

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ПОЛИНОМАМИ ВОЛЬТЕРРА*)

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

Исследуются методы идентификации нелинейных динамических систем, описываемых рядами Вольтерра. При моделировании динамических систем одной из основных является проблема подбора параметров, позволяющих осуществлять планируемое поведение системы. Если структура модели определена заранее, решение этой проблемы тесно перекликается с проблемой идентификации параметров системы.

Также исследуется параметрическая идентификация непрерывных и дискретных нелинейных динамических систем. Методы идентификации в непрерывном случае основаны на применении обобщенной теоремы Бореля в сочетании с интегральными преобразованиями. Для исследования дискретных систем применяется дискретный аналог обобщенной теоремы Бореля, который используется в сочетании с дискретными преобразованиями. На модельных примерах иллюстрируется применение разработанных методов к моделированию систем с заданными характеристиками.

Ключевые слова: моделирование, нелинейные системы, идентификация, динамические системы, ряд Вольтерра, ядра Вольтерра.

DOI 10.17377/SIBJIM.2018.21.201

ВВЕДЕНИЕ

Большинство физических, технологических, биологических и других процессов являются нелинейными, и их натурное моделирование или затратно, или вообще невозможно, поэтому представляется актуальным математическое моделирование нелинейных динамических систем. Во многих случаях нелинейные системы моделируются нелинейными дифференциальными уравнениями, сложность применения которых обусловлена необходимостью точного описания неизвестных или малоизвестных физических процессов. Метод моделирования на основе интегральных уравнений Вольтерра (модели типа вход-выход) является перспективным направлением, не требующим детального описания физических процессов.

Один из универсальных методов моделирования нелинейных динамических систем типа вход-выход заключается в применении рядов Вольтерра [1]. Методы моделирования нелинейных систем, предлагаемые в работе, основаны на алгоритмах идентификации, позволяющих определить ядра Вольтерра.

Идентификация динамических систем становится одним из важнейших направлений науки и техники. Этому направлению посвящено большое число работ (обширная библиография которых имеется в [2, 3], где представлены различные методы).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00594).

Большинство результатов по идентификации получено для линейных систем, которые описываются:

— интегральными уравнениями в свертках, обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами [2–4] (стационарные системы);

— интегральными уравнениями Вольтерра, обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами [2, 5, 6] (нестационарные системы);

— многомерными интегральными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных [2, 7–9] (системы с распределенными параметрами).

Как правило, все реальные физические процессы нелинейные, вследствие чего разработка методов идентификации нелинейных систем представляется актуальной задачей.

Задачи, приводящие к идентификации нелинейных систем, встречаются во многих областях науки и техники, в частности при нелинейной фильтрации изображений [10].

Методы идентификации ядер в рядах Вольтерра разработаны недостаточно. Отметим работу [11], где предложен метод определения ядер Вольтерра в конечных суммах, описывающих стационарные процессы. Для определения ядер Вольтерра в [11] применяется многомерное преобразование Лапласа, а затем к полученным изображениям ядер применяется теорема о переходе к одной переменной и формула обращения преобразования Лапласа. К сожалению, этот метод не распространяется на нестационарные системы, идентификация которых представляет значительный практический и теоретический интерес.

В данной работе предложены методы определения ядер Вольтерра в непрерывных и дискретных нестационарных нелинейных процессах. Обоснования методов основаны на обобщении теоремы Бореля [12] и интегральных преобразованиях (в непрерывном случае) и на дискретном аналоге теоремы Бореля и дискретных преобразованиях (в дискретном случае).

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим нестационарную нелинейную динамическую систему с распределенными параметрами, описываемую уравнением

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & \int_0^t \int_D g_1(t, \tau_1, x, \xi) \omega(\tau_1, \xi) d\xi d\tau_1 \\
 & + \int_0^t \int_0^t \int_D g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi) \omega(\tau_1, \xi) \omega(\tau_2, \xi) d\xi d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\
 & + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \int_D g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, x, \xi) \\
 & \quad \times \omega(\tau_1, \xi) \omega(\tau_2, \xi) \dots \omega(\tau_N, \xi) d\xi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N, \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ — область в пространстве, в которой наблюдаются входной и выходной сигналы системы; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in D$; $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$; $\omega(t, x)$ — входной сигнал; $y(t, x)$ — выходной сигнал; $g_1(t, \tau_1, x, \xi)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi)$, $\dots$, $g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, x, \xi)$ — ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению.

Будем считать, что ядра Вольтерра $g_1(t, \tau, x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots, x_n, \xi_n)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots, x_n, \xi_n), \dots, g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots, x_n, \xi_n)$ удовлетворяют следующему условию физической реализуемости:

$$g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots, x_n, \xi_n) = 0, \quad (1.2)$$

если $\tau_k > t$ при некотором $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ или $\xi \notin D$. Это позволяет представить уравнение (1.1) в виде

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^N \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) \times w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (1.3)$$

где

$$w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{l=1}^k \omega(\tau_l, \xi_1, \dots, \xi_n), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Обозначим через L оператор $L = L_{x_n}[\dots L_{x_1}[L_t]]$, где $L_t, L_{x_1}, \dots, L_{x_n}$ — операторы Лапласа, действующие по переменным $t, x_1, \dots, x_n$. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} G_k(p, \tau_1, \dots, \tau_k, p_1, \xi_1, \dots, p_n, \xi_n) &= L[g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)] \\ &= \hat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\} \exp \left\{ - \sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\hat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n)$, $q_{kl}(p)$, $\dots$, $q_{kk}(p)$, $\bar{q}_{kl}(p_l)$, $k = 1, 2, \dots, N$, $l = 1, 2, \dots, n$, — аналитические функции в области, определяемой неравенствами $\operatorname{Re} p \geq \alpha$, $\operatorname{Re} p_k \geq \alpha$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = \text{const}$. Тогда преобразование Лапласа уравнения (1.3) имеет вид

$$\begin{aligned} Y(p, p_1, \dots, p_n) &= \hat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n) W_1(q_{11}(p), \bar{q}_{11}(p_1), \dots, \bar{q}_{1n}(p_n)) \\ &\quad + \hat{G}_2(p, p_1, \dots, p_n) W_2(q_{21}(p), q_{22}(p), \bar{q}_{21}(p_1), \dots, \bar{q}_{2n}(p_n)) + \dots \\ &\quad + \hat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n) W_N(q_{N1}(p), \dots, q_{NN}(p), \bar{q}_{N1}(p_1), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $W_k(q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{k1}(p_1), \dots, \bar{q}_{kn}(p_n))$, $k = 1, \dots, N$, — многомерное преобразование Лапласа функций $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n)$ по переменным $\tau_1, \dots, \tau_k$, $k = 1, \dots, N$, $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\begin{aligned} W_k(q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{k1}(p_1), \dots, \bar{q}_{kn}(p_n)) \\ = \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\} \\ \times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l) \right\} d\tau_1 \dots d\tau_k d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Докажем равенство (1.6). Введем обозначения

$$y_k(t, x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$$

$$\times w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = y_1(t, x_1, \dots, x_n) + y_2(t, x_1, \dots, x_n) + \dots + y_N(t, x_1, \dots, x_n),$$

а уравнение (1.6) преобразуется в уравнение

$$Y(p, p_1, \dots, p_n) = Y_1(p, p_1, \dots, p_n) + Y_2(p, p_1, \dots, p_n) + \dots + Y_N(p, p_1, \dots, p_n),$$

где $Y(p, p_1, \dots, p_n)$, $Y_k(p, p_1, \dots, p_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$, — преобразования Лапласа функций $y(t, x_1, \dots, x_n)$, $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$, полученные применением оператора L .

Найдем преобразование Лапласа функций $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$. При условиях (1.2), (1.5), применяя оператор L к функциям $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, получим

$$\begin{aligned} L[y_k(t, x_1, \dots, x_n)] &= Y_k(p, p_1, \dots, p_n) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n \widehat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\} \exp \left\{ - \sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l) \right\} \\ &\quad \times w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k \\ &= \widehat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n \exp \left\{ - \sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_{l=1}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l) \right\} w_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k \\ &= \widehat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) W_k(q_{k1}(p), \dots, q_{kk}(p), \bar{q}_{k1}(p_1), \dots, \bar{q}_{kn}(p_n)), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

В результате получим равенство (1.6).

Постановка задачи восстановления ядер Вольтерра системы (1.1) по серии тестовых сигналов. Требуется по серии тестовых входных $\omega_k(t, x_1, \dots, x_n)$ и соответствующих выходных $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, N(N+2n+3)/2$, сигналов определить ядра Вольтерра нелинейной динамической системы, описываемой уравнением (1.1). Предполагается, что ядра Вольтерра удовлетворяют условиям (1.2) и (1.5).

Для серии входных $\omega_k(t, x_1, \dots, x_n)$ и соответствующих выходных сигналов $y_k(t, x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, N(N+2n+3)/2$, на основании (1.1), (1.3) и (1.4) запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} y_m(t, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_k \underbrace{\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_n g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) \\ &\quad \times w_{mk}(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (1.7) \end{aligned}$$

где

$$w_{mk}(\tau_1, \dots, \tau_k, \xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{l=1}^k \omega_m(\tau_l, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, \dots, N(N + 2n + 3)/2.$$

Применяя преобразования Лапласа к системе уравнений (1.7) и учитывая (1.6), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} Y_m(p, p_1, \dots, p_n) &= \widehat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n) W_{m1}(q_{11}(p), \bar{q}_{11}(p_1), \dots, \bar{q}_{1n}(p_n)) \\ &+ \widehat{G}_2(p, p_1, \dots, p_n) W_{m2}(q_{21}(p), q_{22}(p), \bar{q}_{21}(p_1), \dots, \bar{q}_{2n}(p_n)) + \dots \\ &+ \widehat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n) W_{mN}(q_{N1}(p), \dots, q_{NN}(p), \bar{q}_{N1}(p_1), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n)), \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots, N(N + 2n + 3N)/2,$$

относительно $N(N + 2n + 3)/2$ искомым функций $\widehat{G}_1(p, p_1, \dots, p_n)$, $q_{11}(p)$, $\widehat{G}_2(p, p_1, \dots, p_n)$, $q_{21}(p), q_{22}(p), \dots$, $\widehat{G}_N(p, p_1, \dots, p_n)$, $q_{N1}(p), q_{N2}(p), \dots, q_{NN}(p)$, $\bar{q}_{N1}(p_1), \bar{q}_{N2}(p_2), \dots, \bar{q}_{Nn}(p_n)$.

Искомые ядра Вольтерра $g_1(t, \tau, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n), \dots, g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$ определим обратным преобразованием Лапласа по формулам

$$\begin{aligned} g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k, x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{G}_k(p, p_1, \dots, p_n) \\ &\times \exp \left\{ pt - \sum_{l=0}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\} \exp \left\{ \sum_{l=0}^n p_l x_l - \sum_{l=0}^n \xi_l \bar{q}_{kl}(p_l) \right\} dp dp_1 \dots dp_n, \\ &\sigma > \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \int_0^t \int_0^x g_1(t, \tau, x, \xi) \omega(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^t \int_0^x g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi) \omega(\tau_1, \xi) \omega(\tau_2, \xi) d\xi d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Пусть ядра Вольтерра удовлетворяют условиям (1.5) и условиям каузальности вида $g_1(t, \tau, x, \xi) = 0$ при $\tau > t$ или $\xi > x$; $g_2(t, \tau, \tau_2, x, \xi) = 0$ при $\tau_1 + \tau_2 > t$ или $\xi > x$. Тогда изображение Лапласа уравнения (1.9) по переменным t, x на основании (1.8) для серии двух тестовых входных сигналов $\omega_1(t, x)$, $\omega_2(t, x)$ и соответствующих выходных сигналов $y_1(t, x)$, $y_2(t, x)$ запишется в виде системы

$$\begin{aligned} Y_k(p, p_1) &= G_1(p, p_1) W_{k1}(q_{11}(p), \bar{q}_{11}(p_1)) \\ &+ G_2(p, p_1) W_{k2}(q_{21}(p), q_{22}(p), \bar{q}_{21}(p_1)), \quad k = 1, 2. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Пусть преобразования Лапласа ядер $g_1(t, \tau, x, \xi)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi)$ по переменным t, x удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
L_t[g_1] &= \widehat{G}_1(p, x, \xi)e^{-\tau p}, \\
L_x[L_t[g_1]] &= L_x[\widehat{G}_1(p, x, \xi)e^{-\tau p}] = G_1(p, p_1)e^{-\tau p}e^{-\xi p_1}, \\
L_t[g_2] &= \widehat{G}_2(p, x, \xi)e^{-p(\tau_1+\tau_2)}, \\
L_x[L_t[g_2]] &= L_x[\widehat{G}_2(p, x, \xi)e^{-p(\tau_1+\tau_2)}] = G_2(p, p_1)e^{-p(\tau_1+\tau_2)}e^{-\xi p_1}.
\end{aligned}$$

Это означает, что в условиях (1.5) положено

$$q_{11}(p) = q_{21}(p) = q_{22}(p) = p, \quad \bar{q}_{11}(p_1) = \bar{q}_{21}(p_1) = p_1. \quad (1.11)$$

С учетом (1.11) система (1.10) примет вид

$$Y_k(p, p_1) = G_1(p, p_1)W_{k1}(p, p_1) + G_2(p, p_1)W_{k2}(p, p_1), \quad k = 1, 2, \quad (1.12)$$

и для определения $G_1(p, p_1)$, $G_2(p, p_1)$ потребуются два входных и выходных сигнала. Возьмем два входных сигнала:

$$\omega_1(t, x) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, x \geq 0, \\ 0, & t < 0 \text{ или } x < 0; \end{cases} \quad \omega_2(t, x) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, x \geq 0, \\ 0, & t < 0 \text{ или } x < 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Им соответствуют выходные сигналы

$$y_1(t, x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}(t + e^{-t} - 1) - \frac{t^2}{2}(\cos x - 1), & t \geq 0, x \geq 0, \\ 0, & t < 0 \text{ или } x < 0; \end{cases} \quad (1.14)$$

$$y_2(t, x) = \begin{cases} 2 \sin^2 \frac{x}{2}(t - \sin t) \\ -\frac{x^2}{8}((t+1)\cos t + (t-2)\sin t - e^{-t}), & t \geq 0, x \geq 0, \\ 0, & t < 0 \text{ или } x < 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

которые определяются ядрами

$$\begin{aligned}
g_1(t, \tau, x) &= \begin{cases} (t - \tau) \sin(x - \xi), & \tau \leq t, \xi \leq x, \\ 0, & \tau > t \text{ или } \xi > x; \end{cases} \\
g_1(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi) &= \begin{cases} (x - \xi)e^{-(t-(\tau_1+\tau_2))}, & \tau_1 + \tau_2 \leq t, \xi \leq x, \\ 0, & \tau_1 + \tau_2 > t \text{ или } \xi > x. \end{cases}
\end{aligned} \quad (1.16)$$

Построим систему уравнений вида (1.12). Вычисляя преобразования Лапласа входных (1.13) и выходных (1.14) сигналов, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
G_1(p, p_1) \frac{1}{pp_1} + G_2(p, p_1) \frac{1}{p^2 p_1} &= \frac{p + 2pp_1^2 + p_1^2}{p^3 p_1^3 (p+1)(p_1^2+1)}, \\
G_1(p, p_1) \frac{1}{(p^2+1)p_1} + G_2(p, p_1) \frac{1}{(p^2+1)^2 p_1} &= \frac{p^3 p_1^3 + 2p^2 p_1^2 + p^2 + pp_1^2 + p_1^2}{p^2 p_1^3 (p+1)(p^2+1)^2 (p_1^2+1)}.
\end{aligned}$$

Решая эту систему относительно неизвестных функций $G_1(p, p_1)$ и $G_2(p, p_1)$, получим $G_1(p, p_1) = 1/(p^2(p_1^2+1))$; $G_2(p, p_1) = 1/((p+1)p_1^2)$. Тогда изображения искоемых ядер $g_1(t, \tau, x, \xi)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi)$ будут функции

$$\widehat{G}_1(p, \tau, p_1, \xi) = \frac{e^{-\tau p} e^{-\xi p_1}}{p^2(p_1^2+1)}, \quad G_2(p, \tau_1, \tau_2, p_1, \xi) = \frac{e^{-(\tau_1+\tau_2)p} e^{-\xi p_1}}{(p+1)p_1^2},$$

и искоемые ядра будут определяться выражениями $g_1(t, \tau, x) = (t - \tau) \sin(x - \xi)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2, x, \xi) = (x - \xi)e^{-(t-(\tau_1+\tau_2))}$, что совпадает с точными выражениями (1.16).

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Частными случаями систем с распределенными параметрами являются системы с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим системы, описываемые уравнениями вида

$$y(t) = \int_0^t g_1(t, \tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \times x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N, \quad (2.1)$$

где $x(t)$ — входной сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал; $g_1(t, \tau_1), g_2(t, \tau_1, \tau_2), \dots, g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ — ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению. Будем считать, что ядра Вольтерра $g_1(t, \tau), g_2(t, \tau_1, \tau_2), \dots, g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ удовлетворяют следующему условию физической реализуемости:

$$g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = 0, \quad (2.2)$$

если $\tau_k > t$ при некотором $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Это позволяет представить уравнение (2.1) в виде

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g_1(t, \tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \times x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N. \quad (2.3)$$

В случае системы (2.1) оператор L , введенный в разд. 1, будет иметь вид $L = L_t$, где L_t — оператор Лапласа, действующий по переменной t , а условия (1.5) примут вид

$$\begin{aligned} G_k(p, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= L_t[g_k(t, \tau_1, \dots, \tau_k)] = \int_0^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) e^{-pt} dt \\ &= \widehat{G}_k(p) \exp \left\{ - \sum_{l=1}^k \tau_l q_{kl}(p) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\widehat{G}_k(p), q_{k1}(p), q_{k2}(p), \dots, q_{kk}(p)$ — аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \alpha$, $\alpha = \text{const}$, функции. Тогда преобразование Лапласа уравнения (2.3) имеет вид

$$Y(p) = \widehat{G}_1(p) X(q_{11}(p)) + \widehat{G}_2(p) X(q_{21}(p)) X(q_{22}(p)) + \dots + \widehat{G}_N(p) X(q_{N1}(p)) X(q_{N2}(p)) \dots X(q_{NN}(p)). \quad (2.5)$$

Справедливость (2.5) следует из доказанного выше равенства (1.6).

Постановка задачи восстановления ядер Вольтерра системы (2.1) по серии тестовых сигналов. Требуется по серии тестовых входных $x_k(t)$ и соответствующих выходных $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2$, сигналов определить ядра Вольтерра нелинейной динамической системы, описываемой уравнением (2.1). Предполагается, что ядра Вольтерра удовлетворяют условиям (2.2) и (2.4).

Для серии входных $x_k(t)$ и соответствующих выходных сигналов $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2$, на основании (2.1) запишем уравнения

$$y_k(t) = \int_0^t g_1(t, \tau) x_k(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t g_2(t, \tau_1, \tau_2) x_k(\tau_1) x_k(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots$$

$$+ \int_0^t \dots \int_0^t \int_0^t g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) x_k(\tau_1) x_k(\tau_2) \dots x_k(\tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N,$$

$$k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2.$$

Как и выше, через $X_k(p)$ и $Y_k(p)$ обозначим изображение Лапласа входных $x_k(t)$ и соответствующих выходных $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2$, сигналов. В результате получим систему уравнений

$$Y_k(p) = \widehat{G}_1(p) X_k(q_{11}(p)) + \widehat{G}_2(p) X_k(q_{21}(p)) X_k(q_{22}(p)) + \dots$$

$$+ \widehat{G}_N(p) X_k(q_{N1}(p)) X_k(q_{N2}(p)) \dots X_k(q_{NN}(p)), \quad k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2, \quad (2.6)$$

относительно $N(N+3)/2$ искомых функций $\widehat{G}_1(p)$, $q_{11}(p)$, $\widehat{G}_2(p)$, $q_{21}(p)$, $q_{22}(p)$, $\dots$, $\widehat{G}_N(p)$, $q_{N1}(p)$, $q_{N2}(p)$, $\dots$, $q_{NN}(p)$.

Искомые ядра Вольтерра $g_1(t, \tau)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$, $\dots$, $g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ определим обратным преобразованием Лапласа по формулам

$$g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{G}_k(p) e^{pt - \tau_1 q_{k1}(p) - \tau_2 q_{k2}(p) - \dots - \tau_k q_{kk}(p)} dp,$$

$$k = 1, 2, \dots, N(N+3)/2, \quad \sigma > \alpha.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$y(t) = \int_0^t g_1(t, \tau) x(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t g_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (2.7)$$

Пусть:

1) для функций $g_1(t, \tau)$ и $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$ выполняются условия физической реализуемости (условия каузальности) следующего вида:

$$g_1(t, \tau) = 0 \text{ при } \tau > t; \quad g_2(t, \tau_1, \tau_2) = 0 \text{ при } \tau_1 + \tau_2 > t; \quad (2.8)$$

2) преобразования Лапласа функций $g_1(t, \tau)$ и $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$ по переменной t имеют вид

$$G_1(p, \tau) = L_t[g_1(t, \tau)] = \int_0^{+\infty} g_1(t, \tau) e^{-pt} dt = \widehat{G}_1(p) e^{-p\tau}, \quad (2.9)$$

$$G_2(p, \tau_1, \tau_2) = L_t[g_2(t, \tau_1, \tau_2)]$$

$$= \int_0^{+\infty} g_2(t, \tau_1, \tau_2) e^{-pt} dt = (\widehat{G}_{21}(p) + \tau_1 \widehat{G}_{22}(p)) e^{-p(\tau_1 + \tau_2)}. \quad (2.10)$$

Требуется определить ядра Вольтерра $g_1(t, \tau)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае естественно искать функции $G_1(p, \tau)$ и $G_2(p, \tau_1, \tau_2)$ в виде разложений

$$G_1(p, \tau) = (\hat{G}_0^1(p) + \tau \hat{G}_1^1(p) + \dots + \tau^n \hat{G}_n^1(p)) e^{-p\tau},$$

$$G_2(p, \tau_1, \tau_2) = (\hat{G}_{00}^2(p) + \tau_1 \hat{G}_{10}^2(p) + \tau_2 \hat{G}_{01}^2(p) + \dots + \tau_1^n \hat{G}_{n0}^2(p) + C_n^1 \tau_1^{n-1} \tau_2 \hat{G}_{n-1,1}^2(p) + \dots + \tau_2^n \hat{G}_{0n}^2(p)) e^{-p(\tau_1 + \tau_2)},$$

однако в этом случае потребуется большее число испытаний и большая вычислительная работа.

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 2. При выполнении условий (2.8) уравнение (2.7) представимо в эквивалентной форме:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g_1(t, \tau) x(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(t - (\tau_1 + \tau_2)) g_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (2.11)$$

где $K(u) = 0$ при $u < 0$, $K(u) = 1$ при $u \geq 0$.

Введем обозначения

$$y_1(t) = \int_0^{+\infty} g_1(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

$$y_2(t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(t - (\tau_1 + \tau_2)) g_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Тогда уравнение (2.11) примет вид $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, а преобразование Лапласа уравнения (2.11) запишется в виде

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p). \quad (2.12)$$

Воспользовавшись условиями (2.9), (2.10), имеем

$$Y_1(p) = \hat{G}_1(p) X(p), \quad (2.13)$$

$$Y_2(p) = \hat{G}_{21}(p) X^2(p) - \hat{G}_{22}(p) X(p) X'(p) \quad (2.14)$$

(формула (2.14) доказывается ниже). Отсюда

$$Y(p) = \hat{G}_1(p) X(p) + \hat{G}_{21}(p) X^2(p) - \hat{G}_{22}(p) X(p) X'(p). \quad (2.15)$$

Докажем справедливость формулы (2.14). Учитывая (2.10), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} y_2(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(t - (\tau_1 + \tau_2)) g_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right) e^{-pt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} K(t - (\tau_1 + \tau_2)) g_2(t, \tau_1, \tau_2) e^{-pt} dt \right) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\tau_1 + \tau_2}^{+\infty} g_2(t, \tau_1, \tau_2) e^{-pt} dt \right) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g_2(t, \tau_1, \tau_2) e^{-pt} dt \right) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (\hat{G}_{21}(p) + \tau_1 \hat{G}_{22}(p)) x(\tau_1) x(\tau_2) e^{-p\tau_1} e^{-p\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\hat{G}_{21}(p) x(\tau_2) \int_0^{+\infty} x(\tau_1) e^{-p\tau_1} d\tau_1 + \hat{G}_{22}(p) x(\tau_2) \int_0^{+\infty} \tau_1 x(\tau_1) e^{-p\tau_1} d\tau_1 \right) \\
&\quad \times e^{-p\tau_2} d\tau_2 = \hat{G}_{21}(p) X(p) \int_0^{+\infty} x(\tau_2) e^{-p\tau_2} d\tau_2 - \hat{G}_{22}(p) X'(p) \int_0^{+\infty} x(\tau_2) e^{-p\tau_2} d\tau_2 \\
&= \hat{G}_{21}(p) X^2(p) - \hat{G}_{22}(p) X(p) X'(p).
\end{aligned}$$

Формула (2.14) доказана.

Подставляя (2.13), (2.14) в (2.12), получаем (2.15).

Вернемся к решению примера при задании конкретных ядер Вольтерра.

Определим ядра Вольтерра нелинейного измерительного преобразователя (2.7) функциями

$$\begin{aligned}
g_1(t, \tau) &= \begin{cases} \sin(t - \tau), & \tau \leq t, \\ 0, & \tau > t; \end{cases} \\
g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \begin{cases} (t - \tau_2) e^{-(t - \tau_1 - \tau_2)}, & \tau_1 + \tau_2 \leq t, \\ 0, & \tau_1 + \tau_2 > t. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Требуется по серии входных тестовых сигналов $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, и соответствующих выходных сигналов $y_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, определить функции $g_1(t, \tau)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$, удовлетворяющие условиям (2.8)–(2.10).

В качестве входных сигналов возьмем

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad x_3(t) = \begin{cases} \cos t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Соответствующие выходные сигналы $y_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, имеют вид

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \begin{cases} t^2/2 + e^{-t}(t - \cos t) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases} \\
y_2(t) &= \begin{cases} \frac{1}{8}(2e^{-t}(t+1) - \cos t(t^2 + 5t + 2) - \sin t(t^2 - t - 5)) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases} \\
y_3(t) &= \begin{cases} \frac{1}{8}(2te^{-t} + t \cos t(t-1) + \sin t(t^2 + 5t - 1)) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вычислив преобразование Лапласа входных сигналов $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, производные их изображений, а также преобразования Лапласа выходных сигналов, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\hat{G}_1(p)$, $\hat{G}_{21}(p)$, $\hat{G}_{22}(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{G}_1(p)}{p} + \frac{\hat{G}_{21}(p)}{p^2} + \frac{\hat{G}_{22}(p)}{p^3} &= \frac{p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 1}{p^3(p+1)^2(p^2+1)}, \\ \frac{\hat{G}_1(p)}{p^2+1} + \frac{\hat{G}_{21}(p)}{(p^2+1)^2} + \frac{2p\hat{G}_{22}(p)}{(p^2+1)^3} &= \frac{p^4 + 2p^3 + 5p^2 + 4p + 2}{(p+1)(p^2+1)^3}, \\ \frac{p\hat{G}_1(p)}{p^2+1} + \frac{p^2\hat{G}_{21}(p)}{(p^2+1)^2} + \frac{p(p^2-1)\hat{G}_{22}(p)}{(p^2+1)^3} &= \frac{p^2(p^3 + 4p^2 + 3p + 2)}{(p+1)^2(p^2+1)^3}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решением системы уравнений (2.17) будут функции $\hat{G}_1(p) = 1/(p^2+1)$, $\hat{G}_{21}(p) = 1/(p+1)^2$, $\hat{G}_{22}(p) = 1/(p+1)$.

Из (2.9), (2.10) следует, что изображения функций $g_1(t, \tau)$, $g_2(t, \tau, \tau_1)$ имеют вид

$$G_1(p, \tau) = \frac{1}{p^2+1} e^{-p\tau}, \quad G_2(p, \tau_1, \tau_2) = \left(\frac{1}{(p+1)^2} - \tau_1 \frac{1}{p+1} \right) e^{-p(\tau_1+\tau_2)}.$$

Оригиналами являются функции $g_1(t, \tau) = \sin(t - \tau)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2) = (t - \tau_2)e^{-(t-\tau_1-\tau_2)}$, что совпадает с точными выражениями (см. (2.16)).

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим нелинейную дискретную динамическую систему, описываемую уравнением

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g_1(k, l)x(l) + \dots + \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^k \dots \sum_{l_N=0}^k \times g_N(k, l_1, l_2, \dots, l_N)x(l_1)x(l_2)\dots x(l_N), \quad (3.1)$$

где $x(k)$ — входной сигнал; $y(k)$ — выходной сигнал; $g_1(k, l)$, $g_2(k, l_1, l_2)$, $\dots$, $g_N(k, l_1, l_2, \dots, l_N)$, $k, l = 0, 1, \dots$, — ядра Вольтерра, подлежащие восстановлению. Будем считать, что выполнены следующие условия физической реализуемости: при любом $i = 1, \dots, N$ имеем $g_i(k, l_1, l_2, \dots, l_i) = 0$, если $l_j > k$ при некотором $j \in \{1, \dots, i\}$. Тогда уравнение (3.1) можно переписать в эквивалентной форме:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} g_1(k, l)x(l) + \dots + \sum_{l_1=0}^{+\infty} \sum_{l_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{l_N=0}^{+\infty} \times g_N(k, l_1, l_2, \dots, l_N)x(l_1)x(l_2)\dots x(l_N). \quad (3.2)$$

Пусть Z -преобразование ядер Вольтерра уравнения (3.2) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} G_1(z, l) = Z[g_1(k, l)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} g_1(k, l)z^{-k} = \hat{G}_1(z)[q_{11}(z)]^{-l}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Постановка задачи восстановления ядер Вольтерра дискретных систем. Требуется определить ядра Вольтерра по серии тестовых входных $x_i(k)$ и выходных $y_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, N(N+3)/2$, сигналов, Z -преобразования которых обозначаются как $X_i(z)$, $Y_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, N(N+3)/2$, соответственно. При предположении, что ядра Вольтерра $g_1(k, l), g_2(k, l_1, l_2), \dots, g_N(k, l_1, l_2, \dots, l_N)$ удовлетворяют условиям (3.3), приходим к системе уравнений

$$Y_i(z) = \hat{G}_1(z)X_i(q_{11}(z)) + \dots + \hat{G}_N(z)X_i(q_{N1}(z))X_i(q_{N2}(z)) \dots X_i(q_{NN}(z)), \quad (3.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N(N+3)/2,$$

относительно искомым функций $\hat{G}_1(z), q_{11}(z), \hat{G}_2(z), q_{21}(z), q_{22}(z), \dots, \hat{G}_N(z), q_{N1}(z), \dots, q_{NN}(z)$. В случае разрешимости этой системы искомые ядра Вольтерра $g_1(k, l), \dots, g_N(k, l_1, \dots, l_N)$ определяются обратным Z -преобразованием по формулам

$$g_m(k, l_1, \dots, l_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{G}_m(z) \prod_{i=1}^m [q_{mi}(z)]^{-l_i} z^{k-1} dz,$$

$$m = 1, \dots, N, \quad \sigma > \alpha.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим нелинейный измерительный преобразователь, описываемый уравнением

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g_1(k, l)x(l) + \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^k g_2(k, l_1, l_2)x(l_1)x(l_2). \quad (3.7)$$

Определим для функций $g_1(k, l)$ и $g_2(k, l_1, l_2)$ условия физической реализуемости (условия каузальности) в виде

$$g_1(k, l) = 0 \text{ при } l > k, \quad g_2(k, l_1, l_2) = 0 \text{ при } l_1 + l_2 > k. \quad (3.8)$$

Требуется восстановить ядра Вольтерра $g_1(k, l)$ и $g_2(k, l_1, l_2)$ системы, описываемой уравнением (3.7).

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3. При выполнении условий (3.8) уравнение (3.7) эквивалентно следующему:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} g_1(k, l)x(l) + \sum_{l_1=0}^{+\infty} \sum_{l_2=0}^{+\infty} g_2(k, l_1, l_2)x(l_1)x(l_2). \quad (3.9)$$

Введем обозначения

$$y_1(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} g_1(k, l)x(l), \quad (3.10)$$

$$y_2(k) = \sum_{l_1=0}^{+\infty} \sum_{l_2=0}^{+\infty} g_2(k, l_1, l_2)x(l_1)x(l_2). \quad (3.11)$$

Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k). \quad (3.12)$$

Пусть Z -преобразование функций $g_1(k, l)$ и $g_2(k, l_1, l_2)$ по переменной k удовлетворяет условиям

$$G_1(z, l) = Z[g_1(k, l)] = \sum_{k=0}^{+\infty} g_1(k, l) z^{-k} = \widehat{G}_{11}(z) z^{-l}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} G_2(z, l_1, l_2) &= Z[g_2(k, l_1, l_2)] \sum_{k=0}^{+\infty} g_2(k, l_1, l_2) z^{-k} \\ &= (\widehat{G}_{21}(z) + l_1 \widehat{G}_{22}(z)) z^{-(l_1+l_2)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тогда Z -преобразования уравнений (3.10), (3.11), (3.9) имеют соответственно вид

$$Y_1(z) = \widehat{G}_{11}(z) X(z); \quad (3.15)$$

$$Y_2(z) = \widehat{G}_{21}(z) X^2(z) - z \widehat{G}_{22}(z) X(z) X'(z); \quad (3.16)$$

$$Y(z) = \widehat{G}_{11}(z) X(z) + \widehat{G}_{21}(z) X^2(z) - z \widehat{G}_{22}(z) X(z) X'(z). \quad (3.17)$$

Выражение (3.15) — изображение свертки последовательностей $g_{11}(k, l) = g_{11}(k-l)$ и $x(l)$. Справедливость формулы (3.16) доказывается аналогично формуле (2.14). Из (3.15), (3.16) и (3.12) следует (3.17).

Рассмотрим преобразователь (3.7) с ядрами

$$\begin{aligned} g_1(k, l) &= \begin{cases} 2^{-(k-l)} & \text{при } l \leq k, \\ 0 & \text{при } l > k, \end{cases} \\ g_2(k, l_1, l_2) &= \begin{cases} (k-l_2) 3^{-(k-l_1-l_2)} & \text{при } l_1 + l_2 \leq k, \\ 0 & \text{при } l_1 + l_2 > k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Требуется по результатам проведенной серии тестовых испытаний, где $x_i(k)$ — входные тестовые сигналы и $y_i(k)$ — соответствующие выходные сигналы, $i = 1, 2, 3$, определить функции $g_1(k, l)$, $g_2(k, l_1, l_2)$, удовлетворяющие условиям (3.8), (3.13), (3.14).

В качестве входных сигналов возьмем последовательности

$$x_1(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad x_2(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \quad x_3(k) = \begin{cases} k(k-1), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Вычислив соответствующие выходные сигналы и реализовав описанный выше алгоритм, восстанавливаем ядра Вольтерра:

$$g_1(k, l) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-l}, \quad g_2(k, l_1, l_2) = (k-l_2) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-l_1-l_2},$$

что полностью совпадает с исходными выражениями (3.18).

Таким образом, показано, что нелинейный измерительный преобразователь (3.7), ядра Вольтерра которого удовлетворяют условиям физической реализуемости (3.8), описывается уравнением

$$y(k) = \sum_{l=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-l} x(l) + \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{k-l_1} (k-l_2) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-l_1-l_2} x(l_1) x(l_2).$$

Разработанный метод восстановления ядер Вольтерра дискретных динамических систем с сосредоточенными параметрами по аналогии с непрерывными системами распространяется и на нелинейные дискретные динамические системы с распределенными параметрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные методы восстановления ядер Вольтерра непрерывных и дискретных нелинейных динамических систем позволяют восстанавливать ядра высоких порядков (двух, трех и более). Предложенные методы восстановления ядер Вольтерра распространяются на системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
2. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во ПГУ, 2016.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учеб. пособ. Т. 1–5. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
4. Бойков И. В. Аналитические методы идентификации динамических систем. Пенза : Изд-во Пенз. политех. ин-та, 1992.
5. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами // Метрология. 2012. № 8. С. 3–14.
6. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами // Измерительная техника. 2013. № 4. С. 6–11.
7. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2014. Т. 30, № 2. С. 34–49.
8. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами // Метрология. 2014. № 7. С. 13–24.
9. Кривулин, Н. П. Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами // Мат. и компют. моделирование естественнонаучных и социальных проблем: Тр. 8 Международ. науч.-техн. конф., Пенза, 26–30 мая 2014 г. Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. С. 172–178.
10. Щербаков, М. А. Итерационный метод оптимальной нелинейной фильтрации изображений // Изв. вузов. Поволжский регион. Техн. науки. 2011. Т. 20, № 4. С. 43–56.
11. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Теоретические основы кибернетики (Функциональные ряды в теории нелинейных систем). М.: Наука, 1976.
12. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков: Гостехиздат, 1937.

Статья поступила 12 сентября 2017 г.

Бойков Илья Владимирович
Кривулин Николай Петрович
Пензенский государственный университет
ул. Красная, 40
440026 г. Пенза
E-mail: i.v.boykov@gmail.com; krivulin@bk.ru