изображения, если: а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

Чтобы восстановить масштаб изображения, необходимо построить отрезок длины 1, а после отложить равные ему отрезки на осях координат

а) Из точки $A = (a; \sin a)$, где $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \alpha\right)$, лежащей на графике функции, опустим перпендикуляр на ось Oy (рисунок 22).

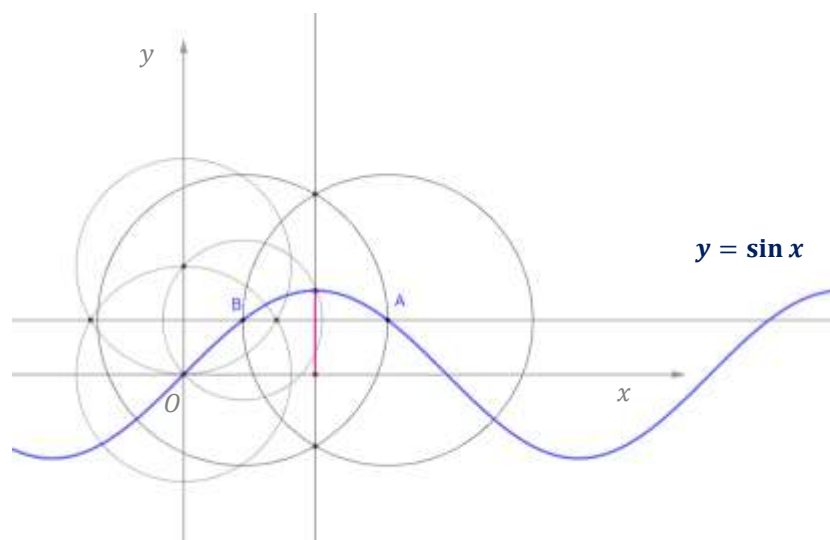


Рисунок 22 – Построение отрезка длиной 1

Так как $\sin(\pi - a) = \sin a$, то этот перпендикуляр пересечет график функции $y = \sin x$ в точке $B = (\pi - a; \sin a)$.

Через середину отрезка AB проведем прямую, перпендикулярную оси Ox . Она пересечет график функции в точке $(\frac{\pi}{2}; 1)$. Отрезок этой прямой от оси Ox до графика функции $y = \sin x$ имеет длину 1.

б) Пусть a и b – произвольные точки по оси Ox , удовлетворяющие условию $0 < b < a < \alpha$. Построим отрезок AB длины $\sin a + \sin b$ (рисунок 23).

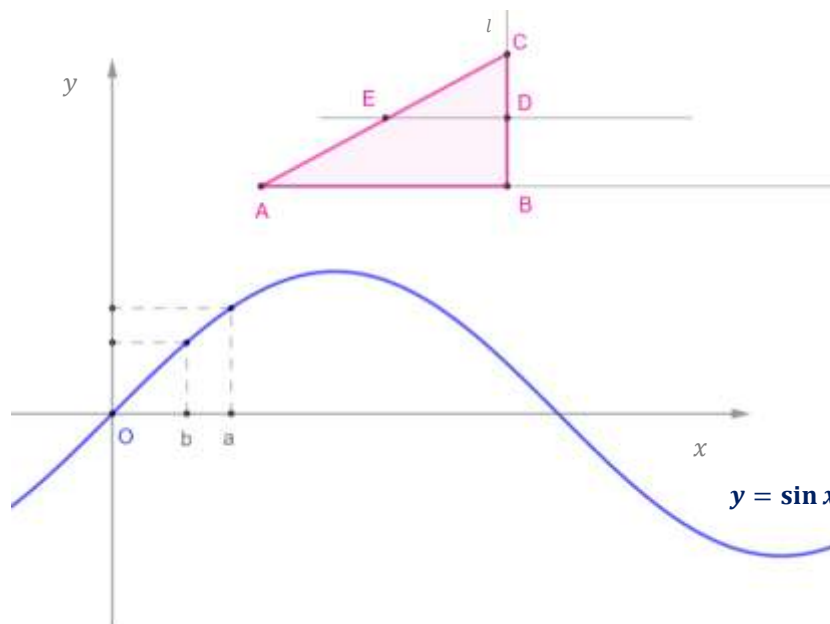


Рисунок 23 – Построение отрезка длиной 1

Через точку B проведем луч l , перпендикулярный отрезку AB .

Окружность с центром в точке A и радиусом $2 \sin \frac{a+b}{2}$ пересекает луч l в точке C .

Так как $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, то $\angle CAB = \frac{a-b}{2}$.

На отрезке BC отметим точку D такую, что $BD = \sin \frac{a-b}{2}$.

Через точку D проведем прямую, параллельную отрезку AB . Эта прямая пересечет отрезок AC в точке E .

Длина отрезка AE равна 1, так как $\sin \angle CAB = \sin \frac{a-b}{2} = \frac{BD}{AE}$.

Задача 5 (Московская математическая олимпиада, заключительный этап, 2009 год, 11 класс). На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом, и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной точке, если: а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$, где $x \in (0; \alpha)$, проведённой к заданной его точке $(x_0; \sin x_0)$, равен $y'(x_0) = \cos x_0$.

Чтобы построить касательную к графику функции $y = \sin x$ в точке $(x_0; \sin x_0)$, нужно:

1) Построить отрезок длины 1, или «восстановить масштаб». Этот шаг представляет собой решенную задачу 4.

2) Построить отрезок $|\cos x_0|$. Для этого нужно построить прямоугольный треугольник по гипотенузе, длина которой равна 1, и катету, длина которого равна $\sin x_0$, тогда длина второго катета построенного треугольника будет равна $\cos x_0$.

3) Построить угол с вершиной в заданной точке $(x_0; \sin x_0)$, тангенс которого равен $\cos x_0$. Для этого построим единичную полуокружность в центром O в начале координат, от точки O на оси Oy в положительном

направлении отложим отрезок, длина которого равна $\cos x_0$. Соединим $(0; \cos x_0)$ и $(1; 0)$ отрезком. Затем через точку $(x_0; \sin x_0)$ проведем прямую k , параллельную этому отрезку. Прямая k – искомая.

Построение касательной в заданной точке $(x_0; \sin x_0)$ графика функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$ при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ представлено на рисунке 24.

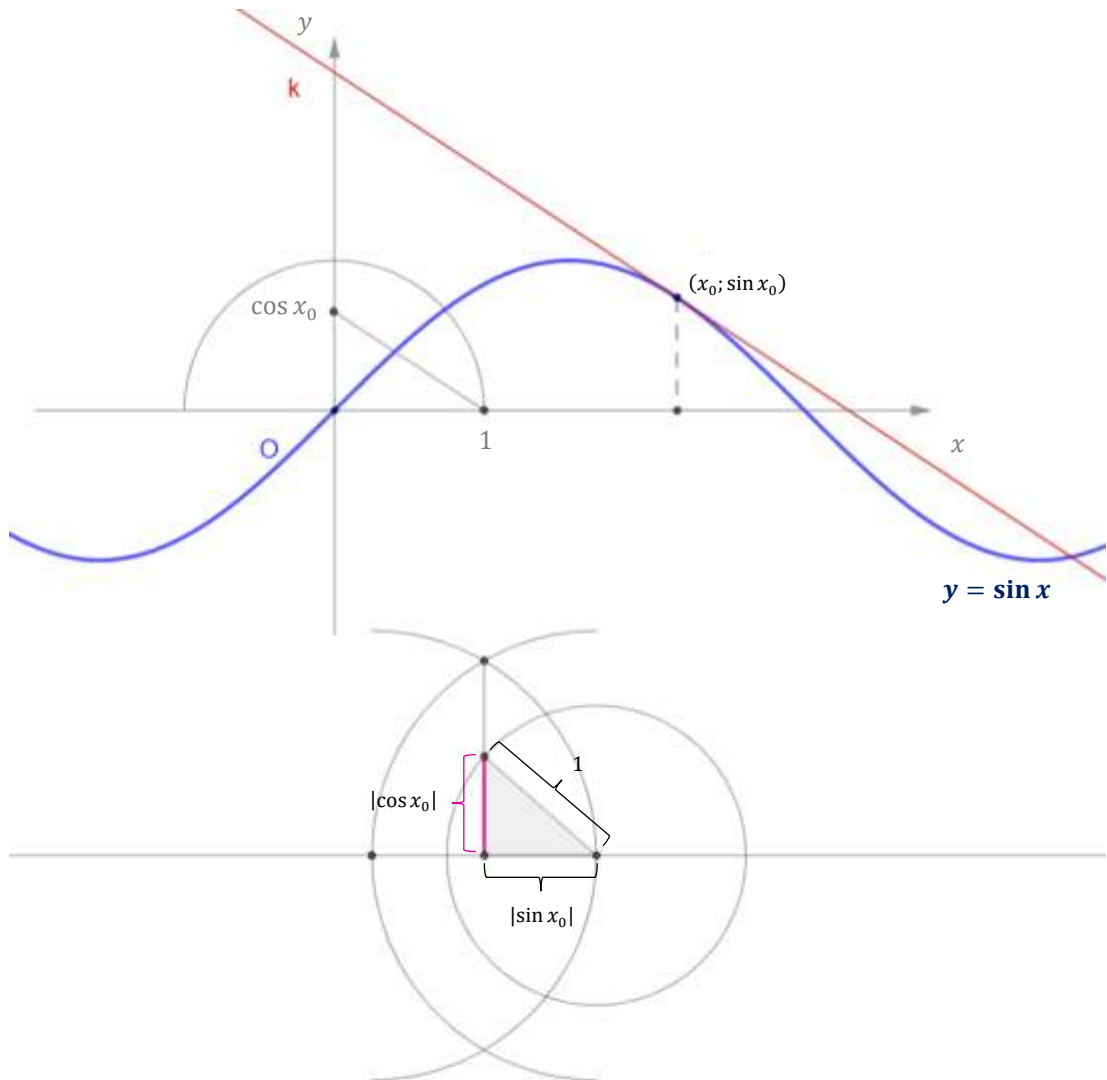


Рисунок 24 – Построение касательной k в заданной точке $(x_0, \sin x_0)$ графика функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$ при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Построение в пункте б) выполняется таким же образом.

2.2 Методические рекомендации по организации олимпиадной подготовки обучающихся старших классов

От своих сверстников одарённые дети отличаются повышенной мотивацией учебной деятельности, исследовательской активностью и самостоятельностью суждений. Они легко и быстро усваивают информацию, обладают отличной памятью и могут продолжительное время оставаться сосредоточенными на исследуемой проблеме. Перечисленные качества обуславливают высокие предметные результаты обучения.

Выявлению группы одаренных обучающихся способствует использование педагогом-предметником и школьным психологом некоторых методов диагностики:

- включение обучающихся в специальные игровые и предметно-ориентированные занятия;
- оценивание продуктов творческой деятельности школьников для выявления уровня развития их творческого потенциала;
- организация интеллектуальных соревнований (викторин, олимпиад, турниров, конференций) и творческих конкурсов, фестивалей, смотров;
- проведение психодиагностического исследования с использованием различных психометрических методик;
- подведение рейтинга деятельности обучающихся [13].

Подготовка одарённых обучающихся к участию в олимпиадах направлена, в первую очередь, на развитие их познавательных способностей и навыков. Ученик, претендующий на призовое место, должен владеть большим массивом предметных знаний и уметь оперировать теоретическим аппаратом при решении задач, устанавливать и замечать неочевидные причинно-следственные связи, отыскивать альтернативные пути поиска информации, отличаться критичностью в суждениях и обладать аналитическим складом ума.

Эффективность подготовки обучающихся старших классов к интеллектуальным состязаниям зависит от соблюдения некоторых условий:

- 1) Корректное выстраивание педагогом-наставником образовательной траектории развития обучающегося.

После выявления одарённых обучающихся наставнику необходимо обозначить вектор их личностного развития. Для этого нужно последовательно выполнить ряд задач:

- 1) провести диагностику текущего уровня развития предметных способностей одарённых школьников;
 - 2) произвести отбор учебно-методической литературы для организации самостоятельной работы учеников;
 - 3) выявить методы и приемы работы, оптимальные для данной группы обучающихся;
 - 4) наметить план предстоящей подготовительной работы.
- 2) Продолжительная, систематическая подготовка с начала учебного года.

Подготовка к олимпиадам реализуется в следующих направлениях:

- разбор классических олимпиадных задач на факультативных и кружковых занятиях, обязательных курсах по выбору;
 - решение развивающих задач на уроке математики (к ним относятся математические кроссворды, задачи в стихах, логические задачи, задачи на установление необычного свойства или факта);
 - чтение научной и научно-популярной литературы в рамках самоподготовки.
- 3) Поощрение познавательной активности и самостоятельного творческого поиска обучающихся.

Чтобы поддерживать высокую учебную мотивацию учащихся, полезно предлагать им поработать с анаграммами, криптограммами, ребусами, софизмами, совместно с ними придумывать задачи-сказки и задачи-шутки,

привлекать к участию в научно-практических конференциях, предметных неделях, вечерах.

При подготовке к любой олимпиаде необходимо ориентироваться на задания прошлых лет, а также использовать дополнительные ресурсы. В частности, информационно-поисковая система задач по математике «Problems.ru» содержит большое количество нестандартных задач, охватывающих такие разделы математики, как арифметика, алгебра, геометрия, логика, начала математического анализа. Для каждой представленной задачи проработаны 4 рубрики: «условие», «решение», «подсказка» (наводка к решению), «информация» (теоретические положения, подходы, истоки и прецеденты использования) [5].

Благодаря информатизации процесса обучения на просторах всемирной компьютерной сети «Интернет» в свободном доступе хранится большое количество научной и научно-популярной литературы по математике, конспекты лекций преподавателей ведущих университетов, сборники задач повышенной сложности, программы курсов и т.п. Их можно найти, например, в электронной библиотеке «Математическое образование» [10].

На сайте Виртуальной школы юного математика можно ознакомиться с темами, малоизучаемыми (или вообще не изучаемыми) в школьном курсе математики, отыскать необходимые формулы по некоторым темам («Модуль», «Квадратный трехчлен», «Прогрессии», «Степени», «Логарифмы», «Тригонометрия»), а также воспользоваться русско-английским и англо-русским словарями математических терминов. В разделе «Странички истории» представлена информация о поэтапном развитии математической науки и биографических данных крупнейших математиков. Задачи и примеры, приведенные в «Практикуме абитуриента», подготовлены для учащихся старших классов, готовящихся поступлению в высшие учебные заведения. Проверить свои умения они могут, обратившись к условиям выпускных экзаменов прошлых лет – вместе с решениями они представлены в разделе

«Экзамены, тесты». На странице «Математический юмор» можно найти афоризмы, задачи-шутки и анекдоты, понятные лишь любителям математики.

Задания, которые предлагаются обучающимся, должны быть ориентированы на развитие конвергентного и дивергентного мышления, поскольку олимпиадные задания требуют гибкости и неординарности суждений. Так как в период подготовки к олимпиадам и конкурсам обучающимся приходится работать с большими объемами учебной информации, в работе полезно использовать мнемотехнические приемы и обучать детей навыкам логической обработки материала.

Использование информационных технологий на дополнительных занятиях позволяет разнообразить способы предъявления изучаемого материала. Кратко и наглядно представить учебную информацию можно в виде презентации. Эстетика и стильность оформления слайдов, применение графики и звука, анимационные эффекты помогают обучающимся сосредоточиться на изучаемой теме и вызывают познавательный интерес к учебному предмету.

Существует большое количество сервисов для создания презентаций, видеопрезентаций, инфографики. Среди них стоит выделить те сервисы, которые обладают интуитивно понятным интерфейсом, удобным функционалом, отрывают возможность коллективной работы благодаря синхронизации через облачное хранилище: Google Slides, Prezi, Powtoon.

В обучении математике незаменимы моделирующие программы (такие как GeoGebra), дающие возможность визуализации каких-либо динамических процессов, которые затруднительно или просто невозможно воспроизвести в учебной лаборатории, а также инструментальные программные средства познавательного характера (Matlab, Mathcad).

Визуализация графиков тригонометрических функций с помощью универсальных графических редакторов высвобождает время на рассмотрение большего числа примеров и задач, а анимационные эффекты позволяют

установить связь между словесным описанием и графическим представлением любого объекта.

Следует подчеркнуть, что стиль общения педагога с обучающимися старших классов обладает определенной воспитательной силой в период их профессиональной ориентации. В общении с воспитанниками подросткового возраста учителю нужно быть строго тактичным. В глазах учеников педагог-наставник должен исполнять не только роль предметного эксперта, но и их старшего товарища, соратника. Учебную деятельность можно мотивировать, стимулируя познавательную активность путем установления доверительных взаимоотношений и исключая принуждение в любой форме [7].

Чтобы подготовить обучающихся к ситуации соревнования во время участия в предметных олимпиадах, необходимо предлагать им задания опережающего уровня сложности и регулярно проводить анализ учебных достижений, создавая ситуации успеха. Психологический комфорт на внеклассных занятиях по подготовке одаренных обучающихся к олимпиадам – важное условие для совместной продуктивной работы.

Заключение

В ходе написания работы были разработаны методические материалы по решению нестандартных тригонометрических задач в помощь педагогам, осуществляющим олимпиадную подготовку обучающихся старших классов. Таким образом, поставленная цель была *достигнута*.

Теперь можно сформулировать некоторые *выводы* по работе.

Олимпиадное движение не только помогает выявлять и развивать таланты школьников, но и является инструментом для определения образовательной траектории и поступления в вуз. Иными словами, предметные олимпиады выполняют роль социального лифта в образовании.

Особое место в профессиональном плане занимают предметные олимпиады и конкурсы, Перечень которых ежегодно утверждается Министерством науки и высшего образования Российской Федерации. Победа в перечневых олимпиадах гарантирует абитуриенту преимущество при поступлении в выбранный вуз.

В данной работе представлена развернутая характеристика математических олимпиад, включенных в Перечень олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год.

Анализ содержания перечневых олимпиад по математике для старших классов показал, что тригонометрические задачи являются обязательной частью испытаний последних лет, причем они преобладают в олимпиадах, ориентированных на учеников 11 классов.

Среди тригонометрических задач, которые в разные годы предлагались участникам перечневых олимпиад, встречались как задания повышенного уровня сложности, соответствующие школьной программе, так и нестандартные задачи. Нестандартной задаче характерны обманчивая простота

формулировки условия и отсутствие алгоритма решения – вместо этого происходит обращение к нетривиальным методам и приемам.

После детального изучения архивов перечневых математических олимпиад была получена следующая классификация тригонометрических задач олимпиадного уровня:

- I. Задания на установление свойства тригонометрической функции, заданной аналитическим способом: периодичности, четности (нечетности), наибольшего и наименьшего значения.
- II. Вычисление значения тригонометрического выражения. Доказательство тригонометрических тождеств.
- III. Решение тригонометрических уравнений с последующим отбором корней на заданном отрезке и подсчетом их количества, их систем.
- IV. Решение тригонометрических неравенств повышенного уровня сложности, их систем. Доказательство неравенств.
- V. Геометрические задачи, для которых тригонометрические функции являются инструментом решения.

Каждому выявленному типу задач соответствует группа методов, с использованием которых может быть получено верное, лаконичное решение. Так, наиболее часто в олимпиадных задачах на исследование тригонометрической функции необходимо сделать замену и рассмотреть функцию новой переменной. Но для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке бывает более удобен аппарат дифференциального исчисления.

Задания на вычисление значения тригонометрического выражения и доказательство тригонометрических тождеств соответствуют школьной программе, но имеют повышенный уровень сложности. Кроме основных формул тригонометрии, участникам олимпиад нужно знать формулы тройного аргумента, формулы преобразования произведения тригонометрических

функций в сумму (разность), формулу дополнительного угла, владеть универсальной тригонометрической подстановкой.

В решении олимпиадных тригонометрических уравнений могут понадобиться такие нестандартные методы, как метод оценки, функционально-графический метод, метод искусственных преобразований и метод скалярного произведения (его также называют геометрическим).

Среди малоизвестных, но полезных для изучения методов решения тригонометрических неравенств можно отметить метод оценки, графический метод, метод подстановки для сведения к алгебраическому неравенству, метод интервалов на тригонометрической окружности, а для систем неравенств – метод концентрических окружностей.

В работе изложены методические рекомендации педагогам-наставникам по организации олимпиадной подготовки обучающихся старших классов:

- 1) выстраивать образовательную траекторию обучающегося согласно его познавательным способностям и возможностям;
- 2) предлагать задания, направленные на развитие конвергентного и дивергентного мышления;
- 3) использовать мнемотехнические приемы и обучать детей навыкам логической обработки материала;
- 4) в общении с воспитанниками быть строго тактичным, поддерживать благоприятный для личностного развития обучающихся климат группы;
- 5) стимулировать познавательную активность путем установления доверительных взаимоотношений, исключая принуждение и создавая ситуации успеха;
- 6) по необходимости обращаться к дополнительным ресурсам (информационно-поисковая система математических задач «Problems.ru», электронная библиотека «Математическое образование», сайт Виртуальной школы юного математика);

- 7) использовать возможности информационных технологий (сервисы для создания презентаций, видеопрезентаций, инфографики, моделирующие программы, инструментальные программные средства познавательного характера).

В помощь педагогам, которые осуществляют олимпиадную подготовку обучающихся старших классов, были разработаны методические материалы «Нетривиальная тригонометрия» по решению нестандартных тригонометрических задач. Каждая методическая разработка соответствует одному факультативному занятию и включает две части:

- 1) листок с задачами для выдачи ученикам (каждый набор задач имеет одинаковую основу и сформулирован таким образом, что каждая следующая задача обогащает опыт предыдущей);
- 2) конспект для наставника (условия задач, подробные разъяснения решений и указания по работе с листками).

Дополнительные занятия по математике предлагается организовать в форме факультатива. Не рекомендуется ставить оценки за работу на факультативе, проводить проверочные работы. Оценивание достигнутых результатов в обучении должно опираться на индивидуальные особенности ученика. Нужно поощрять старания, усилия, инициативу.

Не следует превращать факультативное занятие в разбор всех готовых решений у доски – ученик должен испытывать глубокий интерес, любопытство «первооткрывателя» и, несомненно, радость решения математических задач, на что, в конечном счете, и направлена олимпиадная подготовка.

Список использованных источников

1. Бескин Н. М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания: учеб. пособие для педагогических институтов. М.: Учпедгиз, 1950. 140 с.
2. Галеев Э. М., Галеева А. Э. Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решения). Тригонометрия. 4-е изд., доп. М.: Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ, 2018. 72 с.
3. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2002. 199 с.
4. Дистанционная подготовка к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике и физике. URL: <https://mathus.ru/index.php>. Заглавие с экрана (дата обращения: 11.03.2023).
5. Задачи. URL: <https://problems.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 24.12.2022).
6. Ким Д. Х. Нестандартные способы решения тригонометрических уравнений // Юный учебный. 2023. № 4 (67). С. 87-92.
7. Кордемский Б. А. Увлечь школьников математикой: материал для классных и внеклассных занятий. М.: Просвещение, 1981. 112 с.
8. Лурье М. В. Тригонометрия. Техника решения задач. М.: УНЦ ДО, 2004. 160 с.
9. Малый мехмат МГУ. Официальный сайт. URL: <http://mmmf.msu.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 11.12.2022).
10. Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека. URL: <https://www.mathedu.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 25.05.2023).

11. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох [и др.]; сост. В. И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
12. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации. Официальный сайт. URL: <https://minobrnauki.gov.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 01.10.2022).
13. Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Математика в школе. 2012. № 4. С. 22-23.
14. Об утверждении перечня олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год: Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 30 августа 2022 г. №828. URL: pravo.gov.ru
15. Олимпиады для школьников. URL: olimpiada.ru. Заглавие с экрана (дата обращения: 10.09.2022).
16. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / И. Ф. Исаев [и др.]; под ред. В. А. Сластенина. М.: Академия, 2016. 576 с.
17. Разумова О. В., Садыкова Е. Р. Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств: учебно-методическое пособие. Казань: Казан. ун-т., 2013. 69 с.
18. Фалин Г. И., Фалин А. И. Обратные тригонометрические функции. 10-11 классы. М.: Экзамен, 2013. 221 с.
19. Фарков А. В. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения. М.: Народное образование, 2003. 112 с.
20. Хуторской А. В. Педагогика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2019. 608 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«20» 09 20 22 г.
Пас Паньженский В. И.

Задание

По ВКР студента Бородиной Валерии Александровны.

Тема работы «Тригонометрия в олимпиадных задачах».

Утверждена приказом по Университету от «28» 09 20 22 г. № 805/0

Срок сдачи студентом законченной работы «04» 05 20 23 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/ п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь 2022	выполнено
2.	Выявление места и роли интеллектуальных состязаний в системе российского образования. Анализ заданий из архивов математических олимпиад, включенных в Перечень олимпиад школьников и их уровней на 2022/23 учебный год.	Ноябрь – декабрь 2022	выполнено
3.	Классифицирование тригонометрических задач, в разное время предлагаемых участникам перечневых олимпиад, по требованию, выраженному в их условии.	Январь 2023	выполнено
4.	Описание методов и приемов решения, соответствующих выявленным типам олимпиадных тригонометрических задач.	Февраль 2023	выполнено
5.	Разработка методического материала (листочков с задачами для выдачи обучающимся и конспектов педагогам) по следующим темам: <ul style="list-style-type: none"> • «Геометрия и комплексная арифметика в олимпиадных тригонометрических задачах»; • «Метод оценки в решении тригонометрических уравнений»; • «Графическая интерпретация решения тригонометрического неравенства (системы, включающей тригонометрическое неравенство)»; • «Свойства и график функции $y = \sin x$». 	Март – апрель 2023	выполнено
6.	Оформление текста работы.	Май 2023	выполнено
7.	Подготовка защитного слова и презентации.	Июнь 2023	выполнено

Дата выдачи задания

«20» 09 2022 г.

Руководитель


(подпись)

Монахова О. А.
(Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению


(подпись)

Бородина В. А.
(Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Бородиной Валерии Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бородин Валерия Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «*Тригонометрия в олимпиадных задачах*», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
07.05.23

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку _____ 07.05.23

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  _____ О. А. Монахова
подпись

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Тригонометрия в олимпиадных задачах» студентки 4 курса Бородиной Валерии Александровны направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля «Математика»
Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна



Отчет о проверке на заимствования №1



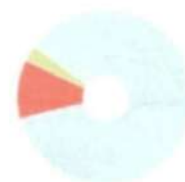
Автор: Бородин Валерия Александровна
Проверяющий: Монахова Оксана Александровна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://online.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 67
Начало загрузки: 07.05.2023 10:35:12
Длительность загрузки: 00:00:58
Имя исходного файла: 1_VKP.docx
Название документа: ВКР
Размер текста: 110 кБ
Символов в тексте: 112406
Слов в тексте: 14929
Число предложений: 668

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 07.05.2023 10:36:10
Длительность проверки: 00:01:41
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: титульный лист с. 1, содержание с. 2, основная часть с. 3-90, библиография с. 91-92
Модуль поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЯБС, Интернет Плюс+, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, аналитика, СПС ГАРАНТ, нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НБС, Коллекция НБС, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по Интернету, Перефразирование по Интернету (EN), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблоны фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



СОВПАДЕНИЯ
10.83%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
3.37%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
83.78%

07.05.2023

ДД.ММ.ГГГГ

ПОДПИСЬ

О. А. Монахова

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Тригонометрия в олимпиадных задачах»
студентки Бородиной Валерии Александровны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 19ФПМ1

Олимпиадная подготовка школьников играет важную роль в учебном процессе и математическом образовании в целом. Олимпиады по математике представляют собой такую форму организации учебного процесса, которая позволяет в полном объеме раскрывать и развивать личность ученика, его одаренность.

Тригонометрия как один из сложных разделов математики требует глубоких знаний и понимания связи между различными математическими понятиями. Нестандартные задачи и задачи повышенной сложности в тригонометрии требуют специальных методов решения, с которыми необходимо знакомить учащихся.

Целью представленной работы была разработка методических материалов по решению нестандартных тригонометрических задач в помощь педагогам, осуществляющим олимпиадную подготовку обучающихся старших классов.

В ходе работы Бородиной В.А. была составлена система задач по некоторым методам решения и видам нестандартных задач. Разработаны рекомендации для учителя по работе с представленными заданиями.

Работа заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при олимпиадной подготовке учащихся.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук