

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

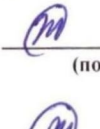
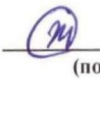
Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

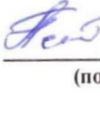
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

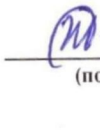
**«Экстремальные задачи по геометрии как средство организации
исследовательской деятельности учащихся »**

Студент	<u> 06.05.25</u> (подпись, дата)	<u>Куралина Анастасия Юрьевна</u> (ФИО полностью)
Руководитель	<u> 06.05.25</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)
Нормоконтролёр	<u> 23.06.25</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой	<u> 2.06.25</u> (подпись, дата)	<u>Паньженский В.И.</u> (фамилия, инициалы)
---------------------	---	--

Работа защищена с оценкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 13)

Секретарь ГЭК	<u> 27.06.25</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)
---------------	--	--

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОДЕРЖАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.....	5
1.1 Организация исследовательской деятельности на внеурочных занятиях по математике.....	5
1.2 Понятие экстремальных задач. Локальный и глобальный экстремум. Точки экстремума функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов.....	7
1.3 Экстремальные задачи по геометрии в 7-8 классах.....	14
ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ.....	17
2.1 Анализ олимпиад по математике.....	17
2.2 Методические рекомендации по проведению внеурочных занятий.....	19
2.3 Рабочие листы как средство организации деятельности на внеурочных занятиях.....	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Материал выпускной квалификационной работы посвящен разработке внеурочных занятий и рабочих листов для организации исследовательской деятельности обучающихся. В частности внеурочные занятия будут направлены на решение экстремальных задач по геометрии.

Актуальность данной темы состоит в том, что экстремальные задачи применяются во многих областях науки и техники, поэтому создаваемые занятия будут полезны школьникам, особенно тем кто участвует в олимпиадах.

Цель исследования: формирование исследовательских умений учащихся на внеурочных занятиях по решению экстремальных задач по геометрии.

Для ее реализации следует решить следующие задачи:

- 1) изучить и обобщить литературные источники, раскрывающие содержание выбранной темы;
- 2) подобрать литературу, касающуюся исследовательской деятельности школьников;
- 3) изучить методы решения экстремальных задач;
- 4) создать рабочие листы для внеурочных занятий;
- 5) описать содержание внеурочных занятий и составить рекомендации к их проведению.

Объектом исследования выпускной квалификационной работы является формирование исследовательских умений учащихся при решении экстремальных задач по геометрии.

Предметом исследования являются исследовательские умения учащихся формирующиеся при решении экстремальных задач по геометрии.

При написании работы были использованы следующие *методы исследования:* поиск и анализ психолого-педагогической, математической литературы, обобщение и систематизация информации.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования молодыми учителями полученных результатов при организации работы внеурочных занятий.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников.

В первой главе рассмотрены теоретические основы по теме исследования.

Во второй главе разработаны рабочие листы и методические рекомендации по проведению внеурочных занятий с использованием полученных рабочих листов.

В заключении обобщены результаты исследования.

Список использованных источников представлен 16 источниками, ссылки на которые содержатся в тексте работы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОДЕРЖАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

1.1 Организация исследовательской деятельности на внеурочных занятиях по математике

Математика даёт широкое поле для исследования. Изучая математику, учащиеся кратко повторяют путь человечества, которое оно прошло, добывая математические знания. Основным методом всех технологий развивающего обучения является исследовательская деятельность учащихся, цель которой – «вызвать» в уме ученика тот самый мыслительный процесс, который переживает творец и изобретатель данного открытия или изобретения. Школьник должен почувствовать прелесть своего открытия.

Таким образом, исследовательский процесс – это не только логико-мыслительное, но и чувственно-эмоциональное освоение знаний [4].

Рассмотрим основные этапы исследования [9]:

1. Мотивация исследовательской деятельности.
2. Формулирование проблем.
3. Сбор, систематизация и анализ фактического материала.
4. Выдвижение гипотез.
5. Проверка гипотез.
6. Доказательство или опровержение гипотез.

1. Мотивация – один из важнейших этапов процесса обучения, если мы хотим, чтобы оно было творческим. Целью мотивации, как этапа урока, является создание условий для возникновения у ученика вопроса или проблемы [1].

2. Этап формулирования проблемы – самый тонкий и «творческий» компонент мыслительного процесса. В идеале сформулировать проблему

должен сам ученик. Однако в реальной школьной практике такое случается далеко не всегда: для многих школьников самостоятельное определение проблемы затруднено. Предлагаемые им проблемы могут оказаться неправильными. Поэтому необходим контроль со стороны учителя [13].

3. Сбор фактического материала может осуществляться при изучении соответствующей литературы, работы в интернете; либо посредством проведения испытаний, измерения частей фигуры, каких-либо параметров и т.д. Необходимо этому процессу задать направление путём пояснений, чертежей и т.п., чтобы он не был хаотичным. Систематизацию и анализ полученных фактов удобно осуществлять в виде таблиц или графиков, которые позволяют визуально определить необходимые связи, свойства, соотношения, закономерности [7].

4. Выдвижение гипотез. Полезно прививать учащимся стремление записывать гипотезы на математическом языке, что придаёт высказываниям точность и лаконичность. Не нужно ограничивать число выдвигаемых учащимися гипотез [5].

5. Проверка гипотез позволяет укрепить веру или усомниться в истинности предложений, а может внести изменения в их формулировки.

6. На последнем этапе происходит доказательство истинности гипотез. Поиск необходимых доказательств часто представляет большую трудность, поэтому учителю важно предусмотреть всевозможные подсказки [8].

Конечно, открыть что-то новое в математике как науке ученику средней и старшей школы практически невозможно. Но сделать открытие для себя и своих ровесников вполне по силам. Исследовательская деятельность школьников может быть организована как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

1.2 Понятие экстремальных задач. Локальный и глобальный экстремум. Точки экстремума функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов

Экстремумом функции называется максимальное (минимальное) значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если выполняется условие: $\exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) f(x_0) \geq f(x)$.

Аналогично точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если выполняется условие: $\exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) f(x_0) \leq f(x)$.

Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками.

Точки, в которых функция непрерывна, а её производная либо равна нулю, либо не существует, называются критическими точками [2].

Нахождение экстремумов функции может быть как самостоятельной задачей, так и одним из этапов полного исследования функции и построения её графика.

Рассмотрим график непрерывной функции (Рисунок 1.1).

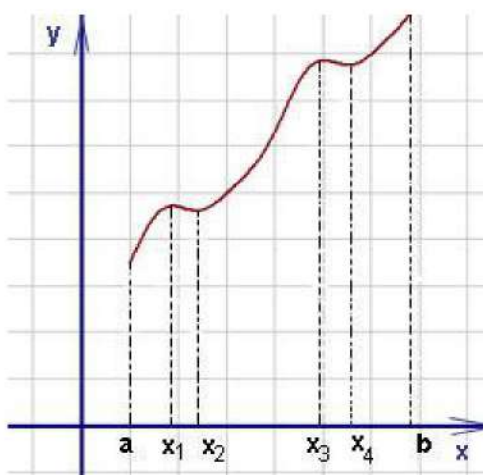


Рисунок 1.1

Из рисунка 1.1 видно, что значение функции в точке x_2 меньше, чем значения функции в достаточно близких к ней точках, соседних с ней справа и слева. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум.

В точке x_1 значение функции больше значений функции в достаточно близких к ней точках, расположенных справа и слева от неё. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум.

Приведем строгие определения точек экстремума.

Определение 1: Функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0 , если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение 2: Функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0 , если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Из приведённых определений следует, что экстремум функции имеет локальный характер - это наибольшее и наименьшее значение функции по сравнению с близлежащими значениями. На промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причём может оказаться, что какой-либо минимум функции больше какого-либо ее максимума [3].

Так, для функции, изображённой на рисунке 1, $f(x_4) > f(x_1)$.

Следующая теорема позволяет ответить на вопрос, в каких точках функция может достигать экстремума.

Теорема Ферма (необходимый признак экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная при $x = x_0$ обращается в нуль, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет простое геометрическое истолкование. Так как производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, то равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$ означает, что $\alpha = 0$, т. е. касательная к кривой в этой точке параллельна оси Ox .

Следствие. Дифференцируемая функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю.

Однако функция может иметь экстремум и в тех точках области определения, где производная не существует.

Пример 1. Функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ достигает минимума, но не дифференцируема при $x = 0$, так как в этой точке график не имеет определённой касательной (Рисунок 1.2).

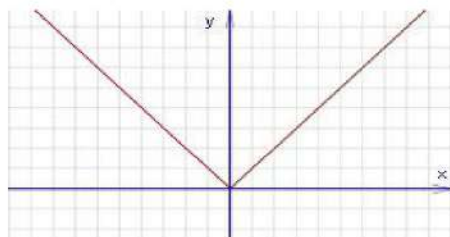


Рисунок 1.2

Пример 2. Функция, изображённая на рисунке 1.3, имеет в точке x_0 максимум, но не дифференцируема в этой точке, так как при $x = x_0$ касательная к кривой образует с осью Ox угол 90° ($f'(x_0) = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$).

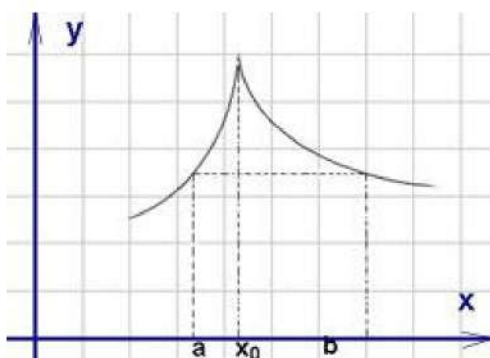


Рисунок 1.3

Замечание. Условия о том, что производная функции в точке равна нулю или не существует, являются необходимыми условиями экстремума, но не достаточными, поскольку можно привести примеры функций, для которых эти условия выполняются, но экстремума в соответствующей точке функция не имеет [6].

Пример 3. Функция $f(x) = x^3 + 1$ (Рисунок 1.4), имеет производную $f'(x) = 3x^2$, которая обращается в нуль при $x = 0$, однако в точке $x = 0$ функция экстремума не имеет.

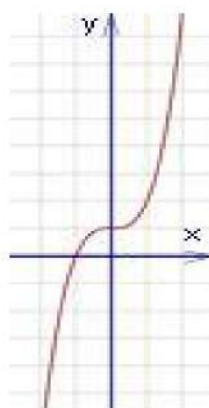


Рисунок 1.4

Таким образом, значения аргумента, при которых функция сохраняет непрерывность, а её производная обращается в нуль или не существует, называются критическими точками (или критическими значениями аргумента).

Теорема Ферма является лишь необходимым признаком экстремума, так как не в каждой критической точке экстремум существует. Поэтому нужно располагать достаточными признаками, позволяющими судить, имеется ли в конкретной критической точке экстремум и какой именно - максимум или минимум [12].

Первый достаточный признак экстремума. Если x_0 - критическая точка функции $f(x)$ и в некоторой окрестности этой точки слева и справа от неё производная имеет противоположные знаки, то $f(x_0)$ является экстремумом функции, причём: максимумом, если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$; минимумом, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Если же вблизи точки x_0 , слева и справа от неё, производная сохраняет знак, то это означает, что функция либо только убывает, либо только возрастает в некоторой окрестности точки x_0 . В этом случае в точке x_0 экстремума нет.

Таким образом, если x_0 - критическая точка $f(x)$ и при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 есть точка экстремума, причём точка максимума, если производная меняет знак с плюса на минус, и точка минимума, если с минуса на плюс. В противном случае в точке x_0 экстремума нет.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^4}{4} - x^3$ и построить её график.

Решение.

Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Её производная $f'(x) = x^2(x - 3)$ существует также на всей числовой прямой. Поэтому в данном случае критическими точками служат лишь те, в которых $f'(x) = 0$, т.е. $x^2(x - 3) = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ разбивают всю область определения функции на три интервала монотонности: $[-\infty, 0] \cup [0, 3] \cup [3, +\infty]$. Выберем в каждой из них по одной контрольной точке и найдём знак производной на этом промежутке.

Для интервала $(-\infty, 0]$ контрольной точкой может служить $x = -1$: находим $f'(-1) < 0$. Взяв в интервале $[0, 3]$ точку $x = 1$, получим $f'(1) < 0$, а взяв в интервале $[3, +\infty)$ точку $x = 4$, имеем $f'(4) > 0$. Итак, в интервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, 3]$ $f'(x) < 0$, а в интервале $[3, +\infty)$ $f'(x) > 0$. Согласно первому достаточному признаку экстремума, в точке $x = 0$ экстремума нет (так как производная сохраняет знак в интервале $(-\infty, 3]$, а в точке $x = 3$ функция имеет минимум (поскольку производная при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс). Найдём соответствующие значения функции: $f(0) = 0$, а $f(3) = -6,75$. В интервале $(-\infty, 3]$ функция убывает, так как в этом интервале $f'(x) < 0$, а в интервале $[3, +\infty)$ возрастает, так как в этом интервале $f'(x) > 0$.

Чтобы уточнить построение графика, найдём точки пересечения его с осями координат. При $y = 0$ получим уравнение $\frac{x^4}{4} - x^3 = 0$, корни которого $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$, т. е. найдены две точки $(0; 0)$ и $(4; 0)$ графика функции. Используя все полученные сведения, строим график (Рисунок 1.5).

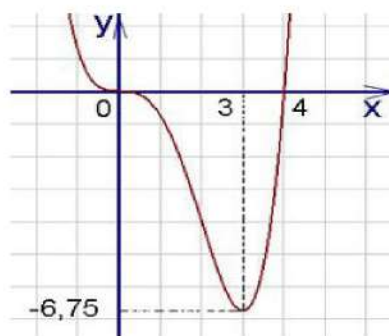


Рисунок 1.5

Второй достаточный признак экстремума. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема и в точке x_0 выполняются условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то в этой точке функция имеет экстремум, причём максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Замечание 1. Если в точке x_0 образуются в нуль обе производные, то в этой точке нельзя судить о наличии экстремума на основании второго достаточного признака. В этом случае нужно воспользоваться первым достаточным признаком экстремума.

Замечание 2. Второй достаточный признак экстремума не применим и тогда, когда в критической точке первая производная не существует (тогда не существует и вторая производная). В этом случае также нужно воспользоваться первым достаточным признаком экстремума [10].

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$ и построить её график.

Областью определения функции является вся числовая прямая, кроме точки $x = 0$, т.е. $D = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$.

Для сокращения исследования можно воспользоваться тем, что данная функция чётная, так как $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2} + \frac{8}{(-x)^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$. Поэтому её график симметричен относительно оси Оу и исследование можно выполнить только для интервала $(0, +\infty)$.

Находим производную $y' = x - \frac{16}{x^3} = \frac{x^4 - 16}{x^3}$ и критические точки функции:

$$1) y' = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 16}{x^3} = 0 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x = -2; x = 2$$

$$2) y' \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x^4 - 16}{x^3} \rightarrow \infty \Rightarrow x = 0$$

но функция терпит разрыв в этой точке, поэтому она не может быть точкой экстремума.

Таким образом, заданная функция имеет две критические точки: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Учитывая чётность функции, проверим по второму достаточному признаку экстремума только точку $x = 2$. Для этого найдём вторую производную $f''(x) = \left(x - \frac{16}{x^3}\right)' = 1 + \frac{48}{x^4}$ и определим её знак при $x = 2$: получим $f''(2) > 0$. Так как $f'(2) = 0$ и $f''(2) > 0$, то $x = 2$ является точкой минимума функции, при этом $y_{\min} = f(2) = 4$.

Чтобы составить более полное представление о графике функции, выясним её поведение на границах области определения:

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} y = \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2} \right) = 0 + \infty = +\infty$$

(здесь символом $x \rightarrow 0 + 0$ обозначено стремление x к нулю справа, причём x остаётся положительным; аналогично $x \rightarrow 0 - 0$ означает стремление x к нулю слева, причём x остаётся отрицательным). Таким образом, если $x \rightarrow 0 \pm 0$, то $y \rightarrow +\infty$. Далее, находим

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

т.е. если $x \rightarrow \pm \infty$, то $y \rightarrow +\infty$.

Точек пересечения с осями график функции не имеет (Рисунок 1.6).

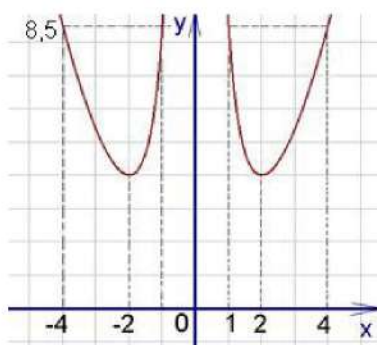


Рисунок 1.6

1.3 Экстремальные задачи по геометрии в 7-8 классах

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения встречаются в курсах алгебры и геометрии начиная с 7-го класса, соответственно при решении таких задач есть возможность опираться на геометрические знания, но также такие задачи решаются с помощью производной. Такие задачи чаще встречаются в курсе начал математического анализа [11].

Экстремальные задачи по геометрии развивают пространственное мышление и наглядно показывают межпредметные связи материала. Но самих задач в материалах учебника катастрофически мало. Они встречаются довольно редко и часто ученики не всегда осознают, что эта задача является экстремальной [14]. При их решении используются свойства и теоремы, которые изучаются в курсе геометрии 7-го и (или) 8-го класса, среди которых: признаки равенства треугольников; теорема о перпендикуляре и наклонной; неравенство треугольника; соотношение между сторонами и углами треугольника; свойство длины ломаной и др. Приведённые задачи могут быть использованы при обучении геометрии в 7-м классе как на основных уроках, так и при проведении курсов по выбору, организации исследовательской деятельности учащихся.

Некоторые известные теоремы геометрии 7-го класса можно предлагать обучающимся в качестве задач на нахождение наибольших и наименьших значений. Например, теорему о том, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче любой наклонной, проведённой из этой точки к данной прямой, можно переформулировать в виде следующей задачи.

Задача 1. Даны прямая a и точка A , не принадлежащая этой прямой. На прямой a найдите такую точку B , расстояние до которой от точки A наименьшее (Рисунок 1.7).

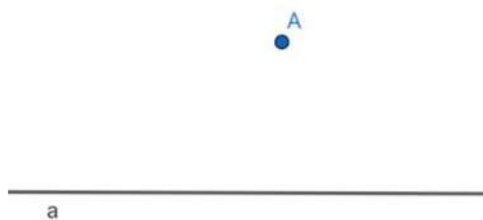


Рисунок 1.7

Решение.

Искомой точкой будет точка В – основание перпендикуляра, опущенного из точки А на прямую а (Рисунок 1.8). Для любой другой точки С этой прямой отрезок АС будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра АВ.

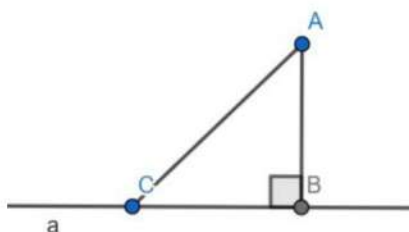


Рисунок 1.8

Теперь рассмотрим экстремальные задачи по геометрии, которые могут быть использованы при обучении в 8-м классе как на основных уроках, так и при проведении курсов по выбору, организации исследовательской деятельности учащихся.

Задача 2. Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ найдите треугольник с наименьшим радиусом R описанной окружности (Рисунок 1.9).

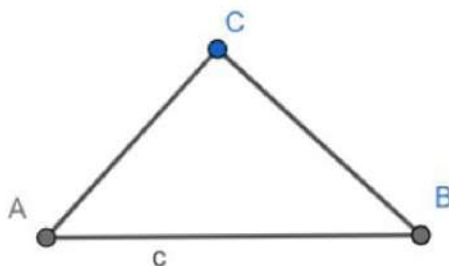


Рисунок 1.9

Решение.

Искомый треугольником является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ (Рисунок 1.10). В этом случае центр O описанной

окружности принадлежит стороне AB . Во всех остальных случаях центр O' описанной окружности не принадлежит стороне AB , следовательно, $O'A + O'B > AB = OA + OB$. Значит, $O'A > OA$.

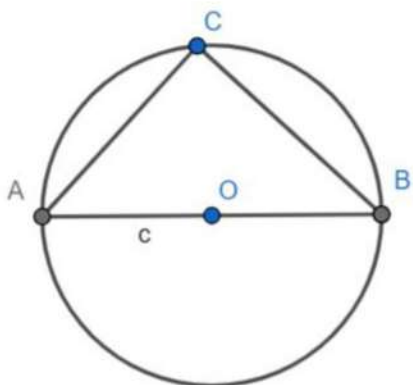


Рисунок 1.10

ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

2.1 Анализ олимпиад по математике

Проанализировав в сети интернет задания самых популярных олимпиад по математике среди школьников, выяснилось, что экстремальные задачи по геометрии чаще всего встречаются в:

1. Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап 11 класс (2024 год);

В круговой сектор радиуса R с центральным углом α ($0 < \alpha \leq \pi/2$) вписаны две окружности (обе касаются радиусов-сторон сектора, друг друга внешним образом, а большая касается окружности сектора). Какую наибольшую долю может составлять расстояние между центрами вписанных окружностей от величины R и при каком значении α это достигается?

2. Межрегиональная олимпиада школьников им. И. Я. Верченко по информатике и компьютерной безопасности (2024 год);

Четыре компьютера, расположенные в вершинах квадрата $ABCD$, соединены прямолинейными отрезками проводов с сервером, который находится в точке пересечения диагоналей O . Сторона квадрата равна 2 м.

Несложно заметить, что для такого подключения потребуется $4\sqrt{2}$ метров провода. Чтобы уменьшить длину проводов, вам разрешается передвинуть сервер из точки O в любую другую точку O_1 , а также компьютер из точки A в любую другую точку A_1 так, чтобы новая суммарная длина проводов $S=O_1A_1+O_1B+O_1C+O_1D$ была как можно меньше.

Разрешается компьютеры и сервер размещать в одной точке (например, точка A_1 может совпасть с точкой B). Компьютеры в вершинах B , C , D двигать нельзя. Чему равно минимальное значение S ?

3. Олимпиада школьников «Ломоносов». Заключительный этап 11 класс. (2021, 2022, 2023 года);

2021 г.: Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$?

2022 г.: Высота BD остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке H . Точка K лежит на отрезке AC так, что величина угла BKH максимальна. Найдите DK если $AD=2$, $DC=3$.

2023 г.: Две стороны выпуклого четырёхугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 1, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвёртой стороны четырёхугольника?

4. Олимпиада Физтех. Отборочный этап. 11 класс;

Про натуральные числа n , m , k и l известно, что $mn=kl=350$. Оказалось, что точки с координатами (m, n) и (k, l) различны, а площадь треугольника с вершинами в данных точках и начале координат минимальна. Вычислите эту площадь.

5. Московская математическая олимпиада 11 класс (2022 год);

В выпуклом 12-угольнике все углы равны. Известно, что длины каких-то десяти его сторон равны 1, а длина ещё одной равна 2. Чему может быть равна площадь этого 12-угольника?

6. Московская математическая регата. 11 класс (2016 год);

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABD окружности. Найдите наименьшее значение BD , если известно, что $AI=BC=CD=2$.

7. Турнир «Лига открытий» (2017 год);

На листе бумаги нарисован прямой угол с вершиной P . Пятиклассник Петя хочет провести несколько лучей с той же вершиной, лежащих внутри угла, так,

чтобы сумма всех получившихся при этом углов составляла 400 градусов. Какое наименьшее число лучей он может провести?

8. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» (2018, 2021 года);

2018 г.: В треугольник ABC, в котором сумма сторон AC и BC в $\frac{9}{5}$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r . Найдите при данных условиях:

- а) наименьшее значение r ;
- б) все возможные значения r .

2021 г.: Бумажный квадрат площади 17 согнули по прямой, проходящей через его центр, после чего соприкасающиеся части склеили. Найдите максимально возможную площадь получившейся бумажной фигуры.

9. Всесибирская олимпиада школьников. 11 класс (2021 год);

На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1. Доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

Также экстремальные задачи по геометрии встречаются и в международных олимпиадах. Например, такой как международная олимпиада «Innopolis Open» по профилю «Математика»:

В треугольнике ABC точка M - середина стороны BC. Известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AM.

2.2 Методические рекомендации по проведению внеурочных занятий.

Внеурочные занятия продуманы для обучающихся с 7-го по 10-е классы. Всего прописано 6 планов проведения занятий для обучающихся 10-х классов,

для того, чтобы осмыслить полный курс данных задач. Так же некоторые занятия можно проводить для отдельных классов, как дополнительные.

Для исследовательской работы обучающимся предлагается в качестве домашнего задания найти задачи, которые похожи на те, что изучаются на занятиях. Им предлагается собрать задачи в сборник, который будет дополнен чек-листом на последнем занятии и может быть использован учениками в личных целях для подготовки к различным олимпиадам.

Краткое содержание занятий.

Занятие 1. Занятие включает в себя отбор обучающихся из 10-х классов профильного уровня. Проводится самостоятельная работа, которая направлена на изучение уровня знания детей, их умение подходить к той или иной задаче. Самостоятельная работа состоит из 4 задач, решение которых потребует знания математических фактов до 10-го класса. Поэтому каждый ученик способен решить эти задачи.

Занятие 2. Расстояния: между фигурами, от точки до фигуры. Ориентировано на обучающихся 7-х классов. Изначально актуализируются знания, что понадобятся при решении задач. Далее рассматриваются сами задачи, решение которых требует применения определений различных видов расстояний, неравенства треугольника, сравнения перпендикуляра и наклонной к прямой, проведённых из одной точки. После ученики самостоятельно решают задачи с последующей помощью учителя.

Занятие 3. Окружность: углы и касательные. Ориентировано на учащихся 8-х классов. На этом занятии были рассмотрены экстремальные задачи, связанные с окружностями. Решение данных задач опирается на построение окружности, описанной около треугольника, и касательные к этой окружности. Вначале занятия мы актуализируем знания. Затем решаем экстремальный задачи различного характера связанные с окружностями.

Занятие 4. Наибольшая и фиксированная площади. Ориентировано на школьников 9-х классов. На этом занятии рассматриваются экстремальные

задачи, связанные с площадями и периметрами треугольников и четырехугольников. Задачи направлены на нахождение фигур наименьшей площади и периметра. Актуализация знаний и самостоятельное решение задач включены в занятие.

Занятие 5. Решение олимпиадных задач. Ориентировано на школьников 10-х классов. На этом занятии мы как всегда актуализируем знания, проводим проверку домашней работы, а также решаем реальные олимпиадные экстремальные задачи на различные геометрические фигуры.

Занятие 6. Самостоятельное исследование. Производится изучение экстремальных свойств пространственных фигур на платформе Geogebra с помощью решения задач. По окончании которого обучающиеся составляют чек-лист для продолжения работы с экстремальными задачами самостоятельно. В нём они отражают всё, что пожелают необходимым (например, свойства фигур, некоторые теоремы, затруднительные моменты при решении задач, дополнительные задачи).

Таблица 2.1 - Внеурочные занятия для 10 класса

Сводная таблица внеурочных занятий 10-го класса			
№ занятия	Название занятия	Характеристика занятия	Часы занятия
1	Отбор обучающихся	Проводится самостоятельная работа, которая направлена на изучение уровня знания детей, их умение подходить к той или иной задаче.	1,5
2-3			3
4-5	Расстояния: между фигурами, от точки до фигуры.	Рассматриваются задачи, решение которых требует применения определений различных видов расстояний, неравенства треугольника, сравнения перпендикуляра и наклонной к прямой, проведённых из одной точки.	3
6-7			3
8-10	Окружность: углы и касательные.	На этом занятии рассматриваются экстремальные задачи, связанные с окружностями. Решение задач опирается на построение окружности, описанной около треугольника, и касательные к этой окружности.	4,5
11-13			4,5

Продолжение Таблицы 2.1

14-16	Наибольшая и фиксированная площади.	На этом занятии рассматриваются экстремальные задачи, связанные с площадями и периметрами треугольников и четырехугольников.	4,5
17-19			4,5
20-22	Решение олимпиадных задач.	Решение экстремальных задач с использованием производной, взятых из олимпиад	4,5
23-25			4,5
26-28			4,5
29-31	Самостоятельное исследование.	Производится изучение экстремальных свойств пространственных фигур на платформе Geogebra с помощью решения задач.	4,5
32-34			4,5
Итого:			51

План проведения занятия №1.

Учитель: Здравствуйте, ребята. Сегодня мы с вами проведём небольшую самостоятельную работу, благодаря которой я смогу выяснить кто будет продолжать заниматься дальше. Итак, у вас на столах лежат рабочие листы. Все свои размышления вы должны разместить именно на них. Всего будет 4 задачи. Можете начинать.

Задача №1

В треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что точки A, B, C и H лежат на одной окружности. Найдите угол ABC (Рисунок 2.1).

Подсказка: Вспомните, когда четыре точки на окружности лежат на одной прямой (теорема о вписанных углах). Подсказка даётся в том случае, если обучающиеся никак не могут справиться с задачей.

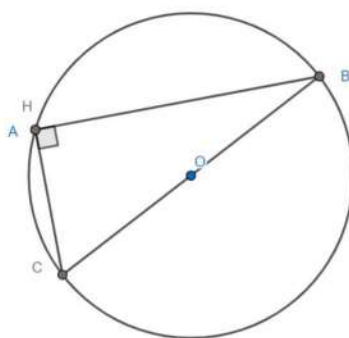


Рисунок 2.1

Решение

Если четыре точки лежат на окружности, то углы которые они образуют являются вписанными в окружность.

Таким образом, выполняется теорема о вписанных углах: $\angle BAC = \angle BHC$ (так как они опираются на одну дугу BC).

BH - высота. Значит $\angle BHC = 90^\circ$. Тогда и $\angle BAC = 90^\circ$.

Так как сумма углов в треугольнике 180° , то

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA,$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \angle BCA,$$

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle BCA.$$

Так как $\angle BHC$ внешний угол для треугольника ABH, то $\angle ABC = 90^\circ$.

Ответ: 90°

Задача №2

В параллелограмме ABCD биссектриса угла A делит сторону BC в точке E так, что $BE:EC=3:1$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 48 (Рисунок 2.2).

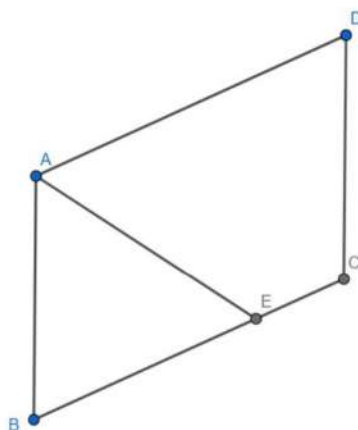


Рисунок 2.2

Решение

Пусть $AB = CD = x$, $AD = BC = y$.

Биссектриса угла A делит BC так, что $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AD}$, то есть $\frac{3}{1} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = 3y$.

$$P=48 \Rightarrow 48 = 2(x + y),$$

$$3y + y = 24$$

$$y = 6 \Rightarrow x = 18.$$

Ответ: 18 и 6.

Задача №3

В треугольнике ABC медианы AM и BN пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AON равна 4 (Рисунок 2.3).

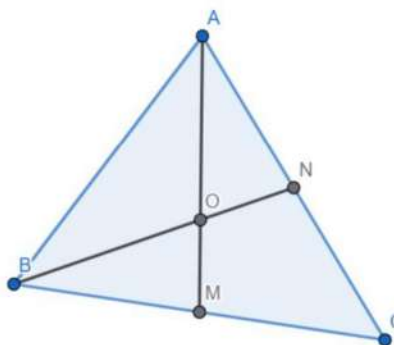


Рисунок 2.3

Решение

Медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Площадь треугольника AON составляет $\frac{1}{6}$ от площади треугольника ABC (так как $AN = \frac{1}{2} AC$, а $AO = \frac{2}{3} AM$).

$$\text{Значит } S_{ABC} = 6 * S_{AON} = 6 * 4 = 24.$$

Ответ: 24.

Задача №4

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH и CM являются высотой и медианой соответственной. Найдите $\tan \angle MCH$, если $AC = 6$, а $BC = 8$ (Рисунок 2.4).

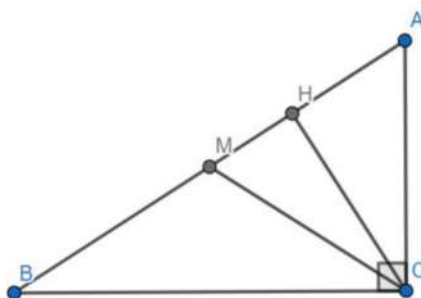


Рисунок 2.4

Решение

По теореме Пифагора гипотенуза $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Медиана в прямоугольном треугольнике проведённая из прямого угла равна половине гипотенузы, то есть $CM = 5$.

$$\text{Высота } CH = \frac{AB \cdot BC}{AB} = \frac{48}{10} = 4,8.$$

Из прямоугольного треугольника CHM:

$$AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{36}{10} = 3,6$$

$$AM = 5 \Rightarrow HM = 5 - 3,6 = 1,4.$$

$$\text{Тогда } \tan \angle MCH = \frac{1,4}{4,8} = \frac{7}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{24}$$

План проведения занятия №2.

Расстояния: между фигурами, от точки до фигуры

1. Организационный этап

Учитель: Здравствуйте, ребята. Сегодня мы с вами поговорим о задачах в которых заложен «принцип минимальности», то есть нахождение минимального значения.

2. Актуализация

Учитель: Для начала вспомним основные моменты с которыми вы уже знакомы. У вас на столах лежат рабочие листы. Сейчас каждый из вас самостоятельно заполнит страницу номер 1. А потом мы вместе проверим ваши ответы.

Ученики: Заполняют страницу номер в рабочих листах.

Учитель: Молодцы. Теперь перейдём к проверке ваших ответов.

Ученики по цепочке читают ответы на вопросы. Учитель помогает в коррекции неверных ответов.

3. Основной этап

Учитель: Теперь перейдём к самому интересному - к задачам.

Задача №1

Даны прямая a и точка A , не принадлежащая этой прямой. На прямой a найдите такую точку B , расстояние до которой от точки A наименьшее (Рисунок 2.5).

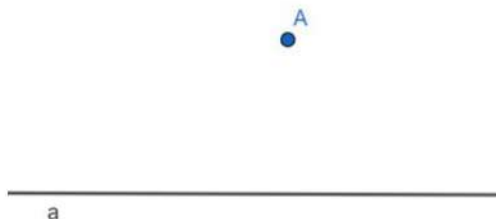


Рисунок 2.5

Решение.

Искомой точкой будет точка B – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a (Рисунок 2.6). Для любой другой точки C этой прямой отрезок AC будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB .

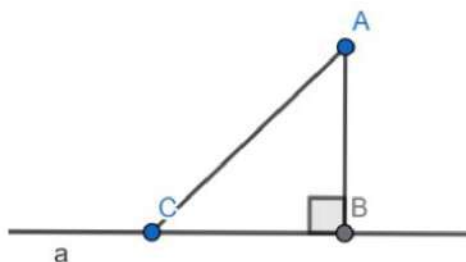


Рисунок 2.6

Задача №2

Даны окружность с центром в точке O и точка A расположенная вне этой окружности. Найдите точку на окружности так, чтобы расстояние от этой точки до точки A было: а) наименьшим; б) наибольшим (Рисунок 2.7).

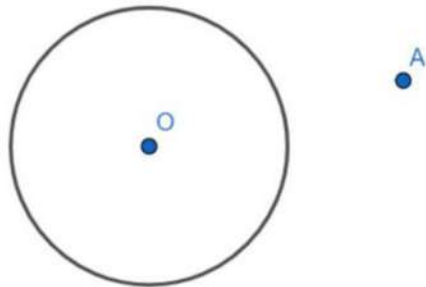


Рисунок 2.7

Решение.

а) Искомой точкой является точка B – точка пересечения отрезка OA с окружностью (Рисунок 2.8). Для любой другой точки C этой окружности из неравенства треугольника следует неравенство $OA < OC + AC$. Учитывая, что $OA = OB + AB$ и $OB = OC$, получаем неравенство $AB < AC$.

б) Искомой точкой является точка C – точка пересечения луча AO с окружностью, отличная от точки B (Рисунок 2.9). Для любой другой точки D этой окружности из неравенства треугольника следует неравенство $AD < AO + OD$. Учитывая, что $OD = OC$, получаем неравенство $AD < AC$.

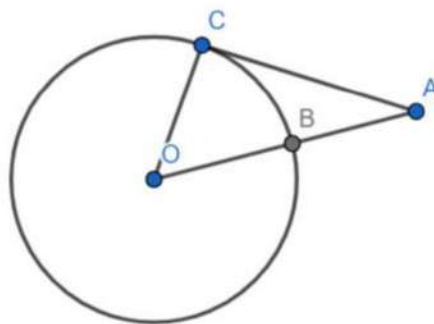


Рисунок 2.8

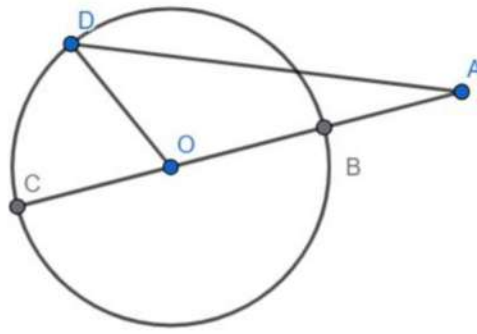


Рисунок 2.9

Задача №3

Внутри треугольника ABC найдите точку K , сумма расстояний от которой до всех вершин и всех середин сторон треугольника будет наименьшей.

Подсказка: при решении таких задач часто удобно разбить искомую сумму расстояний на пары.

Решение

Пусть A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно (Рисунок 2.10).

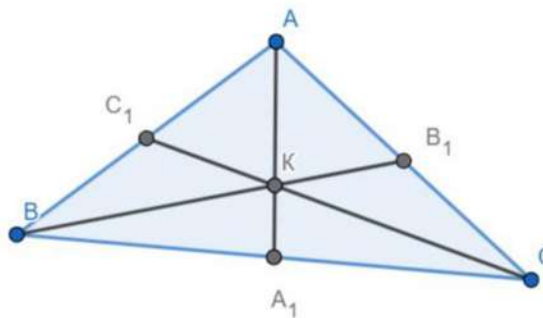


Рисунок 2.10

Заметим, что для любой точки K по неравенству треугольника $KA + KA_1 > AA_1$, причём равенство достигается, если точка K принадлежит отрезку AA_1 – медиане треугольника ABC . Аналогично $KB + KB_1 > BB_1$ и $KC + KC_1 > CC_1$. Следовательно, искомая сумма не меньше, чем сумма длин медиан треугольника ABC . Равенство достигается, только в том случае, если точка K принадлежит каждой медиане данного треугольника, то есть совпадает с его точкой пересечения медиан.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача №4

Докажите, что наибольшей хордой окружности является её диаметр.

Решение

Пусть в окружности с центром в точке O и радиусом r проведена хорда MN , отличная от диаметра AB . Проведём отрезки OM и ON , получим треугольник MON , в котором $MN < OM + ON$ (Рисунок 2.11). Так как $OM = ON = r$, то $MN < 2r$. При этом, любая хорда, проходящая через центр O , является диаметром и её длина равна $2R$. Следовательно, диаметр является наибольшей хордой.

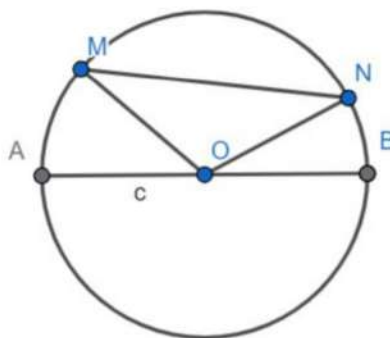


Рисунок 2.11

Задача №5

По сторонам прямого угла скользят концы отрезка длины s . Найдите наибольшее возможное расстояние от вершины угла до этого отрезка.

Решение

Пусть $AB = s$ – данный отрезок, C – вершина прямого угла. Расстоянием от C до AB является длина высоты CH прямоугольного треугольника ABC . Проведем его медиану CM (Рисунок 2.12), тогда $CH \leq CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}s$, причём равенство достигается, если точка H совпадает с точкой M . Это произойдет, если прямоугольный треугольник ABC будет равнобедренным. Следовательно, искомое значение равно $\frac{1}{2}s$.

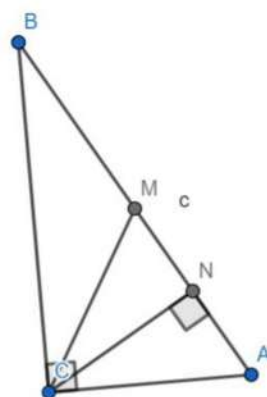


Рисунок 2.12

В этом же случае достигается наибольшее значение площади треугольника ABC , так длина AB фиксирована, а высота, проведённая к этой стороне, наибольшая.

4. Рефлексия

Учитель: Ребята, вы большие молодцы, проделали огромную работу. Спасибо вам за это занятие. Давайте похлопаем друг друга.

У вас на краю стола лежат небольшие мишени (Рисунок 2.13). Я хочу, чтобы оставили своей ручкой имитацию «выстрела» в той части мишени, которой пожелаете верным и передайте все ваши мишени с последних парт на первую.

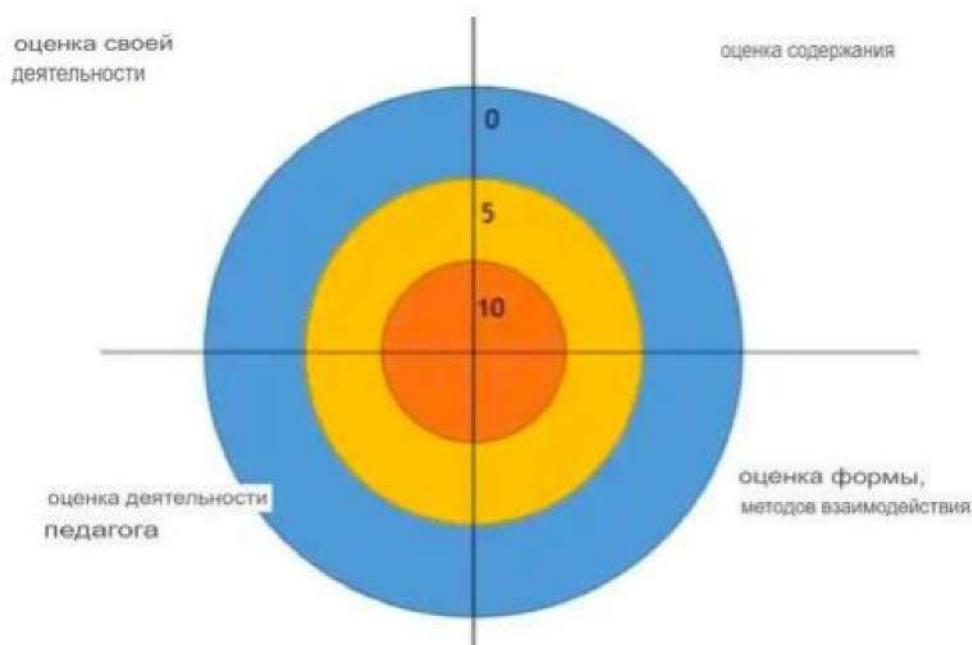


Рисунок 2.13

Также, на последней странице рабочих листов вы можете увидеть своё домашнее задание.

Домашняя задача: На данном отрезке AB отметили точку C , а затем на отрезках AC и CB построили равносторонние треугольники ACH и BCT по одну сторону от прямой AB : При каком положении точки C длина отрезка HT будет наименьшей?

План проведения занятия №3

Окружность: углы и касательные

1. Организационный этап.

Учитель: На прошлом занятии мы изучали тему «Расстояния: от точки до фигуры, между фигурами». Вам было дано домашнее задание. Все с ним справились? Давайте проверим решение этой задачи

Домашняя задача: На данном отрезке AB отметили точку C ; а затем на отрезках AC и CB построили равносторонние треугольники ACH и BCT по одну сторону от прямой AB : При каком положении точки C длина отрезка HT будет наименьшей?

Решение

Проведём в треугольниках ACH и BCT высоты HE и TG соответственно (Рисунок 2.14).

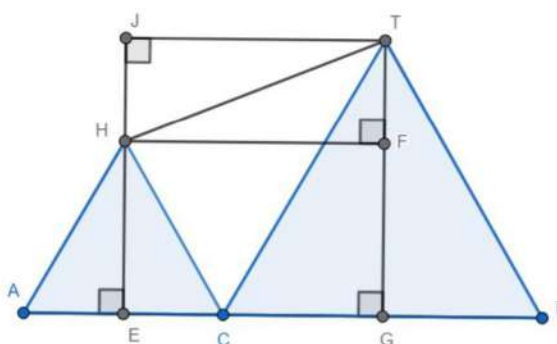


Рисунок 2.14

Таким образом, отрезок EC является проекцией наклонной HT на отрезок AB .

Рассмотрим треугольник НТЕ: $\angle НТЕ = 90^\circ$. Из этого следует, что треугольник НТЕ - прямоугольный. Значит НТ - гипотенуза $\Rightarrow HF < HT$.

Из прямоугольник НЕGF: $EG < HT$.

Равенство достигается, если НТ совпадает с HF, то есть, когда $HT \parallel AB$. Это означает, что высоты равносторонних треугольников равны, поэтому равны и треугольники, тогда $AC = BC$.

Таким образом, С – середина отрезка АВ.

2. Актуализация

Учитель: Перейдём к актуализации знаний в ваших рабочих листах

Ученики: Заполняют страницу номер в рабочих листах.

Учитель: Молодцы. Теперь перейдём к проверке ваших ответов.

Ученики по цепочке читают ответы на вопросы. Учитель помогает в коррекции неверных ответов.

3. Основной этап

Учитель: Теперь перейдём к задачам.

Задача №1

Дана окружность с центром в точке О и точка N лежащая внутри этой окружности. Найдите такую хорду проходящую через данную точку N, чтобы длина этой хорды была наименьшей.

Решение

Построим радиус OD проходящий через точку N, а также хорды СВ (перпендикулярно OD) и EF проходящие через точку N (Рисунок 2.15).

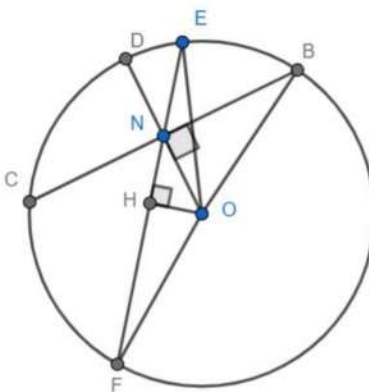


Рисунок 2.15

Рассмотрим треугольник ONB: $\angle ONB=90^\circ \Rightarrow$ треугольник ONB-прямоугольный. По теореме Пифагора: $NB = \sqrt{R^2 - a^2}$, где $R=OB$, $a=ON$.

Таким образом, $CB= 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Значит, чтобы хорда CB была наименьшей расстояние от центра окружности до хорды CB (расстояние a) должно быть наибольшим.

Пусть хорда EF - искомая. Тогда $OH>ON$.

Из треугольника ONH: $OH<ON$ (противоречие).

Отсюда следует, что наше предположение неверно. CB-наименьшая хорда.

Задача №2

Дан отрезок AB и прямая c, не пересекающая этот отрезок. Найдите на прямой c такую точку, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом [16].

Решение

Наибольшим углом будет являться угол, вершина которого лежит в точке касания прямой c и окружности проходящей через концы отрезка.

Чтобы построить точку касания, воспользуемся алгебраическим методом и построим среднее геометрическое $x = \sqrt{ab}$, где $EM=GK=x$, $EA=FG=a$, $EB=GH=b$ (Рисунок 2.16).

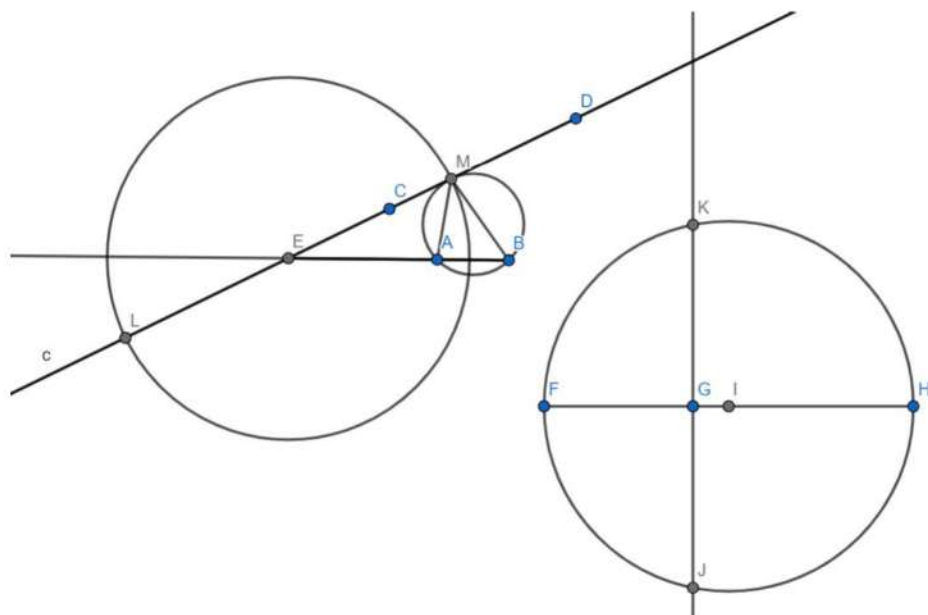


Рисунок 2.16

Задача №3 (Задача Ферма.)

Для треугольника ABC найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая. А также: а) градусная мера углов меньше 120° ; б) один из углов больше 120° .

Решение

а) Пусть D - произвольная точка. Повернём треугольник ABC и точку D вокруг вершины A на угол 60° : точка A перейдёт в точку A, точка B - в точку B', точка D - в точку D', точка C - в точку C'. Треугольник ADD' – равносторонний, так как $AD=AD'$ (расстояние при повороте сохраняется), $\angle DAD' = 60^\circ$ (Рисунок 2.17). Следовательно: $AD = DD'$.

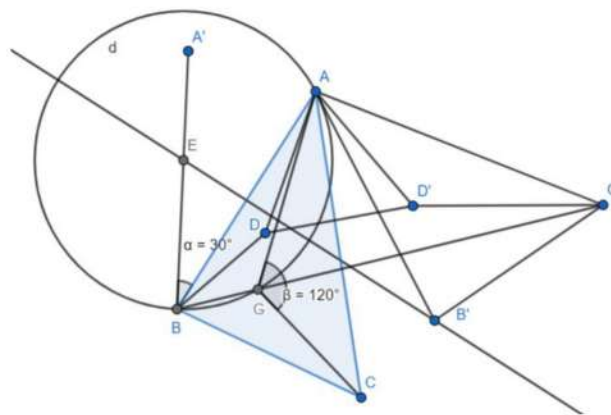


Рисунок 2.17

Сумма расстояний $AD + BD + CD$ равна длине ломаной BDD'C'. Если точки B, D, D', C' принадлежат одной прямой, то сумма $AD + BD + CD$ будет наименьшей. Это будет, если углы ADC и BDC равны по 120° , т. е. если точки D совпадает с точкой Торричелли T – такой точкой, из которой стороны треугольника ABC видны под углом 120° .

Что бы построить угол в 120° под которым видна сторона AB. Мы строим серединный перпендикуляр стороны AB. Далее строим угол 30 градусов и ищем пересечение с ранее построенным сер пером. Это будет центр окружности, которая нам необходима. Далее строим окружность с центром в точке E и радиусом EB. Пересечение окружности с отрезком BC' будет являться искомой точкой T.

Минута из истории:

Точки Торричелли - две точки, из которых все стороны треугольника видны либо под углом в 60° , либо под углом в 120° . Эти точки в треугольнике «парные». Иногда эти точки называют точками Ферма или точками Ферма-Торричелли.

б) Если угол C треугольника ABC больше 120° , то точка Торричелли не существует. Тем не менее, точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC наименьшая, существует. В этих случаях ею является вершина B треугольника ABC .

Для любой другой точки D сумма $AC + BC$ будет меньше длины ломаной $ADD'B'$, значит, меньше суммы $AD + BD + CD$.

4. Рефлексия

Учитель: Ребята, вы большие молодцы, проделали огромную работу. Спасибо вам за это занятие. Есть ли у вас вопросы ко мне по сегодняшнему материалу? Если нет, то давайте похлопаем друг друга.

Ваше домашнее задание расположено на последней странице рабочих листов.

А сейчас запишите на небольших листочках ваше мнение о нашем занятии, чтобы вы хотели изменить или может, что-то пройти повторно. Всё это анонимно. Свои ответы положите в эту корзинку на первой парте.

Домашняя задача: Дан треугольника ABC , $\angle C = 120^\circ$. Найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

План проведения занятия №4

Наибольшая и фиксированная площади.

1. Организационный этап.

Учитель: На прошлом занятии мы изучали тему «Окружность: углы и касательные». Вам было дано домашнее задание. Все с ним справились? Давайте проверим решение этой задачи.

Домашняя задача: Дан треугольника ABC , $\angle C = 120^\circ$. Найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

Решение

Если угол C треугольника ABC равен 120° , то точка Торричелли не существует. Тем не менее, точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC наименьшая, существует. В этих случаях ею является вершина B треугольника ABC .

Для любой другой точки D сумма $AC + BC$ будет меньше длины ломаной $ADD'B'$, значит, меньше суммы $AD + BD + CD$.

2. Актуализация

Учитель: Перейдём к актуализации знаний в ваших рабочих листах

Ученики: Заполняют страницу номер 1 в рабочих листах.

Учитель: Молодцы. Теперь перейдём к проверке ваших ответов.

Ученики по цепочке читают ответы на вопросы. Учитель помогает в коррекции неверных ответов.

3. Основной этап

Учитель: Теперь перейдём к задачам.

Задача №1

Докажите, что наибольшую площадь имеет лишь равносторонний треугольник вписанный в окружность из всех треугольников, вписанных в данную окружность, с фиксированной стороной AB . Найдите эту площадь, если радиус окружности равен 1 [15].

Решение

Пусть две стороны треугольника ABC не равны: $AC \neq BC \Rightarrow$ существует вписанный равнобедренный треугольник ABC_1 ($AC_1=BC_1$) большей площади (Рисунок 2.18).

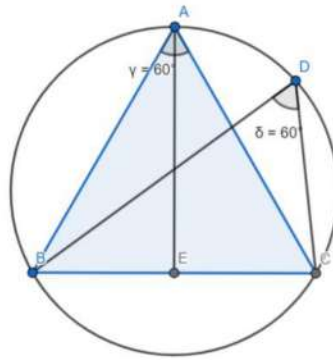


Рисунок 2.18

Так как $S = \frac{1}{2}ah$. Сторона a фиксированная, соответственно чем больше h , тем больше площадь. Высота больше в том случае, если она проходит через центр.

Пусть $S_{\text{равностороннего}} < S_{\text{равнобедренного}}$

Тогда $\angle C < 60^\circ$. Предположение неверно.

Таким образом, у треугольника, вписанного в окружность, имеющего наибольшую площадь, должны быть равны все стороны.

Если радиус окружности равен 1, то искомая площадь равностороннего треугольника вписанного в данную окружность равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Задача №2

У фермера есть забор фиксированной длины (периметр). Он хочет огородить им прямоугольный участок земли. Какую форму должен иметь этот чтобы он был наибольшей площади (Рисунок 2.20)?

Решение

Рассмотрим квадрат ABCD и прямоугольник AINE одинакового периметра. Докажем, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата (Рисунок 2.18).

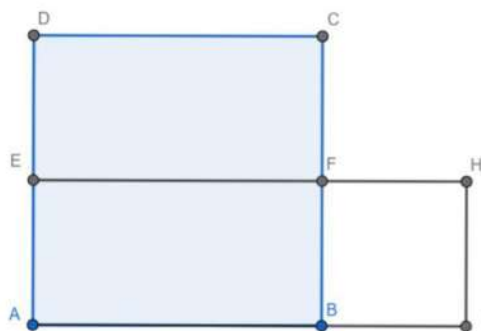


Рисунок 2.19

Площадь квадрата равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и прямоугольника $DEFC$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и прямоугольника $BFHI$.

Из равенства периметров прямоугольника и квадрата следует равенство сторон BI и ED . Так как $BF < AD$, то площадь прямоугольника $BFHI$ меньше площади прямоугольника $DEFC$, следовательно, площадь прямоугольника $AIHE$ меньше площади квадрата $ABCD$.

Ответ: квадрат.

Задача №3

Дана окружность фиксированного радиуса R (Рисунок 2.20). Среди всех четырехугольников, которые можно вписать в эту окружность, найдите четырехугольник наибольшей возможной площади. Какой это четырехугольник и чему равна его площадь?

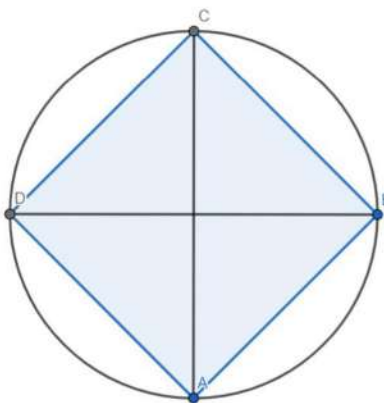


Рисунок 2.20

Решение

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle (d_1 d_2)$$

Наибольшими диагоналями четырёхугольника, вписанного в окружность, являются диаметры этой окружности. Синус угла между диагоналями будет наибольшим, если эти диагонали перпендикулярны. Таким образом, наибольшую площадь будет иметь четырёхугольник, диагоналями которого являются перпендикулярные диаметры окружности. Этот четырёхугольник – квадрат. Его площадь равна $2R^2$.

Ответ: квадрат; $2R^2$.

Задача №4 (для самостоятельного решения)

Дан острый угол и периметр. Найдите параллелограмм наибольшей площади из всех параллелограммов ABCD.

Подсказка: воспользуйтесь неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Решение

Пусть в параллелограмме ABCD $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \varphi$.

$$S = ab \cdot \sin \varphi.$$

Так как угол параллелограмма фиксирован, то значение площади зависит от произведения сторон AB и AD.

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ - неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим.

Обозначим периметр параллелограмма P. Тогда $a + b = \frac{P}{2}$.

Наибольшее значение $a \cdot b$ принимается, только если $a = b = \frac{P}{4}$. Следовательно, искомым параллелограммом наибольшей площади является ромб.

Отает: ромб;

4. Рефлексия

Учитель: Ребята, вы большие молодцы, проделали огромную работу. Спасибо вам за это занятие. Есть ли у вас вопросы ко мне по сегодняшнему материалу? Если нет, то давайте похлопаем друг друга.

Ваше домашнее задание расположено на последней странице рабочих листов.

А сейчас запишите на небольших листочках ваше мнение о нашем занятии:

Сначала мы рассуждали так....

Потом мы столкнулись с проблемой.....

Затем мы наблюдали (сравнивали, делали)....

Мы увидели (поняли).... Значит....

Теперь мы будем....

Всё это анонимно. Свои ответы положите в эту корзинку на первой парте.

Домашняя задача: Дана сторона $AB = a$ и площадь S треугольника ABC . Найдите треугольник наименьшего периметра из всевозможных треугольников ABC .

План проведения занятия №5

Решение олимпиадных задач

1. Организационный этап.

Учитель: На прошлом занятии мы изучали тему «Наибольшая и фиксированная площади». Вам было дано домашнее задание. Все с ним справились? Давайте проверим решение этой задачи.

Домашняя задача: Дана сторона $AB = a$ и площадь S треугольника ABC . Найдите треугольник наименьшего периметра из всевозможных треугольников ABC .

Решение

Вершина C треугольника ABC с данной стороной $AB = a$ и данной площадью S принадлежит прямой a , параллельной прямой AB (Рисунок 2. 21). Прямая a удалена на расстоянии h . Из формулы площади треугольника следует:

$$h = \frac{2S}{a}.$$

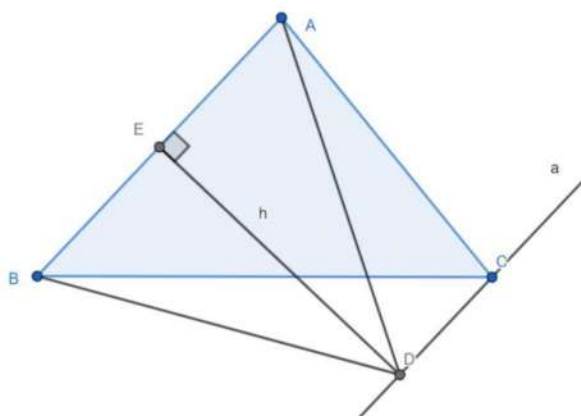


Рисунок 2.21

В силу задачи Герона, из всех таких треугольников наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник ABD с основанием $AB = a$ и высотой $h = \frac{2S}{a}$.

Ответ: равнобедренный.

2. Актуализация

Учитель: Перейдём к актуализации знаний в ваших рабочих листах

Ученики: Заполняют страницу номер 1 в рабочих листах.

Учитель: Молодцы. Теперь перейдём к проверке ваших ответов.

Ученики по цепочке читают ответы на вопросы. Учитель помогает в коррекции неверных ответов.

3. Основной этап

Учитель: Сегодня на занятии мы попробуем решить задачи связанные уже именно с экстремумами. Эти задачи взяты из реальных олимпиадных работ.

Задача №1

Четыре компьютера, расположенные в вершинах квадрата ABCD, соединены прямолинейными отрезками проводов с сервером, который находится в точке пересечения диагоналей O. Сторона квадрата равна 2 м. Несложно заметить, что для такого подключения потребуется $4\sqrt{2}$ метров провода. Чтобы уменьшить длину проводов, вам разрешается передвинуть сервер из точки O в любую другую точку O_1 , а также компьютер из точки A в любую другую точку A_1 так, чтобы новая суммарная длина проводов

$S=O_1A_1+O_1B+O_1C+O_1D$ была как можно меньше. Разрешается компьютеры и сервер размещать в одной точке (например, точка A_1 может совпасть с точкой B). Компьютеры в вершинах B, C, D двигать нельзя. Чему равно минимальное значение S ?

Решение

Заметим, что точки A_1 и O_1 совпадают.

Действительно, пусть минимум достигается на конфигурации, где это не так. Но тогда, сдвинув точку A_1 в точку O_1 , мы длину проводов уменьшим. Таким образом, компьютер A_1 и сервер O_1 должны оказаться в некоторой точке K ($K \equiv A_1 \equiv O_1$) (Рисунок 2. 22).

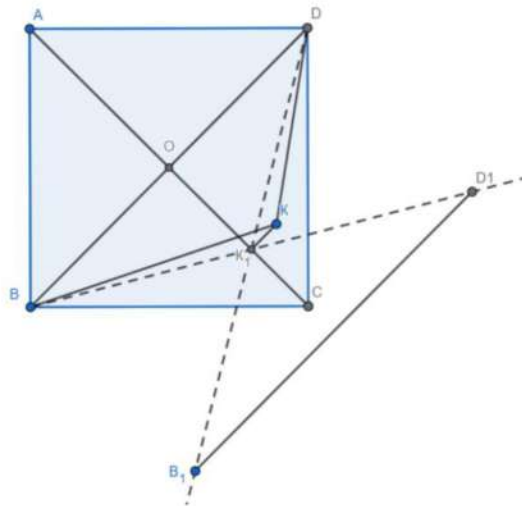


Рисунок 2.22

Покажем, что точка K лежит на диагонали AC .

Доказательство будем проводить от противного.

Пусть K_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую AC . Покажем, что сумма расстояний от точки K_1 до вершин B, C, D , которую обозначим $S_{K_1}=K_1B+K_1C+K_1D$, меньше аналогичной суммы $S_K=KB+KC+KD$. Длина проекции меньше длины наклонной, поэтому $K_1C < KC$. Чтобы доказать, что $K_1B+K_1D < KB+KD$ (1).

Отразим отрезок BD относительно прямой KK_1 (при этом точка B перейдет в точку B_1 , точка D — в точку D_1).

Точки D_1, K_1, B окажутся на одной прямой.

Тогда $K_1B + K_1D = KB + KD = D_1B$, и при этом $KB + KD_1 = KB + KD > D_1B$.

Неравенство (1) доказано. Следовательно, $S_{K_1} < S_K$, а значит, искомая точка K должна лежать на диагонали (Рисунок 2.23).

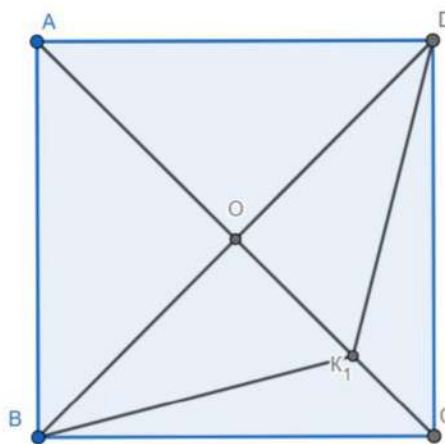


Рисунок 2.23

Пусть $OK = x$. Рассмотрим функцию

$$S(x) = KC + KB + KD = 2\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{2} - x.$$

$$S'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}} - 1.$$

На отрезке $[0; \sqrt{2}]$ функция $S(x)$ принимает минимальное значение в точке $x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, а самое минимальное значение равно

$$S(x_0) = 2\sqrt{\frac{2}{3} + 2} + \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Задача №2

На листе бумаги нарисован прямой угол с вершиной A семиклассник Дима хочет провести несколько лучей в той же вершине, лежащие внутри данного угла, так, чтобы сумма всех получившихся углов составляла 400° . Какое наименьшее число лучей он может провести?

Решение

Если Дима проведет один луч, то сумма трех получившихся углов будет равна 180° .

Если он проведёт 2 луча, то Дима получим три угла, при сложении которых каждый крайний угол будет учитываться три раза, а средний четыре раза. Тогда в сумме он получим меньше 360° .

Если семиклассник проведет три луча, то всего получится 10 углов, причем при их суммировании два крайних угла учитываются по 4 раза, а два средних по 6 раз. Если сумма двух средних углов будет составлять 20° , то вся сумма даст 400° .

Таким образом, можно провести 3 луча, и сделать это нужно так, чтобы угол между двумя не соседними лучами составлял 20° .

Ответ: 3 луча.

Задача №3

На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин (Рисунок 2.24). Известно, что длина стороны квадрата равна 1. Доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

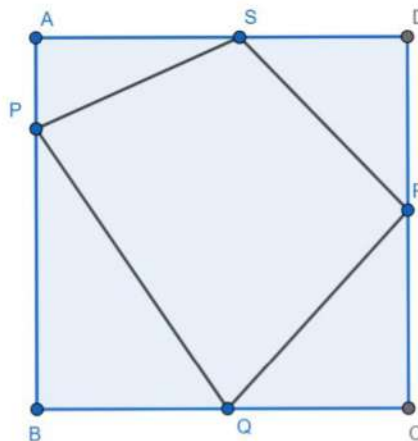


Рисунок 2.24

Решение

По теореме Пифагора:

$$PS^2 = AP^2 + SA^2$$

$$PQ^2 = BP^2 + BQ^2$$

$$QS^2 = CQ^2 + CR^2$$

$$RS^2 = DR^2 + DS^2$$

Сложим эти равенства и перегруппируем результат в виде:

$$PQ^2+QR^2+PS^2+RS^2=(AP^2+BP^2)+(CQ^2+BQ^2)+(CR^2+DR^2)+(DS^2+SA^2)$$

Каждое из выражений в скобках имеет вид

$f(x) = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ для некоторого $0 < x < 1$ и заключено в пределах от $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ включительно, до $f(1) = 1$ не включительно.

Таким образом, сумма $PQ^2+QR^2+PS^2+RS^2$ заключена в пределах от $4f(\frac{1}{2}) = 2$ включительно, до $4f(1) = 4$ не включительно.

Ч.т.д.

4. Рефлексия

Учитель: Ребята, вы большие молодцы, проделали огромную работу. Спасибо вам за это занятие. Есть ли у вас вопросы ко мне по сегодняшнему материалу? Если нет, то давайте похлопаем друг друга.

Сегодня домашнее задание будет повторить весь материал, с которым мы работали на всех занятиях. В следующий раз вы будете работать в группах решая задачи в пространстве с помощью приложения Geogebra.

План проведения занятия №6

Самостоятельное исследование

1. Организационный этап.

Учитель: На прошлом занятии мы изучали тему «Решение олимпиадных задач». Вам было дано домашнее задание: повторить материал, который мы прошли за прошлые 5 занятий. Все повторили? Тогда перейдём к сегодняшнему исследованию. Вам нужно разбиться на 3 группы.

Вам будет дано 2 задачи. Как только решите первую задачу, выходите к доске и презентуете нам решение этой задачи. Задачу номер 2 у вас общая. Вы её решаете на скорость, какая группа первая решит, задачу правильно, та и будет презентовать её нам.

По окончании работы с задачами вы работаете одной большой командой над составлением чек-листа, который будет являться дополнением к сборнику задач, который мы составляли целый год для дальнейшей самостоятельной

работы с решением экстремальных задач по геометрии. В чек-листе вы можете отобразить всё, что угодно. Это могут быть отрывки решения задач, какие-то факты из материала, а так же некоторые факты о фигурах в пространстве. В конце ваших рабочих листов я собрала некоторые вопросы, ответы на которые вы также можете указать в чек-листе.

2. Актуализация

Учитель показывает как можно использовать платформу Geogebra, чтобы ученики могли самостоятельно ею пользоваться.

3. Основной этап

Учитель: Вы можете приступать к своей работе.

Каждой команде раздаётся свой рабочий лист.

Задача №1 (1 группа)

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$, соединяющего середины рёбер AB и CD (Рисунок 2.25).

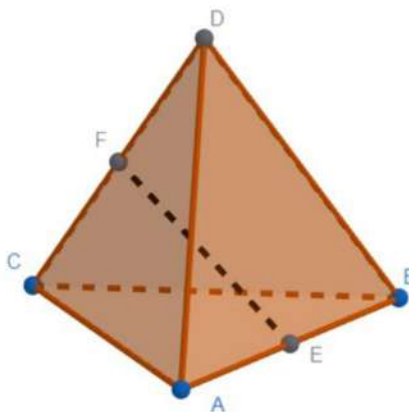


Рисунок 2.25

Решение

Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра (Рисунок 2.26).

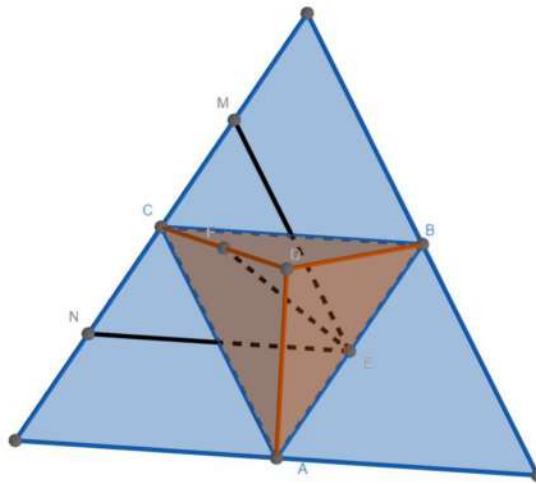


Рисунок 2.26

Соответствующий путь по поверхности данного тетраэдра являются два отрезка EM и EN . Соответственно их длина равна 1, так как треугольник MNE равносторонний.

На самом тетраэдере этим путём будет являться EO и OF или EZ и PF (Рисунок 2.27).

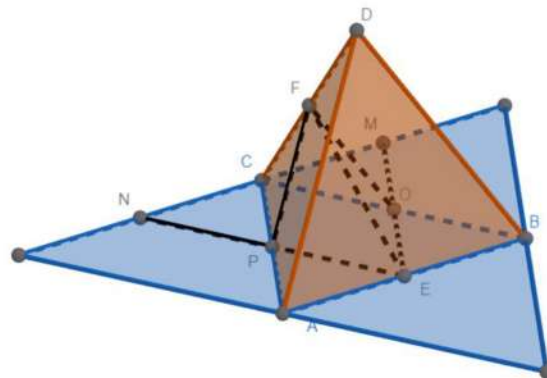


Рисунок 2.27

Задача №1 (2 группа)

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDEFGH$, соединяющего вершины B и H (Рисунок 2.28).

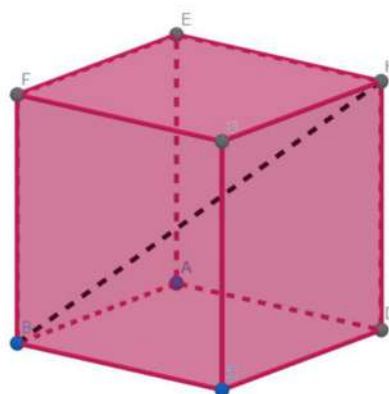


Рисунок 2.28

Решение

Так же, как и в предыдущей задаче рассмотрим развертку нашего куба (Рисунок 2.29).

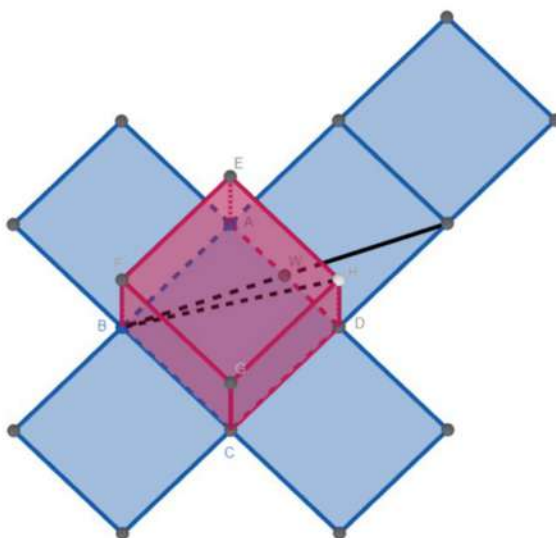


Рисунок 2.29

Соответственно кратчайшем путём будет отрезок соединяющий точки В и Н в развертке. По теореме Пифагора можем найти значение гипотенузы: $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Таким образом искомым путем будет являться BW и WH (Рисунок 2.30)

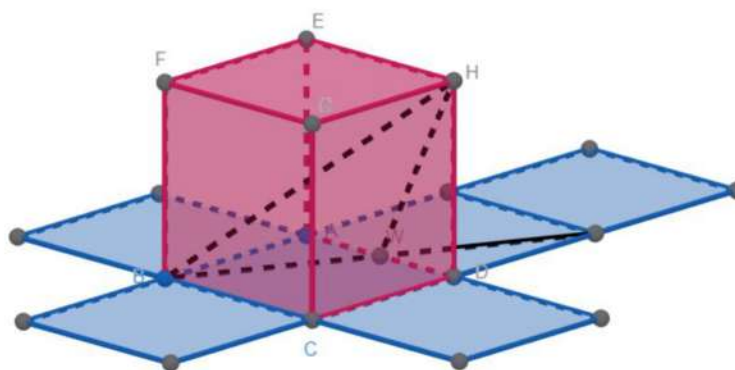


Рисунок 2.30

Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача №1 (3 группа)

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы ABCDEFGH, соединяющего вершины B и Q. Все рёбра призмы равны 1.

Решение

Аналогичным образом кратчайшим расстоянием будет являться расстояние между точками B и Q в развертке (Рисунок 2.31).

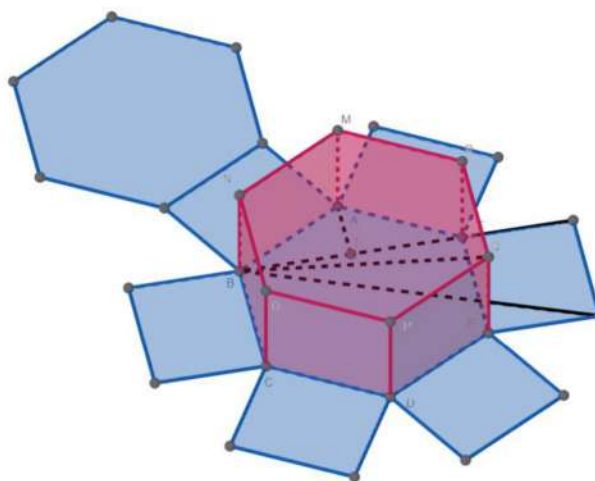


Рисунок 2.31

Чтобы найти это расстояние рассмотрим треугольник BRQ в развертке.

$$BF = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } BQ = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 1^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$.

Задача №2 (общая для всех групп)

На поверхности куба $ABCDEFGH$ найдите такие точки K , из которых диагональ BH видна под наименьшим углом, то есть угол BKH наименьший. Чему равен этот угол?

Решение

Искомymi точками являются вершины A, C, D, E, F, G данного куба (Рисунок 2.32). Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BH , равны 90° .

Докажем, что для других точек K угол BKH будет больше. Рассмотрим сферу с диаметром BH . Все вершины куба принадлежат этой сфере, а остальные точки K лежат внутри неё. Следовательно, эти точки лежат внутри соответствующей большой окружности сферы. Значит, угол BKH больше 90° .

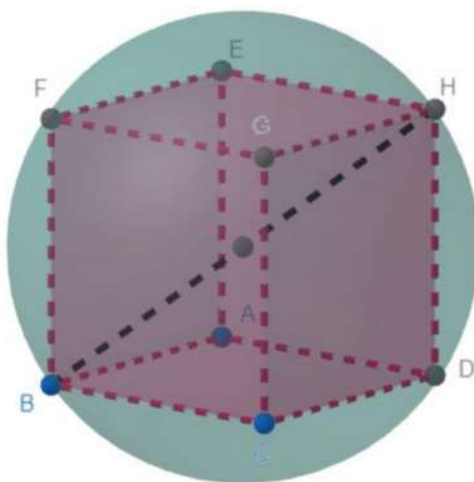


Рисунок 2.32

Учитель: Если вы решили задачу, то можете рассказать о том как вы её решили свои одноклассникам.

Каждая группа по очереди рассказывает решение задачи и показывает, что они сделали на платформе Geogebra.

1. Среди призм, вписанных в сферу и имеющих в основании правильный многоугольник, какая призма будет наибольшего объема?

Предполагаемые результаты исследования: все призмы наибольшего объема с правильным многоугольником в основании имеют равные высоты; если в основании правильные четырехугольник, то призма является кубом; отношение диаметра сферы к высоте призмы равно $\sqrt{3}:1$; с увеличением количества углов в основании увеличивается и объем.

2. Правильная n-гранная пирамида наименьшего объема описанная вокруг сферы. Что при этом вы наблюдаете?

Предполагаемые результаты исследования: высота пирамиды наименьшего объема в два раза больше диаметра сферы; если в основании лежит треугольник, то пирамида является тетраэдром; с увеличением количества углов в основании объем уменьшается

3. Минимизация площади призмы при заданном объеме.

Предполагаемые результаты исследования: если в основании лежит треугольник, то высота равна радиусу окружности описанной около основания; если в основании лежит четырехугольник, то оптимальная призма является кубом; если в основании лежит шестиугольник, то высота оптимальной призмы равна $a\sqrt{3}$; оптимальная площадь уменьшается с количеством углов в основании.

4. Минимизация суммы ребер при заданном объеме правильной призмы.

Предполагаемые результаты исследования: если ребра призмы равны, то достигается минимум суммы ребер; с увеличением количества углов в основании возрастает оптимальная сумма ребер.

5. Оптимизация объема пирамиды при заданной площади боковой поверхности.

Предполагаемые результаты исследования: для пирамид минимального объема боковая грань имеет один и тот же угол.

4. Рефлексия

Учитель: Ребята, вы большие молодцы, проделали огромную работу. Спасибо вам за это занятие. Есть ли у вас вопросы ко мне по сегодняшнему материалу? Если нет, то давайте похлопаем друг друга.

2.3 Рабочие листы как средство организации деятельности на внеурочных занятиях

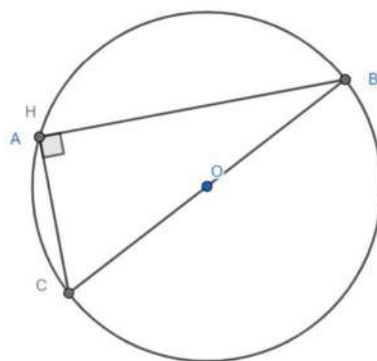
Рабочий лист для занятия №1.

Задача №1

В треугольнике ABC проведена высота BH . Оказалось, что точки A , B , C и H лежат на одной окружности. Найдите угол ABC .

Подсказка: Вспомните, когда четыре точки на окружности лежат на одной прямой (теорема о вписанных углах).

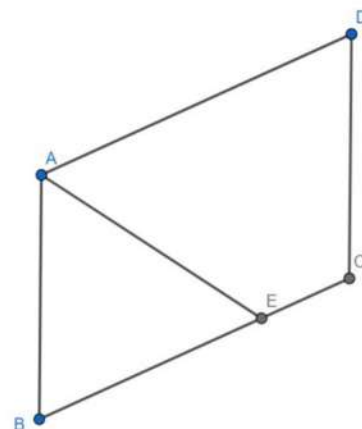
Подсказка даётся в том случае, если обучающиеся никак не могут справиться с задачей.



Решение

Задача №2

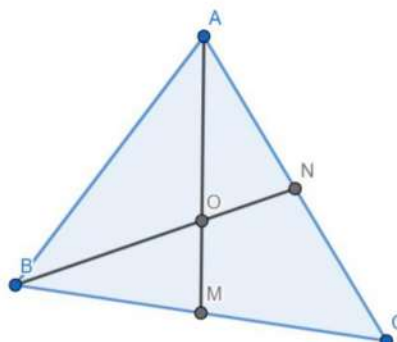
В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC в точке E так, что $BE:EC=3:1$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 48.



Решение

Задача №3

В треугольнике ABC медианы AM и BN пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника AON равна 4.

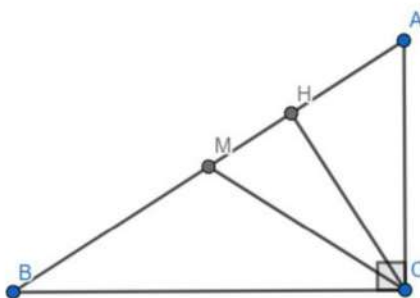


Решение

Задача

№4

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH и CM являются высотой и медианой соответственной. Найдите $\tan \angle MCH$, если $AC = 6$, а $BC = 8$.



Решение

Рабочий лист для занятия №2.

Расстояния: между фигурами, от точки до фигуры

Актуализация

1. Треугольник - _____

Классификация треугольников по равенству сторон:

1) _____

2) _____

3) _____

Классификация треугольников по градусной мере углов:

1) _____

2) _____

3) _____

2. Медиана треугольника - _____

3. Высота треугольника - _____

4. Биссектриса треугольника - _____

5. Наклонная - _____

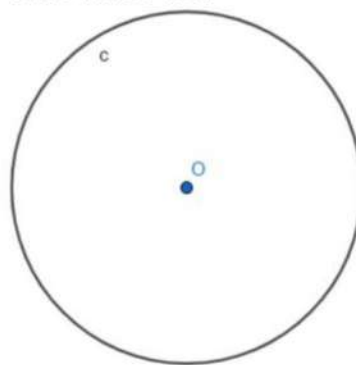
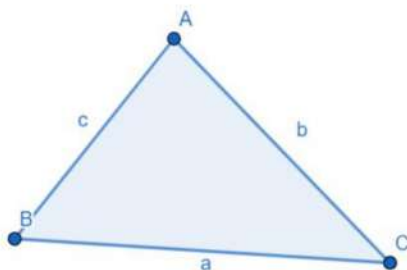
Запиши верные неравенства треугольника ABC:

$AB+AC > \underline{\hspace{2cm}}$

$AB+BC > \underline{\hspace{2cm}}$

$AC+BC > \underline{\hspace{2cm}}$

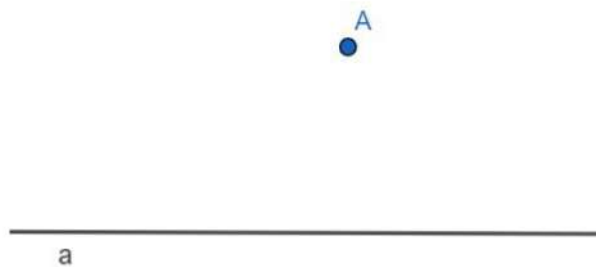
Изобразите на окружности с центром в точке O радиус, диаметр и хорду. *Не забудь обозначить их!*



Напоминаю! В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, а также биссектрисы и высоты.

Задача №1

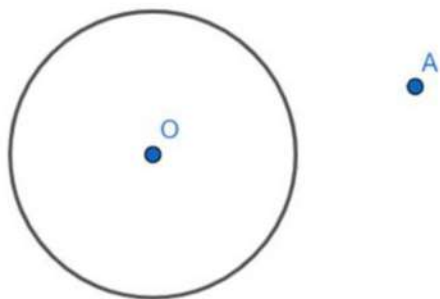
Даны прямая a и точка A , не принадлежащая этой прямой. На прямой a найдите такую точку B , расстояние до которой от точки A наименьшее.



Решение.

Задача №2

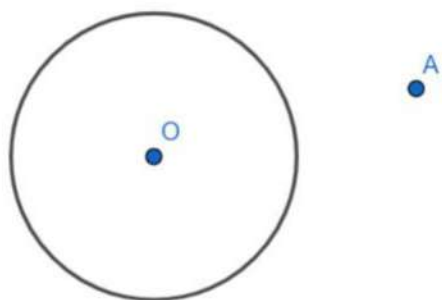
Даны окружность с центром в точке O и точка A расположенная вне этой окружности. Найдите точку на окружности так, чтобы расстояние от этой точки до точки A было: а) наименьшим; б) наибольшим.



Решение.

а) _____

б) _____



Задача №3

Внутри треугольника ABC найдите точку K , сумма расстояний от которой до всех вершин и всех середин сторон треугольника будет наименьшей.

Подсказка: при решении таких задач часто удобно разбить искомую сумму расстояний на пары.

Рисунок строится самостоятельно.

Решение

Задача №4 Докажите, что наибольшей хордой окружности является её диаметр.

Решение

Задача №5 По сторонам прямого угла скользят концы отрезка длины s . Найдите наибольшее возможное расстояние от вершины угла до этого отрезка.

Решение

Домашняя задача: На данном отрезке АВ отметили точку С; а затем на отрезках АС и СВ построили равносторонние треугольники АСН и ВСТ по одну сторону от прямой АВ: При каком положении точки С длина отрезка НТ будет наименьшей?

Не забудь сделать рисунок!

Решение

Рабочий лист для занятия №3

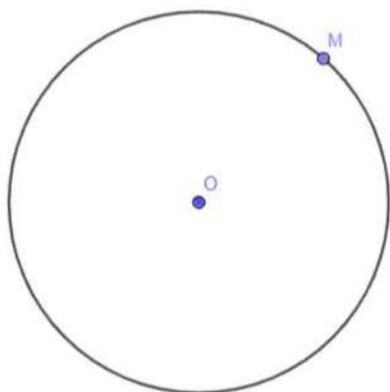
Окружность: углы и касательные

Актуализация

1. Окружность – это _____
2. Центром окружности вписанной в треугольник является _____
3. Центром окружности описанной около треугольника является _____
4. Касательная к окружности - _____
5. _____

а) изобразить диаметр, радиус и хорду окружности;

б) построить касательную к окружности в точке М.



Диаметр - АВ

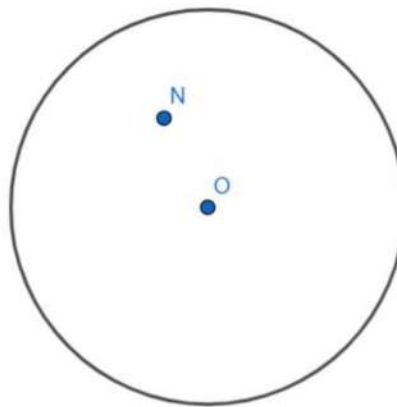
_____ - ОМ

Хорда - СК

6. Опишите подробно, но своими словами, как бы вы осуществили поворот треугольника вокруг точки.

Задача №1

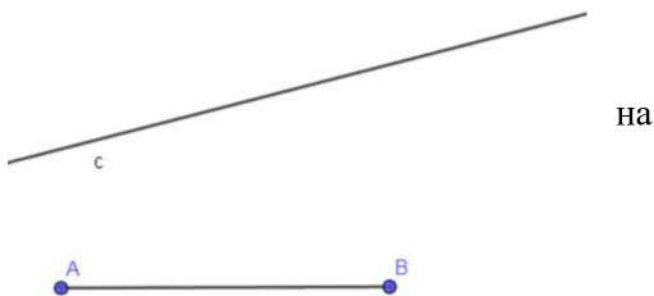
Дана окружность с центром в точке O и точка N лежащая внутри этой окружности. Найдите такую хорду проходящую через данную точку N , чтобы длина этой хорды была наименьшей.



Решение

Задача №2

Дан отрезок AB и прямая c , не пересекающая этот отрезок. Найдите прямой c такую точку, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом, т. е. угол ACB наибольший.



Решение

Задача №3 (Задача Ферма.)

Для треугольника ABC найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

- а) градусная мера углов меньше 120° ;
- б) один из углов равен 120° ;
- в) один из углов больше 120° .

Решение

а) _____

б) _____

Домашняя задача: Дан треугольника ABC, $\angle C = 120^\circ$. Найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

Не забудь сделать рисунок!

Рабочий лист для занятия №4.

Наибольшая и фиксированная площади

Актуализация

1. Теорема о вписанном угле

2. Напиши все формулы площади, которые ты знаешь

$S_{\Delta} =$ _____;

$S_{\Delta} =$ _____;

$S_{\Delta} =$ _____ ;

$$S_{\text{квадрат}} = \underline{\hspace{10em}};$$

$$S_{\Delta} = \underline{\hspace{10em}}; \quad$$

$$S_{\text{прямоугольник}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

Счетырехугольник = _____.

3. Периметр - _____

Задача №1

Докажите, что наибольшую площадь имеет лишь равносторонний треугольник вписанный в окружность из всех треугольников, вписанных в данную окружность, с фиксированной стороной АВ. Найдите эту площадь, если радиус окружности равен 1.

Решение

Задача №2

У фермера есть забор фиксированной длины (периметр). Он хочет огородить им прямоугольный участок земли. Какую форму должен иметь этот чтобы он был наибольшей площади?

Решение

Задача №3

Дана окружность фиксированного радиуса R . Среди всех четырехугольников, которые можно вписать в эту окружность, найдите четырехугольник наибольшей возможной площади. Какой это четырехугольник и чему равна его площадь?

Решение

Задача №4 (для самостоятельного решения)

Дан острый угол и периметр. Найдите параллелограмм наибольшей площади из всех параллелограммов $ABCD$.

Подсказка: воспользуйтесь неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Решение

Домашняя задача: Дана сторона $AB = a$ и площадь S треугольника ABC .
Найдите треугольник наименьшего периметра из всевозможных треугольников ABC .

Не забудь сделать рисунок!

Решение

Рабочий лист для занятия №5

Решение олимпиадных задач

Актуализация

	Функция y	Производная y'
1	$a \ (a \in \mathbb{R})$	0
2	$x^a \ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot x^{a-1}$
3	e^x	e^x
4	$a^x \ (a > 0)$	$a^x \cdot \ln a$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	$\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

	Функция y	Производная y'
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Важные частные случаи		
15	x	1
16	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
17	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Рисунок - Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная
$a \cdot f(x) \ (a \in \mathbb{R})$	$a \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Рисунок - Таблица правил дифференцирования

Длина проекции _____ длины наклонной.

Задача №1

Четыре компьютера, расположенные в вершинах квадрата ABCD, соединены прямолинейными отрезками проводов с сервером, который находится в точке пересечения диагоналей O. Сторона квадрата равна 2 м. Несложно заметить, что для такого подключения потребуется $4\sqrt{2}$ метров провода. Чтобы уменьшить длину проводов, вам разрешается передвинуть сервер из точки O в любую другую точку O_1 , а также компьютер из точки A в любую другую точку A_1 так, чтобы новая суммарная длина проводов $S=O_1A_1+O_1B+O_1C+O_1D$ была как можно меньше. Разрешается компьютеры и сервер размещать в одной точке (например, точка A_1 может совпасть с точкой B). Компьютеры в вершинах B, C, D двигать нельзя. Чему равно минимальное значение S?

Решение

Задача №2

На листе бумаги нарисован прямой угол с вершиной А семиклассник Дима хочет провести несколько лучей в той же вершине, лежащие внутри данного угла, так, чтобы сумма всех получившихся углов составляла 400° . Какое наименьшее число лучей он может провести?

Решение

Задача №3

На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1. Доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

Решение

Рабочий лист для занятия №6. Группа 1

Самостоятельное исследование

Задача №1

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра ABCD, соединяющего середины рёбер AB и CD.

Решение

Задача №2

На поверхности куба $ABCDEFGH$ найдите такие точки K , из которых диагональ BH видна под наименьшим углом, то есть угол BKH наименьший. Чему равен этот угол?

1. Среди призм, вписанных в сферу и имеющих в основании правильный многоугольник, какая призма будет наибольшего объема?
2. Правильная n -гранная пирамида наименьшего объема описанная вокруг сферы. Что при этом вы наблюдаете?
3. Минимизация площади призмы поверхности при заданном объеме.
4. Минимизация суммы ребер при заданном объеме правильной призмы.
5. Оптимизация объема пирамиды при заданной площади боковой поверхности.

Рабочий лист для занятия №6. Группа 2

Самостоятельное исследование

Задача №1

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDEFGH$, соединяющего вершины B и H .

Решение

Задача №2 (общая для всех групп)

На поверхности куба $ABCDEFGH$ найдите такие точки K , из которых диагональ BH видна под наименьшим углом, то есть угол BKH наименьший. Чему равен этот угол?

1. Среди призм, вписанных в сферу и имеющих в основании правильный многоугольник, какая призма будет наибольшего объема?
2. Правильная n -гранная пирамида наименьшего объема описанная вокруг сферы. Что при этом вы наблюдаете?
3. Минимизация площади поверхности при заданном объеме.
4. Минимизация суммы ребер при заданном объеме правильной призмы.
5. Оптимизация объема при заданной площади боковой поверхности.

Рабочий лист для занятия №6. Группа 3

Самостоятельное исследование

Задача №1

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFMNOPQR$, соединяющего вершины B и Q . Все рёбра призмы равны 1.

Решение

Задача №2

На поверхности куба $ABCDEFGH$ найдите такие точки K , из которых диагональ BH видна под наименьшим углом, то есть угол BKH наименьший. Чему равен этот угол?

Решение

-
1. Среди призм, вписанных в сферу и имеющих в основании правильный многоугольник, какая призма будет наибольшего объема?
 2. Правильная n -гранная пирамида наименьшего объема описанная вокруг сферы. Что при этом вы наблюдаете?
 3. Минимизация площади поверхности при заданном объеме.
 4. Минимизация суммы ребер при заданном объеме правильной призмы.
 5. Оптимизация объема при заданной площади боковой поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена рассмотрению экстремальных задач по геометрии как средство организации исследовательской деятельности у учащихся. В ходе исследования были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

- 1) изучены обобщены литературные источники, раскрывающие содержание выбранной темы;
- 2) подобрана литература, касающаяся исследовательской деятельности школьников;
- 3) проведен анализ олимпиад по наличию экстремальных задач;
- 4) изучены методы решения экстремальных задач;
- 5) созданы рабочие листы для внеурочных занятий;
- 6) описаны содержание внеурочных занятий и составлены методические рекомендации к их проведению.

На основе приведенных результатов сформулированы выводы:

- 1) работу над пониманием решения экстремальных задач нужно начинать ещё в 7-ом классе, для более тщательной подготовки обучающихся;
- 2) вовлечение обучающихся в исследовательскую деятельность помогает лучшему пониманию материала и способствует быстрому запоминанию некоторых фактов геометрии;
- 3) разработанные рабочие листы и методические рекомендации упрощают работу учителя в подготовке к внеурочным занятиям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г.]. М. : Просвещение, 2021. 62 с.
2. Алгебра и начала математического анализа: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). 10–11 классы. – Ч. 1. / Под ред. А. Г. Мордкович [и др.] ; 10-е изд. М. : Мнемозина, 2009. 399 с.
3. Алгебра и начала математического анализа: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). 10–11 классы. – Ч. 2. / Под ред. А. Г. Мордкович [и др.] ; 10-е изд. М. : Мнемозина, 2009. 239 с.
4. Балк М. Б. Математика после уроков : пособие для учителей. М. : Просвещение, 2003. 462 с.
5. Бежану Т. В., Гацук О. А., Пестов С. Е. Формирование умения решать экстремальные задачи в школьном курсе математики // Наука и школа. 2024. № 1. С. 152–166.
6. Далингер В. А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике : учебное пособие. Омск : Изд-во ОмГПУ, 2005. 456 с.
7. Клещева И. В. Учебно-исследовательская деятельность учащихся при изучении математики как средство достижения новых образовательных результатов // Мир науки, культуры, образования. 2012. №4. С. 27 – 37.
8. Обухова А. С. Исследовательская деятельность учащихся : научно-методический сборник. М. : Исследователь, 2007. 495 с.
9. Практикум по элементарной математике: Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович [и др.] ; 2-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 1992. 352 с.
10. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М. : МЦНМО, 2007. 2-е изд., перераб и доп. 328 с.

11. Теория и технология обучения математике в школе: учеб. пособие для студ. матем. спец. педвузов / Под ред. Т. А. Ивановой [и др.] ; 2-е изд. Н. Новгород. : НГПУ, 2009. 355 с.
12. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М. : МЦНМО, 2006. 200 с.
13. Тищенко А. А. Кружковая работа по математике как форма подготовки к олимпиадам // Дидактика математики: проблемы и исследования. Международный сборник научных работ. 2023. № 1. С. 77 – 83.
14. Хамидуллина Л. В. Организация исследовательской деятельности при обучении математике в основной и старшей школе. 2015. №3. С. 55-59.
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/organizatsiya-issledovatel'skoy-deyatelnosti-pri-obuchenii-matematike-v-osnovnoy-i-starshey-shkole/viewer>.
Заглавие с экрана (дата обращения: 23.12.2024).
15. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин [и др.] ; М. : ООО Изд-во «Астрель», 2001. 400 с.
16. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: решение задач / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. [и др.] ; М. : Просвещение, 1991. 384 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра «Математическое
образование»

Направление подготовки
44.03.01 «Педагогическое образование»
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой

«30» 10 2024 г.



Паньженский В. И.

Задание

по ВКР студента Куралиной Анастасии Юрьевны.
(ФИО полностью)

Тема работы: «Экстремальные задачи по геометрии как средство организации исследовательской деятельности учащихся».

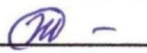
Утверждена приказом по университету от « 25. 12 » 20 24 г. № 135 0/0

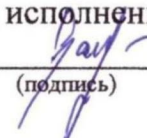
Срок сдачи студентом законченной работы « 6 » мая 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и обобщение литературных источников, раскрывающих содержание выбранной темы.	Октябрь – ноябрь 2024	выполнила
2.	Подбор литературы, касающаяся исследовательской деятельности школьников.	Декабрь 2024	выполнила
3.	Изучение методов решения экстремальных задач.	Январь – февраль 2025	выполнила
4.	Создание рабочих листов для внеурочных занятий.	Март – апрель 2025	выполнила
5.	Описание содержания внеурочных занятий и составление рекомендации к их проведению.	Апрель 2025	выполнила
6.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2025	выполнила
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2025	выполнила

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель  Журавлева Е.Г.
(подпись) (ФИО)

Задание приняла к исполнению  Куралина А.Ю.
(подпись) (ФИО)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Куралиной Анастасии Юрьевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

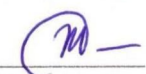
Я, Куралина Анастасия Юрьевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат.ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Экстремальные задачи по геометрии как средство организации исследовательской деятельности учащихся», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


(подпись)
20.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 20.05.25
(дата)

Руководитель ВКР 
(подпись) Журавлева Е.Г.
(ФИО)

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему «Экстремальные задачи по геометрии как средство организации исследовательской деятельности учащихся»

студентки 4 курса Куралиной Анастасии Юрьевны

направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.

Отчет о проверке

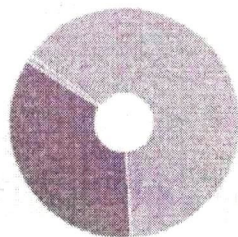
Автор: Куралина Анастасия

Название документа: Экстремальные задачи по геометрии как средство организации исследовательской деятельности у учащихся

Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Соплавления:
34,89%

Цитирование:
64,17%

Уникальность:
0,94%

Плагиат (математика):
0%

«Соплавления», «Цитирование», «Самодетерминация», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 139

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 20.05.2025 08:03:41

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 82

Символов в тексте: 95775

Слов в тексте: 9784

Число предложений: 1844

Комментарий: не указано

Руководитель ВКР

20.05.25 (Журавлева)

дата, подпись

Е.Г. Журавлева

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: « Экстремальные задачи по геометрии как средство
организации исследовательской деятельности учащихся»
студентки Куралиной Анастасии Юрьевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Куралиной Анастасии Юрьевны посвящена организации исследовательской деятельности учащихся посредством решения экстремальных задач по геометрии.

Активизация деятельности учителя в плане организации исследовательской деятельности школьников становится особенно актуальной в связи с освоением Федерального государственного стандарта основного общего образования, в котором говорится о необходимости «формирования компетенций обучающихся в области использования исследовательской деятельности». В качестве средства формирования исследовательской деятельности учащихся нами предложены экстремальные задачи по геометрии. Под экстремальными геометрическими задачами понимают задачи на нахождение наибольших или наименьших значений геометрических величин. Экстремальные геометрические задачи представляют собой своеобразный «математический сплав» геометрии, алгебры, тригонометрии, анализа. Поэтому решение таких задач очень полезно для учащихся. При решении геометрических задач экстремального характера можно воспользоваться как общим методом (с помощью производной), так и частными методами элементарной математики. Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение как для математики, так и для ее приложений, а с другой стороны, развивают геометрические представления, формируют необходимые умения и навыки. Особую роль при этом играет методика решения таких задач, при которой задачи разбиваются на подзадачи, посильные для самостоятельного решения.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: проведен анализ литературы по теме исследования; выявлены различные методы решения экстремальных задач; разработана методика обучения решению экстремальных задач с геометрическим содержанием (созданы рабочие листы для внеурочных занятий, составлены рекомендации по их проведению).

Работа является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован в школе.

Выпускная квалификационная работа Куралиной А.Ю. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева