

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем**

*Сборник статей по материалам
XVII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции*

г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

**Analytical and Numerical Methods of Modelling
of Natural Science and Social Problems
(ANM–2022)**

*Materials of the seventeenth All–Russian Conference
with international participation ANM-2022*

Penza, Russian Federation, 28 November – 4 December, 2022

E d i t e d b y
Ilya V. Boykov

Пенза
Издательство ПГУ
2022

УДК 51
ББК 22.1
А64

**Аналитические и численные методы моделирования
естественно-научных и социальных проблем** : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. – 210 с.

ISBN 978-5-907666-37-5

Отражены основные результаты работы XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, демографии, социальных наук; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
П. С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия);
В. И. Половинкин, д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия);
В. С. Сизиков, д.т.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия);
С. Фаудаоглы, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

Ответственный секретарь конференции

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия)

Приказ

о проведении XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» № 747/о от 06.09.2022

ISBN 978-5-907666-37-5

© Пензенский государственный университет, 2022

УДК 517.956.227

Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для уравнения Лапласа

Бахрам Али оглы Алиев¹, Тунзала Магеррам кызы Гусейнова²

¹Институт математики и механики НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика

^{1,2}Азербайджанский государственный педагогический университет,
Баку, Азербайджанская Республика

¹aliyevbakhram@yandex.ru, ²htunzale_bsu@mail.ru

Аннотация. Исследуются собственные значения одной краевой задачи для уравнения Лапласа. Найдены асимптотические формулы для собственных значений.

Ключевые слова: собственные значения, гильбертово пространство, уравнения Лапласа

Asymptotic behavior associated with the definition of one boundary value problem for the Laplace equation

Bahram Ali Aliev¹, Tunzala Maharram Huseynova²

¹Institute of Mathematics and Mechanics of NAS Azerbaijan,
Baku, Republic of Azerbaijan

^{1,2}Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Republic of Azerbaijan

¹aliyevbakhram@yandex.ru, ²htunzale_bsu@mail.ru

Abstract. The eigenvalues of one boundary value problem for the Laplace equation are studied. Asymptotic formulas for the eigenvalues are found.

Keywords: eigenvalues, Hilbert space, Laplace equations

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение собственных значений следующих краевых задач для двумерного уравнения Лапласа в квадрате $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$:

$$-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \lambda u(x, y), \quad (1)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(2\pi, y) + i \frac{\partial^2 u(2\pi, y)}{\partial y \partial x} = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, 2\pi)}{\partial y}, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Известно, что в ограниченной области все собственные значения краевых задачи для уравнения Лапласа (например, первая, вторая, третья) неотрицательны и имеют единственную предельную точку $+\infty$:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

В этом случае принято говорить, что собственные значения спектральных краевых задач для уравнения Лапласа ведут себя классически. Существуют спектральные краевые задачи для уравнения Лапласа в которых классичность собственных значений нарушается.

В работе В.А.Ильина и А.Ф. Филиппова [1] для уравнения Лапласа в квадрате найден вид краевых условий, когда имеет место нарушение классичности собственных значений. В этой работе одно из краевых условий содержит недифференциальный оператор.

В работе С.Я.Якубова [2] рассмотрена спектральная задача для уравнения Лапласа в квадрате, содержащая в одном из краевых условий дифференциальный оператор. Точнее, если в краевой задаче (1)-(3) вместо условия (2) рассмотреть условие вида

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial x} + i \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial y} = 0, \quad y \in [0, 2\pi]. \quad (2')$$

то асимптотическое поведение собственных значений краевых задач (1), (2'), (3) исследовано в работе [2]. Доказано, что для краевых задач (1), (2'), (3) существует последовательность собственных значений $\{\lambda_k\}$ сходящихся к нулю, то есть, для краевых задач (1), (2'), (3) нарушен классический случай, о поведении собственных значений.

В работе А. Н. Кожевникова [3] в ограниченной области $\Omega \in R^n$ с достаточно гладкой границей Γ , для уравнения Лапласа исследована следующая спектральная задача:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в } \Omega \quad (4)$$

$$-u = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

где λ спектральный параметр, ν -внутренняя нормаль к границе Γ . Доказано, что спектр краевой задачи (4), (5) дискретен и состоит из двух серий собственных значений сходящихся соответственно к нулю и к $+\infty$. Точнее, собственные значения спектральной краевой задачи (4), (5) ведут себя неклассически.

Известно, что многие спектральные краевые задачи для уравнения Лапласа заданных в прямоугольнике сводятся к спектральным краевым

задачам для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Обычно, в спектральных задачах для эллиптических дифференциально-операторных уравнений, оператор фигурирующий в уравнении является оператором с дискретным спектром в некотором гильбертовом пространстве. Следовательно, имеет место спектральное разложение по собственным элементам оператора, участвующих в уравнении, которые образуют полный ортонормированный базис, в некотором гильбертовом пространстве. После спектрального разложения, спектральная задача поставленная для эллиптических дифференциально-операторных уравнений сводится к соответствующей краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Отметим, что в работе [2] используя выше указанную схему изучено асимптотическое поведение собственных значений краевых задач (1), (2'), (3), которой придерживаются и в данной работе для изучения асимптотического поведения собственных значений краевой задачи (1)-(3).

Лемма. Собственные значения краевой задачи (1)-(3) вещественны.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ рассмотрим операторы A и B , которые определяются следующими равенствами:

$$D(A) := W_2^2((0, 2\pi), u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)), \quad Au = -\frac{d^2u}{dy^2};$$

$$D(B) := W_2^1((0, 2\pi); u(0) = u(2\pi)), \quad Bu = i\frac{du}{dy}.$$

Собственными значениями оператора A являются числа $\mu_k(A) = k^2$, $k = 0, 1, \dots, \infty$ которым при $k > 0$ соответствует пара собственных функций

$$u_{k1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky}, \quad u_{k2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Собственным значениям $\mu_k(B) = -k$, $k = 0, 1, \dots, \infty$ соответствуют собственные функции $u_{k1}(y)$, а собственным значениям $\mu_{-k}(B) = k$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, соответствуют собственные функции $u_{k2}(y)$.

Задача (1)-(3) эквивалентна задаче

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (6)$$

$$u(0) = 0, \quad u(2\pi) + Bu'(2\pi) = 0, \quad (7)$$

где $u(x)$ -вектор-функция со значениями из $L_2(0, 2\pi)$. Известно, что система $\{u_{k1}(y), u_{k2}(y)\} \quad k = \overline{1, \infty}$ образует полный ортонормированный ба-

зис . Тогда почти всюду на $(0, 2\pi)$ любой элемент $u(x) \in L_2(0, 2\pi)$ разлагается в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u(x), u_{k1}) u_{k1} + (u(x), u_{k2}) u_{k2} \right].$$

Учитывая это спектральное разложение в задаче (6), (7) для коэффициентов Фурье $\tilde{u}_{k1}(x) = (u(x), u_{k1})$ получим задачу

$$-\tilde{u}_{k1}'' + k^2 \tilde{u}_{k1}(x) = \lambda \tilde{u}_{k1}(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (8)$$

$$\tilde{u}_{k1}(0) = 0, \quad \tilde{u}_{k1}(2\pi) - k \tilde{u}_{k1}'(2\pi) = 0, \quad (9)$$

а для коэффициентов $\tilde{u}_{k2}(x) = (u(x), u_{k2})$ получим следующую краевую задачу

$$-\tilde{u}_{k2}''(x) + k^2 \tilde{u}_{k2}(x) = \lambda \tilde{u}_{k2}(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (10)$$

$$\tilde{u}_{k2}(0) = 0, \quad \tilde{u}_{k2}(2\pi) + k \tilde{u}_{k2}'(2\pi) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, нахождение собственных значений краевых задач (1)-(3) сводится к нахождению собственных значений краевых задач (8), (9) и (10), (11). Сначала находим собственные значения краевых задач (8), (9).

Покажем, что собственные значения задачи (8), (9) вещественные. Умножив уравнение (8) на функцию $\bar{\tilde{u}}_{k1}(x)$ и проинтегрировав на интервале $(0, 2\pi)$, получим равенство

$$-\int_0^{2\pi} \tilde{u}_{k1}''(x) \bar{\tilde{u}}_{k1}(x) dx + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx.$$

Интегрируя по частям получим:

$$\begin{aligned} & -\bar{\tilde{u}}_{k1}(2\pi) \tilde{u}_{k1}'(2\pi) + \bar{\tilde{u}}_{k1}(0) \tilde{u}_{k1}'(0) + \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}'(x)|^2 dx + \\ & + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя краевые условия (9) из равенства (12) получим

$$-\frac{1}{k} \left| \tilde{u}_{k1}(2\pi) \right|^2 + \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}'(x)|^2 dx + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx.$$

Отсюда следует, что собственные значения задачи (8), (9) вещественные.

Лемма доказана.

Очевидно, что должно быть $\lambda \neq k^2$. Так как при $\lambda = k^2$ задача (8), (9) имеет лишь тривиальное решение.

Аналогичным образом показывается, что собственные значения задачи (10), (11) также вещественные и $\lambda = k^2, k \in N$ не является собственным числом.

Теорема. Краевая задача (1)-(3) имеет две серии собственных значений: Одна из которых конечная последовательность, удовлетворяющая неравенству $k^2 - 1 < \lambda_k < k^2, k = \overline{1, 6}$, а другая серия ведет себя асимптотически, как $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$ при $k, n \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Ильин В. А., Филиппов А. Ф. О характере спектра самосопряженного расширения спектра Лапласа в ограниченной области // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 267–269.
2. Якубов С. Я. Краевая задача для уравнения Лапласа с неклассической спектральной асимптотикой // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1330–1333.
3. Кожевников А. Н. Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5, С. 699–710.

Исследование динамики одной упругой конструкции при вибрационном воздействии

Петр Александрович Вельмисов¹, Алексей Викторович Ликанин²,
Николай Дмитриевич Алексанин³

^{1,2,3}Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновск, Россия

¹velmisov@ulstu.ru, ²lexavik@mail.ru, ³nickx73@yandex.ru

Аннотация. Исследуется динамика упругой конструкции, составными частями которой являются упругий стержень и груз, закрепленный на одном из его концов. Другой конец стержня жестко зашпелен в поверхность, совершающую одновременно поступательные и вращательные периодические колебания с разными частотами. Подобные задачи возникают, например, в приборостроении, авиастроении и т.д., при проектировании конструкций, работающих в условиях вибрационного воздействия.

Ключевые слова: упругая конструкция, стержень, динамика, вибрация, математическое моделирование, дифференциальные уравнения

Investigation of the dynamics of one elastic structure under vibration

Petr A. Vel'misov¹, Aleksey V. Likanin², Nikolay D. Aleksanin³

^{1,2,3}Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

¹velmisov@ulstu.ru, ²lexavik@mail.ru, ³nickx73@yandex.ru

Abstract. The dynamics of an elastic structure is investigated, the components of which are an elastic rod and a load fixed at one of its ends. The other end of the rod is rigidly clamped into the surface, which simultaneously performs translational and rotational periodic oscillations with different frequencies. Similar problems arise, for example, in instrumentation, aircraft engineering, etc., when designing structures operating under vibration conditions.

Keywords: elastic structure, rod, dynamics, vibration, mathematical modeling, differential equations

Математическая постановка задачи (математическая модель) имеет вид:

$$m\ddot{W}(x,t) + EJW''''(x,t) = 0, \quad (1)$$

$$W(0,t) = y(t) = b\sin(pt + \xi), W'(0,t) = \varphi(t) = a\sin(qt + \theta), \quad (2)$$

$$EJW'''(l,t) = m_0\ddot{W}(l,t), W''(l,t) = 0. \quad (3)$$

Здесь $W(x, t)$ – поперечная деформация (прогиб) упругого стержня, m – погонная масса стержня (масса единицы длины стержня), EJ – изгибная жесткость (E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебания), m_0 – масса груза, l – длина стержня, b и p – амплитуда и частота поступательных колебаний (перпендикулярных оси Ox) поверхности P , a и q – амплитуда и частота вращательных колебаний (вокруг точки заземления $x = 0$) поверхности P (рис.1)

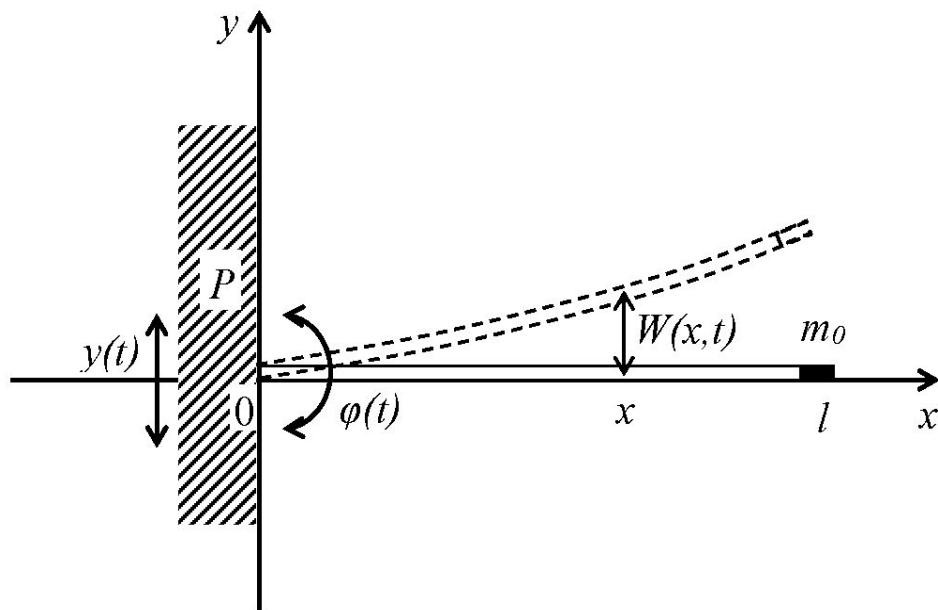


Рис. 1. Схема конструкции

Уравнение (1) описывает изгибные колебания стержня постоянно-го поперечного сечения, условия (2) задают закон движения заземленного конца стержня $x=0$, условия (3) задают перерезывающую силу $Q = EJW'''(l, t)$ и изгибающий момент $M = EJW''(l, t)$ на конце стержня $x=l$, с учетом закрепления на этом конце груза с массой m_0 .

Будем искать решение задачи в виде:

$$W(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \xi) + \psi(x) \sin(qt + \theta). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1)–(3), для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ получим краевые задачи:

$$\begin{cases} \varphi''''(x) - k^4 \varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = b, \varphi'(0) = 0, \\ \varphi''(l) = 0, \varphi'''(l) = -k_0^4 \varphi(l). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'''(x) - n^2\psi(x) = 0, \\ \psi(0) = 0, \psi'(0) = a, \\ \psi''(l) = 0, \psi'''(l) = -n_0^4\psi(l). \end{cases}$$

где $k^4 = \frac{mp^2}{EJ}$, $k_0^4 = \frac{m_0p^2}{EJ}$, $n^4 = \frac{mq^2}{EJ}$, $n_0^4 = \frac{m_0q^2}{EJ}$.

Общие решения дифференциальных уравнений для $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют вид:

$$\varphi(x) = A_1S(kx) + B_1T(kx) + C_1U(kx) + D_1V(kx), \quad (5)$$

$$\psi(x) = A_2S(nx) + B_2T(nx) + C_2U(nx) + D_2V(nx), \quad (6)$$

где A_k, B_k, C_k, D_k ($k=1,2$) – произвольные постоянные, а $S(x)$, $T(x)$, $U(x)$, $V(x)$ – функции Крылова:

$$\begin{cases} S(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}x + \cos x), \\ T(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}x + \sin x), \\ U(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}x - \cos x), \\ V(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}x - \sin x). \end{cases}$$

Удовлетворяя граничным условиям при $x=0$, находим

$$A_1 = b, B_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = \frac{a}{n}. \quad (7)$$

Удовлетворяя граничным условиям при $x=l$, для C_1, D_1 и C_2, D_2 получим системы неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1S(\alpha) + D_1T(\alpha) = -bU(\alpha) \\ C_1\left[V(\alpha) + \frac{m_0\alpha}{ml}U(\alpha)\right] + D_1\left[S(\alpha) + \frac{m_0\alpha}{ml}V(\alpha)\right] = -b\left[T(\alpha) + \frac{m_0\alpha}{ml}S(\alpha)\right] \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_2S(\beta) + D_2T(\beta) = -\frac{al}{\beta}V(\beta) \\ C_2\left[V(\beta) + \frac{m_0\beta}{ml}U(\beta)\right] + D_2\left[S(\beta) + \frac{m_0\beta}{ml}V(\beta)\right] = -\frac{al}{\beta}\left[U(\beta) + \frac{m_0\beta}{ml}T(\beta)\right] \end{cases} \quad (9)$$

где $\alpha = kl$, $\beta = nl$.

Из этих систем находим C_1, D_1, C_2, D_2

$$\begin{cases} C_1 = \frac{b}{\Delta(\alpha)} \left\{ T(\alpha) \left[T(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} S(\alpha) \right] - U(\alpha) \left[S(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} V(\alpha) \right] \right\} \\ D_1 = \frac{b}{\Delta(\alpha)} \left\{ U(\alpha) \left[V(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} U(\alpha) \right] - S(\alpha) \left[T(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} S(\alpha) \right] \right\} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{al}{\beta \Delta(\beta)} \left\{ T(\beta) \left[U(\beta) + \frac{m_0 \beta}{ml} T(\beta) \right] - V(\beta) \left[S(\beta) + \frac{m_0 \beta}{ml} V(\beta) \right] \right\} \\ D_2 = \frac{al}{\beta \Delta(\beta)} \left\{ V(\beta) \left[V(\beta) + \frac{m_0 \beta}{ml} U(\beta) \right] - S(\beta) \left[U(\beta) + \frac{m_0 \beta}{ml} T(\beta) \right] \right\} \end{cases} \quad (11)$$

В формулах (10), (11) $\Delta(\alpha), \Delta(\beta)$ – определители главных матриц СЛАУ, при этом

$$\Delta(\alpha) = S(\alpha) \left[S(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} V(\alpha) \right] - T(\alpha) \left[V(\alpha) + \frac{m_0 \alpha}{ml} U(\alpha) \right],$$

а $\Delta(\beta)$ получается из $\Delta(\alpha)$ заменой α на β .

Таким образом, динамика механической системы определяется выражением (4), где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют вид (5), (6), при этом постоянные A_k, B_k, C_k, D_k ($k=1,2$) находятся по формулам (7), (10), (11). Формулы (10), (11) справедливы, если $\Delta(\alpha) \neq 0, \Delta(\beta) \neq 0$, т.е. если частоты внешнего воздействия p и q не совпадают с частотами собственных (свободных) колебаний, которые находятся из уравнений $\Delta(\alpha) = 0$ или $\Delta(\beta) = 0$.

Заметим, что собственные формы свободных колебаний определяются формулами (5), (6), в которых следует положить $A_k = 0$, $B_k = 0$ ($k=1,2$), а связи между C_1, D_1 и C_2, D_2 задаются уравнениями (8), (9) при $a = b = 0$, при этом $\Delta(\alpha) = 0$, $\Delta(\beta) = 0$.

Полученные результаты справедливы также в случае, когда имеет место только один вид колебаний поверхности – только поступательный ($a = 0$) или только вращательный ($b = 0$).

Рассмотренная задача соответствует, в частности, задаче о динамике несущей балки крыла, на конце ($x = l$) которого закреплена ракета, а фюзеляж самолета совершает поступательные вертикальные и вращательные периодические колебания.

Подобные задачи рассматривались в [1–5].

Список литературы

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Наука, 1968. 559 с.
2. Баничук Н. В., Бирюк В. И., Сейранян А. П., Фролов В. М., Яремчук Ю. Ф. Методы оптимизации авиационных конструкций. М. : Машиностроение, 1989. 296 с.
3. Коренев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М. : Наука, 1988. 304 с.
4. Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М. : Высшая школа, 1973. 454 с.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М. : Наука, 1964. 437 с.

Метод производственных функций с оценкой эффективных фондов

Владимир Константинович Горбунов¹, Александр Геннадьевич Львов²

¹Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

²ООО «Уайт Партнерс», White Product Group, Москва, Россия

¹vkgorbunov@mail.ru, ²aglvov@mail.ru

Аннотация. Приводятся основные факты и опыт применения авторского метода построения «капитальных» производственных функций (ПФ), основным фактором которых (наряду с трудом) является стоимость эффективных фондов (ЭФ), под которыми понимается часть балансовых фондов, реально используемых для выпуска продукции в соответствии с текущими рыночными условиями. Показатель ЭФ не поддается прямому учету, и в нашем методе он оценивается по информации о производственных инвестициях и коэффициенте амортизации на промежутке наблюдения объекта и является фактором ПФ вместо балансовых фондов. Оценка ЭФ производится одновременно с оценкой параметров ПФ выбранного класса методом наименьших квадратов, нагруженным рекуррентным уравнением дискретной динамики ЭФ. Такая оценка существенно сложнее стандартной оценки параметров ПФ с использованием статистических данных о балансовых фондах и является некорректно поставленной задачей, но новая задача более соответствует понятию ПФ, предполагающему рациональное использование производственных факторов.

Ключевые слова: производственные функции, инвестиции, эффективные фонды, оценивание параметров, регуляризация

Production function method with effective funds estimation

Vladimir K. Gorbunov¹, Aleksandr G. L'vov²

¹Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

²«White Partners LLC», White Product Group, Moscow, Russia

¹vkgorbunov@mail.ru, ²aglvov@mail.ru

Abstract. The paper presents the main facts and experience of applying the author's method of constructing 'capital' production functions (PF), whose main factor (along with labour) is the value of effective funds (EF), which are understood as a part of the book value of funds actually used to produce products in accordance with current market conditions. The EF indicator is not directly accountable, and in our method, it is estimated from information on production investments and the depreciation ratio at the observation interval of the object and is a PF factor instead of the book value of funds. The EF is estimated simultaneously with the assessment of the PF parameters of the selected class by the least square method loaded with the recur-

rent equation of discrete dynamics of the EF. Such an assessment is much more complicated than the standard assessment of PF parameters using statistical data on the book value of funds and is an ill-posed problem, but the new task is more consistent with the concept of PF, which involves the rational use of production factors.

Keywords: production functions, investments, effective funds, parameter assessment, regularization

Введение

В экономическом анализе реальных производственных систем мезо и макроуровней (отрасли, их группы, регион, страна) одним из эффективных методов является метод однопродуктовых производственных функций (ПФ), представляющих математические модели типа “черного ящика”, которые определяют стоимость валового выпуска производства как функцию от количеств затрат наиболее существенных (обычно ‘капитал’, ‘труд’ и др.) факторов. При этом предполагается относительно рациональное (в зависимости от квалификации персонала и уровня управления) использование производственных факторов. Понятие производственной функции введено в экономическую теорию в конце 19 века, но история ПФ как метода анализа производства начинается со статьи 1928 года американских исследователей – экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба [1]. Они проанализировали влияние величин затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США на временном периоде 1899-1922 гг. Достаточно полная история понятия и использования ПФ изложена в работе С. Мишры [2], и современные проблемы этой теории – в статье В. Горбунова [3] и других наших статьях.

В плановой экономике СССР количественные методы анализа производства имели большой прикладной потенциал относительно капиталистических стран, и метод ПФ получил существенное развитие в академической литературе [4-6], однако он вызывал идеологическое сопротивление догматической части академических псевдомарксистов и (с середины 1950-х) руководства страны как противоречащий трудовой теории стоимости Маркса, понимаемой ими упрощенно. В современной России, превратившейся в 1990-е в сырьевой придаток развитых и развивающихся экономик мира, в последние годы усиливается понимание необходимости восстановления перерабатывающей промышленности и государственного планирования. При этом метод ПФ должен занять важное место в анализе состояния реальной (производящей) экономики и выработке эффективной экономической политики.

Важнейшими производственными факторами являются производственные фонды и труд, и большинство исследователей ограничивается этими двумя факторами, используя бухгалтерскую статистику балансовых фондов, практически не отражающих реальный производственный потенциал. Учитывая очевидную несостоятельность показателя балансо-

вых фондов, особенно в новых российских условиях с высокой инфляцией (гиперинфляцией 1990-х), фактическим обесцениванием фондов перерабатывающих отраслей и резким ростом (с начала 2000-х) цен на энергетические ресурсы, полуфабрикаты металлургии и соответствующие фонды, ряд авторов предложил использовать в структуре ПФ вместо балансового показателя “производственные фонды” показатель “производственные инвестиции” [7]. Однако потоки текущих инвестиций также не отражают явно запасы производственных фондов. В работе И. Б. Воскобойникова [8, с. 6] введено понятие “эффективные основные фонды” (ЭФ) под которыми понимается *“часть балансовых основных производственных фондов, реально участвующих в создании продукции, востребованной рынком”* [8, с. 6]. Для количественной оценки автор предложил калькуляционный метод с предположениями, сильно упрощающими реальность.

В нашей статье [9] предложен метод оценки стоимости ЭФ, формируемых в процессе освоения производственных инвестиций и амортизации, с одновременным построением капитальной ПФ по данным об инвестициях, затратах труда и валовом выпуске на промежутке наблюдения объекта. Капитальный фактор такой функции – стоимость ЭФ – соответствует принципу рациональности использования производственных факторов. Данный метод развит в [10-12] как метод реконструкции ЭФ–ПФ.

Метод ЭФ–ПФ можно рассматривать как синтез метода ПФ и *метода непрерывной инвентаризации (perpetual inventory method, PIM)*, предложенного Р. Голдсмитом в 1951 г. [13] и реализованного для исчисления национального богатства США на периоде 1896–1948 гг. [14]. Формально PIM соответствует простейшей дискретизации уравнения базовой модели динамики стоимости фондов с учётом инвестиций и амортизации. Это уравнение использовано в методе ЭФ–ПФ. Подобные подходы применялись для оценки амортизации или эффективности производственных фондов и в ряде зарубежных работ. Работы [15, 16] посвящены синтезу методов ПФ и PIM. В первой синтетический метод предложен для модели производства с физическими и научно-исследовательскими фондами, формируемыми соответствующими PIM-уравнениями с заданными функциями спроса на труд и издержек. В [16] этот метод использован для исследования переменной амортизации по панельным данным однотипных предприятий, их балансовой стоимости и показателей выбытия. В [17] демонстрируется опыт оценки параметров нестационарной функции Кобба–Дугласа, коэффициента амортизации и начального капитала при заданных показателях приращения капитала для десяти отраслей экономики Дубая.

Далее кратко описан наш вариант синтеза метода ЭФ–ПФ, его алгоритмические особенности и сведения о применении к анализу производственных секторов РФ.

1. Производственные функции в экономическом анализе

Рассмотрим двухфакторные функции некоторого параметрического класса

$$Y = F(K, L; w). \quad (1)$$

Здесь Y – валовой выпуск моделируемого объекта за определённое время, K – эффективные производственные фонды, L – труд, и вектор $w = (w_1, \dots, w_p)$ представляет параметры данного класса ПФ. Параметры выбираются из некоторого множества W пространства параметров. Валовой выпуск Y и фонды K измеряются стоимостью, и труд L – численностью или стоимостью (совокупной зарплатой). Такие ПФ называются *функциями в абсолютной форме*, в отличие от *индексных функций*, у которых значение и содержательные аргументы представлены соответствующими отношениями к значениям в базовый период используемой информации [3]. Переход к индексной форме упрощает решение задач оценивания параметров функции по производственной статистике [11, 12].

При рассмотрении теоретических вопросов зависимость ПФ от параметров w не выделяется: $Y = F(K, L)$. Функция $F(K, L)$ предполагается монотонно *возрастающей* и *квазивогнутой* в некотором подмножестве (*экономической области*) множества $\{K \geq 0, L \geq 0\}$. Для мезо и макроэкономических функций естественно предположение о дифференцируемости, позволяющее представлять предельные характеристики производства: *предельные фондоотдача* $\partial F(K, L) / \partial K$ и *производительность труда* $\partial F(K, L) / \partial L$, *факторные эластичности* $\varepsilon_K = \partial \ln F(K, L) / \partial \ln K$, $\varepsilon_L = \partial \ln F(K, L) / \partial \ln L$, *эластичность производства по масштабу* $\mu_{KL} = \varepsilon_K + \varepsilon_L$, и наиболее сложные (для прямых вычислений) характеристики *замещения труда капиталом* (при $F(K, L) = \text{const}$) – *предельная норма замещения* $S_{LK}(K, L) = \partial F(K, L) / \partial L : \partial F(K, L) / \partial K$ и *эластичность замещения* $\sigma_{LK}(K, L) = d \ln(K / L) / d \ln S_{LK}$.

2. Метод реконструкции ЭФ-ПФ

Основные исходные данные метода ЭФ–ПФ представляются производственной статистикой анализируемого объекта на некотором временном промежутке – совокупные выпуски Y_t , производственные инвестиции I_t и численности работников L_t :

$$\{Y_t, I_t, L_t : t = 0, \dots, T\}. \quad (2)$$

Для построения функций (1) по данным (2) используется уравнение дискретной динамики эффективных фондов $\{K_1, \dots, K_T\}$, отражаю-

щее процесс освоения инвестиций и амортизации фондов с нормой m (PIM-уравнение)¹:

$$K_t = (1 - m)K_{t-1} + I_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Система (3) определяет значения $\{K_1, \dots, K_T\}$ при заданных инвестициях $\{I_1, \dots, I_T\}$, начальном значении K_0 и норме амортизации m . При этом значения ЭФ вычисляются точно, однако информация об инвестициях приближённая и показатель m является идеализированным, приближённо отражающим сложные неоднородные процессы износа и переоценки фондов. На практике обычно задаются некоторые нормативные коэффициенты амортизации, определяющие формальное удешевление фондов, и эти коэффициенты могут меняться со временем. Будем считать m заданным положительным малым числом (порядка 0.01).

Уравнение (3) позволяет ввести в качестве модели производственной системы капитальную ПФ (1) и поставить задачу оценивания её параметров методом наименьших квадратов (МНК), минимизируя квадратичную невязку системы приближённых (регрессионных) уравнений

$$Y_t \approx F(K_t, L_t; w), \quad t = 0, \dots, T, \quad (4)$$

относительно параметров $w \in W$ функции (1) с условиями (3), определяющими K_t . При этом начальное значение эффективных фондов K_0 является фактором минимизации. Обозначим вектор искомых параметров $z = (w_1, \dots, w_p, K_0)$, и запишем задачу МНК : минимизировать

$$\varphi(z) = \sum_{t=0}^T [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \quad (5)$$

при условиях (3) и

$$w \in W, \quad 0 < K_0. \quad (6)$$

Поставленная задача построения ПФ (1) с оценкой эффективных фондов K_t с полным набором неизвестных z при небольшом объеме статистических данных (2) является *плохо обусловленной* или же *некорректно поставленной* [18, 19, 20]. Её непосредственное решение будет иметь (если будет) неустойчивое решение относительно малых вариаций исходных данных и/или начального приближения искомого вектора z^0 . Качественное решение требует её *регуляризации*, т.е. некоторой аппроксимации *корректной задачей с решением, непрерывно зависящим от исходных данных и выбора z^0* . При этом используется дополнительная информация двух типов. Первый тип – сужение класса решений (*метод*

¹ В исходном варианте [9] рассматривалось более общее уравнение динамики с учётом инвестиций за два года – текущий I_t и предыдущий I_{t-1} ..

квазирешений). Второй – характер и уровень погрешностей исходных данных, определяющий допустимую невязку уравнения математической модели (*метод невязки*), в нашем случае невязку (5) системы (4).

Метод НК идентификации математических моделей по статистическим данным обычно рассматривается в рамках статистической теории, предполагающей случайный характер ошибок данных. При этом ошибки считаются нормально распределенными, взаимно независимыми и обладающими еще рядом практически невыполнимых свойств [9, с. 97–98; 20]. Но обоснованная информация о вероятностных характеристиках погрешностей данных (2) обычно отсутствует, и задачу минимизации МНК-функционала (5) при условиях (3) и (6) приходится решать, привлекая в основном экспертную информацию. В этих условиях мы оставляем два простейших статистических критерия качества решения задачи идентификации математической модели построения капитальной ПФ (1) с оценкой эффективных фондов (3) – коэффициент детерминации регрессионной системы (4) и критерий некоррелированности ошибок этой системы (предполагаемых аддитивными) Дарбина – Уотсона [10].

3. Развитие и опыт применения ЭФ-ПФ

В заключение кратко опишем содержательные и алгоритмические особенности метода ЭФ-ПФ, предложенного в [9] и развивавшегося в [10–12]. В статье [9] для оценки ЭФ использовалось более сложное, чем (3), уравнение динамики с учётом инвестиций как текущего года I_t , так и предыдущего I_{t-1} с дополнительным коэффициентом – долей инвестиций, освоенных в текущем периоде. Новый подход продемонстрировал на тестовых примерах существенное преимущество относительно построения инвестиционных ПФ. При этом для решения более сложной задачи построения капитальной ПФ с оценкой эффективных фондов был разработан специальный вариант метода продолжения по параметру, известного для решения нелинейных уравнений [21, п. 7.5, с. 226]. Применение метода ЭФ-ПФ к реальным данным о ВВП России на периоде 2001-2009 гг. показало примерно двукратное превышение значений балансовых фондов над эффективными фондами.

Статья [10] посвящена применению метода ЭФ-ПФ для сравнительного анализа экономик двух регионов (Уральский и Поволжский федеральные округа). При этом также анализировался процесс освоения производственных инвестиций с учётом известного факта высокой коррумпированности российской экономики [22]. Здесь это явление формализуется введением в уравнение динамики капитала *коэффициента реализуемости инвестиций*, представляющего долю реального использования выделенных производственных инвестиций. В качестве дополнительного средства преодоления вычислительной сложности задач МНК,

связанных с разномасштабностью переменных функции (1), использован переход к индексной ПФ, заменой основных переменных (Y, K, L) их отношениями к соответствующим начальным значениям (Y_0, K_0, L_0) [3].

Статьи [11, 12] посвящены анализу сектора малого и среднего предпринимательства России. Особенностью этого сектора является нечёткость понятия производственных фондов и, соответственно, отсутствие их регулярного и надёжного статистического учёта. Данный сектор представлен в документах Росстата, доступных для исследователей и аналитиков, годовыми показателями оборота, инвестиций в основной капитал и средней численности работников.

Проблемы анализа и регулирования экономики очень сложны и должны основываться на количественном анализе, позволяющем объективно определять меру поддержки менее эффективных малых предприятий с учетом сокращения возможностей развития крупных современных производств. Для оценки производственных фондов МП наш метод позволяет использовать показатель ЭФ. В качестве дополнительной информации здесь используется экспертная оценка *темпа изменения фондовооружённости труда*, и отклонение вычисляемого значения этого показателя от экспертного в конце периода сбора данных [2] используется в регуляризованной задаче как тихоновский стабилизатор. В [11] этот метод применён для сравнительного анализа секторов ‘юридические лица МП’ (ЮМП) экономик Приволжского и Уральского федеральных округов на промежутке 2005-2014 гг. В частности, показано несоответствие официальных оценок основных фондов ЮМП в обоих округах принципу рациональности использования факторов.

Статья [12] исследует методом ЭФ-ПФ эффект масштаба предприятий производственных систем, сравнивая промышленные сегменты секторов малого и среднего предпринимательств (МСП), а также крупных предприятий России.

Наши работы [9-12] имеют академический характер, и вводимая дополнительная информация демонстрирует некоторые эвристические направления, которые мы считаем реалистичными и продуктивными относительно их применения профессиональными экономистами-статистиками.

Список литературы

1. Cobb Ch. W., Douglas P. H. A theory of production // The American Economic Review. 1928. Vol. 18, № 1. P. 139–165.
2. Mishra S. K. A Brief History of Production Functions (December, 7, 2007) // Social Science Research Network. 2007. P. 6–34. URL: <http://ssrn.com/abstract=1020577> (дата обращения: 16.11.2022).
3. Горбунов В. К. О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как псевдо-черный ящик // Журнал экономической теории. 2014. № 1. С. 199–212.

4. Терехов Л. Л. Производственные функции. М. : Статистика, 1974.
5. Плакунов М. К., Раяцкас Р. Л. Производственные функции в экономическом анализе. Вильнюс : Минтис, 1984.
6. Клейнер Г. Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. М. : Финансы и статистика, 1986.
7. Бессонов В. А., Цухло С. В. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Анализ динамики российской переходной экономики. М. : ИЭПП, 2002. С. 5–89.
8. Воскобойников И. Б. О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2004. Т. 33, № 1. С. 3–20.
9. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. 2012. № 2. С. 95–107.
10. Горбунов В. К., Крылов В. П. Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций¹ // Экономика региона. 2015. Т. 11, № 3. С. 334–347.
11. Горбунов В. К., Львов А. Г. Эффективные производственные фонды и производственные функции малого предпринимательства регионов // Экономика региона. 2018. Т. 14, № 2. С. 502–515.
12. Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ малого и среднего предпринимательства: построение производственных функций с оценкой эффективных фондов // Экономика и математические методы. 2021. № 3. С. 45–56.
13. Goldsmith R. W. A perpetual inventory method of national wealth // Studies in Income and Wealth: Conference on Research in Income and Wealth. New York : NBER, 1951. Vol. 14. P. 5–73.
14. Goldsmith R. W. The national balance sheet of the United States of America 1900–1949 // International Association for Research in Income and Wealth. Ser. IV. London : Bowes and Bowes, 1955. P. 322–386.
15. Nadiri M., Prucha I. Estimation of the depreciation rate of physical and R and D capital in the U.S. total manufacturing sector // Economic Inquiry. 1996. Vol. 34. P. 43–56.
16. Doms M. Estimating capital efficiency schedules within production functions // Economic Inquiry. 1996. Vol. 34. P. 78–92.
17. Rettab B., Kwaak T., Azzam A. An optimization procedure for estimating the stock of capital: Application to ten production sectors of Dubai // Regional and Sectorial Economic Studies. 2010. Vol. 10-1. P. 107–114.
18. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М. : Наука, 1986.
19. Горбунов В. К. Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / ред. В. А. Треногин и А. Ф. Филиппов. М. : Физматлит, 2003. С. 418–447.

¹ Авторское название «Эффективные производственные фонды региона и их оценка методом производственных функций» искажено в редакции журнала.

20. Горбунов В. К. Особенности обратных задач моделирования экономики // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 1–4 декабря 2021 г.) / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. С. 14–21.

21. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М. : Мир, 1975.

22. Макаров В. Л., Афанасьев А. А. О разработке имитационной CGE-Модели денежного обращения российской экономики с теневым и коррупционным сектором // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 2. Материалы Пятнадцатого всероссийского симпозиума (Москва, 15–16 апреля 2014 г.) / под ред. чл.-корр. РАН Г. Б. Клейнера. М. : ЦЭМИ РАН, 2014. С. 131–133.

Основанные на физике сети радиальных базисных функций

Владимир Иванович Горбаченко¹, Дмитрий Александрович Стенькин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹gorvi@mail.ru, ²stynukin@mail.ru

Аннотация. Приведен анализ возможностей, основанных на физике нейронных сетей (physics-informed neural networks) и предназначенных для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, показаны возможности использования сетей радиальных базисных функций в качестве основанных на физике нейронных сетей. Предложены и исследованы на модельных задачах сети радиальных базисных функций для решения прямых и обратных задач, описывающих процессы в кусочно-однородных средах.

Ключевые слова: основанные на физике нейронные сети, сети радиальных базисных функций, кусочно-однородная среда, прямая задача, обратная задача

Physics-informed radial basis function networks

Vladimir I. Gorbachenko¹, Dmitriy A. Sten'kin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹gorvi@mail.ru, ²stynukin@mail.ru

Abstract. The analysis of possibilities of physics-informed neural networks intended for solution of boundary value problems for partial differential equations is carried out. The possibilities of using radial basis function networks as physics-informed neural networks are shown. Networks of radial basis functions for solving direct and inverse problems describing processes in piecewise homogeneous media have been proposed and investigated on model problems.

Keywords: physics-informed neural networks, radial basis function networks, piecewise homogeneous environment, forward problem, inverse problem

Возможность решения на нейронных сетях дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) известна достаточно давно [1–2]. Решение ДУЧП на нейронной сети представляет собой аппроксимацию неизвестного решения и основано на универсальной теореме аппроксимации [3] и её обобщении [4], согласно которым нейронные сети являются универсальными аппроксиматорами. Решение формируется в процессе обучения нейронной сети. В качестве функции потерь, минимизируемой в процессе обучения, используется сумма квадратов невязок в пробных точках внутри и на границе области решения. Такой подход является бессеточным, решением задачи является приближенное аналитическое решение, представляющее собой суперпозицию функций, опи-

сывающих слою сети. "Мелкие" (shallow) сети, имеющие небольшое число слоев, зачастую требуют очень больших размеров скрытых слоев и плохо обучаются. Решением проблемы (хотя бы частичным) является использование глубоких нейронных сетей. В [5] доказано, что такие сети являются универсальными аппроксиматорами функций.

Концепция основанных на физике нейронных сетей (русский термин отсутствует, обычно используется английский термин PINN – physics-informed neural networks) была сформулирована в 2017 году в работах [6–7], и опубликованы в объединенной версии статьи в 2019 году [8]. В этих работах PINN были представлены как новый класс решателей, интегрирующих математическую модель в структуру нейронной сети. В [9] подход расширен до основанного на физике машинного обучения. В этих работах было использовано автоматическое дифференцирование [10], реализованное в библиотеках TensorFlow, PyTorch и других, проиллюстрирован подход PINN для решения нелинейных ДУЧП, таких как уравнения Шредингера, Бюргерса и Аллена-Кана, разработаны PINN, которые могут решать как прямые задачи, так и обратные задачи, в которых параметры модели получаются из наблюдаемых данных.

PINN позволяют решать краевые задачи, выраженные в общей форме [8–9, 11]

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}(\mathbf{z}), \gamma) &= \mathbf{f}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \Omega, B(\mathbf{u}(\mathbf{z})) = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \partial\Omega, \\ D(\mathbf{u}(\mathbf{z})) &= \mathbf{d}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \Omega \cup \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где A , B и D – соответственно, операторы дифференциального уравнения, краевых условий и дополнительных условий; $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ – функция, определяющая данные задачи; $\mathbf{u}$ – неизвестное решение; $\mathbf{z}$ – вектор пространственно-временных координат; γ – параметры задачи; $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ – граничная функция; $\mathbf{d}(\mathbf{z})$ – функция дополнительных условий; Ω – область решения; $\partial\Omega$ – граница области решения.

В форме (1) можно описать как прямые, так и обратные задачи. Цель прямых задач – найти функцию $\mathbf{u}$ для каждого $\mathbf{z}$, где γ – заданные параметры. В случае обратной задачи γ также должны быть определены из данных.

Решение задачи $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ вычисляется с помощью нейронной сети, заданной вектором параметров Θ . Нейронная сеть находит аппроксимацию решения $\hat{\mathbf{u}}_{\Theta}(\mathbf{z}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{z})$, где $\hat{\mathbf{u}}_{\Theta}(\mathbf{z})$ – приближенное решение, реализованное нейронной сетью с параметрами Θ . В процессе обучения нейронной сети вектор параметров находится путем минимизации функции потерь, которая зависит от дифференциального оператора, краевых условий и, возможно, от некоторых известных данных

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta} [\lambda_A L_A + \lambda_B L_B + \lambda_D L_D], \quad (2)$$

где

$$L_A = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \left(A(\mathbf{u}(\mathbf{z}_i)) - \mathbf{f}(\mathbf{z}_i) \right)^2, \quad L_B = \frac{1}{N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \left(B(\mathbf{u}(\mathbf{z}_j)) - \mathbf{g}(\mathbf{z}_j) \right)^2,$$

$$L_D = \frac{1}{N_D} \sum_{k=1}^{N_D} \left(D(\mathbf{u}(\mathbf{z}_k)) - \mathbf{d}(\mathbf{z}_k) \right)^2,$$

N_A, N_B, N_D – число пробных точек для уравнения, краевых условий и дополнительных условий, $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_D$ – задаваемые пользователем или настраиваемые в процессе обучения сети весовые коэффициенты, регулирующие вклад разных составляющих в функцию потерь.

В известных публикациях PINN реализуются с помощью библиотек глубокого обучения, например, TensorFlow и PyTorch и используют имеющиеся в этих библиотеках алгоритмы градиентного обучения [12]. Обычно используются градиентные алгоритмы обучения первого порядка: стохастический градиентный спуск, алгоритмы с адаптивной скоростью обучения (AdaGrad, RMSProp, Adam). Реже используется квазиньютоновский алгоритм Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno – BFGS). Следует отметить, что если на решение не накладываются дополнительные условия, что обычно бывает при решении прямых задач, то реализуется обучение без учителя и при обучении не возникает переобучение [13], так как нет шума в данных. В обратных задачах, являющихся некорректными, на решение накладываются ограничения и возможно переобучение.

Начиная с 2019 года наблюдается резкий рост числа публикаций по PINN. Анализ публикационной активности проведен авторами путем поиска в базе Scopus по расширенному запросу:

((physic* OR physical) W/2 (informed OR constrained) W/2 "neural network"),

где * означает любые символы, "..." – точное значение, OR – логическое ИЛИ, W/2 – термины отстоят не более, чем на два слова.

Результаты анализа публикационной активности показывают устойчивый рост числа публикаций по тематике PINN. Если в 2018 в базе Scopus была 1 публикация, то в 2019 – 64, в 2021 – 1090, на 15.11.2022 имеется 1887 работ. В Scopus зарегистрировано 1511 документов авторов из США, 894 – из Китая и 54 – из России. В Internet запрос в Google "physics-informed neural networks" 15.11.2022 дал 7400000 ссылок.

В PINN перспективны сети радиальных базисных функций (СРБФ) [2, 14–15]. СРБФ содержат только два слоя, что упрощает их обучение и

открывает возможности применения достаточно сложных градиентных алгоритмов второго порядка. Сравнение полносвязных сетей и СРБФ при решении ДУЧП [16] показывает преимущество СРБФ перед глубокими полносвязными сетями.

Целью данной работы является исследование основанных на физике сетей радиальных базисных функций для решения прямых и обратных краевых задач для ДУЧП.

СРБФ [17] (рис. 1) содержит слой радиальных базисных функций (РБФ), нелинейно преобразующих входной вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ в пространство большей размерности. При решении ДУЧП входами СРБФ являются координатами пробных точек. Вторым слоем является взвешенный линейный сумматор

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n_{RBF}} w_m \phi_m(\mathbf{x}; \mathbf{p}_m), \quad (3)$$

где n_{RBF} – количество РБФ, w_m – вес РБФ ϕ_m , $\mathbf{p}_m$ – вектор параметров РБФ.

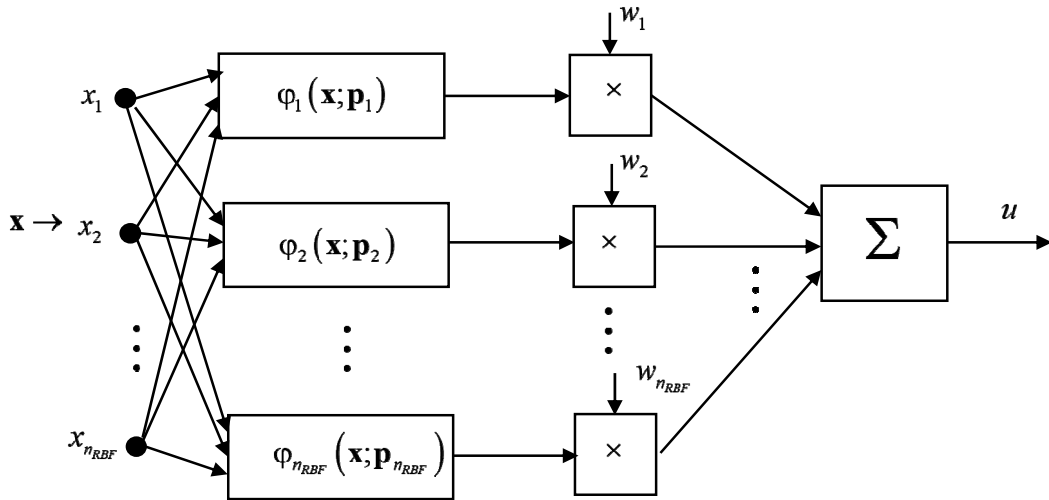


Рис. 1. Структура СРБФ

Решение ДУЧП, формируемое СРБФ по (3), является приближенным аналитическим решением задачи проекционным методом. Базисным функциям и весам решения проекционным методом соответствуют базисные функции и веса СРБФ. В дальнейшем будем рассматривать функцию Гаусса, имеющую ограниченные производные, что удобно для решения ДУЧП

$$\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|, a) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2}{2a^2}\right),$$

где $\mathbf{c}$ – положение центра РБФ, a – параметры формы (ширина).

Для обучения СРБФ необходимо подобрать количество пробных точек. Приведенное в [18] для задач аппроксимации соотношение $n_{RBF} \propto (N + K)^{\frac{1}{3}}$ между количеством n_{RBF} РБФ и количество пробных точек $N_A + N_B$ сильно завышено и приводит к дополнительным вычислительным затратам. Процесс решения представляет собой обучение сети, т.е. настройку параметров сети таким образом, чтобы минимизировать функцию потерь (2). Отличие нашего подхода от известных состоит в настройке не только весов сети, линейно входящих в функцию потерь, но и параметров РБФ, нелинейно входящих в функцию потерь. Для этого используется единый вектор параметров сети θ , включающий веса и параметры РБФ. Для обучения СРБФ используются градиентные алгоритмы [2]. Генетические алгоритмы требуют больших затрат времени на обучение и практически не используются. В известных работах (см., например, [2]) используется алгоритм градиентного спуска, k -я итерация которого описывается формулой

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \Delta\theta^{(k+1)}, \quad (4)$$

где $\Delta\theta^{(k+1)} = -\eta \nabla I(\theta^{(k)})$ – поправка вектора параметров, η – подбираемый гиперпараметр, $\nabla L(\theta^{(k)})$ – вектор градиента функции потерь по компонентам вектора $\theta^{(k)}$ на итерации k .

Авторами для обучения СРБФ адаптированы быстрые градиентные алгоритмы первого порядка: алгоритм Нестерова и алгоритмы с адаптивной скоростью обучения [12]. Адаптация основана на использовании единого вектора параметров СРБФ, включающего параметры РБФ. Вычисление компонентов вектора градиента проводилось аналитически. На основе быстрого метода оптимизации доверительных областей разработан алгоритм второго порядка [19], требующий на каждой итерации решения задачи условной оптимизации. В [20] для обучения СРБФ предложена адаптация алгоритма Левенберга-Марквардта. Метод Левенберга-Марквардта не требует решения задач условной оптимизации и в то же время эквивалентен методу доверительных областей [21]. В предложенном алгоритме коррекция вектора параметров θ СРБФ в k -ой итерации обучения формируется в результате решения системы

$$(\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{J}_{k-1} + \mu_k \mathbf{E}) \Delta\theta^{(k)} = -\mathbf{g}_{k-1},$$

где $\mathbf{J}_{k-1}$ – матрица Якоби, элементы которой вычисляются по значениям параметров сети в $k-1$ итерации, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, μ_k – параметр регуляризации, $\mathbf{g} = \mathbf{J}^T \mathbf{r}$ – градиент функции потерь по вектору па-

параметров θ , $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{N+K}]^T$ – вектор невязок в пробных точках в области решения и на границе области решения. Компоненты матрицы Якоби вычислялись аналитически. Этот алгоритм стал основным в дальнейших экспериментах.

В качестве модельной задачи решалось уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \text{ для } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u = p(x_1, x_2) \text{ для } (x_1, x_2) \in \partial\Omega,$$

$$f(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2) \text{ и } p(x_1, x_2) = 0.$$

Эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Core i5 8500, частотой 3,0 GHz и объемом оперативной памятью 16,0 GB. Результаты экспериментов с различными алгоритмами обучения СРБФ (рис. 2 и табл. 1) показали явное преимущество алгоритма Левенберга-Марквардта.

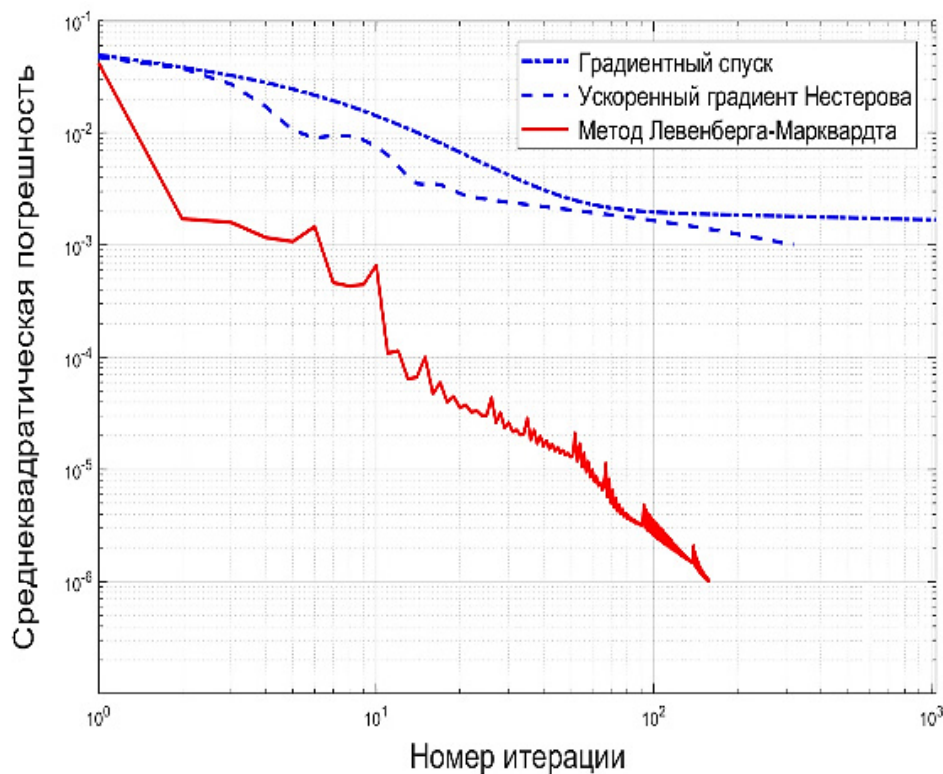


Рис. 2. Зависимости средней квадратической невязки различных алгоритмов от номера итерации

Эксперименты (рис. 3) показали важность настройки параметров РБФ. На рис. 3 радиусы кругов равны ширине РБФ, а веса показаны цветом заливки кругов.

Многие реальные задачи, например, задачи теплопроводности [22], моделирования нефтяных пластов [23], моделирования подземных вод

[24] рассматриваются в кусочно-однородных средах. СРБФ не используются для решения таких задач из-за нелокального характера РБФ (каждая РБФ влияет на решение во всей области решения) и невозможности моделировать разрыв производной решения на границах раздела сред. Можно использовать метод конечных разностей, обеспечивающий выполнение условий идеального сопряжения на границе раздела сред. Но такой подход вносит погрешность разностной аппроксимации.

Таблица 1

Сравнение алгоритмов обучения СРБФ

Алгоритм	Достигнутая средняя квадратическая невязка	Число итераций	Время решения, с
Алгоритм градиентного спуска	$3 \cdot 10^{-3}$	1000	1100
Алгоритм метода Нестерова	$7 \cdot 10^{-4}$	1000	1120
Алгоритм метода Левенберга – Марквардта	10^{-6}	30	8,5

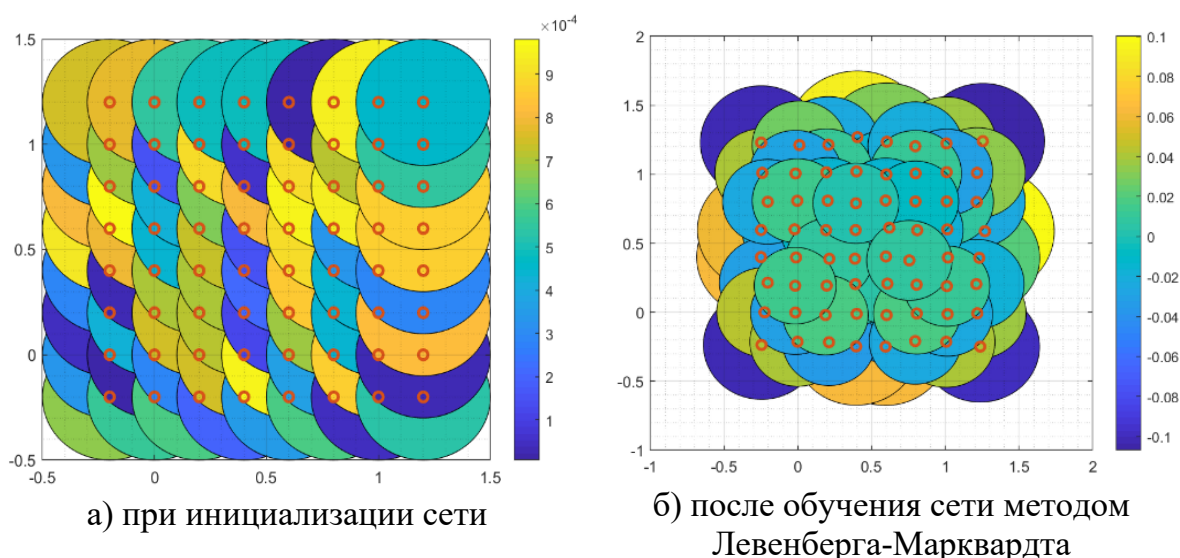


Рис. 3. РБФ при решении ДУЧП

Нами предложен подход [25] к решению на СРБФ задач, описывающих процессы в кусочно-однородных средах. В предложенном подходе решаются отдельные задачи для областей с разными свойствами среды, связанных условиями сопряжения. Рассмотрим модельную задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_i(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_i(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$u(x, y) = p(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (6)$$

где $f = \sin(2\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2)$, $p = 0$, σ_i – функция, описывающая свойства среды. Расчётная область представляет квадрат 1×1 , разделенной при $x = 0.5$ на две подобласти с кусочно-постоянными значениями σ_i , $i = 1, 2$. На границе сопряжения сред должны выполняться условия сопряжения

$$u_1|_S = u_2|_S, \sigma_1 \frac{du_1}{dx} \Big|_S = \sigma_2 \frac{du_2}{dx} \Big|_S. \quad (7)$$

Задача (5)–(7) представляется как две задачи для областей 1 и 2 с учетом условий (7). Функция потерь для задачи 1 имеет вид (аналогичный вид имеет функция потерь для задачи 2)

$$L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} [A_1 u_1(\mathbf{x}_{1i}) - f_1(\mathbf{x}_{1i})]^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^{K_1} [B_1 u_1(\mathbf{x}_{1j}) - p_1(\mathbf{x}_{1j})]^2 + \\ + \lambda_3 \sum_{j=1}^T [u_1(\mathbf{x}_{Sj}) - u_2(\mathbf{x}_{Sj})]^2 + \lambda_4 \sum_{j=1}^T \left[\sigma_1 \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_{Sj})}{\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_{Sj})}{\partial x} \right]^2, \quad (8)$$

где A_1 – дифференциальный оператор, B_1 – оператор граничных условий, N_1 , K_1 и T – количество пробных точек внутри области решения, границе области и на границе сопряжения сред $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – штрафные множители, $\mathbf{x}_{1i}$, $\mathbf{x}_{1j}$ и $\mathbf{x}_{Sj}$ – координаты пробных точек внутри, на границе области и на границе сопряжения сред.

Процесс решения является итерационным и использует две СРБФ. На каждой итерации с использованием СРБФ делается один шаг минимизации функции потерь (8) для области 1, используя решение на границе раздела сред и поток $\sigma_2 \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_{Sj})}{\partial x}$ области 2 с предыдущей итерации. Затем аналогично делается шаг минимизации для области 2. Итерации продолжаются, пока среднеквадратические значения невязок внутри, на границе области, а также для равенства решений и потоков для каждой среды не станут отличаться на малую величину. Для обеих задач количество РБФ равно 64, использовалось по 80 пробных точек внутри области решения и на границе, 20 пробных точек на линии раздела сред. Все штрафные коэффициенты равны 100. Итерации выполнялись до достижения средней квадратической ошибки, равной 10^{-7} . Обучение СРБФ проводилось алгоритмом Левенберга-Марквардта. Графики решения (рис.4). показывают разрыв значений производных решения на границе раздела сред.

На СРБФ обратные коэффициентные задачи для кусочно-однородной среды не решались. При решении таких задач бессеточным

методом не удастся точно определить положение границы раздела сред и выполнить условия сопряжения сред. Решим задачу приближенно, используя непрерывную функцию среды [26]. Задача описывается ДУЧП

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

где $k(\mathbf{x})$ – непрерывная неизвестная функция, описывающая среду, $\mathbf{x}$ – вектор координат, Ω – область решения. Граничные условия имеют вид

$$Bu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (10)$$

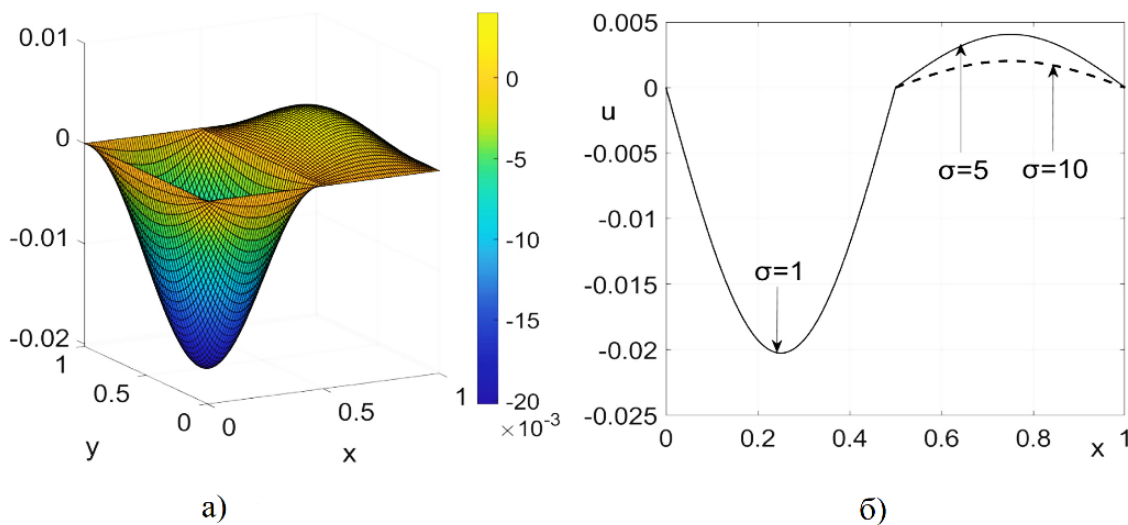


Рис. 4. Графики решения: а) приближенное решение;
б) график решения в среднем сечении

Необходимо найти решение u и функцию $k(\mathbf{x})$, если известно решение $\psi(\mathbf{z})$, измеренное с известной погрешностью в некотором множестве точек

$$u(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in Z, \quad Z \subset \Omega \cup \partial\Omega. \quad (11)$$

Для нахождения функции $k(\mathbf{x})$ применим параметрическую оптимизацию [27]. Для этого функцию $k(\mathbf{x})$ аппроксимируем с помощью СРБФ

$$k_{RBF}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_k} w_m^k \phi_m^k(\mathbf{x}, \mathbf{p}_m^k), \quad (12)$$

где M_k – количество РБФ, w_m^k , $\mathbf{p}_m^k$ – вектор весов и параметров РБФ, ϕ_m^k – РБФ.

Решение u прямой задачи, в которой функция $k(\mathbf{x})$ аппроксимируется сетью (12), находим второй СРБФ $u_{RBF}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_u} w_m^u \phi^u(\mathbf{x}; \mathbf{p}_m^u)$, где

M_u – количество РБФ, w_m^u , $\mathbf{p}_m^u$ – вектор весов и параметров РБФ ϕ_m^u . Решение обратной задачи формируется в процессе обучения двух СРБФ. Функция потерь имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [Au(\mathbf{x}_i, k(\mathbf{x}_i)) - f(\mathbf{x}_i)]^2 + \\ + \frac{\lambda_B}{2} \sum_{j=1}^K [Bu(\mathbf{x}_j) - p(\mathbf{x}_j)]^2 + \frac{\lambda_D}{2} \sum_{m=1}^S [u(\mathbf{x}_m) - \psi(\mathbf{x}_m)]^2$$

где $Au(\mathbf{x}_i, k(\mathbf{x}_i))$ – дифференциальный оператор уравнения (9), $Bu(\mathbf{x}_j)$ – оператор граничных условий (10), N – количество пробных точек внутри области, K – количество пробных точек, на границе области, S – количество точек дополнительных условий, λ_B, λ_D – штрафные множители, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{x}_m$ – координаты пробных точек внутри, на границе области и координаты точек дополнительных условий.

Обратная задача является некорректной. Для регуляризации использован метод итерационной регуляризации (условие Морозова) [28]: обучение сети продолжается до тех пор, пока

$$\sum_{m=1}^S [u(\mathbf{x}_m) - \psi(\mathbf{x}_m)]^2 > S\delta^2,$$

где δ – абсолютная погрешность измерения решения в точках дополнительных условий (11).

Эксперименты проводились на модельной задаче для кусочно-однородной среды. Предварительно с помощью СРБФ решена прямая задача (5)–(7). Для решения обратной задачи использована СРБФ, содержащая 64 РБФ, $N = K = 80$, $S = 40$, $\lambda_B = \lambda_D = 10$. Сеть обучалась алгоритмом Левенберга-Марквардта до среднего квадратического значения функции потерь, равного 0.00005. Результаты представлены на рис. 5-6. Общая картина изменения свойств среды воспроизведена достаточно точно.

Таким образом, сети радиальных базисных функций являются перспективным классом основанных на физике нейронных сетей и могут эффективно использоваться для решения прямых и обратных краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

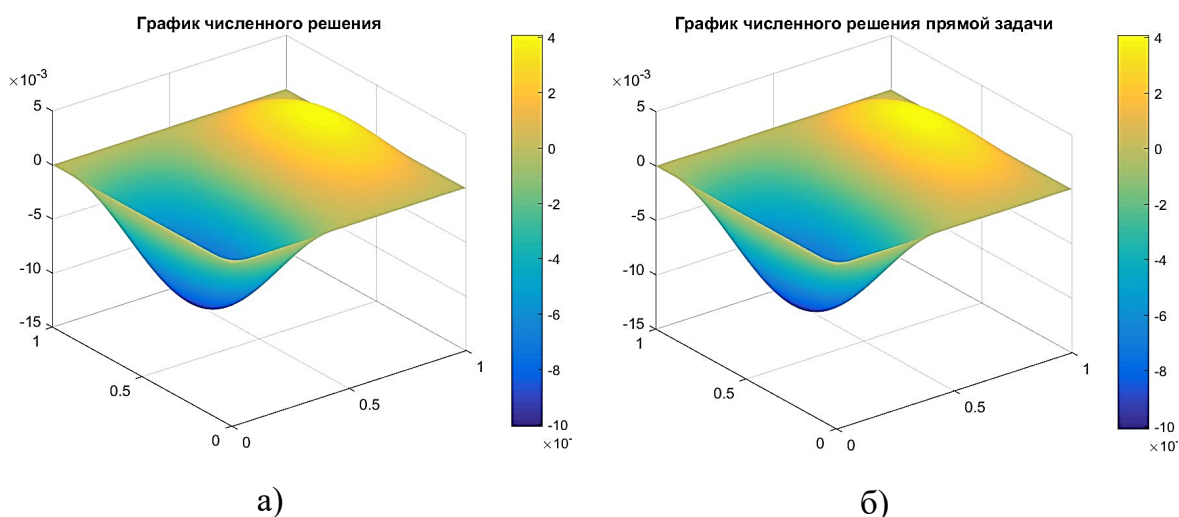


Рис. 5. Результаты экспериментов: а) решение исходной прямой задачи; б) восстановленное решение прямой задачи

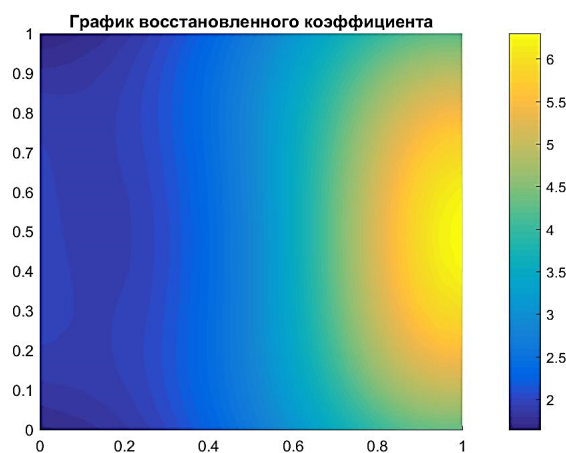


Рис. 6. Вычисленные значения функции среды

Список литературы

1. Lagaris E., Likas A., Fotiadis D. I. Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations // IEEE Transactions on Neural Networks. 1998. Vol. 9, № 5. P. 987–1000.
2. Yadav N., Yadav A. Kumar M. An introduction to neural network methods for differential equations. Dordrecht : Springer, 2015. 127 p.
3. Cybenko G. Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function // Mathematics of Control, Signals and Systems. 1989. № 2. P. 303–314.
4. Hornik K. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks // Neural Networks. 1999. Vol. 4, № 2. P. 251–257.
5. Hanin B. Universal Function Approximation by Deep Neural Nets with Bounded Width and ReLU Activations. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1708.02691v2>
6. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561>

7. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics Informed Deep Learning (Part II): Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10566>
8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. 2019. Vol. 378. P. 686–707.
9. Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Yang L. Physics-informed machine learning // *Nature Reviews Physics*. 2021. Vol. 3. P. 422–440.
10. Bavdin A. G., Pearlmutter B. A., Radul A. A., Siskind J. M. Automatic Differentiation in Machine Learning: A Survey // *Journal of Machine Learning Research*. 2018. Vol. 18, № 1. P. 1–43.
11. Cuomo S., Cola V. S. D., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F. Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's next // *Journal of Scientific Computing*. 2022. Vol. 92, № 88. P. 62.
12. Кохендерфер М. Дж., Уилер Т. А. Алгоритмы оптимизации. СПб. : ООО «Диалектика», 2020. 528 с.
13. Лакшманан В., Робинсон С., Мунн М. Машинное обучение. Паттерны обучения. СПб. : БХВ-Петербург, 2022. 448 с.
14. Tarkhov D., Vasilyev A. Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development. Cambridge MA : Academic Press, 2019. 288 p.
15. Ramabathiran A. A., Ramachandran P. SPINN: Sparse, Physics-based, and partially Interpretable Neural Networks for PDEs // *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 445. P. 110600.
16. Alqezweeni M. M., Glumskov R. A., Gorbachenko V. I., Stenkin D. A. Solving Partial Differential Equations on Radial Basis Functions Networks and on Fully Connected Deep Neural Networks // *Proceedings of the International Conference on Intelligent Vision and Computing (ICIVC 2021)*. ICIVC 2021. Proceedings in Adaptation, Learning and Optimization. Cham : Springer, 2022. Vol. 15. P. 240–249.
17. Аггарвал Ч. Нейронные сети и глубокое обучение. СПб. : ООО «Диалектика», 2020. 752 с.
18. Niyogi P., Girosi F. On the relationship between generalization error, hypothesis complexity, and sample complexity for radial basis functions // *Neural Computation*. 1996. Vol. 8, № 4. P. 819–842.
19. Горбаченко В. И., Жуков М. В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 1. С. 115–126.
20. Алкезуини М. М., Горбаченко В. И. Совершенствование алгоритмов обучения сетей радиальных базисных функций для решения задач аппроксимации // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2017. № 3 (23). С. 123–138.
21. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11, № 2. P. 431–441.

22. Carslaw H. S. Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids. Blackweel : Franklin Classic, 2018. 288 p.
23. Islam M. R., Abou-Kassem J. H., Farouq-Ali S. M. Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach. Houston : Gulf Professional Publishing, 2020. 526 p.
24. Anderson M. P., Woessner W W., Hunt R. J. Applied Groundwater Modeling: Simulation of Flow and Advective Transport. Cambridge : Academic Press, 2015. 382 p.
25. Stenkin D. A., Gorbachenko V. I. Solving Equations Describing Processes in a Piecewise Homogeneous Medium on Radial Basis Functions Networks // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. NEUROINFORMATICS 2020. Studies in Computational Intelligence. Cham : Springer, 2021. Vol. 925. P. 412–419.
26. Gorbachenko V. I., Stenkin D. A. Solving of Inverse Coefficient Problems on Networks of Radial Basis Functions // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V. NEUROINFORMATICS 2021. Studies in Computational Intelligence. Cham : Springer, 2022. Vol. 1008. P. 230–237.
27. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М. : URSS, 2020. 480 с.
28. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М. : Наука, 1987. 240 с.

Моделирование распространения инфракрасного излучения через дифракционные алмазные элементы с антиотражающим покрытием

**Елена Эдуардовна Смольникова¹, Юлиана Юрьевна Кривошеева²,
Димитрий Львович Головашкин³**

^{1,2,3}Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия

³Институт систем обработки изображений –
филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

²krivosheeva.yu.yu@gmail.com

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования работы дифракционных алмазных микролинз с высокой числовой апертурой и антиотражающим покрытием. Изучается влияние такого покрытия на эффективность фокусировки, демонстрируется значительное повышение упомянутой эффективности в случае бинарной микролинзы (до 0,64).

Ключевые слова: алмазные микролинзы, антиотражающее покрытие, FDTD-метод

Modeling the Propagation of IR Radiation Through Diffractive Diamond Elements with an Anti-reflection Coating

Elena E. Smol'nikova¹, Yuliana Yu. Krivosheeva², Dimitriy L. Golovashkin³

^{1,2,3}Samara National Research University, Samara, Russia

³Image Processing System Institute – Branch of the FSRC
«Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia

²krivosheeva.yu.yu@gmail.com

Abstract. The results of numerical simulation of the operation of diffractive diamond microlenses with a high numerical aperture and an antireflection coating are presented. The influence of such a coating on the focusing efficiency is studied, and a significant increase in the mentioned efficiency is demonstrated in the case of a binary microlens (up to 0.64).

Keywords: Diamond microlenses, antireflection coating, FDTD method

Введение

Широкое использование в промышленности мощных CO₂-лазеров ($\lambda = 10,6$ мкм) сформировало потребность в соответствующей оптической элементной базе, надежно функционирующей при высоких интенсивностях излучения. В работе [1] 1999 года заложены основы технологии абляции алмазной поликристаллической поверхности и методов рас-

чета элементов из поликристаллических алмазных пластин, предназначенных для управления излучением таких лазеров. Актуальность рассматриваемого направления исследований подтверждается современной публикацией [2], в которой предложен новый метод изготовления алмазных дифракционных оптических элементов (ДОЭ) с использованием технологии репликации лазерных микроструктур на кремниевом шаблоне, позволяющей изготавливать ДОЭ, обеспечивающие высокую дифракционную эффективность и малое рассеяние ИК-излучения на неровностях поверхности.

К сожалению, относительно высокий коэффициент преломления алмаза, и связанные с ним потери на френелевское отражение, обуславливают значительное снижение энергетической эффективности оптических элементов. Традиционно, для уменьшения такого отражения использовались тонкие пленки [3], доступ к технологии изготовления которых в настоящий момент невозможен. В качестве альтернативы представляется перспективным формирование субволновых антиотражающих поверхностей на границе раздела сред алмаз/воздух по технологии лазерной абляции [4].

При этом авторам настоящей работы не известны примеры использования таких поверхностей, сформированных на ступенчатом профиле бинарных или многоуровневых алмазных ДОЭ. Предлагаемое исследование служит восполнению указанного пробела.

Моделирование распространения ИК-излучения через дифракционные алмазные микролинзы без антиотражающего рельефа

В данной работе исследовались два вида дифракционных микролинз: бинарная и четырехуровневая (рис. 1). Данные элементы были получены из плосковыпуклой рефракционной микролинзы [5] с толщиной $0,83\lambda$, радиусом кривизны $5,04\lambda$, фокусным расстоянием $2,77\lambda$ и апертурой $5,54\lambda$.

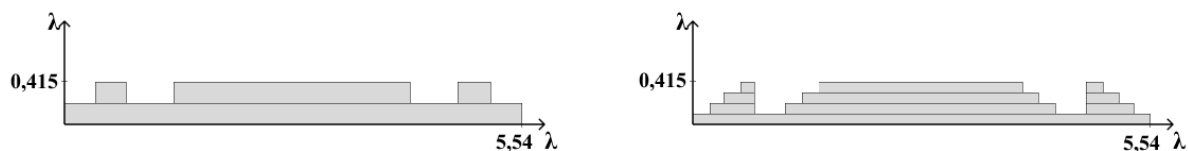


Рис. 1. Профили бинарной и четырехуровневой микролинзы

При анализе работы микролинз используются следующие величины: $\Delta = f_{получ} - f_{расч}$ – отклонение положения области фокусировки от оценки, полученной в рамках геометрической оптики, $\delta = \frac{I_{получ}}{I_{реф}}$ – отно-

шение максимума интенсивности в области фокусировки, полученного в ходе эксперимента к максимуму для рефракционной микролинзы (ее работа исследовалась отдельно, $I_{ref} = 7,339$).

В данной работе моделирование фокусировки излучения производится посредством численного решения уравнений Максвелла методом конечных разностей во временной области (FDTD) [6].

На рис. 2 и в табл. 1 представлены результаты моделирования распространения излучения через дифракционные микролинзы без покрытия.

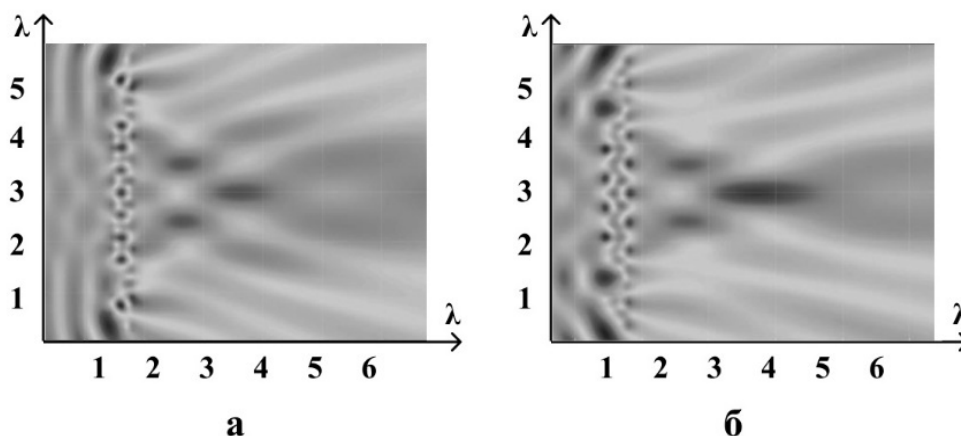


Рис. 2. Распределение квадрата модуля комплексной амплитуды электрического поля в бинарной (а) и четырехуровневой (б) микролинзе

Таблица 1

Результат работы микролинз без антиотражающего покрытия

Вид микролинзы	$I_{получ}$	δ	Δ
бинарная	3,165	0,43	1,02
четырёхуровневая	4,268	0,58	0,92

Хоть рефракционная микролинза характеризуется значительно большей эффективностью по сравнению с дифракционными (изображенными на рис. 1), однако ее изготовление и трудоемко, и дорого. Проще всего изготовить бинарную, но исследования показали, что она имеет малую эффективность 43%. Поэтому, исходя из результатов представленных ранее численных экспериментов, примем за наилучшую четырехуровневую, характеризующуюся по сравнению с бинарной большей эффективностью (табл. 1).

Моделирования распространения ИК-излучения через дифракционные алмазные микролинзы с антиотражающим рельефом

Антиотражающее покрытие предполагаем формировать в виде бинарной решетки с периодом d равным одной четвертой длины волны,

сформированной из того же материала (алмаз $n = 2,4$), что и микролинзы. Высота прямоугольного профиля h рассчитывалась в соответствии с теорией эффективных сред [4] по формуле $h = \frac{\lambda}{4n}$, а его ширина “зубца”

b находилась из формулы для коэффициента заполнения $q = \frac{b}{d}$. Значение самого коэффициента принималось равным 0,26, что обеспечивало полное отсутствие отражения от плоской поверхности при нормальном падении [5].

На рис. 3 и в табл. 2 представлен результаты моделирования работы бинарной микролинзы при нанесении антиотражающего рельефа в различных комбинациях: с левой стороны, с правой и с обеих сторон.

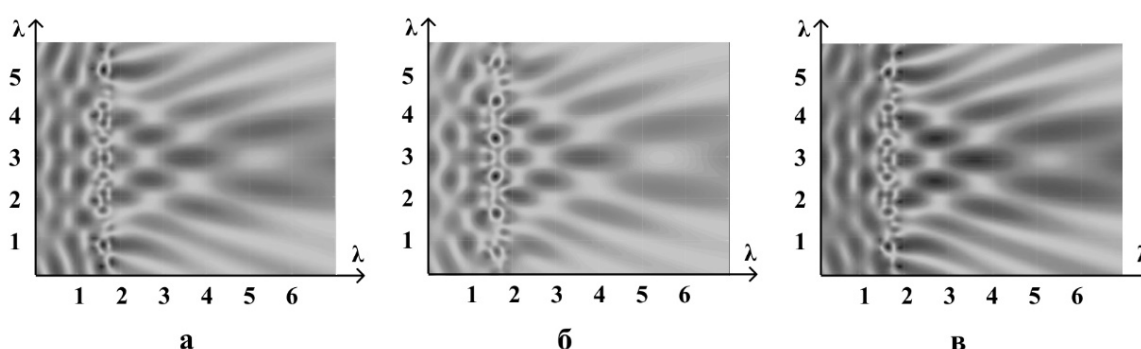


Рис. 3. Распределение квадрата модуля комплексной амплитуды электрического поля в бинарной микролинзе и за ней с нанесением антиотражающего рельефа на левую сторону микролинзы (а), на правую сторону (б) и на обе стороны (в)

Таблица 2

Результат работы бинарной микролинзы

Сторона	$I_{получ}$	δ	Δ
левая	3,4	0,46	1,04
правая	3,89	0,53	1,01
обе	4,7	0,64	0,9

Эффективность бинарной микролинзы с нанесением антиотражающего покрытия на левую сторону по результатам опыта повысила 46%, на правую – поднялась до 53%, на обе стороны – составила 64%.

На следующих рисунке и таблице представлены результаты работы четырехуровневой микролинзы с антиотражающим рельефом. Моделирование показало, что данная микролинза стала хуже работать: ее эффективность снизилась с 0,58 до 0,41 для покрытий на правой и обеих сторонах, и до 0,49 при нанесении покрытия на левую сторону. Предпо-

жительно это связано с тем, что у профиля четырехуровневой микролинзы больше ступеней (больше неровностей на поверхности), и на этих ступенях, очевидно, направление распространения излучения меняется, отличаясь далее от случая нормального падения (для которого рассчитывалась антиотражающая решетка).

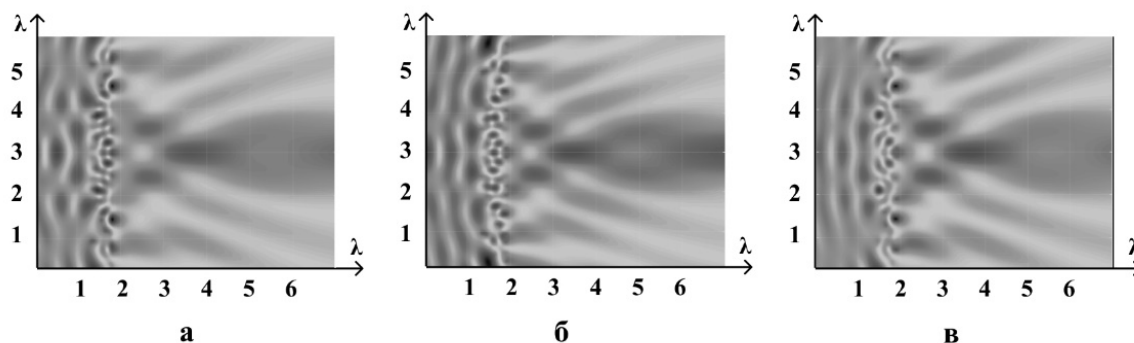


Рис. 4. Распределение квадрата модуля комплексной амплитуды электрического поля в четырехуровневой микролинзе и за ней с нанесением антиотражающего рельефа на левую сторону микролинзы (а), на правую сторону (б) и на обе стороны (в)

Таблица 3

Результат работы четырехуровневой микролинзы

Сторона	$I_{получ}$	δ	Δ
правая	3,036	0,41	0,96
левая	3,628	0,49	0,99
обе	3,029	0,41	1,16

Эксперименты показали, что после нанесения покрытия на бинарную микролинзу, последняя начала работать лучше четырёхуровневой без покрытия. Значит мы вполне можем обойтись бинарной микролинзой, но с покрытием.

Заключение

В ходе формирования антиотражающего рельефа на алмазной бинарной микролинзе выяснилось, что такое просветляющее покрытие улучшает дифракционную эффективность. Нанесение антиотражающего рельефа на правую сторону такой микролинзы привело к повышению ее эффективности с 0,43 до 0,53, на левую сторону – до 0,46. Когда рельеф сформировали на обеих сторонах – эффективность достигла значения 0,64, что сделало использование такого элемента более предпочтительным, чем применение четырехуровневой микролинзы без покрытия. Эффективность четырехуровневой микролинзы понизилась в среднем с 0.58 до 0.45 для любых комбинаций рельефа.

Список литературы

1. Кононенко В. В., Конов В. И., Пименов С. М., Прохоров А. М., Павельев В. С., Сойфер В. А. Алмазная дифракционная оптика для мощных СО₂-лазеров // Квантовая электроника. 1999. Т. 26. С. 9–10.
2. Kononenko T. V., Sovyk D. N., Pivovarov P. A. [et al.]. Fabrication of diamond diffractive optics for powerful CO₂ lasers via replication of laser microstructures on silicon template // DIAMOND AND RELATED MATERIALS. 2020. Vol. 101. P. 107656.
3. Willey R. R. Practical Design and Production of Optical Thin Films Boca Raton : CRC Press, 2002. 542 p.
4. Raguin D. H., Morris G. M. Antireflection structured surface for the infrared spectral region // Applied Optics. 1993. Vol. 32, № 7. P. 1154–1167.
5. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В. А. Сойфера. М. : Физматлит, 2007. 736 с.
6. Taflove A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. 3-rd ed. Boston : Artech House, 2005. 1038 p.

**Электродинамическая и вероятностная модели
электрически управляемых терагерцовых фильтров
на основе метаматериалов графен-диэлектрик**

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Построена электродинамическая модель взаимодействия электромагнитных волн с метаматериалами из многослойных структур графен-диэлектрик в терагерцовом (ТГц) диапазоне частот, базирующаяся на решении задачи дифракции для уравнений Максвелла методом автономных блоков с каналами Флоке. Разработана имитационная вероятностная модель и получены результаты вероятностного расчета характеристик ТГц-фильтров на основе метаматериалов с учетом случайных вариаций параметров (поверхностной проводимости графена) и толщины диэлектрических слоев.

Ключевые слова: задача дифракции, автономные блоки, каналы Флоке, вероятностный расчет, метаматериал из многослойных структур графен-диэлектрик

**Electrodynamic and Probabilistic Models of Electrically Controlled
Terahertz Filters Based on Graphene-Dielectric Metamaterials**

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. The electrodynamic model of interaction of electromagnetic waves with multilayer graphene-dielectric metamaterials in the terahertz (THz) frequency range is constructed, based on solving the diffraction problem for the Maxwell equations by using the method of autonomous blocks with Floquet channels. An imitation probabilistic model has been developed and the results of probabilistic calculation of characteristics of THz filters based on metamaterials have been obtained, taking into account random variations in parameters (surface conductivity of graphene) and the thickness of dielectric layers.

Keywords: diffraction problem, autonomous blocks, Floquet channels, probabilistic calculation, multilayer graphene-dielectric metamaterial

1. Электродинамическая модель.

Вычислительный алгоритм расчета матрицы рассеяния

Математическая модель дифракции электромагнитных волн и их взаимодействия с метаматериалами из многослойных микро- и нано-

структур графен-диэлектрик в терагерцовом (ТГц) диапазоне частот базируется на решении задачи дифракции для уравнений Максвелла совместно с материальным уравнением среды (графена), где поверхностная проводимость графена σ_s включена как параметр, дополненной электродинамическими граничными условиями. Монослой графена характеризуется поверхностной проводимостью σ_s , определяемой формулой Кубо [1].

ТГц фильтр рассматриваем как волноводный трансформатор [2], между входными сечениями S_1, S_2 которого расположен метаматериал (рис. 1). Расчетная электродинамическая модель представлена на рис. 1. В качестве дескриптора используем матрицу рассеяния S .

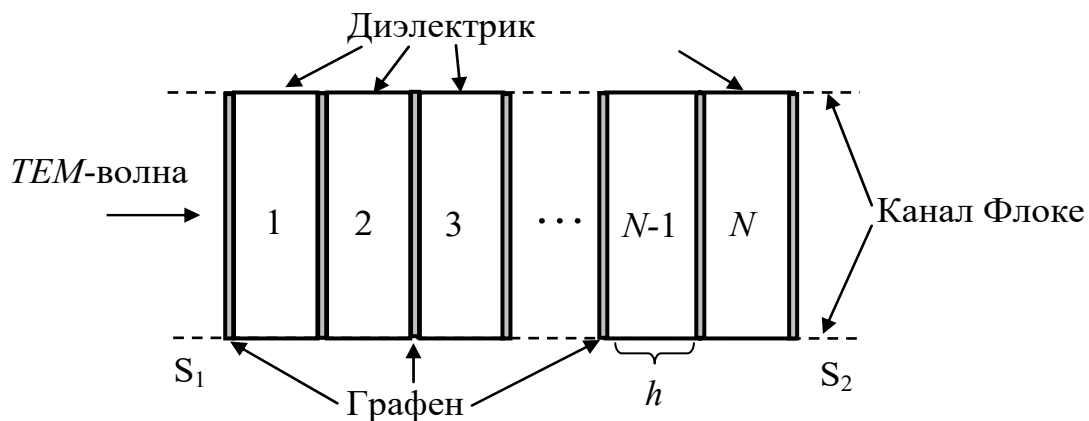


Рис. 1. Расчетная электродинамическая модель ТГц фильтра на основе метаматериала из периодической многослойной структуры графен-диэлектрик как волноводного трансформатора с каналами Флоке

Метаматериал из многослойной структуры графен-диэлектрик можно рассматривать как каскадное соединение автономных блоков с каналами Флоке (ФАБ) [3] в виде отрезков каналов Флоке с однородным заполнением графеном или диэлектриком (рис. 1).

Определим матрицу проводимости Y ФАБ в виде отрезков каналов Флоке с заполнением графеном (или диэлектриком) с диэлектрическими и магнитными проницаемостями ϵ, μ (или ϵ^0, μ^0). Расчетная электродинамическая схема показана на рис. 2.

Поле в полости ФАБ V ищем в виде суперпозиции прямых и обратных волн канала Флоке [3], заполненного средой с проницаемостями ϵ^0, μ^0 :

$$\begin{aligned}\vec{E}^0 &= A_k^+ (\vec{e}_k^0 + \vec{e}_k^{z0}) \exp(-i\Gamma_k^0 z_1) + A_k^- (\vec{e}_k^0 - \vec{e}_k^{z0}) \exp(+i\Gamma_k^0 z_1), \\ \vec{H}^0 &= A_k^+ (\vec{h}_k^0 + \vec{h}_k^{z0}) \exp(-i\Gamma_k^0 z_1) + A_k^- (-\vec{h}_k^0 - \vec{h}_k^{z0}) \exp(+i\Gamma_k^0 z_1), \\ k &= 1, 2, 3, \dots,\end{aligned}\quad (1)$$

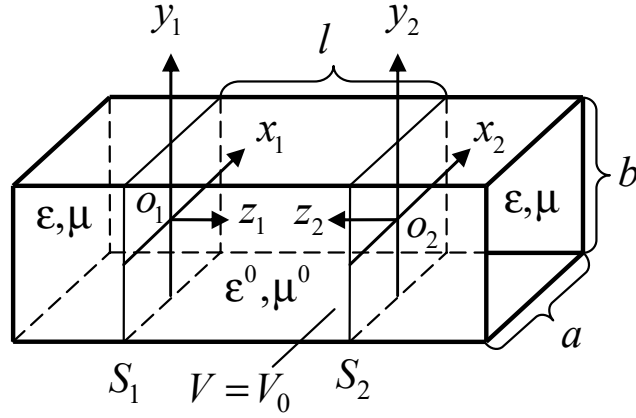


Рис. 2. ФАБ в виде отрезков каналов Флоке с однородным заполнением графеном (или диэлектриком) с проницаемостями ϵ, μ (или ϵ^0, μ^0)

Выражения (1) записаны в локальной системе координат входного сечения S_1 .

Касательные составляющие электрического и магнитного полей на входных сечениях S_1, S_2 из (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\tau(1)} &= A_k^+ \vec{e}_k^0 + A_k^- \vec{e}_k^0, \\ \vec{H}_{\tau(1)} &= A_k^+ \vec{h}_k^0 - A_k^- \vec{h}_k^0, \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\tau(2)} &= A_k^+ \vec{e}_k^0 \exp(-i\Gamma_k^0 l) + A_k^- \vec{e}_k^0 \exp(+i\Gamma_k^0 l), \\ \vec{H}_{\tau(2)} &= A_k^+ \vec{h}_k^0 \exp(-i\Gamma_k^0 l) - A_k^- \vec{h}_k^0 \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{3}$$

Представим поля (2), (3) в виде рядов Фурье по поперечным компонентам собственных волн канала Флоке, заполненного средой с проницаемостями ϵ, μ :

$$\vec{E}_{\tau(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n(1)} \vec{e}_{n(1)}, \quad \vec{H}_{\tau(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n(1)} \vec{h}_{n(1)}, \quad .\tag{4}$$

$$\vec{E}_{\tau(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n(2)} \vec{e}_{n(2)}, \quad \vec{H}_{\tau(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n(2)} \vec{h}_{n(2)}.\tag{5}$$

Подставляя (7.4.) в (7.2), а (7.5) в (7.3) получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n(1)} \vec{e}_{n(1)} &= A_k^+ \vec{e}_k^0 + A_k^- \vec{e}_k^0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{n(1)} \vec{h}_{n(1)} &= A_k^+ \vec{h}_k^0 - A_k^- \vec{h}_k^0, \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n(2)} \vec{h}_{n(2)} = A_k^+ \vec{e}_k^0 \exp(-i\Gamma_k^0 l) + A_k^- \vec{e}_k^0 \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n(2)} \vec{h}_{n(2)} = A_k^+ \vec{h}_k^0 \exp(-i\Gamma_k^0 l) - A_k^- \vec{h}_k^0 \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad k=1, 2, \dots$$

Умножим первые из уравнений (6) и (7) векторно справа на $\vec{h}_k^{0*}$, а вторые из уравнений (6) и (7) – векторно слева на $\vec{e}_k^{0*}$. Интегрируя по входным сечениям S_1 , S_2 и учитывая нормировку, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n(1)} \int_{S_1} (\vec{e}_{n(1)} \times \vec{h}_k^{0*}) \cdot dS_1 = A_k^+ + A_k^-, \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n(1)} \int_{S_1} (\vec{e}_k^{0*} \times \vec{h}_{n(1)}) \cdot dS_1 = A_k^+ - A_k^-, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n(2)} \int_{S_1} (\vec{e}_{n(2)} \times \vec{h}_k^{0*}) \cdot dS_1 = A_k^+ \exp(-i\Gamma_k^0 l) + A_k^- \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n(2)} \int_{S_1} (\vec{e}_k^{0*} \times \vec{h}_{n(2)}) \cdot dS_1 = A_k^+ \exp(-i\Gamma_k^0 l) - A_k^- \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad k=1, 2, \dots,$$

Вычисляя интегралы в (8) и (9) и учитывая, что в локальной системе координат входного сечения S_2 $\vec{e}_{n(2)} = \vec{e}_{n(1)}$, $\vec{h}_{n(2)} = -\vec{h}_{n(1)}$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{kn} a_{n(1)} \sqrt{\frac{W_k}{W_k^0}} = A_k^+ + A_k^-, \\ \delta_{kn} b_{n(1)} \sqrt{\frac{W_k^0}{W_k}} = A_k^+ - A_k^-, \quad k=1, 2, \dots, \\ \delta_{kn} a_{n(2)} \sqrt{\frac{W_k}{W_k^0}} = A_k^+ \exp(-i\Gamma_k^0 l) + A_k^- \exp(+i\Gamma_k^0 l), \\ \delta_{kn} b_{n(2)} \sqrt{\frac{W_k}{W_k^0}} = -A_k^+ \exp(-i\Gamma_k^0 l) + A_k^- \exp(+i\Gamma_k^0 l), \quad k=1, 2, \dots, \end{array} \right. \quad (10)$$

где W_k, W_k^0 – волновые сопротивления каналов Флоке, заполненных средой с проницаемостями ϵ, μ и ϵ^0, μ^0 , соответственно.

Волновые сопротивления определяются следующим образом:

$$W_k = W_k^E = \frac{\Gamma_k}{\omega \epsilon_0 \epsilon}, \quad W_k^0 = W_k^{0E} = \frac{\Gamma_k^0}{\omega \epsilon_0 \epsilon^0} \text{ (E-волны);}$$

$$W_k = W_k^H = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\Gamma_k}, \quad W_k^0 = W_k^{0H} = \frac{\omega \mu_0 \mu^0}{\Gamma_k^0} \text{ (H-волны);}$$

$$W_k = W_k^{TEM} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}}, \quad W_k^0 = W_k^{0TEM} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu^0}{\epsilon_0 \epsilon^0}} \text{ (TEM-волны).}$$

Решая совместно 1-е и 3-е уравнения (10) определяем A_k^+ , A_k^- , затем эти значения подставляем во 2-е и 4-е уравнения (10). После преобразований получаем:

$$\begin{cases} b_{k(1)} = -i \frac{W_k}{W_k^0} \frac{\cos \Gamma_k^0}{\sin \Gamma_k^0} a_{k(1)} + i \frac{W_k}{W_k^0} \frac{1}{\sin \Gamma_k^0} a_{k(2)}, \\ b_{k(2)} = i \frac{W_k}{W_k^0} \frac{1}{\sin \Gamma_k^0} a_{k(1)} - i \frac{W_k}{W_k^0} \frac{\cos \Gamma_k^0}{\sin \Gamma_k^0} a_{k(2)}. \end{cases} \quad (11)$$

Из (11) следует выражение для матрицы проводимости Y ФАБ (рис. 2). Элементы матрицы проводимости Y ФАБ определяются:

$$\begin{cases} Y_{kn}^{11} = Y_{kn}^{22} = -i \delta_{kn} \frac{W_k}{W_k^0} \frac{\cos \Gamma_k^0}{\sin \Gamma_k^0}, \\ Y_{kn}^{12} = Y_{kn}^{21} = i \delta_{kn} \frac{W_k}{W_k^0} \frac{1}{\sin \Gamma_k^0}. \end{cases} \quad (12)$$

Матрица рассеяния S ФАБ определяется через матрицу проводимости Y следующим образом [1]:

$$S = (I + Y)^{-1} (I - Y).$$

Фрагмент каскадного соединения ФАБ (рис. 2) показан на рис. 3.

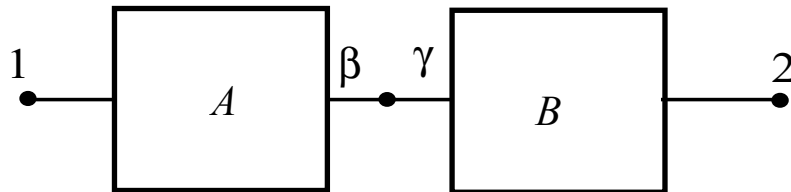


Рис. 3. Фрагмент каскадного соединения ФАБ

Составим из клеток матриц проводимости Y_A и Y_B сводную матрицу Y_C . Виртуальные каналы, обозначенные цифрами, остаются несвязанными, а обозначенные буквами – попарно соединены между собой. Объединение объектов A, B осуществляется по виртуальным каналам β и γ .

Представим сводную матрицу Y_C в виде клеток:

$$Y_c = \begin{matrix} & \beta & \gamma & 1 & 2 \\ \begin{matrix} \beta \\ \gamma \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} Y^{\beta\beta} & 0 & Y^{\beta 1} & 0 \\ 0 & Y^{\gamma\gamma} & 0 & Y^{\gamma 2} \\ Y^{1\beta} & 0 & Y^{11} & 0 \\ 0 & Y^{2\gamma} & 0 & Y^{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (13)$$

Совокупность индексов 1, 2 обозначим через α , тогда (13) можно записать:

$$Y_c = \begin{pmatrix} Y^{\beta\beta} & 0 & Y^{\beta\alpha} \\ 0 & Y^{\gamma\gamma} & Y^{\gamma\alpha} \\ Y^{\alpha\beta} & Y^{\alpha\gamma} & Y^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В терминах клеточных матриц (14) имеем следующие матричные уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= Y^{\beta\beta} \mathbf{a}_\beta + Y^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha; \\ \mathbf{b}_\gamma &= Y^{\gamma\gamma} \mathbf{a}_\gamma + Y^{\gamma\alpha} \mathbf{a}_\alpha; \\ \mathbf{b}_\alpha &= Y^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + Y^{\alpha\gamma} \mathbf{a}_\gamma + Y^{\alpha\alpha} \mathbf{a}_\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Дополним уравнения (7.15) условием связи $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma$, $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}_\gamma$, что соответствуют постановке электродинамических граничных условий $\vec{E}_\tau^A = \vec{E}_\tau^B$, $\vec{H}_\tau^A = \vec{H}_\tau^B$ на границах сшивания ФАБ, и исключим векторы $\mathbf{a}_\beta$, $\mathbf{a}_\gamma$, $\mathbf{b}_\beta$, $\mathbf{b}_\gamma$. После преобразований имеем

$$\mathbf{b}_\alpha = \left(Y^{\alpha\alpha} + (Y^{\alpha\beta} + Y^{\alpha\gamma})(Y^{\beta\beta} - Y^{\gamma\gamma})^{-1}(Y^{\gamma\alpha} - Y^{\beta\alpha}) \right) \mathbf{a}_\alpha. \quad (16)$$

Многоканальная многомодовая матрица проводимости Y ФАБ, полученная объединением объектов A, B , будет определяться как

$$Y = Y^{\alpha\alpha} + (Y^{\alpha\beta} + Y^{\alpha\gamma})(Y^{\beta\beta} - Y^{\gamma\gamma})^{-1}(Y^{\gamma\alpha} - Y^{\beta\alpha}). \quad (17)$$

Соединяя все ФАБ, получаем матрицу проводимости Y ТГц фильтра на основе метаматериала. Затем матрица проводимости Y фильтра пересчитывается в матрицу рассеяния S .

2. Результаты электродинамического расчета характеристик ТГц фильтров

Используя разработанный вычислительный алгоритм на основе ФАБ, проведен электродинамический расчет элементов матрицы рассеяния S фильтров на основе метаматериала (рис. 1) в ТГц диапазоне частот.

На рис. 4 показаны расчетные частотные характеристики – зависимости элемента $|S_{21}|$ матрицы рассеяния ТГц фильтра на основе метаматериала с различным числом N листов графена ($N=33, 47, 60$) для значений химического потенциала $\mu_c=0$ эВ, 1 эВ.

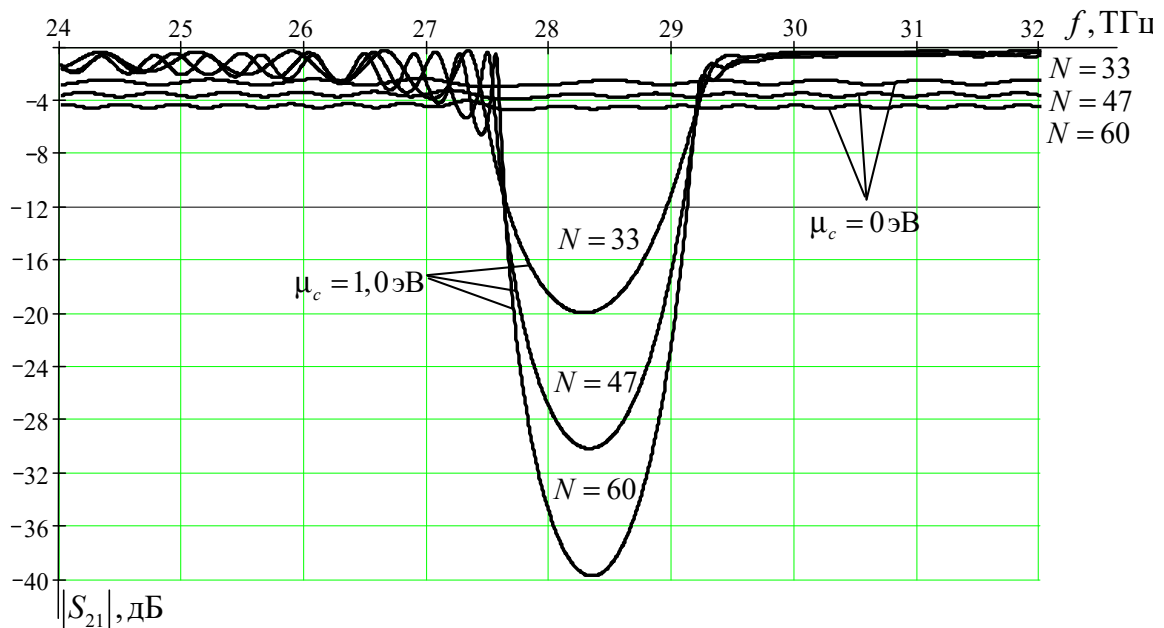


Рис. 4. Частотная зависимость элемента $|S_{21}|$, дБ матрицы рассеяния ТГц фильтров на основе метаматериалов с различным числом листов графена ($N=33, 47, 60$) для значений химического потенциала $\mu_c=0$ и $\mu_c=1$ эВ: $h=3,65$ мкм ; $\epsilon_d=2,2$

Из результатов электродинамического расчета (рис. 4) следует, что при увеличении числа листов графена ($N=33, 47, 60$) коэффициент пропускания $|S_{21}|$ в полосе непропускания значительно уменьшается. Как показывают результаты моделирования (рис. 4), изменяя химический потенциал μ_c приложением внешнего электрического поля (что приводит к изменению проводимости графена), можно управлять характеристиками ТГц фильтров на основе метаматериала. Так, при значении химического потенциала $\mu_c=0$ эВ (внешнее электрическое поле отсутствует) ослабление ТГц излучения в полосе непропускания составляет 2-4,5 дБ (в зависимости от числа $N=33-60$, соответственно). При приложении внешнего электрического поля, которому соответствует химический потенциал $\mu_c=1$ эВ, ослабление излучения возрастает до 20-40 дБ.

3. Результаты вероятностного расчета характеристик ТГц фильтров

Вероятностную модель ТГц фильтров на основе метаматериала из многослойных структур графен-диэлектрик строим следующим образом. Предполагаем, что элемент матрицы рассеяния S_{21} фильтра является случайной величиной. Это может быть вызвано случайными вариациями параметров метаматериала (разбросом значений поверхностной проводимости σ_s образцов графена в технологическом процессе их изготовления) или случайными изменениями геометрических размеров (толщины h диэлектрических слоев).

Полагаем, что модуль $|\varepsilon_r|$ и фаза φ_r комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mu_c) = |\varepsilon_r| \exp i\varphi_r$ графена являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону[4]:

$$\begin{aligned} f_{\text{mod}}(|\varepsilon_r|) &= \frac{1}{\sigma_{\text{mod}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(|\varepsilon_r| - |\varepsilon|_{\text{mod}})^2}{2\sigma_{\text{mod}}^2}\right), \\ f_{\text{arg}}(\varphi_r) &= \frac{1}{\sigma_{\text{arg}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\varphi_r - \varphi_{\text{arg}})^2}{2\sigma_{\text{arg}}^2}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $f_{\text{mod}}(|\varepsilon_r|)$, $f_{\text{arg}}(\varphi_r)$ – плотности вероятностей, $|\varepsilon|_{\text{mod}}$, φ_{arg} – математические ожидания случайных величин, σ_{mod} , σ_{arg} – среднеквадратические отклонения случайных величин.

Толщина h диэлектрических слоев метаматериала (рис. 1) также является случайной величиной, распределенной по нормальному закону[4]:

$$f_h(h_r) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(h_r - m_h)^2}{2\sigma_h^2}\right), \quad (19)$$

где $f_h(h_r)$ – плотность вероятностей, m_h – математическое ожидание случайной величины h_r , σ_h – среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вероятностная модель является имитационной. Используем генератор случайных чисел, распределенных по нормальному закону (18), для имитации случайных величин $|\varepsilon_r|$, φ_r и h_r . На первом этапе электродинамическая модель: решаем краевую задачу дифракции и рассчитываем элемент матрицы рассеяния $|S_{21}|$ ТГц фильтра на основе метаматериала. На втором этапе для того, чтобы определить реализации случайных функций, в вероятностной модели учитываем распределение случайных величин $|\varepsilon_r|$, φ_r , h_r , полученное из имитации. Затем по реализациям случайных функций вычисляем значение математического ожидания случайной величины $|S_{21}|$.

Результаты вероятностного расчета характеристик ТГц фильтра на основе метаматериала в зависимости от относительной величины среднеквадратического отклонения случайных величин $|\epsilon_r|$, ϕ_r приведены на рис. 5. На графиках: $|S_{21}|_{\text{м.о.}}$ – приближенное значение математического ожидания случайной величины $|S_{21}|$, $\sigma_{\text{отн}} = \sigma_{\text{mod}} / |\epsilon|_{\text{mod}} = \sigma_{\text{arg}} / \phi_{\text{arg}}$ – относительная величина среднеквадратического отклонения случайных величин $|\epsilon_r|$, ϕ_r .

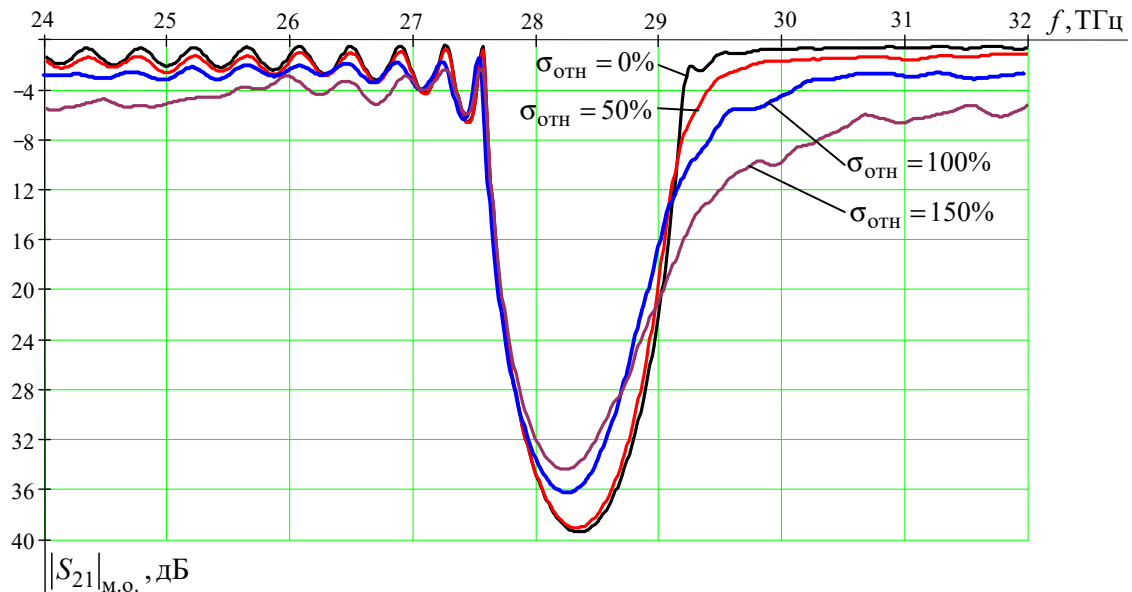


Рис. 5. Зависимости математического ожидания $|S_{21}|_{\text{м.о.}}$, дБ случайной величины $|S_{21}|$ от относительной величины среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{отн}} = \sigma_{\text{mod}} / |\epsilon|_{\text{mod}} = \sigma_{\text{arg}} / \phi_{\text{arg}}$ случайных величин $|\epsilon_r|$, ϕ_r :

σ_s - случайная величина; $\sigma_{\text{отн}} = \sigma_{\text{mod}} / |\epsilon|_{\text{mod}} = \sigma_{\text{arg}} / \phi_{\text{arg}}$, $N = 60$, $h = 3,65$ мкм

При $\sigma_{\text{отн}} = 100\%$ (изменении поверхностной проводимости графена σ_s более чем в два раза) положение резонансного минимума ($f = 28,7$ ТГц), определяющее полосу не пропускания ТГц фильтра, незначительно сдвигается по частоте; при этом наблюдается некоторое незначительное изменение значения $|S_{21}|$ в полосе не пропускания (рис. 5).

ТГц фильтр на основе метаматериала обладает устойчивостью по отношению к разбросу значений поверхностной проводимости σ_s графена. Современные технологии изготовления графена обеспечивают среднеквадратическое отклонение σ_s на уровне порядка $\sigma_{\text{отн}} = 50\%$. Число реализаций случайных функций выбиралось равным 100 (10 таких реализаций из 100 для $\sigma_{\text{отн}} = 50\%$ показаны на рис. 6). Дальнейшее увеличение их числа практически не изменяло результатов расчета $|S_{21}|_{\text{м.о.}}$, дБ.

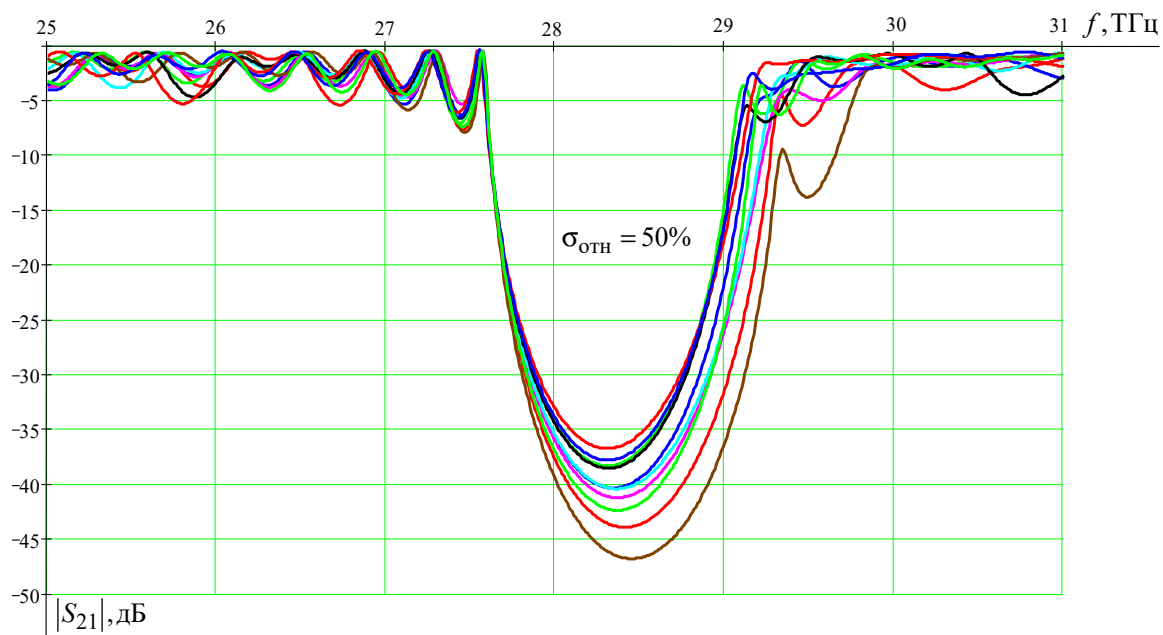


Рис. 6. Реализации случайных функций частотных зависимостей $|S_{21}|$:
 σ_s – случайная величина; $N = 60$, $h = 3,65$ мкм

На рис. 6 показаны реализации случайных функций $|S_{21}|$ от случайных изменений поверхностной проводимости σ_s (эффективной диэлектрической проницаемости) графена, распределенных по нормальному закону. Изменение σ_s приводит к изменению $|S_{21}|$ в резонансной области ($f = 28,3$ ТГц), при этом частотный сдвиг наблюдается слабо (рис. 6). Это является основным фактором устойчивости характеристик ТГц фильтра к разбросу значений поверхностной проводимости σ_s образцов графена.

Результаты вероятностного расчета характеристик ТГц фильтра на основе метаматериала в зависимости от относительной величины среднеквадратического отклонения случайной величины h_r приведены на рис. 7. На графиках: $|S_{21}|_{\text{м.о.}}$ – приближенное значение математического ожидания $|S_{21}|$, $\sigma_{\text{отн}} = \sigma_h / m_h$ – относительная величина среднеквадратического отклонения). Число реализаций случайных функций выбиралось равным 100, дальнейшее увеличение числа случайных функций практически не изменяло результатов расчета $|S_{21}|_{\text{м.о.}}$.

Из графиков на рис. 7 видно, что ТГц фильтр на основе метаматериала практически сохраняет свои параметры лишь при относительном среднеквадратическом отклонении $\sigma_{\text{отн}} \leq 4\%$. На толщину диэлектрических слоев h_r накладывается достаточно жесткое условие при их изготовлении – разброс по толщине не должен превышать 0,15 мкм.

На рис. 8 показаны реализации случайных функций $|S_{21}|$ от случайной величины h_r , распределенной по нормальному закону. Случайные

изменения h_r приводят к значительному частотному сдвигу кривых в резонансной области ($f = 28,3$ ТГц), то есть существенному изменению характерных частот, определяющих полосу непропускания фильтра. Это является основным фактором неустойчивости характеристик ТГц фильтра к разбросу значений толщин диэлектрических слоев.

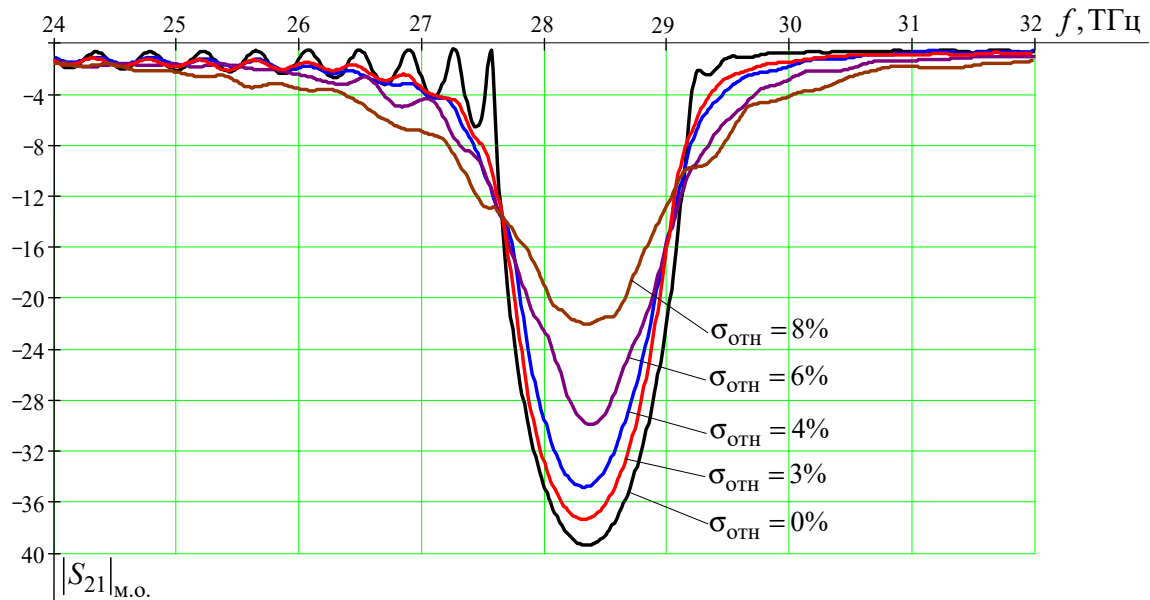


Рис. 7. Зависимости математического ожидания $|S_{21}|_{\text{M.O.}}$ от относительной величины среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{отн}} = \sigma_h / m_h$ случайной величины h_r ; $N = 60$, $h = 3,65$ мкм

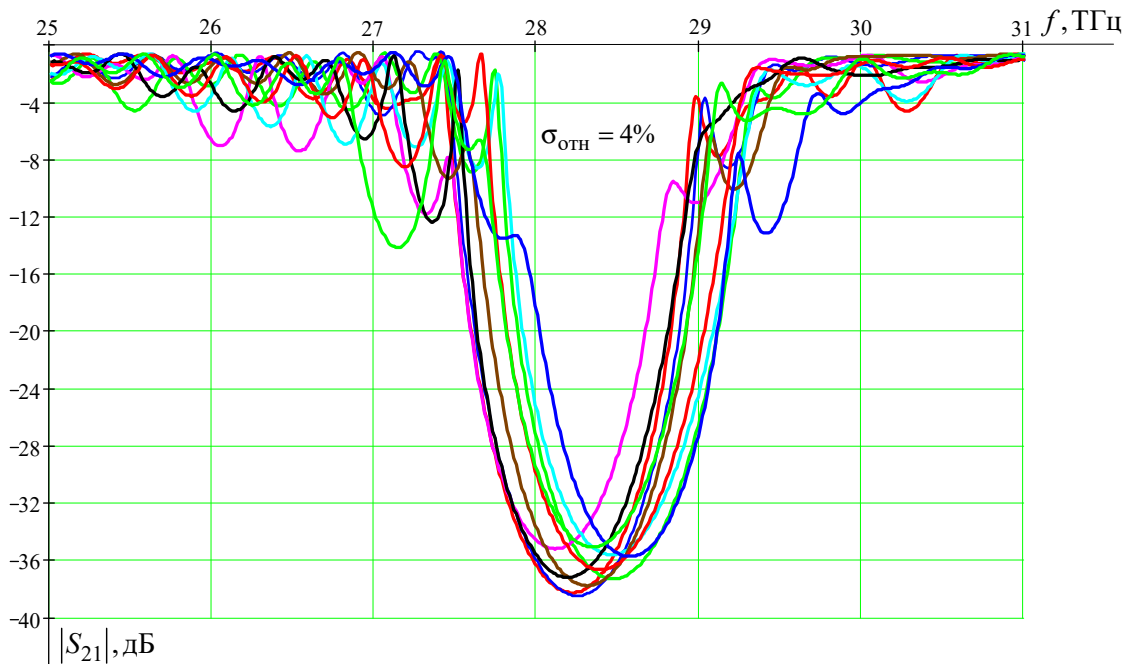


Рис. 8. Реализации случайных функций частотных зависимостей $|S_{21}|$ фильтра: h_r – случайная величина; $N=50$, $h=3,65$ мкм

Таким образом, из результатов математического моделирования следует, что метаматериалы из периодических многослойных структур графен–диэлектрик могут быть применены для создания широкополосных ТГц фильтров планарной конструкции, управляемых электрическим полем и быстро перестраиваемых при небольших изменениях уровня энергии Ферми графена.

Список литературы

1. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of grapheme // Journal of Applied Physics. 2008. Vol. 103. P. 064302.
2. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 297 с.
3. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М. : Физматлит, 1962. 637 с.

**Электродинамическое моделирование взаимодействия
микроволн с анизотропными наноматериалами на основе
3D-решеток углеродных нанотрубок**

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Построен вычислительный алгоритм решения краевой задачи дифракции для периодической 3D-решетки ориентированных углеродных нанотрубок проекционным методом Галеркина. На основе характеристического уравнения, используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости Y автономных блоков с каналами Флоке, проведен электродинамический расчет коэффициента распространения квазиТЕМ волны и эффективной комплексной диэлектрической проницаемости анизотропного наноматериала в зависимости от частоты.

Ключевые слова: краевая задача дифракции, автономный блок с каналами Флоке, характеристическое уравнение, анизотропный наноматериал, углеродные нанотрубки

**Electrodynamic Simulation of Interaction
of Microwaves with Anisotropic Nanomaterials Based
on 3D Lattices of Carbon Nanotubes**

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A computational algorithm for solving the boundary value diffraction problem for a periodic 3D lattice of oriented carbon nanotubes is constructed by using the Galerkin projection method. Based on the characteristic equation, using the developed computational algorithm for calculating the conductivity matrix of autonomous blocks with Floquet channels, the electrodynamic calculation of the propagation constant of the quasi-TEM wave and the effective complex permittivity of the anisotropic nanomaterial as a function of frequency was carried out.

Keywords: boundary value diffraction problem, autonomous blocks with Floquet channels, characteristic equation, anisotropic nanomaterial, carbon nanotubes

**1. Вычислительный алгоритм определения дескрипторов
автономных блоков с каналами Флоке, содержащих УНТ**

Анизотропный наноматериал на основе периодической 3D решетки ориентированных углеродных нанотрубок (УНТ) [1], УНТ рассматриваем

как периодическую 3D наноструктуру (рис. 1,а). Элементарная ячейка 3D наноструктуры моделируется автономным блоком, содержащим УНТ, с виртуальными каналами Флоке на гранях (ФАБ) (рис.1,б).

Дескриптор ФАБ (в линейном приближении в виде матрицы рассеяния $\mathbf{R}$ или проводимости $\mathbf{Y}$) определяем из решения краевой 3D задачи дифракции проекционным методом Галеркина [2].

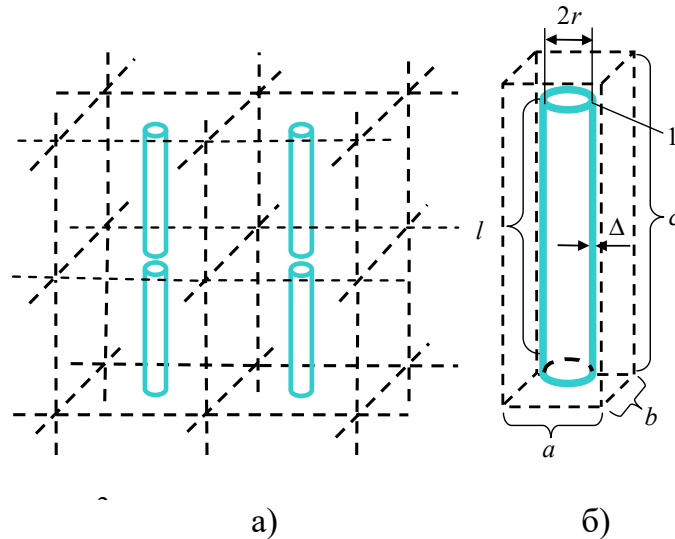


Рис. 1. Электродинамическая модель анизотропного наноматериала на основе УНТ: а) периодическая 3D наноструктура; б) моделирование ячейки в виде ФАБ: 1 – УНТ; a, b, c – геометрические размеры ФАБ

Построим вычислительный алгоритм решения краевой задачи дифракции для ФАБ в виде прямоугольного параллелепипеда, содержащего УНТ (рис. 2).

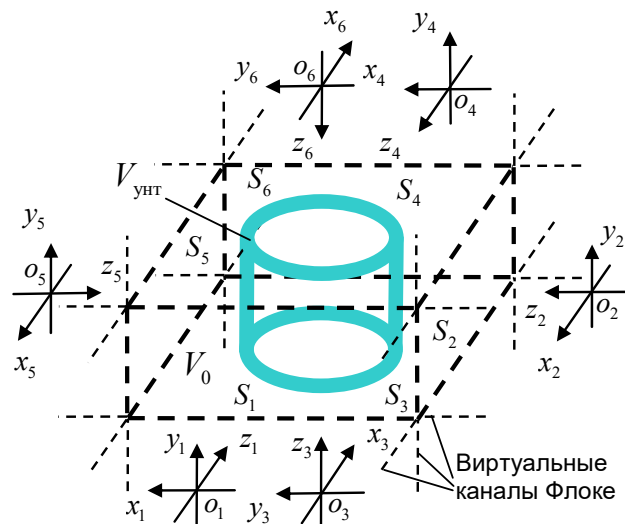


Рис. 2. ФАБ в виде прямоугольного параллелепипеда, содержащего УНТ: V_0 – основная область ФАБ, $V_{\text{УНТ}}$ – область УНТ, $o_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) – локальные системы координат для сечений S_α

Запишем систему уравнений для областей ФАБ (рис. 2), используя кусочно-неоднородную функцию заполнения полости ФАБ:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \tilde{\epsilon} \vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_{zz}, & \text{в } V_{\text{УНТ}} \\ \epsilon_0, & \text{в } V_0 - V_{\text{УНТ}} \end{cases}$, ϵ_{zz} – комплексная диэлектрическая проницаемость УНТ.

Построим проекционную модель [2] для системы дифференциальных уравнений (1). Сформулируем вспомогательную краевую задачу на собственные значения (собственные частоты) [2] для прямоугольного резонатора с геометрическими размерами основной области ФАБ (область V_0 на рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_k &= i\omega_k \epsilon_0 \vec{E}_k; \\ \text{rot } \vec{E}_k &= -i\omega_k \mu_0 \vec{H}_k, \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_k(S_1) &= \vec{E}_k(S_4), \quad \vec{H}_k(S_1) = \vec{H}_k(S_4); \\ \vec{E}_k(S_2) &= \vec{E}_k(S_5), \quad \vec{H}_k(S_2) = \vec{H}_k(S_5); \\ \vec{E}_k(S_3) &= \vec{E}_k(S_6), \quad \vec{H}_k(S_3) = \vec{H}_k(S_6). \end{aligned} \right\} \text{ на гранях,}$$

где ω_k – собственные частоты, $\vec{E}_k, \vec{H}_k$ – собственные поля (собственные функции) резонатора.

Система собственных функций $\{\vec{E}_k, \vec{H}_k\}$ состоит из соленоидальной $\{\vec{E}_k^c, \vec{H}_k^c\}$ и потенциальной подсистем $\{\vec{E}_k^p, \vec{H}_k^p\}$ [2]. Индекс k определен на множестве индексов k' и k'' .

Собственные функции ортогональны и нормированы:

$$\mu_0 \int_{V_0} \vec{H}_k^* \cdot \vec{H}_n dV = \epsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}_k^* \cdot \vec{E}_n dV = \delta_{kn}. \quad (3)$$

Запишем выражения для собственных волн виртуальных каналов Флоке ФАБ [3]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{k(\alpha)}^\pm &= (\vec{e}_{k(\alpha)} \pm \vec{e}_{k(\alpha)}^z) \exp(\pm i\Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^\pm &= (\pm \vec{h}_{k(\alpha)} \pm \vec{h}_{k(\alpha)}^z) \exp(\pm i\Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha); \\ k &= 1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned} \quad (4)$$

где k – индексы и $\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}$ – поперечные и продольные компоненты собственных волн; $\Gamma_{k(\alpha)}$ – их постоянные распространения.

Поперечные компоненты образуют полную систему ортогональных функций $\{\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}\}$ [3]. Поперечное поле на входных сечениях S_α ФАБ представляем в виде разложения по функциям $\{\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}\}$ в ортогональные ряды Фурье:-

$$\begin{cases} \vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)} \vec{e}_{k(\alpha)}, \\ \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)} \vec{h}_{k(\alpha)} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6, \quad (5)$$

где $c_{k(\alpha)}^+, c_{k(\alpha)}^-$ – амплитуды падающих и отраженных волн.

Из рядов Фурье (5) и их нормировки [3]

$$\int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{h}_{n(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad (6)$$

следуют интегральные выражения:

$$a_{k(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad (7)$$

$$b_{k(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad (8)$$

Интегральные граничные условия (7), (8) на гранях ФАБ – это условия неасимптотического излучения [4]. Используя краевую задачу на собственные значения (2), тождество векторного анализа $\vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b} = \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$, формулу Остроградского-Гаусса и условие (8), запишем для уравнений (1) проекционную модель в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{E} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta &= -i\omega_k \epsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV - i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\alpha &= i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV, \\ b_{q(\alpha)} &= \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha, \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots,6 \end{aligned} \quad (9)$$

где N_0, N_α – число базисных функций в области ФАБ и на гранях ФАБ, соответственно.

Решение краевой задачи в форме (9) ищем в виде рядов Фурье по системам функций $\{\vec{E}_n\}, \{\vec{H}_n\}$ (собственные функции прямоугольного резонатора) в области V_0 ФАБ (рис. 2):

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{a}_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{b}_n \vec{H}_n. \quad (10)$$

и по системам функций $\{\vec{e}_{l(\beta)}\}, \{\vec{h}_{l(\beta)}\}$ (собственные функции каналов Флоке) на гранях S_β ($\beta=1,2,\dots,6$) ФАБ:

$$\vec{E}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} a_{l(\beta)} \vec{e}_{l(\beta)}, \quad \vec{H}_\beta = \sum_{l=1}^{N_\beta} b_{l(\beta)} \vec{h}_{l(\beta)}. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} A \cdot \tilde{a} + B \cdot \tilde{b} = -L \cdot a, \\ D \cdot \tilde{a} + U \cdot \tilde{b} = 0, \\ W \cdot \tilde{b} = b, \end{cases} \quad (12)$$

где A, B, D, U, W, L – матрицы с элементами:

$$\begin{aligned} A_{kn} &= i\omega_k \delta_{kn}, \quad B_{kn} = i\omega \delta_{kn}, \\ D_{kn} &= \begin{pmatrix} i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_k^{c*} dV & i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n''}^n \cdot \vec{E}_k^{c*} dV \\ i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n'}^c \cdot \vec{E}_k^{n*} dV & i\omega \int_{V_0} \tilde{\epsilon} \vec{E}_{n''}^n \cdot \vec{E}_k^{n*} dV \end{pmatrix}, \\ U_{kn} &= \begin{pmatrix} i\omega_{k'} \delta_{k'n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_k^{c*}) \cdot dS_\beta & i\omega_{k'} \delta_{k'n''} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n''}^n \times \vec{E}_k^{c*}) \cdot dS_\beta \\ i\omega_{k''} \delta_{k''n'} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n'}^c \times \vec{E}_k^{n*}) \cdot dS_\beta & i\omega_k \delta_{kn} - \sum_{\beta=1}^6 \int_{S_\beta} (\vec{H}_{n''}^n \times \vec{E}_k^{n*}) \cdot dS_\beta \end{pmatrix}, \\ W_{q(\alpha)n} &= \begin{pmatrix} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n'}^{c*}) \cdot dS_\alpha & \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_{n''}^{n*}) \cdot dS_\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$L_{kl(\beta)} = \begin{pmatrix} \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^{c*}) \cdot dS_\beta \\ \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^{p*}) \cdot dS_\beta \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,N_0, \quad q=1,2,\dots,N_\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots,6.$$

Компонентами векторов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, a , b являются коэффициенты $\{\tilde{a}_n\}$, $\{\tilde{b}_n\}$, $\{a_{l(\beta)}\}$, $\{b_{l(\beta)}\}$ рядов Фурье (10) и (11), соответственно.

Исключая векторы $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ из СЛАУ (12) получаем:

$$b = W \cdot (A \cdot D^{-1} \cdot U - B)^{-1} \cdot L \cdot a. \quad (13)$$

Из (13) следует матрица проводимости Y ФАБ (рис. 1,б), содержащего УНТ:

$$Y = W \cdot (A \cdot D^{-1} - B)^{-1} \cdot L. \quad (14)$$

2. Методика и результаты электродинамического анализа

Геометрия задачи - направление распространения волнового процесса и модель анизотропного наноматериала показана на рис. 3.

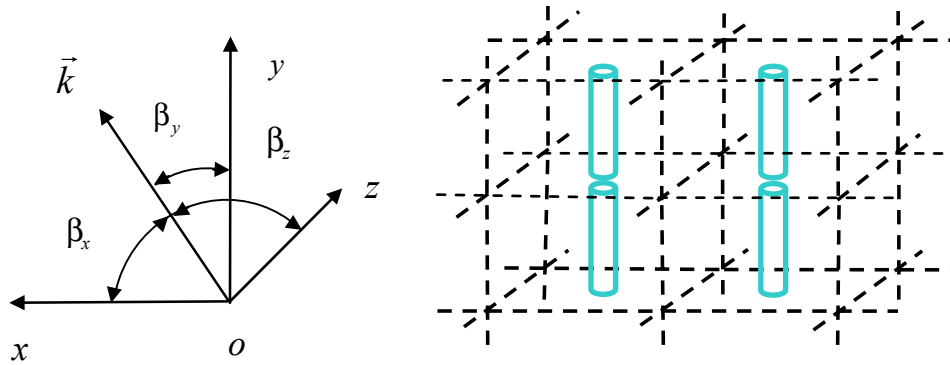


Рис. 3. Геометрия задачи и модель анизотропного наноматериала на основе 3D решетки УНТ: а) направление распространения волнового процесса с волновым вектором k ; б) периодическая 3D наноструктура

Волновой процесс, в периодической 3D наноструктуре (рис. 3,б) подчинен теореме Флоке [5], и его можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа плоских неоднородных волн (пространственных гармоник) [5]:

$$\vec{E}_0(\perp, z_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\perp) \exp(-i\Gamma_n z_0),$$

$$\vec{H}_0(\perp, z_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(\perp) \exp(-i\Gamma_n z_0) \quad (16)$$

с постоянными распространения

$$\Gamma_n = v + \frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \quad (17)$$

где Λ - длина ячейки вдоль направления $\vec{k}$; символ $\perp$ означает совокупность поперечных координат x, y ; $\Gamma_0 = v$ - постоянная распространения нулевой пространственной гармоники.

Поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ распространяющейся волны согласно теореме Флоке [5] может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(x+a, y, z) &= \vec{E}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_x), \\ \vec{H}_0(x+a, y, z) &= \vec{H}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_x), \\ \vec{E}_0(x, y+b, z) &= \vec{E}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_y), \\ \vec{H}_0(x, y+b, z) &= \vec{H}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_y), \\ \vec{E}_0(x, y, z+c) &= \vec{E}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_z), \\ \vec{H}_0(x, y, z+c) &= \vec{H}_0(x, y, z) \exp(-i\varphi_z), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varphi_x = \Gamma_n a \cos \beta_x$, $\varphi_y = \Gamma_n b \cos \beta_y$, $\varphi_z = \Gamma_n c \cos \beta_z$; $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ - углы, задающие направление распространения волнового процесса.

Согласно теореме Флоке на входных сечениях ФАБ (рис. 2, в) должны выполняться соотношения (18) для амплитуд падающих $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ и отраженных $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$; $k, n = 1, 2, \dots$; $m = \pm 1, \pm 2, \dots$) волн в каналах Флоке:

$$\begin{aligned} c_{n(4)}^+(\omega_m) &= c_{n(1)}^+(\omega_m) \exp(-i\varphi_x), \quad c_{n(5)}^+(\omega_m) = c_{n(2)}^+(\omega_m) \exp(-i\varphi_y), \\ c_{n(6)}^+(\omega_m) &= c_{n(3)}^+(\omega_m) \exp(-i\varphi_z), \quad c_{k(4)}^-(\omega_m) = c_{k(1)}^-(\omega_m) \exp(-i\varphi_x), \\ c_{k(5)}^-(\omega_m) &= c_{k(2)}^-(\omega_m) \exp(-i\varphi_y), \quad c_{k(6)}^-(\omega_m) = c_{k(3)}^-(\omega_m) \exp(-i\varphi_z), \\ k, n &= 1, 2, \dots; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (19) в соотношение

$$\mathbf{c}^- = \mathbf{R} \mathbf{c}^+, \quad (20)$$

где $\mathbf{R}$ - матрица рассеяния [6] - дескриптор ФАБ

$$R = \begin{pmatrix} R_{\alpha\alpha} & R_{\alpha\beta} \\ R_{\beta\alpha} & R_{\beta\beta} \end{pmatrix},$$

здесь α, β - индексы входных сечений ФАБ S_1, S_2, S_3 и S_4, S_5, S_6 , векторы c^- и c^+ составлены из амплитуд $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ и $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$, соответственно.

В результате получаем характеристическое уравнение для определения постоянных распространения Γ_n волн:

$$\Delta(\Gamma_n) = |\mathbf{R}_{\alpha\alpha} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}_{\beta\alpha} + \mathbf{R}_{\alpha\beta}\mathbf{H} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{R}_{\beta\beta}\mathbf{H}| = 0, \quad (21)$$

где $\Delta(\Gamma_n)$ – определитель матрицы;

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & h_z \end{pmatrix} -$$

диагональная матрица с элементами

$$h_{x(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n a \cos\beta_x, \quad h_{y(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n b \cos\beta_y, \quad h_{z(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n c \cos\beta_z.$$

В характеристическое уравнение (21) входят клетки $R_{\alpha\alpha}, R_{\beta\alpha}, R_{\alpha\beta}, R_{\beta\beta}$ матрицы рассеяния $\mathbf{R}$ ФАБ.

Для матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ ФАБ (14) справедливо выражение:

$$b = Y \cdot a, \quad (22)$$

где векторы a и b составлены, соответственно, из коэффициентов $a_{n(\beta)}$ и $b_{k(\alpha)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6; k, n = 1, 2, \dots, N_{\alpha, \beta}$) рядов Фурье (11).

На основе характеристического уравнения (21), используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости $\mathbf{Y}$ ФАБ (14), проведен электродинамический расчет коэффициента распространения Γ_0 квази-ТЕМ волны в 3D наноструктуре в зависимости от частоты.

Методика электродинамического анализа волн в анизотропном наноматериале базируется на теории эффективной среды: постоянные распространения волн в неограниченной сплошной среде [5]:

$$\Gamma_{o\delta} = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_1^\Sigma \mu_0}, \quad (23)$$

совпадают с соответствующими постоянными распространения волн в 3D наноструктуре на основе 3D решетки УНТ.

В этом случае эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость определяется из (23) следующим образом:

$$\epsilon_{\Sigma} = \Gamma_0^2 / (\omega^2 \mu_0). \quad (24)$$

На рис. 4, 5 показаны результаты расчета частотных зависимостей действительной ϵ'_{Σ} и мнимой ϵ''_{Σ} частей эффективной комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\Sigma} = \epsilon'_{\Sigma} - i\epsilon''_{\Sigma}$ анизотропного наноматериала на основе 3Dрешетки УНТ для ориентации вектора $\mathbf{E}$ квази- TEM волны параллельно (рис. 4) и ортогонально (рис. 5) оси УНТ при различном соотношении v объема УНТ к общему объему наноматериала (при изменении периода решетки a, b).

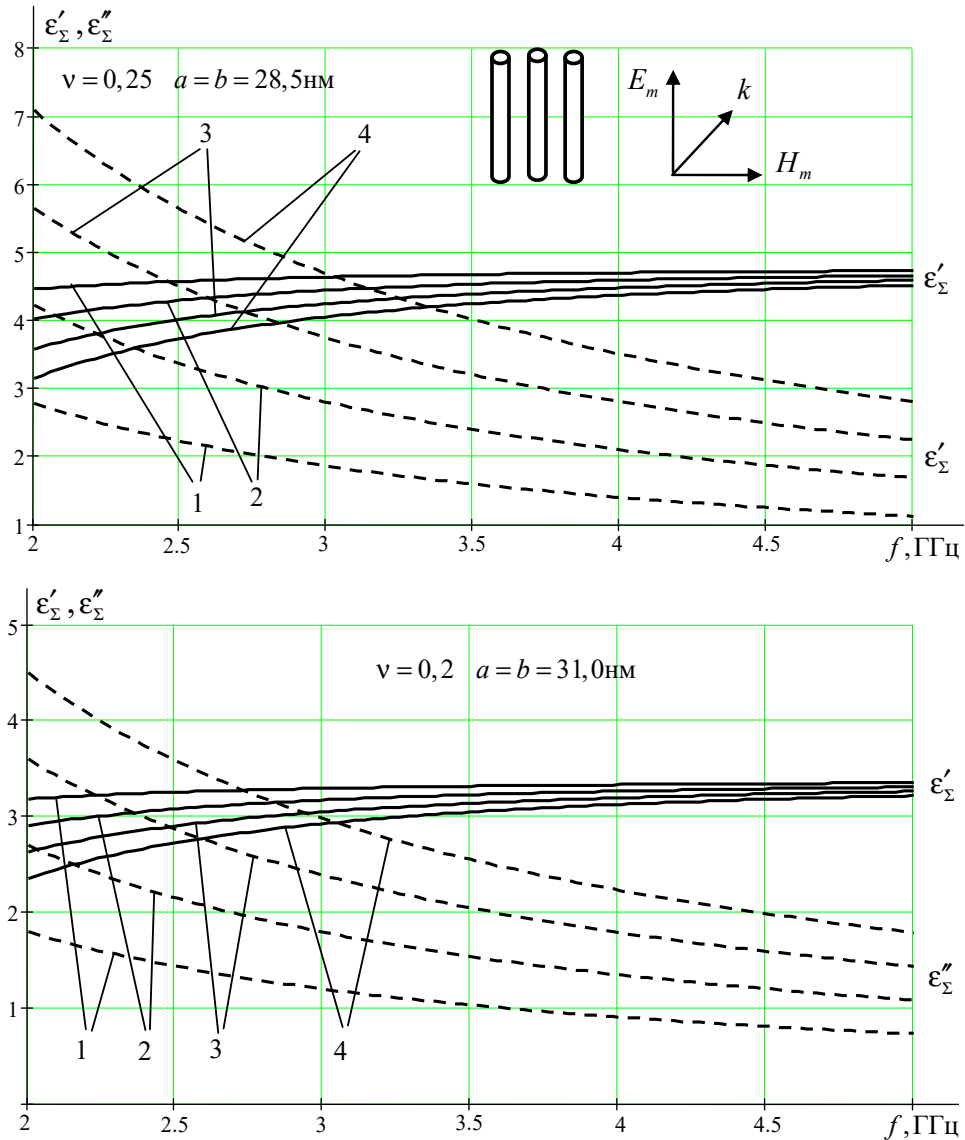


Рис. 4. Частотные зависимости ϵ'_{Σ} , ϵ''_{Σ} для ориентации вектора $\mathbf{E}$ квази- TEM волны параллельно оси УНТ: $\epsilon_{\text{УНТ}} = 62$; $\Delta = 3 \text{ nm}$, $2r = 25 \text{ nm}$, $l = 1000 \text{ nm}$, $c = 1025 \text{ nm}$; E_m , H_m – ориентация векторов поля квази- TEM волны; кривая 1 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 2.5 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; 2 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 5.0 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; 3 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 7.5 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; 4 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 10.0 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$;

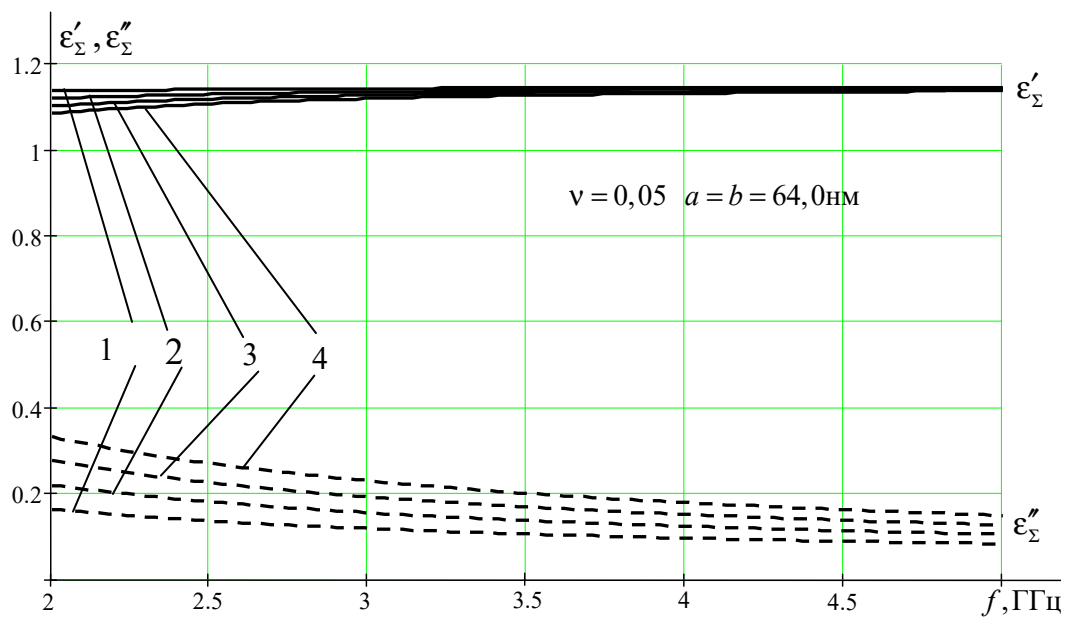
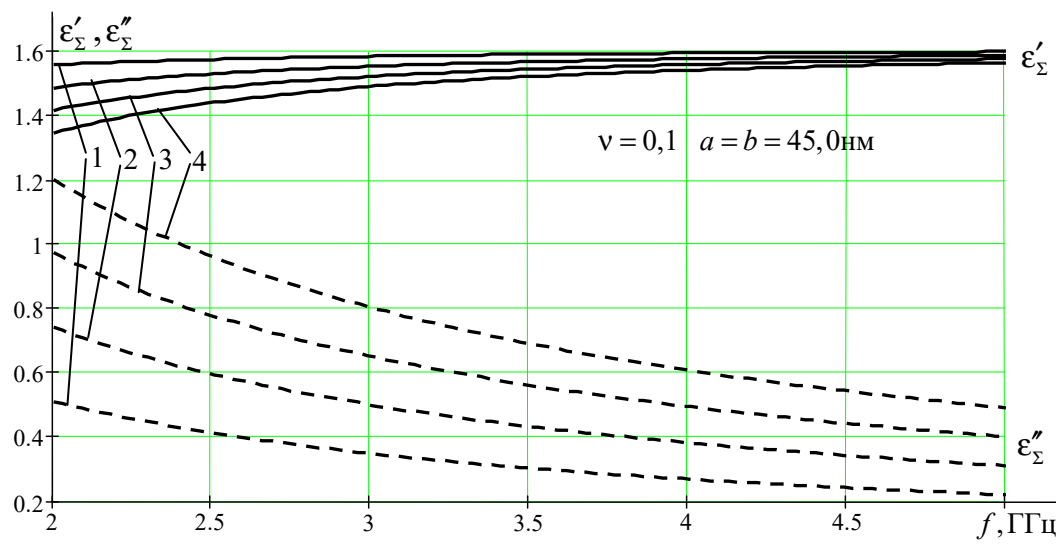
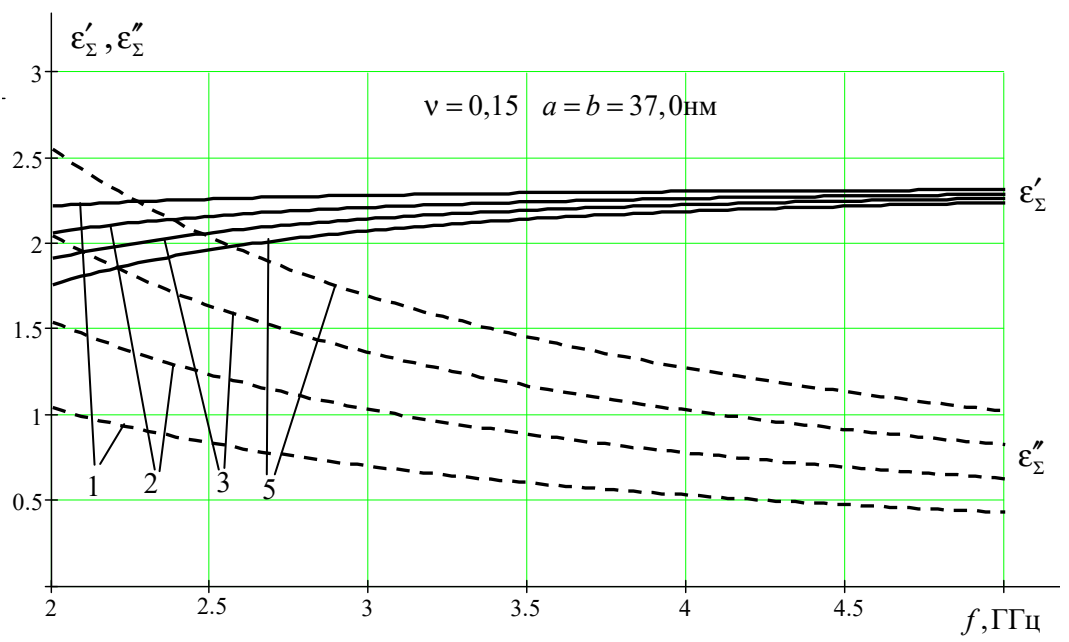


Рис. 4. Окончание

Как видно из графиков (рис. 4, 5), чем выше проводимость УНТ и соотношение v объема УНТ к общему объему наноматериала, тем больше ϵ''_{Σ} , выше степень ослабления СВЧ излучения за счет поглощения. Для 3D решетки УНТ ослабление зависит от взаимной ориентации вектора электрического поля E волны и осей УНТ: при параллельной (рис. 4) ориентации в сравнении с ортогональной (рис. 5) ослабление СВЧ излучения увеличивается.

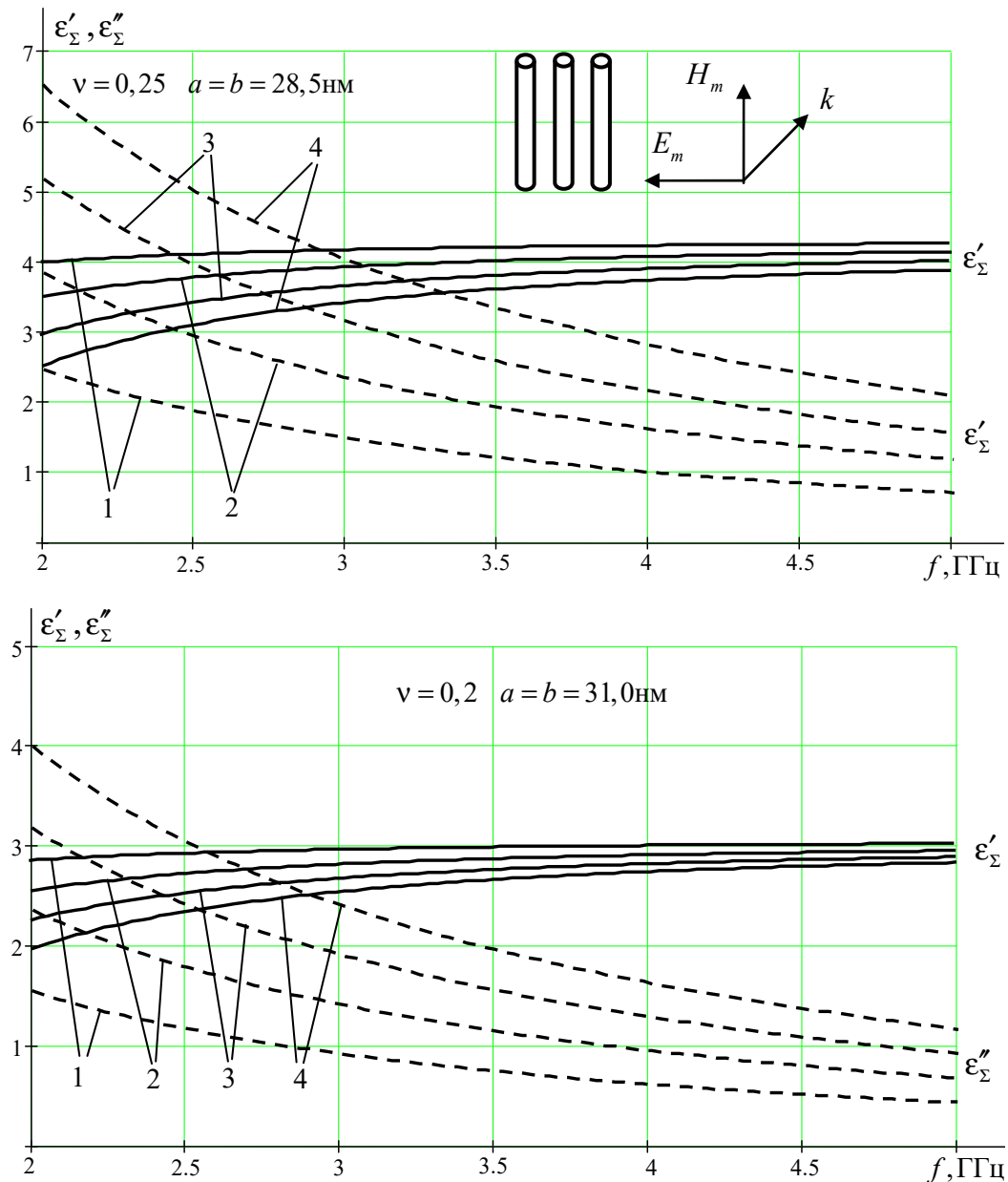


Рис. 5. Частотные зависимости ϵ'_{Σ} , ϵ''_{Σ} для ориентации вектора E квази- TEM волны ортогонально оси УНТ: $\epsilon_{\text{УНТ}} = 62$; $\Delta = 3 \text{ nm}$, $2r = 25 \text{ nm}$, $l = 1000 \text{ nm}$, $c = 1025 \text{ nm}$; кривая 1 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 2.5 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; 2 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 5.0 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; 3 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 7.5 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$; кривая 4 – $\sigma_{\text{УНТ}} = 10.0 \text{ om}^{-1} \text{ m}^{-1}$

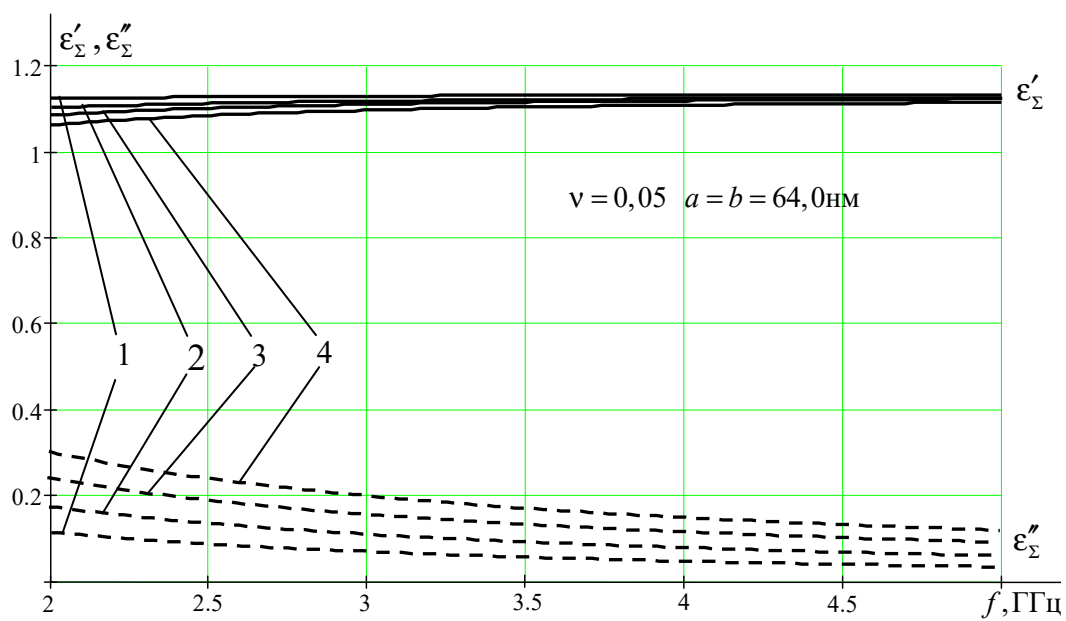
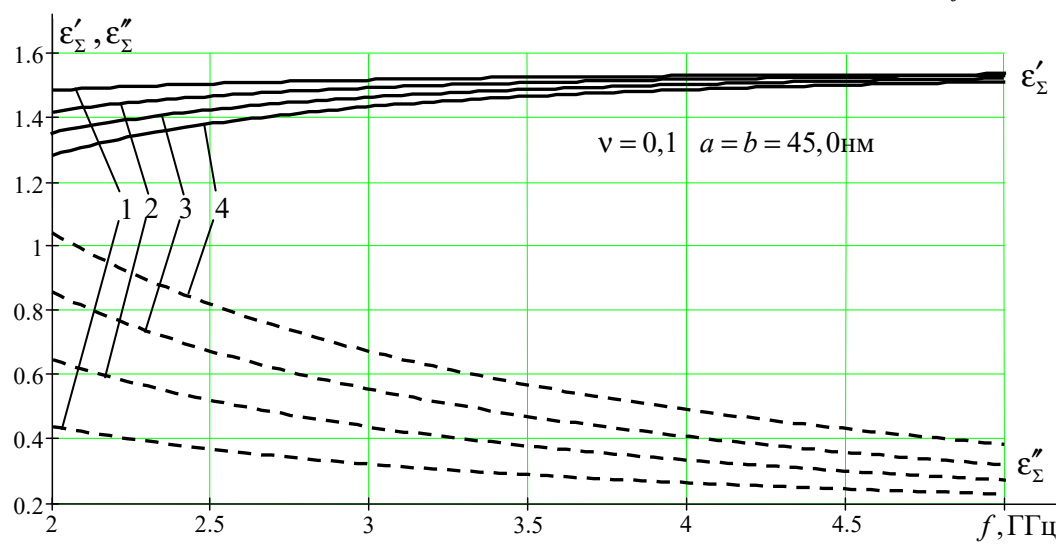
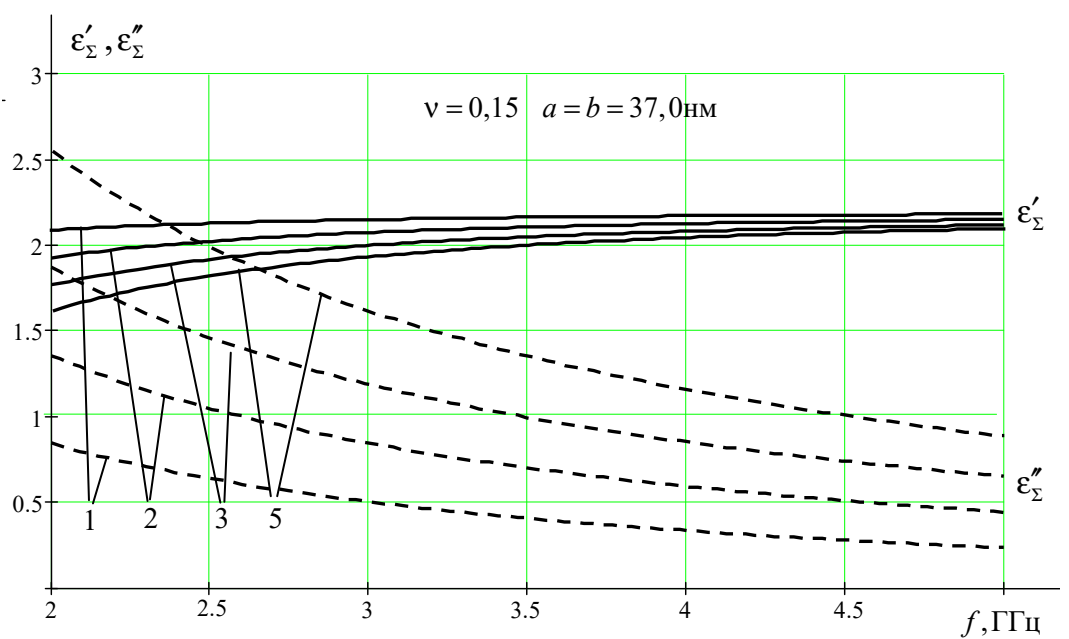


Рис. 5. Окончание

Список литературы

1. Дьячков П. Н. Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применения. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
2. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике : сб. научно-методических статей по прикладной электродинамике. М. : Высшая школа, 1977. С. 4–23.
3. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
4. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1862.
5. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М. : Наука, 1973.
6. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 297 с.

Модель работы установок электроцентробежных насосов в периодическом режиме

Андрей Александрович Макеев¹, Сергей Иванович Мартынов²

¹Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

²Сургутский государственный университет, Сургут, Россия

¹makeev_andrey2011@mail.ru, ²martynovsi@mail.ru

Аннотация. Моделируется работа установки электроцентробежного насоса в периодическом режиме с учетом времени восстановления давления в скважине. Проведено компьютерное моделирование и подобраны параметры, оптимизирующие периодический режим работы такой установки. Результаты проведенного численного моделирования позволяют оценить роль различных физических процессов, протекающих в скважине и в коллекторе.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, электроцентробежный насос, периодический режим, оптимизация режима

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке департамента образования и молодежной политики ХМАО-Югра.

Model of operation of electric centrifugal pump installations in periodic mode

Andrey A. Makeev¹, Sergey I. Martynov²

¹Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

²Surgut State University, Surgut, Russia

¹makeev_andrey2011@mail.ru, ²martynovsi@mail.ru

Abstract. The operation of an electric centrifugal pump installation in a periodic mode is simulated, taking into account the time for restoring pressure in the well. Computer simulation has been carried out and parameters have been selected that optimize the periodic operation of such an installation. The results of the numerical simulation performed allow us to evaluate the role of various physical processes occurring in the well and in the reservoir.

Keywords: computer simulation, electric centrifugal pump, periodic mode, mode optimization

Acknowledgments: the work was carried out with the financial support of the Department of Education and Youth Policy of the Khanty-Mansi Autonomous Okrug-Yugra.

Объем нефти, добываемой в Западной Сибири, ежегодно снижается [1]. Причины такого снижения: большая часть месторождений эксплуатируется на поздних стадиях разработки, низкий коэффициент извлече-

ния нефти (КИН). Для поддержания нефтяного потенциала следует совершенствовать технологии разработки месторождений с трудноизвлекаемыми запасами нефти (ТРИЗ) [2], восстановления и увеличения нефтеотдачи пласта. Разработка трудноизвлекаемых запасов сегодня становится необходимым условием успешного нефтяного бизнеса.

Одна из задач, возникающих при этом, обеспечение эффективной работы малodeбитного (менее 30-35 м³/сут) фонда скважин с установками электроцентробежных насосов (УЭЦН) [3]. Существенно влияет на процесс эксплуатации скважин с УЭЦН геолого-физические особенности месторождений с трудноизвлекаемыми запасами. Эксплуатация скважин с УЭЦН, где дебит меньше минимальной допустимой подачи насоса возможна только в периодическом режиме работы УЭЦН. При этом возникает задача оптимизации промежутков времени, в которые УЭЦН включена и работает на полную мощность и в которые выключается для восстановления давления в скважине. Это позволит увеличить добычи нефти, снизить энергопотребление и удельный расход электроэнергии УЭЦН.

В настоящей работе предлагается гидродинамическая модель работы УЭЦН, учитывающая строение скважины, гидродинамические процессы, происходящие как в самой скважине, так и в пласте, откуда поступает нефть в скважину. Для строения скважины характерно наличие межтрубного пространства, занятого слоем нефти высотой h_1 над точкой измерения давления и слоем газа с давлением p_1 . Высота слоя нефти от зоны перфорации трубы до точки измерения давления равна h_2 . Давление нефти в пласте в зоне перфорации трубы равно p_2 . В равновесии должно выполняться условие

$$p_2 = p_1 + \rho_2 g(h_1 + h_2), \quad (1)$$

здесь ρ_2 – плотность нефти.

Гидродинамический механизм работы УЭЦН следующий. В режиме «включено» происходит отбор нефти из межтрубного пространства с расходом q . Это приводит, одновременно, понижению уровня нефти h_1 и возникновению потока нефти из пласта в межтрубное пространство через зону перфорации. Объем q_1 притекающей из пласта нефти находим, используя закон Дарси в интегральной форме:

$$q_1 = \frac{(p_2 - p_1)}{\eta l} k S. \quad (2)$$

Здесь k – проницаемость пласта, S – площадь перфорации, l – характерный размер, на котором происходит перепад давления, η – вязкость нефти. При отборе объема q_1 нефти из пласта в зоне перфорации должно происходить его замещение за счет притока из более дальних зон пласта. При этом давление p_2 в зоне перфорации падает и характерное расстояние l меняется. При выключении УЭЦН происходит восстановление па-

раметров в пласте. Для учета этих процессов необходимо использовать уравнения динамики нефти в пласте, учитывающие запаздывание выравнивания давления при заданном постоянном давлении на контуре скважины. В случае, когда время работы УЭНЦ мало по сравнению с характерным временем изменения давления в пласте, то можно считать давление p_2 постоянным. В настоящей работе рассматривается этот случай. При учете большого числа циклов включения и выключения УЭНЦ указанные процессы в пласте необходимо учитывать.

Еще одним фактором, влияющим на процесс отбора и восстановление уровня нефти в межтрубном пространстве, является изменение давления p_1 в слое газа над ней. Это происходит при понижении уровня нефти h_1 , но также возможно и при выделении растворенного в нефти газа в процессе работы УЭНЦ. Для учета выделения газа необходимо использовать уравнения состояния смеси нефти с растворенным в ней газом [4], что значительно усложняет решение задачи и требует большого числа экспериментальных данных. К тому же, вообще говоря, необходимо учитывать индивидуальные особенности для каждой скважины. В данной работе учитывается изменение давления в газе только за счет понижения уровня h_1 в процессе отбора нефти. При этом считается, что процесс изотермический и имеет место равенство:

$$p_1 V_1 = p_{10} V_{10}. \quad (3)$$

Здесь p_{10} – давление и V_{10} – объем газа в равновесном состоянии до отбора нефти.

Дифференциальное уравнение для функции $h_1(t)$ составляется из условия, что разность объемного расхода q и притока q_1 нефти равно скорости изменения ее объема в межтрубном пространстве. С учетом площади поверхности нефть-газ в межтрубном пространстве S_1 , это уравнение имеет вид:

$$q - q_1 = -\frac{dh_1}{dt} S_1. \quad (4)$$

Решение этого уравнения с учетом выражений (1), (2) и условия (3) в безразмерном виде представлено на рис. 1.

Характерным временем работы УЭНЦ является час. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $q = 2 \text{ м}^3/\text{час}$, $k = 4 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$, $S = 19 \text{ м}^2$, $l = 1 \text{ м}$, $\eta = 0.54 \cdot 10^{-3} \text{ Па с}$, $p_{10} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $p_2 = 27 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$, $h_1 = 500 \text{ м}$, $h_2 = 500 \text{ м}$.

В режиме УЭНЦ «выключено» происходит восстановление уровня нефти в межтрубном пространстве от того значения, которое получается после ее отбора. Дифференциальное уравнение для изменения уровня $h_1(t)$ получается аналогичным образом, как и для предыдущего случая при условии $q = 0$ (нет отбора нефти). Решение уравнения представлено на рис. 2.

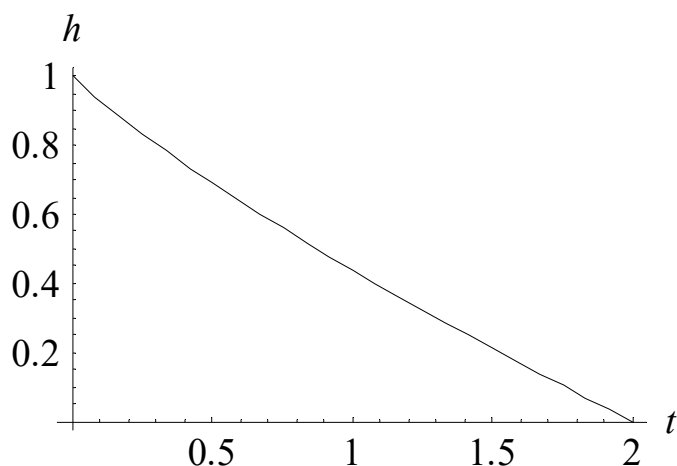


Рис. 1. График изменения уровня нефти в режиме УЭНЦ «включено»

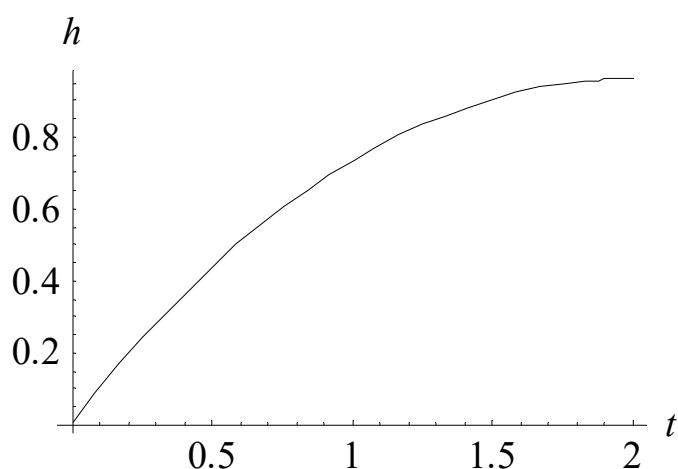


Рис. 2. График восстановления уровня нефти в режиме УЭНЦ «выключено»

Как видно из приведенных графиков изменения уровня нефти в межтрубном пространстве, время работы УЭНЦ в режимах «включено» и «выключено» оптимально. В первом случае происходит полный отбор жидкости из скважины, а во втором полное восстановление уровня.

Список литературы

1. URL: <https://www.crru.ru/dobicha.html>
2. Юнусов Р. Р., Павлов М. С., Соколов И. С., Босых О. Н. Перспективные проектные решения для разработки трудноизвлекаемых запасов нефти месторождений Западной Сибири // Геология и недропользование. 2022. № 1. С. 72–77.
3. Макеев А. А., Леонтьев С. А., Щелоков Д. В., Шай Е. Л., Мартынов С. И. Анализ показателей эксплуатации малодебитных скважин установками электроцентробежных насосов // Нефтяное хозяйство. 2022. № 4. С. 66–68.
4. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М. ; Ижевск, 2004. 696 с.

Аналитическое построение решений интегральных уравнений с линейными функционалами и параметрами

Николай Александрович Сидоров¹, Лев Раян Денисович Дрегля Сидоров²

^{1,2}Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

¹sidorovisu@gmail.com, ²lev.ryan.lev@gmail.com

Аннотация. Рассматривается интегрофункциональное уравнение типа Фредгольма с линейными функционалами и с малым параметром. Получены достаточные условия существования непрерывного решения. Дан способ построения решения как в регулярном случае, так и в нерегулярном. В регулярном случае решение строится в виде ряда Тейлора по степеням параметра. В нерегулярном случае решение строится в виде ряда Лорана по степеням параметра.

Ключевые слова: оператор Фредгольма, линейный функционал, ряд Лорана

Analytical construction of solutions of integral equations with linear functionals and parameters

Nikolay A.Sidorov¹, Lev Rayan D. Dreglya Sidorov²

^{1,2}Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

¹sidorovisu@gmail.com, ²lev.ryan.lev@gmail.com

Abstract. An integro-functional equation of the Fredholm type with linear functionals and with a small parameter is considered. Sufficient conditions for the existence of a continuous solution are obtained. A method is given for constructing a solution both in the regular case and in the irregular one. In the regular case, the solution is constructed as a Taylor series in powers of the parameter. In the irregular case, the solution is constructed as a Laurent series in powers of the parameter.

Keywords: Fredholm operator, linear functional, Laurent series

Введение

Рассмотрим линейное уравнение

$$Lx - \lambda Kx = f(t). \quad (1)$$

Линейные операторы L и K задаются формулами:

$$Lx = x(t) + \sum_{j=1}^n a_j(t) \gamma_{j,x}, Kx = \int_a^b K(t,s) x(s) ds.$$

Функции $a_j(t)$, $j=1,2,..,n$, $f(t)$ и ядро $K(t,s)$ являются непрерывными. Искомая функция $x(t)$ ищется в классе $C_{[a,b]}$. Линейные функцио-

налы $\gamma_{j,x}$, называемые в приложениях нагрузками, могут быть как локальными, т.е. $\gamma_{j,x} = x(t_j)$, так и интегральными: $\gamma_{j,x} = \int_a^b \gamma_j(s)x(s)ds$, где $\gamma_j(s)$ – кусочно-непрерывные.

В общем случае $\gamma_{j,x}$ – функционалы Римана-Стилтьеса, т.е. $\gamma_{j,x} = \int_a^b x(s)d\gamma_j(s)$, где $\gamma_j(s)$ – заданные функции ограниченной вариации.

Требуется построить решение уравнения (1) при $|\lambda| < r$, где $r = \left[\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds \right]^{-1}$.

Отметим, что интегральные уравнения с нагрузками продолжают привлекать внимание многих авторов. Например, см. библиографию [1]. В работе [2] рассмотрено нелинейное уравнение Вольтерра с нагрузками и бифуркационными параметрами. В работе [3] изучалась задача о точках бифуркации уравнения Гаммерштейна с нагрузками. При этом, как правило, детально изучались только уравнения с одной нагрузкой.

В данной работе на примере уравнения (1) указан подход к исследованию уравнений с любым конечным числом локальных и интегральных нагрузок.

1. Вывод системы уравнений для определения вектора нагрузок

Введем вектор-функцию $\bar{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))^T$ и вектор нагрузки $\bar{\gamma}, x = (\gamma_{1,x}, \dots, \gamma_{n,x})^T$.

Введем обратный оператор

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \int_a^b \left(\lambda K_1(t,s) + \lambda^2 K_2(t,s) + \dots + \lambda^n K_n(t,s) + \dots \right) ds,$$

где $K_1(t,s) \equiv K(t,s)$, $K_n(t,s) = \int_a^b K(t,z)K_{n-1}(z,s)dz$, $n = 2, 3, \dots$ – итерированные ядра,

$$|\lambda| < \left[\max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)|ds \right]^{-1}.$$

Тогда уравнение (1) сводится к уравнению

$$x(t) = (I - \lambda K)^{-1} f(t) + (\bar{\gamma}, x, (I - \lambda K)^{-1} \bar{a}(t)), \quad (2)$$

где $(I - \lambda K)^{-1} \bar{a}(t) = \bar{a}(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) \bar{a}(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(t,s) \bar{a}(s) ds + \dots$

Применив последовательно функционалы $\gamma_i, i=1, \dots, n$ к обеим частям уравнения (2), получим систему

$$[E - A(\lambda)]\bar{\gamma}, x = \bar{\gamma}, (I - \lambda K)^{-1} f \quad (3)$$

относительно вектора нагрузки.

Система (3) состоит из линейных алгебраических уравнений с параметром λ . Матрица $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots$ – аналитична по λ :

$$A_0 = [\gamma_i, a_j]_{i,j=1}^n,$$

$$A_1 = [\gamma_i, \int_a^b K(t, s) a_j(s) ds]_{i,j=1}^n,$$

...

$$A_n = [\gamma_i, \int_a^b K_n(t, s) a_j(s) ds]_{i,j=1}^n, n = 2, 3, \dots$$

Определив вектор $\bar{\gamma}, x$ из системы (3) и подставив в правую часть формулы (2), получим искомое непрерывное по t решение уравнения (1). Перейдем к решению системы (3) и соответствующих решений исходного уравнения (1).

Обратимся к вопросу разрешимости системы (3). При решении системы (3) возможен регулярный и нерегулярный случаи.

Случай 1 (регулярный)

Пусть $\det(E - A_0) \neq 0$. Тогда система (3) имеет в достаточно малой окрестности $|\lambda| < \rho$ единственное аналитическое решение и справедлива

Теорема 1. Пусть $\det[\delta_{ij} - \gamma_i, a_j]_{i,j=1}^n \neq 0$. Тогда существует $\rho > 0$ такое, что при $|\lambda| < \rho$ уравнение (1) имеет в классе $C_{[a,b]}$ единственное решение. Более того, это решение может при $|\lambda| < \rho$ быть построено методом неопределенных коэффициентов в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \lambda^n.$$

Доказательство проводится классическим методом малого параметра, см. [4], стр. 149-151.

Случай 2 (нерегулярный)

Пусть $\det(E - A_0) = 0$. Пусть при этом $\text{rank}(E - A_0) = n - 1$. Тогда существуют вектора $\bar{e}, \bar{e}^*$, такие, что $(E - A_0)\bar{e} = 0, (E - A_0^*)\bar{e}^* = 0$.

Пусть $(A_1 \bar{e}, \bar{e}^*) \neq 0$. Тогда имеет место такой результат

Теорема 2. Пусть $\det(E - A_0) = 0$, $\text{rank}(E - A_0) = n - 1$, $(E - A_0)\bar{e} = 0$, $(E - A_0^*)\bar{e}^* = 0$. Пусть $(A_1\bar{e}, \bar{e}^*) \neq 0$. Тогда уравнение (1) при $0 < |\lambda| < \rho$ имеет в классе $C[a, b]$ единственное решение при любой непрерывной функции $f(t)$. Более того, решение представимо в виде ряда Лорана

$$x(t) = \frac{x_{-1}(t)}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \lambda^n \quad (4)$$

с полюсом первого порядка.

Доказательство вытекает из известных результатов теории возмущений линейного оператора в нерегулярных случаях, см., например, гл. 9 в [5].

Пример

$$x(t) - x(1) = \lambda \int_0^1 t s x(s) ds + t^2 + 1.$$

Здесь $n=1, A_0 = e = e^* = 1$. $(A_1 e, e^*) = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \neq 0$, $Lx := x(t) - x(1)$, $\lambda Kx := \lambda \int_0^1 t s x(s) ds, f(t) := t^2 + 1$.

Следовательно условия теоремы 2 выполнены. При этом коэффициенты ряда Лорана (4) определяются из линейных уравнений:

$$x_{-1}(t) - x_{-1}(1) = 0,$$

$$x_0(t) - x_0(1) = \int_0^1 t s x_{-1}(s) ds + t^2 + 1,$$

$$x_n(t) - x_n(1) = \int_0^1 t s x_{n-1}(s) ds, n = 1, 2, \dots$$

с условиями

$$\int_0^1 s x_{-1}(s) ds + 2 = 0,$$

$$\int_0^1 x_{n-1}(s) ds = 0, n = 1, 2, \dots$$

Следовательно $x_{-1}(t) = c_{-1}$ с условием $c_{-1} \frac{1}{2} + 2 = 0$. Поэтому $x_{-1} = -4$. Далее,

$$x_0 = c_0 + t^2 + 1 + t(-2)$$

с условием

$$\int_0^1 (c_0 + t^2 + 1 - 2t) dt = 0.$$

Поэтому $x_0(t) = t^2 - 2t - \int_0^1 (t^2 + 1 - 2t) dt.$

Итак, уравнение в окрестности $0 < |\lambda| < \rho$ имеет решение с асимптотикой

$$x(t) = -\frac{4}{\lambda} + t^2 - 2t - \frac{1}{3} + O(|\lambda|).$$

Список литературы

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. М. : Наука, 2012.
2. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. Нелинейные уравнения Вольтерра с нагрузками и бифуркационными параметрами: теоремы существования и построение решений // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1654–1664.
3. Сидоров Н. А., Дрегла Сидоров Л. Р. Д. О точках бифуркации интегральных уравнений с нагрузками // Динамические системы и компьютерные науки (DYSC 2022) : материалы 4-й Международной научной конференции. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. С. 41–44.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решения нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969.

**Об одной нелокальной обратной краевой задаче
для уравнения с частными производными шестого порядка
с дополнительными интегральными условиями**

Араз Саламулла оглы Фараджев

Азербайджанский государственный педагогический университет,
Баку, Азербайджанская Республика
a.farajov@mail.ru

Аннотация. Исследована одна обратная краевая задача определения двух зависящих от времени коэффициентов для уравнения типа Буссинеска шестого порядка с нелокальными начальными и с дополнительными интегральными условиями. При естественных условиях согласования и гладкости на заданные функции доказывается теорема существования и единственности классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения типа Буссинеска, метод Фурье, классическое решение

**On a nonlocal inverse boundary value problem for a sixth-order
partial differential equation with additional integral conditions**

Araz S. Farajov

Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
a.farajov@mail.ru

Abstract. An inverse boundary value problem of determining two time-dependent coefficients for a sixth-order Boussinesq-type equation with nonlocal initial and additional integral conditions is studied. Under natural conditions of agreement and smoothness on given functions, we prove an existence and uniqueness theorem for the classical solution of the original problem.

Keywords: inverse boundary value problem, Boussinesq-type equations, Fourier method, classical solution

Введение

Уравнение Буссинеска с двойной дисперсией шестого порядка описывает движение волн на воде с поверхностным напряжением и рассмотрено в [1].

Разрешимости прямых краевых задач для уравнения типа Буссинеска шестого порядка, изучены в работах [2–4].

Разные обратные краевые задачи для уравнения типа Буссинеска шестого порядка, в которых вместе с решением дифференциального

уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения автором рассматривались в работах [5–8].

Отличие данной задачи состоит в том, что следует найти двух коэффициентов зависящих от времени в уравнении с дополнительными интегральными условиями на границе.

Рассмотрим уравнение [1]

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + u_{ttxxxx}(x,t) = \\ = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ и поставим для него обратную краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0) = \int_0^T P_1(t)u(x,t)dt + \phi(x), \quad u_t(x,0) = \int_0^T P_2(t)u(x,t)dt + \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничными условиями

$$u(0,t) = u_x(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительными условиями

$$U_i(u) \equiv u(x_i,t) + \int_0^1 q_i(x)u(x,t)dx = h_i(t) \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $x_i \in (0,1) (i=1,2; x_1 \neq x_2)$ – фиксированные числа, $f(x,t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $P_i(t)$, $q_i(x)$, $h_i(t)$ ($i=1,2$) – заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ – искомые функции.

Определение Классическим решением задачи (1)-(4) назовём тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на $[0, T]$;
- 3) уравнение (1) и условия (2)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Теперь для исследования задачи (1)-(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу: требуется определить тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(4), из (1)-(3) и

$$\begin{aligned} h_i''(t) - U_i(u_{xx}) - U_i(u_{ttxx}) + U_i(u_{ttxx}) + U_i(u_{ttxxxx}) = \\ = a(t)h_i(t) + b(t)h_i'(t) + U_i(f) \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (5)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in C(D_T)$, $\phi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1]$, $P_i(t)$, $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i=1,2$) $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), и выполняются условия согласования

$$h_i(0) = \int_0^T P_1(t)h_i(t)dt + U_i(\phi), \quad h_i'(0) = \int_0^T P_2(t)h_i(t)dt + U_i(\psi) \quad (i=1,2)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

А) Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(4) является и решением задачи (1)-(3), (5);

В) Каждое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (5) такое, что

$$\left(T \|P_2(t)\|_{C[0,T]} + \|P_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1,$$

является классическим решением задачи (1)-(4).

Предположим, что данные задачи (1)- (3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\phi(x) \in C^4[0,1]$, $\phi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$, $\phi(0) = 0$, $\phi'(1) = 0$, $\phi''(0) = 0$, $\phi'''(1) = 0$, $\phi^{(4)}(0) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\psi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(1) = 0$, $\psi''(0) = 0$, $\psi'''(1) = 0$, $\psi^{(4)}(0) = 0$.
3. $f(x,t) \in C(D_T)$, $f_x(x,t) \in L_2(D_T)$, $f(0,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $h_i(t) \in C^2[0,T]$ $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i=1,2$), $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1-4. Тогда при достаточно малых значениях $T + \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(3), (5) имеет единственное решение.

Далее на основе теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и

$$h_i(0) = \int_0^T P_1(t)h_i(t)dt + U_i(\phi), \quad h_i'(0) = \int_0^T P_2(t)h_i(t)dt + U_i(\psi) \quad (i=1,2).$$

Тогда при достаточно малых значениях $T + \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение.

Список литературы

1. Schneider G., Wayne C. E. Kawahara dynamics in dispersive media // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2001. Vol. 152. P. 384–394.
2. Фараджев А. С. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными шестого порядка с нелокальными условиями // *Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 1–4 декабря)*. Пенза, 2021. С. 57–63.
3. Farajov A. S. On a boundary value problem for the sixth order boussinesq equation with integral conditions // *Proceedings of the 8th international conference on control and optimization with industrial applications (COIA 2022)*. 2022. Vol. II. P. 165–168.
4. Wang Y., Mu C. Blow-up and scattering of solution for a generalized Boussinesq equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2007. Vol. 188, № 2. P. 1131–1141.
5. Farajov A. S. On a solvability of the nonlinear inverse boundary value problem for the boussinesq equation // *Advanced Mathematical Models & Applications*. 2022. Vol. 7, № 2. P. 241–248.
6. Фараджев А. С., Мегралиев Я. Т. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени коэффициентов и источника в уравнении движения волн с поверхностным напряжением // *Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVI Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. Пенза, 2022*. С. 25–29.
7. Farajov A. S. On a solvability of the nonlinear inverse boundary value problem for the boussinesq equation // *Advanced Mathematical Models & Applications*. 2022. Vol. 7, № 2. P. 241–248.
8. Фараджев А. С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода // *Прикладная математика & Физика*. 2022. Т. 54, № 3. С. 141–153.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 378:004

Об одной двухпараметрической нелинейной краевой задаче, возникающей в теории распространения электромагнитных волн

**Валерия Юрьевна Мартынова¹, Станислав Вячеславович Тихов²,
Олег Владимирович Кондырев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹lynxbax@mail.ru, ²tik.stanislav2015@yandex.ru, ³kow20002204@mail.ru

Аннотация. Рассматривается двухпараметрическая нелинейная краевая задача – назовем ее задачей P ; причем лишь один из параметров данной задачи является спектральным, а другой выбирается исходя из некоторого условия. Задача описывает распространение двух электромагнитных ТЕ-волн в плоском экранированном диэлектрическом анизотропном волноводе, связанных условием на одной из границ волновода. Описан численный метод обсуждаемой задачи, а также представлены численные результаты.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, двухпараметрическая задача, распространение электромагнитных волн, ТЕ-волны, плоский диэлектрический волновод, нелинейная среда

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-00020, <https://rscf.ru/project/22-71-00020/>).

On one two-parameter nonlinear boundary problem arising in the electromagnetic wave propagation theory

Valeriya Yu. Martynova¹, Stanislav V. Tikhov², Oleg V. Kondyrev³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹lynxbax@mail.ru, ²tik.stanislav2015@yandex.ru, ³kow20002204@mail.ru

Abstract. The two-parameter nonlinear boundary problem which is called problem P is under consideration; only one of the parameters is spectral, whereas the other is chosen taking into account some condition. The problem describes two electromagnetic TE waves propagating in a shielded planar dielectric anisotropic waveguide and bounding by a condition at one of the boundaries. The description of a numerical method is presented as well as numerical results.

Keywords: nonlinear boundary problem, two-parameter problem, electromagnetic wave propagation, TE-waves, planar dielectric waveguide, nonlinear medium

Acknowledgments: This study is supported by the Russian Science Foundation under grant 22-71-00020, <https://rscf.ru/en/project/22-71-00020/>.

Введение

Исследование собственных мод нелинейных цилиндрических и планарных волноводов [1] привело к появлению новых постановок задач и математических методов. В частности, интерес представляет новый класс двухпараметрических нелинейных задач. В таких задачах только один из параметров является спектральным, а второй выбирается с учетом некоторого условия. К этому классу относятся задачи о распространении симметричных гибридных ТЕ-ТМ волн и гибридных ТЕ-ТЕ волн в плоском нелинейном волноводе [2, 3], азимутально-симметричных гибридных ТЕ-ТМ волн в нелинейном цилиндрическом волноводе [4].

В данной работе рассматривается задача о распространении двух ТЕ-волн в экранированном плоском нелинейном волноводе, связанных условием на одной из границ волновода, возникающая при исследовании гибридных ТЕ-ТЕ волн [3], распространяющихся в такой же структуре. Эта задача относится к описанному выше новому классу нелинейных двухпараметрических задач.

1. Постановка задачи

Начнем с введения некоторых обозначений. Пусть $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где $h > 0$ есть известная постоянная, λ – вещественный параметр, $A, a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ – положительные постоянные. Всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1'' = -(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2) u_1, \\ u_2'' = -(a_2 - \lambda + \alpha_2 u_2^2) u_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $u_1 \equiv u_1(x)$, $u_2 \equiv u_2(x)$, $x \in \bar{I}$, с краевыми условиями

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$u_1'|_{x=0} = A_1, \quad u_2'|_{x=0} = A_2, \quad (3)$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_2|_{x=h} = 0; \quad (4)$$

здесь $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ есть неизвестные величины, связанные соотношением

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2. \quad (5)$$

Определение. Задача P состоит в нахождении таких троек чисел $(\lambda, A_1, A_2) = (\hat{\lambda}, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ для фиксированного значения A , при которых существуют функции $v_1, v_2 \in C^2(\bar{I})$, удовлетворяющие системе уравнений (1) и условиям (2)–(5).

2. Численные результаты

Рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальными условиями (2), (3). Можно доказать, что эта задача глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$ а ее решение $u_1 \equiv u_1(x; \lambda, A_1)$, $u_2 \equiv u_2(x; \lambda, A_2)$ непрерывно зависит от $(x; \lambda, A_1) \in \bar{I} \times (-\infty, +\infty) \times (0, A)$.

Используя условие (4), получаем систему характеристических уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1(\lambda, A_1) \equiv u_1(h; \lambda, A_1) = 0, \\ \Delta_2(\lambda, A_2) \equiv u_2(h; \lambda, A_2) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_1(h; \lambda, A_1)$, $u_2(h; \lambda, A_2)$ получаются из решения задачи Коши (1)–(3).

Пусть τ_1 , τ_2 – шаги разбиения, λ_l, λ_h – фиксированные числа. Введем сетку

$$\left\{ (\lambda^i, A_1^k) : \lambda^i = \lambda_l + i\tau_1, A_1^k = k\tau_2, i = \overline{0, n}, \tau_1 = \frac{\lambda_h - \lambda_l}{n}, j = \overline{1, m-1}, \tau_2 = \frac{A}{m} \right\}.$$

Решая задачу Коши (1)–(3) для каждого узла сетки, находим решения $u_1(h; \lambda^i, A_1^k)$, $u_2(h; \lambda^i, A_1^k)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m-1}$. Так как решения непрерывно зависят от λ, A_1 , то, если $\Delta_1(\lambda^i, A_1^k) * \Delta_1(\lambda^i, A_1^{k+1}) \leq 0$, то существует точка $(\lambda^i, \hat{A}_1)$, где $\hat{A}_1 \in (A_1^k, A_1^{k+1})$, такая, что $\Delta_1(\lambda^i, \hat{A}_1) = 0$ и если $\Delta_1(\lambda^i, A_1^k) * \Delta_1(\lambda^{i+1}, A_1^k) \leq 0$, то существует точка $(\hat{\lambda}, A_1^k)$, где $\hat{\lambda} \in (\lambda^i, \lambda^{i+1})$, такая, что $\Delta_1(\hat{\lambda}, A_1^k) = 0$. В итоге получим множество решений (λ^r, A_1^r) уравнения $\Delta_1(\lambda, A_1) = 0$, представленное в виде синей кривой на плоскости $OA_1\lambda$ на рис. 1.

Применяя тот же подход ко второму уравнению системы (6), получаем множество решений уравнения $\Delta_2(\lambda, A_2) = 0$, представленное в виде зеленой кривой на рис. 1. Зависимость $\lambda(A_1)$ называется дисперсионной кривой.

На следующем шаге находим точки пересечения кривых (красные круги на рис. 1). Эти точки являются приближенными решениями задачи P .

В вычислениях, использовались следующие параметры задачи: $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $h = 6$, $A = 4$, $\alpha_1 = 1 * 10^{-1}$, $\alpha_2 = 1 * 10^{-2}$.

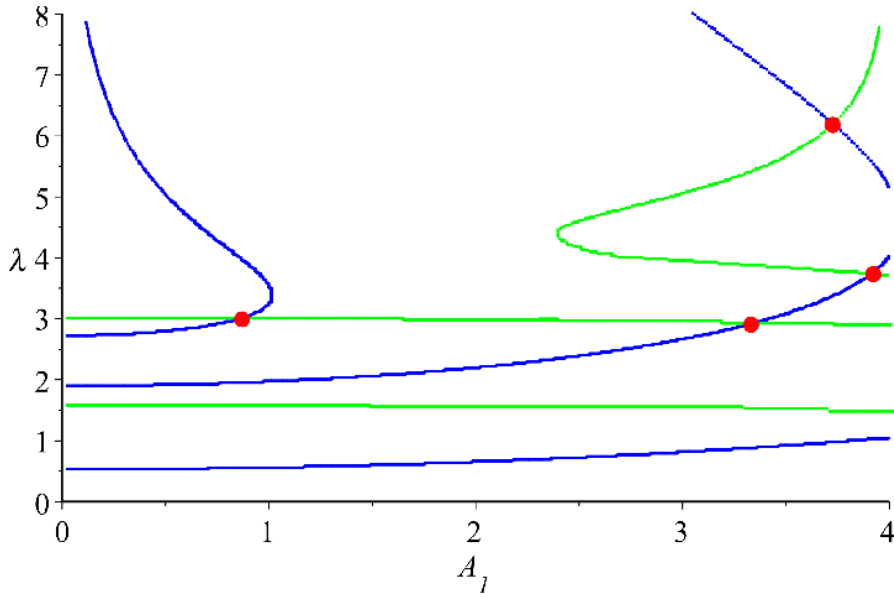


Рис. 1. Дисперсионные кривые и решения задачи P (красные круги)

3. Физическое содержание задачи

Пусть две электромагнитные ТЕ-волны $(\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j)e^{-i\omega t}$, $j=1,2$, распространяются в плоском экранированном волноводе $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ вдоль его границ y и z , соответственно, где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0, E_{1y}(x)e^{i\gamma z}, 0)^T, & \mathbf{H}_1 &= (H_{1x}(x)e^{i\gamma z}, 0, H_{1z}(x)e^{i\gamma z})^T, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, 0, E_{2z}(x)e^{i\gamma y})^T, & \mathbf{H}_2 &= (H_{2x}(x)e^{i\gamma y}, H_{2y}(x)e^{i\gamma y}, 0)^T, \end{aligned}$$

есть комплексные амплитуды, ω – круговая частота, γ – неизвестная постоянная распространения. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ имеет вид

$$\epsilon = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 + \bar{\alpha}_1 E_{1y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 + \bar{\alpha}_2 E_{2z}^2 \end{pmatrix},$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 > 0$ – константы, элемент $*$ не влияет на распространение волны.

Комплексные амплитуды $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ удовлетворяют уравнениям Максвелла $\text{rot} \mathbf{H}_j = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}_j$, $\text{rot} \mathbf{E}_j = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_j$, $j=1,2$, где ϵ_0, μ_0 есть магнитная проницаемость и диэлектрическая проницаемость вакуума. Компоненты E_{y1}, E_{z2} обращаются в нуль при $x=0$, $x=h$. Также мы

считаем фиксированным значение $|\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2|_{x=0} = B$; можно показать, что это требование эквивалентно условию

$$(\omega\mu_0)^{-2} \left((E'_{1y})^2 + (E'_{2z})^2 \right) \Big|_{x=0} = B^2.$$

Подставляя амплитуды $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$, $j=1,2$ в уравнения Максвелла и используя обозначения $a_j = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_j$, $\lambda = \gamma^2$, $\alpha_j = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{\alpha}_j$ и $u_1 = E_y$, $u_2 = E_z$, приходим к системе уравнений (1); из условий, накладываемых на электромагнитную волну, получаются условия (2), (3), (4). Пусть $E'_{1y}|_{x=0} = A_1$ и $E'_{2z}|_{x=0} = A_2$, $A^2 = (\omega\mu_0)^2 B^2$; тогда из связи между значениями первых производных касательных компонент электрических полей на границе $x=0$ получаем условие (5), необходимое для существования нетривиального решения задачи.

Заключение

В работе предложен численный метод решения нелинейной двухпараметрической задачи, в которой один из параметров является спектральным, а второй подбирается с учетом нетривиальности решения задачи. Как показано в разделе 3, рассматриваемая задача отвечает задаче о распространении двух электромагнитных ТЕ-волн в плоском анизотропном экранированном волноводе, при этом одна из волн распространяется вдоль границы y , а вторая вдоль границы z волновода Σ . Также присутствует связь между ТЕ-волнами, так как фиксируется значение модуля суммы магнитных составляющих изучаемых полей. В работе представлены численные результаты, полученные предложенным численным методом, которые демонстрируют приближенное решение задачи P .

Список литературы

1. Eleonskii P. N., Oganess'yants L. G., Silin V. P. Cylindric Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35, № 1. P. 44–47.
2. Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu., Kurseeva V. Yu. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguides // Applicable Analysis. 2019. Vol. 98, № 3. P. 483–498.
3. Мартынова В. Ю. Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 27–45.
4. Smirnov Yu. G., Smolkin E. Yu. On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium // Wave Motion. 2018. Vol. 77. P. 77–90.

Оптимизация режимов технологической вибрации изделий приборостроения

Дмитрий Владимирович Артамонов¹, Александр Николаевич Литвинов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹dmitrartamonov@yandex.ru, ²allitvinov48@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы моделирования и оптимизации режимов технологической вибрации методом качающейся частоты для изделий приборостроения.

Ключевые слова: блоки, изделия, режимы, технологическая вибрация, моделирование, оптимизация

Optimization of technological vibration modes of instrument-making products

Dmitriy V. Artamonov¹, Aleksandr N. Litvinov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹dmitrartamonov@yandex.ru, ²allitvinov48@mail.ru

Abstract. The issues of modeling and optimization of technological vibration modes by the method of swinging frequency for instrument-making products are considered.

Keywords: blocks, products, modes, technological vibration, modeling, optimization

Повышение качества и надежности блоков и изделий приборостроения является актуальной проблемой на современном этапе развития. Значительная часть отказов в рассматриваемой аппаратуре имеет механическое происхождение и проявляется при воздействии на изделие внешних вибрационных нагрузок [1, 2].

Установлено, что между отказами в эксплуатации и конструкторско-технологическими дефектами существует прямая взаимосвязь. Одним из способов повышения надежности изделий является снижение интенсивности отказов в начальный период приработки. Это обеспечивается введением специальных технологических тренировок, которые часто называют отбраковочными испытаниями [3]. Одним из видов тренировки является технологическая вибрация.

Распространенным видом технологической вибрации является гармоническая вибрация с переменной (качающейся) частотой в заданном частотном диапазоне. Недостатком этого метода является то, что

существуют поддиапазоны частот, в которых эффективность испытаний мала, и поддиапазоны, в которых их эффективность велика, т.к. элементы изделия имеют наибольшую нагруженность именно в резонансных областях. В связи с этим с целью сокращения времени испытаний и повышения их эффективности целесообразно применять ускоренные испытания методом качающейся частоты, основанные на проведении испытаний в наиболее информативных частотных диапазонах.

Рассмотрим элемент конструкции, динамическое поведение которого описывается одномассовой системой. Связь с основанием характеризуется жесткостью c и коэффициентом демпфирования η . Основание совершает гармонические колебания с ускорением $a_0(t)$. Под вязкоупругой связью, характеризуемой параметрами c и η , понимается паяное, клеевое, резьбовое или другие соединения, при помощи которых элемент (прибор) крепится к основанию [4].

Относительное перемещение $u(t)$ массы конструкции M в направлении вибрации удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega_0^2 u = -\bar{a}_0(t), \quad (1)$$

где $\varepsilon = \eta/2M$ – относительный параметр, характеризующий демпфирование; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}}$ – собственная круговая частота колебаний системы (c^{-1}); точки над функцией $u(t)$ обозначают дифференцирование по времени t .

Наиболее общим решением задачи о вынужденных колебаниях является решение в комплексной форме, поэтому внешнее воздействие представим в виде

$$\bar{a}_0(t) = a_0 \exp[-i(\omega t + \alpha_0)], \quad (2)$$

где a_0 – амплитуда ускорения основания, которая считается постоянной; ω – частота вынужденных колебаний; α_0 – начальная фаза.

Пусть система подвергается воздействию гармонической вибрации с переменной частотой $\omega(t)$ в диапазоне частот $[\omega_1, \omega_2]$ при прохождении частотного диапазона в обе стороны. Считаем, что собственная частота ω_0 системы, лежит в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, скорость прохождения частотного диапазона является произвольной. В этом случае следует рассматривать неустановившиеся вынужденные колебания.

Решение уравнения (1) ищем с учетом того, что $\omega = \omega(t)$ и представим его через интеграл Дюамеля:

$$u(t) = u_1(t) - \frac{1}{\omega_\varepsilon} \int_0^t a_0 \exp[-\varepsilon(t - \tau) - i(\omega(t)t + \alpha_0)] \sin \omega_\varepsilon(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $u_1(t)$ – решение однородного уравнения (1) соответствующее свободным колебаниям системы, вызванным воздействием вибрации с начальной частотой диапазона ω_1 в момент времени $t = 0$:

$$u_1(t) = \exp(-\varepsilon t) \left[u_0 \cos \omega_\varepsilon t + \frac{\varepsilon u_0 + \dot{u}_0}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right]. \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения: $i = \sqrt{-1}$; $\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$ – частота свободных колебаний диссипативной системы; u_0 , $\dot{u}_0$ – перемещение и скорость движения массы в начальный момент времени t_1 , соответствующий начальной частоте диапазона ω_1 .

Считаем, что амплитуда ускорения вынужденных колебаний a_0 является постоянной в диапазоне, а частота изменяется по линейному закону со скоростью V :

$$\omega(t) = \omega_1 + Vt, \quad (5)$$

а решение (3) в комплексной форме записывается в виде

$$u(t) = u_1(t) - \frac{a_0}{\omega_\varepsilon} \int_0^t \exp \left[-\varepsilon(t - \tau) - i \left(\omega_1 + \frac{1}{2} V \tau \right) \tau + i \alpha_0 \right] \sin \omega_\varepsilon(t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Переходя от тригонометрической функции в (6) к показательным функциям комплексного переменного, окончательно получим:

$$u(t) = u_1 - U_*(t) \exp \left[-i \left(\frac{1}{2} V t^2 + \omega_1 t + \alpha_0 \right) \right]. \quad (7)$$

Здесь комплексная амплитуда $U_*(t)$ определяется выражением

$$U_*(t) = \frac{a_0(i-1)}{2\omega_\varepsilon\sqrt{V}} \left[w(x) + w(y) - w(x_0) \exp(x_0^2 - x^2) - w(y_0) \exp(y_0^2 - y^2) \right],$$

где введены новые комплексные переменные

$$x = \frac{i-1}{2\sqrt{V}} (V\tau + \omega_1 + \omega_\varepsilon + i\varepsilon),$$

$$y = \frac{1-i}{2\sqrt{V}} (V\tau + \omega_1 - \omega_\varepsilon + i\varepsilon)$$

а x_0 и y_0 соответствуют значениям x и y при $\tau = 0$; комплексные функции

w определяются выражением $w(z) = \exp(-z^2) \int_0^z \exp(z^2) dz$ при z , принимающем значения x, y, x_0, y_0 .

Для удобства расчета введем следующие безразмерные параметры:
 $\xi_0 = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_1 + Vt}{\omega_0}$ – относительная мгновенная частота вынужденных колебаний;
 $\xi_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ – относительная частота, соответствующая $t = 0$;
 $k = \frac{\omega_0^2}{2\pi V} = \frac{\omega_0}{TV}$ – параметр, характеризующий относительное время, необходимое для достижения частоты ω_0 при заданной скорости V изменения частоты, где $T = \omega_0/2\pi$ – период вынужденных колебаний;
 $\lambda_0 = \omega_0/\varepsilon = 2Q$ – относительный параметр, характеризующий добротность системы на собственной частоте.

Окончательно для амплитуды перемещения системы, которая является огибающей колебательного процесса, получим следующее выражение:

$$u(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} Q |\bar{u}_1 + \bar{u}_*|, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(t) &= \frac{(1 - \xi_1^2)Q - i\xi_1}{(1 - \xi_1^2)Q^2 + \xi_1^2} \exp(-\varepsilon t) \times \\ &\times \exp[-i(\omega_1 t_1 + \alpha_0)] \cdot \left[\cos \omega_\varepsilon t + \left(\frac{1}{2} \lambda^{-1} - i\xi_1 \right) \sin \omega_\varepsilon t \right]; \\ \bar{u}_*(t) &= \frac{h(i-1)}{\sqrt{1 - \lambda_0^{-2}}} \left[w(x) + w(y) - w(x_0) \exp(x_0^2 - x^2) - \right. \\ &\left. - w(y_0) \exp(y_0^2 - y^2) \right] \exp \left[-i \left(\frac{1}{2} V t^2 + \omega_1 t \right) + \alpha_0 \right]. \end{aligned}$$

Введем коэффициент динамичности процесса:

$$\beta_n = \frac{u(t)}{a_0/\omega_0^2} = Q |\bar{u}_1 + \bar{u}_*|, \quad (9)$$

который характеризует динамичность системы при воздействии вибрации с переменной частотой.

Дополнительно введем понятие относительного коэффициента динамичности χ , равного отношению коэффициента динамичности при нестационарном процессе β_n к максимальному коэффициенту динамично-

сти при резонансе для установившегося процесса $\beta_{\max}$ вынужденных колебаний. Из формулы (9) получим, что

$$\chi = \frac{\beta_H}{\beta_{\max}} = |\bar{u}_1 + \bar{u}_*|. \quad (10)$$

Таким образом, относительный коэффициент динамичности χ является сравнительной характеристикой установившегося и нестационарного процессов вынужденных колебаний исследуемой динамической системы.

Если в выражении (10) пренебречь функцией u_1 , описывающей затухающие колебания, то получим:

$$\chi = |\bar{u}_*| = \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{1-\lambda_0^{-2}}} |w(x) + w(y) - w(x_0)\exp(x_0^2 - x^2) - w(y_0)\exp(y_0^2 - y^2)|. \quad (11)$$

Анализ параметров и функций, входящих в выражение для $\bar{u}_*(t)$, показывает, что эти функции являются убывающими, а $w(x_0)$ и $w(y_0)$ характеризуют свободные затухающие колебания системы и их влияние на χ вблизи резонансной частоты является незначительным. Пренебрегая этими членами, получим еще одно приближенное выражение для относительного коэффициента динамичности

$$\tilde{\chi} = \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{1-\lambda_0^{-2}}} |w(x) + w(y)|. \quad (12)$$

Если для исследуемой системы параметр $\lambda_0 \geq 10$, что соответствует добротности $Q \geq 5$, то с достаточной степенью точности можно полагать $\sqrt{1-\lambda_0^{-2}} = 1$.

Рассмотрим случай убывания частоты в заданном диапазоне частот, что соответствует прохождению частотного диапазона $[\omega_1, \omega_2]$ методом качающейся частоты в обратном направлении. За исходную принимаем частоту ω_2 . в произвольный момент времени мгновенная частота вынужденных колебаний будет равна $\omega(t) = \omega_2 - V(t)$. В этом случае процедура решения уравнения (1) является аналогичной предыдущей. Опуская все промежуточные выкладки, представим решение уравнения в виде аналогичном (7).

Относительный коэффициент динамичности в этом случае определяется аналогично (11), в котором при выражении функций $\bar{u}_2$ и $\bar{u}_*$ сле-

дует произвести замену ξ_1 на $\xi_2 = \omega_2/\omega_0$; t_1 на t_2 , соответствующее моменту времени, начиная с которого частота убывает.

Для исследования влияния скорости изменения частоты были проведены численные расчеты относительного коэффициента динамичности χ . Безразмерные параметры системы менялись в широких пределах, охватывающих практически все возможные варианты, встречающиеся в электромеханической и радиоэлектронной аппаратуре: $\lambda_0=10...100$ характеризует добротность системы; $k=10... \infty$ характеризует скорость изменения частоты. Увеличение параметра λ_0 соответствует уменьшению демпфирования в системе, уменьшение параметра k соответствует возрастанию скорости прохождения частотного диапазона.

Анализ полученных результатов показывает, что при прямом прохождении частотного диапазона происходит "деформирование" кривой относительного коэффициента динамичности. При этом максимум коэффициента χ , а, следовательно, и амплитуды перемещения массы модели, смещается в область более высоких частот и происходит расширение резонансной зоны, охватываемой кривой $\chi(\xi_0)$. При увеличении скорости прохождения диапазона происходит уменьшение максимального значения относительного коэффициента динамичности χ по сравнению с установившимися вынужденными колебаниями.

На рис. 1а приведены зависимости относительной мгновенной частоты ξ_0 , на которой достигается резонанс системы, от скорости прохождения диапазона частот (k) в прямом направлении при различных значениях параметра λ_0 . Из анализа кривых следует, что при увеличении скорости возрастает смещение резонанса в область более высоких частот, чем выше демпфирующие свойства системы, тем меньше это смещение.

На рис. 1б приведены зависимости максимальных значений относительного коэффициента динамичности $\max \chi$ от параметра k для различных значений λ_0 . Полученные зависимости показывают, что при увеличении параметра λ_0 , что соответствует уменьшению демпфирования в системе, происходит уменьшение величины максимального значения относительного коэффициента динамичности $\max \chi$. При анализе этих кривых необходимо соблюдать осторожность, т.к. при вычислении фактического коэффициента динамичности β_n при заданной скорости необходимо относительный коэффициент χ умножить на соответствующий максимальный коэффициент динамичности при установившихся колебаниях на частоте ω_0 , т.е. $\beta_n = \max \beta \chi = Q \chi$.

Проведенные исследования показали, что отклонение резонансной частоты от частоты собственных колебаний ω_0 увеличивается при возрастании скорости и может достигать 15...27 %.

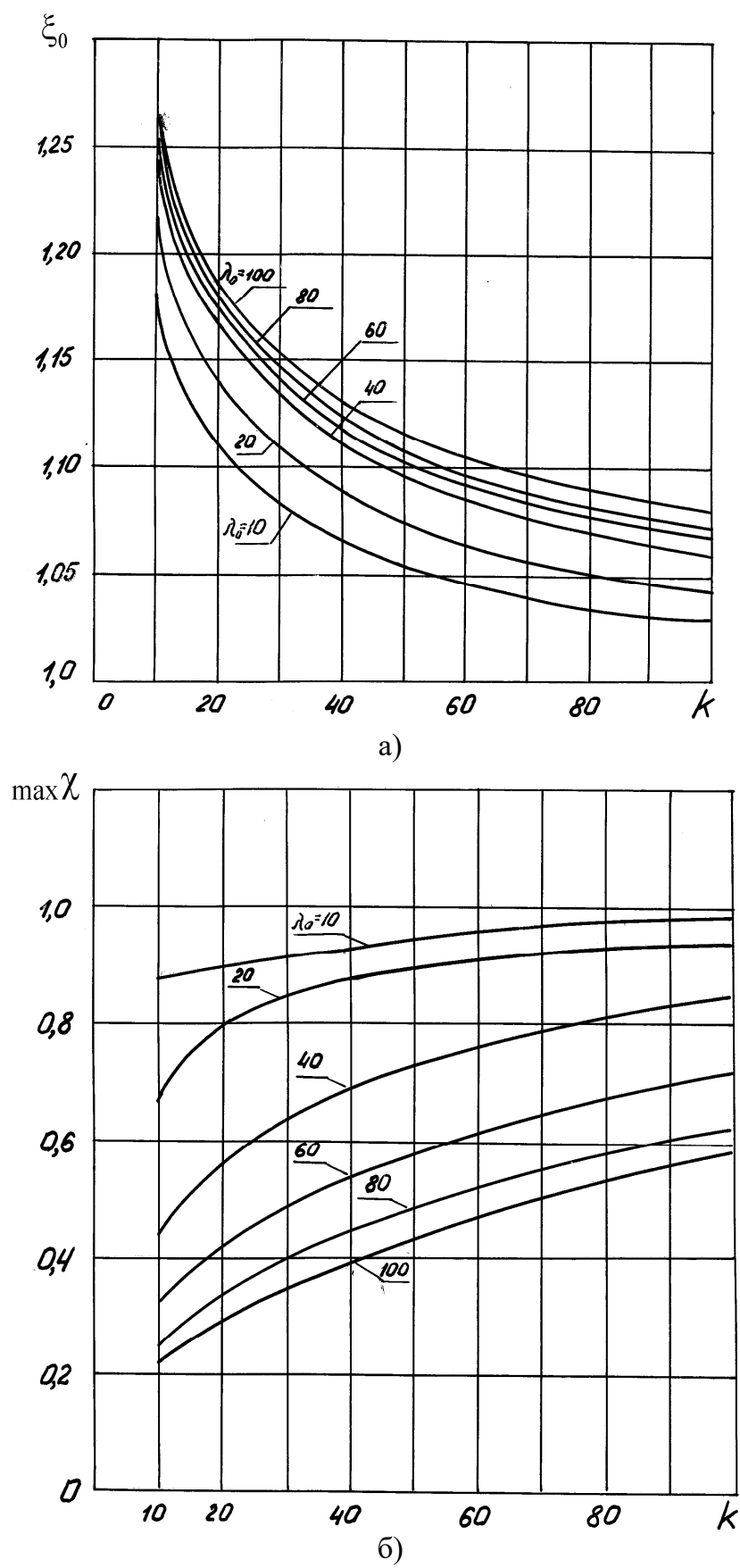


Рис. 1. Зависимости ξ_0 и $\max \chi$ от параметра k при прохождении частотного диапазона в прямом направлении

При совершении полного цикла изменения частоты в заданном диапазоне в системе дважды возбуждается резонанс на частотах, лежащих выше и ниже собственной частоты системы. Смещение резонансных частот и «деформирование» кривой относительного коэффициента динамичности приводит к тому, что существенно расширяется резонансная зона, которая является наиболее информативной с точки зрения обнаружения и развития скрытых дефектов.

Из представленных результатов следует, что в рассматриваемом диапазоне изменения скоростей наиболее информативным является диапазон частот $(0,5 \dots 1,5) \omega_0$. При уменьшении скорости изменения частоты диапазон «качания» можно сужать. Например, при скорости, соответствующей $k = 100$ для системы, характеризуемой параметром $\lambda_0 = 60$, диапазон можно принимать равным $(0,7 \dots 1,35) \omega_0$, т.к. вне этого диапазона относительный коэффициент динамичности $\chi < 0,1$.

Полученные результаты можно распространить и на более сложные динамические модели конструкций в виде многомассовых систем, балок с сосредоточенными массами [3-5]. Для этого необходимо осуществить переход от соответствующей системы с распределенными параметрами к эквивалентной ей одномассовой модели. Проведенный анализ остается справедливым для указанных моделей с распределенными параметрами при воздействии на них вибрации методом качающейся частоты в зоне основной (низшей) собственной частоты системы.

Результаты представленных исследований позволяют оптимизировать режимы технологической вибрации приборов, что приводит к существенному снижению времени технологического процесса изготовления изделий, их стоимости при увеличении надежности. Это имеет актуальное значение в современных условиях проведения работ по импортозамещению изделий приборостроения различного назначения.

Список литературы

- 1 Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М. : Стройиздат, 1982. 352 с.
- 2 Ленк А., Ренитц Ю. Механические испытания приборов и аппаратов. М. : Мир, 1976. 270 с.
- 3 Литвинов А. Н., Иофин А. А., Баннов В. Я. Выбор режимов технологической вибрации приборов в процессе производства // Радиовысотометрия-2010 : сб. тр. III Всерос. науч.-техн. конф. Екатеринбург : Форт Диалог-Исеть, 2010. С. 98–102.
- 4 Кузьмин Э. Н. Обеспечение виброустойчивости оборудования и аппаратуры. Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2003. 320 с.
- 5 Ананьев И. В., Колбин И. М., Серебрянский Н. П. Динамика конструкций летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1972. 406 с.

Исследование влияния различных aberrаций волнового фронта на искажение интенсивности вихревых пучков

Максим Игоревич Помещиков

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия
m.pomeshchikov@mail.ru

Аннотация. Определение порядка вихревого пучка является важной задачей в оптике. Исследуется воздействие различных типов aberrаций на вихревые пучки с целью решения данной задачи.

Ключевые слова: aberrация, вихревой пучок, полиномы Цернике

Investigation of the effect of various wavefront aberrations on intensity distortion of vortex beams

Maksim I. Pomeshchikov

Samara National Research University, Samara, Russia
m.pomeshchikov@mail.ru

Abstract. Determining the order of a vortex beam is an important task in optics. The effect of various types of aberrations on vortex beams is studied in order to solve this problem.

Keywords: aberrations, vortex beam, Zernike polynomials

Введение

Оптические вихревые пучки – лазерные пучки особой структуры, специальные свойства которых активно изучаются несколько десятилетий. Самое важное среди их особых свойств – наличие орбитального углового момента [1], который определяется порядком вихревого пучка. Отличительной особенностью вихревых пучков также является наличие особых точек, в которых фаза не определена, а амплитуда равна нулю. Вихревые пучки эффективно применяются в различных областях, таких как оптическая передача информации [2], оптические ловушки и манипулирование [3], зондирование [4] и другие. Таким образом, разработка простых и удобных методов для определения характеристик вихревых пучков является актуальной задачей.

Теория

Одним из способов определения порядка вихревого пучка является добавление к нему определенной aberrации и исследование результиру-

ющей интенсивности волнового фронта. Аберрации часто представляются в терминах функций Цернике.

Многочлены Цернике – последовательность функций в полярных координатах (ρ, φ) , являющихся ортогональными на единичном круге.

Полиномы определяются следующим образом:

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} R_n^m(\rho) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases},$$

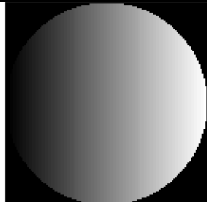
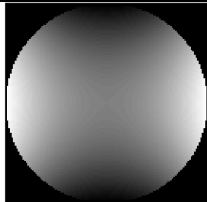
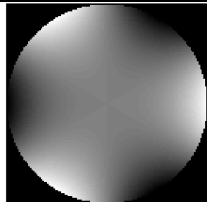
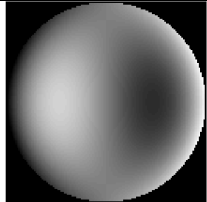
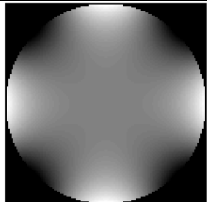
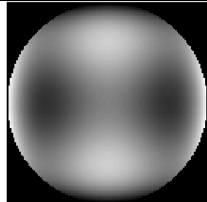
где $R_n^m(\rho)$ – радиальный многочлен Цернике, определяемый как

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}.$$

Некоторые функции Цернике, их визуализация и общепринятые названия соответствующих им аберраций приведены в табл. 1.

Таблица 1

Визуализация функций некоторых Цернике

Функция Цернике	$Z_1^1(\rho, \varphi)$	$Z_2^2(\rho, \varphi)$	$Z_3^3(\rho, \varphi)$
Название аберрации	Tilt	Astigmatism	Trefoil
Визуализация			
Функция Цернике	$Z_3^1(\rho, \varphi)$	$Z_4^4(\rho, \varphi)$	$Z_4^2(\rho, \varphi)$
Название аберрации	Coma	Quadrofoil	2 th order astigmatism
Визуализация			

Исследование

Оптический вихревой пучок задается формулой:

$$f(\rho, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r^k \exp(ik\varphi), \quad (1)$$

где k – порядок вихря, а σ – радиус Гауссова пучка.

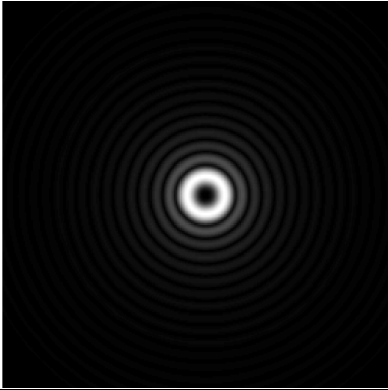
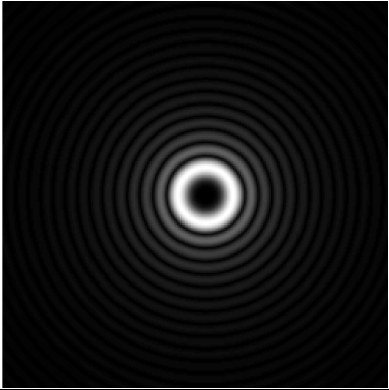
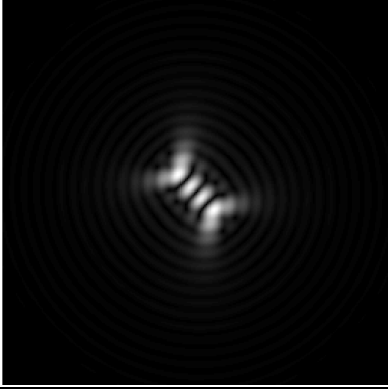
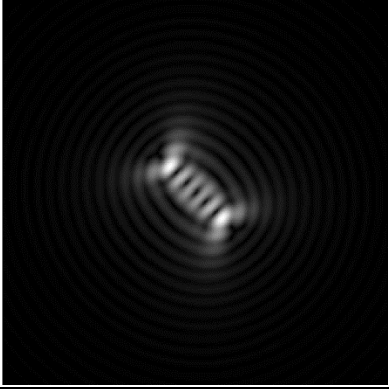
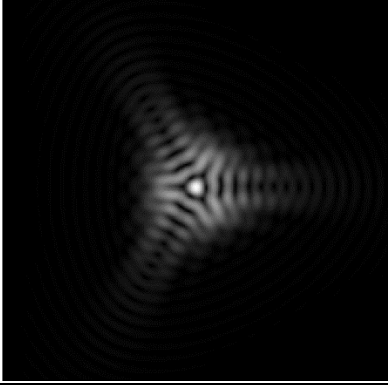
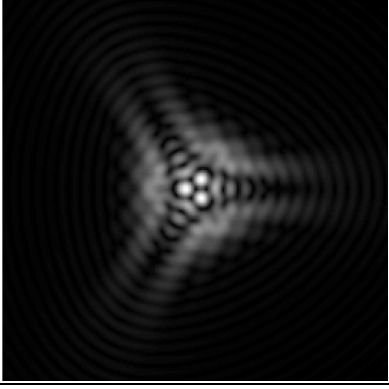
Воздействие различных aberrаций на вихревой пучок может быть смоделировано умножением формулы (1) на выражение вида $\exp(i\alpha Z_n^m(\rho, \varphi))$:

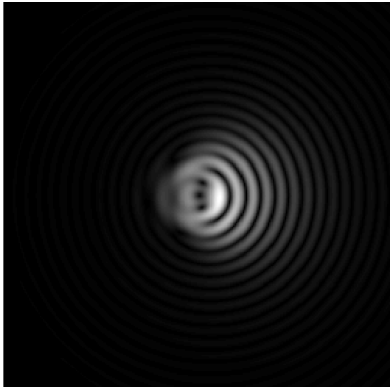
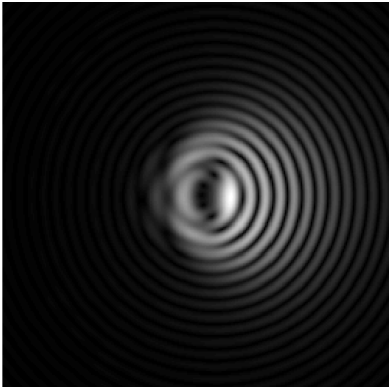
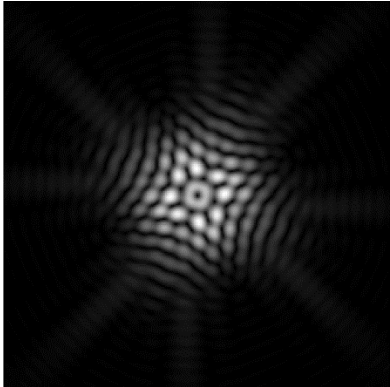
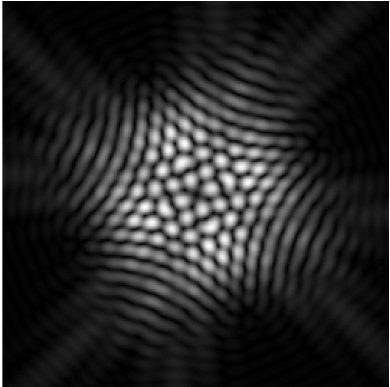
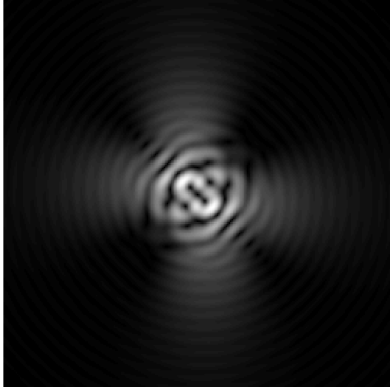
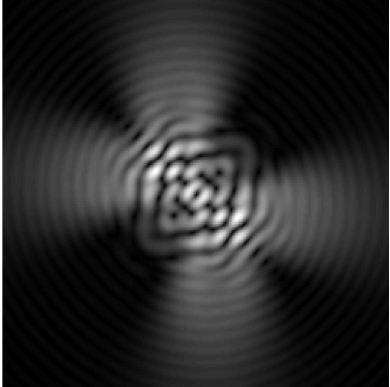
$$f(\rho, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r^k \exp(ik\varphi) \exp(i\alpha Z_n^m(\rho, \varphi)),$$

где α – уровень aberrации.

В рамках данной работы была написана программа с использованием языка Matlab для моделирования воздействия различных aberrаций на вихревые пучки и визуализации результатов. В табл. 2 приведены полученные результаты.

Таблица 2
Результаты воздействия различных типов aberrаций на вихревой пучок

Тип aberrации	Вихревой пучок порядка 3	Вихревой пучок порядка 5
Tilt		
Astigmatism		
Trefoil		

Тип aberrации	Вихревой пучок порядка 3	Вихревой пучок порядка 5
Coma		
Quadrofol		
2 th order astigmatism		

Результаты

Таким образом, из результатов видно, что наилучшим вариантом для определения порядка вихревого пучка является астигматизм. В этом случае порядок четко определяется по количеству темных полос в полученном распределении интенсивности волнового фронта. Так же, хорошо выглядят результаты, полученные при добавлении aberrации типа кома. Поэтому, воздействие данных типов aberrаций требует дальнейшего и более подробного изучения.

Список литературы

1. Fatkhiev D. M. [et al.]. Recent Advances in Generation and Detection of Orbital Angular Momentum Optical Beams – A Review // Sensors. 2021. № 21. id. 4988.

2. Khonina S. N., Karpeev S. V., Butt M. A. Spatial-Light-Modulator-Based Multichannel Data Transmission by Vortex Beams of Various Orders // Sensors. 2021. № 21 id. 2988.

3. Grier D. A. Revolution in optical manipulation // Nature. 2003. № 424. P. 810–816.

4. Sirenko A. A. et al. Terahertz Vortex Beam as a Spectroscopic Probe of Magnetic Excitations // Physical Review Letters. 2019. № 122. id. 237401.

Обзор методов идентификации личности по речевому сигналу

Татьяна Вячеславовна Черушева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tank1100@yandex.ru

Аннотация. Приводится краткий обзор существующих методов идентификации человека по отрезку его речи.

Ключевые слова: метод, биометрия, обработка речи, распознавание речи, верификация, идентификация, извлечение признаков

Overview of methods for identifying a person by speech signal

Tat'yana V. Cherusheva

Penza State University, Penza, Russia

tank1100@yandex.ru

Abstract. The article provides a brief overview of existing methods for identifying a person by a segment of his speech.

Keywords: method, biometrics, speech processing, speech recognition, verification, identification, feature extraction

В настоящее время становится важным использование речевых технологий, таких, как распознавание и анализ речи, автоматизированная постановка произношения. Этой проблеме посвящено большое число работ, в которых предложены различные методы криптографической и биометрической аутентификации.

Основной недостаток методов биометрии, кроме речевого, состоит в неизменности используемого биометрического кода, так как отпечатки пальцев или ладоней, рисунок радужной оболочки глаз не меняются у человека на протяжении всей его жизни. Этот недостаток препятствует применению методов в случаях, требующих особо высокой надежности идентификации личности, поскольку постоянные биометрические признаки могут быть извлечены из программы с помощью хакерского взлома. В отличие от биометрии по неизменным параметрам верификация по голосу обладает практически неограниченными возможностями для снижения ошибки за счет использования более длинных речевых сообщений или изменения контрольной фразы. Верификация по голосу может использоваться в темноте, когда невозможно получить изображение лица, на расстоянии, в частности, по стандартному телефонному каналу.

Существует две большие группы методов идентификации:

1) методы, основанные на классификации по определенным параметрам: метод динамического программирования, векторное квантование;

2) методы, использующие для извлечения входных параметров спектральный анализ, преобразование Фурье, линейное предсказание речи, кепстральный анализ. Все имеющиеся методы можно классифицировать по схеме, приведённой на рис 1.

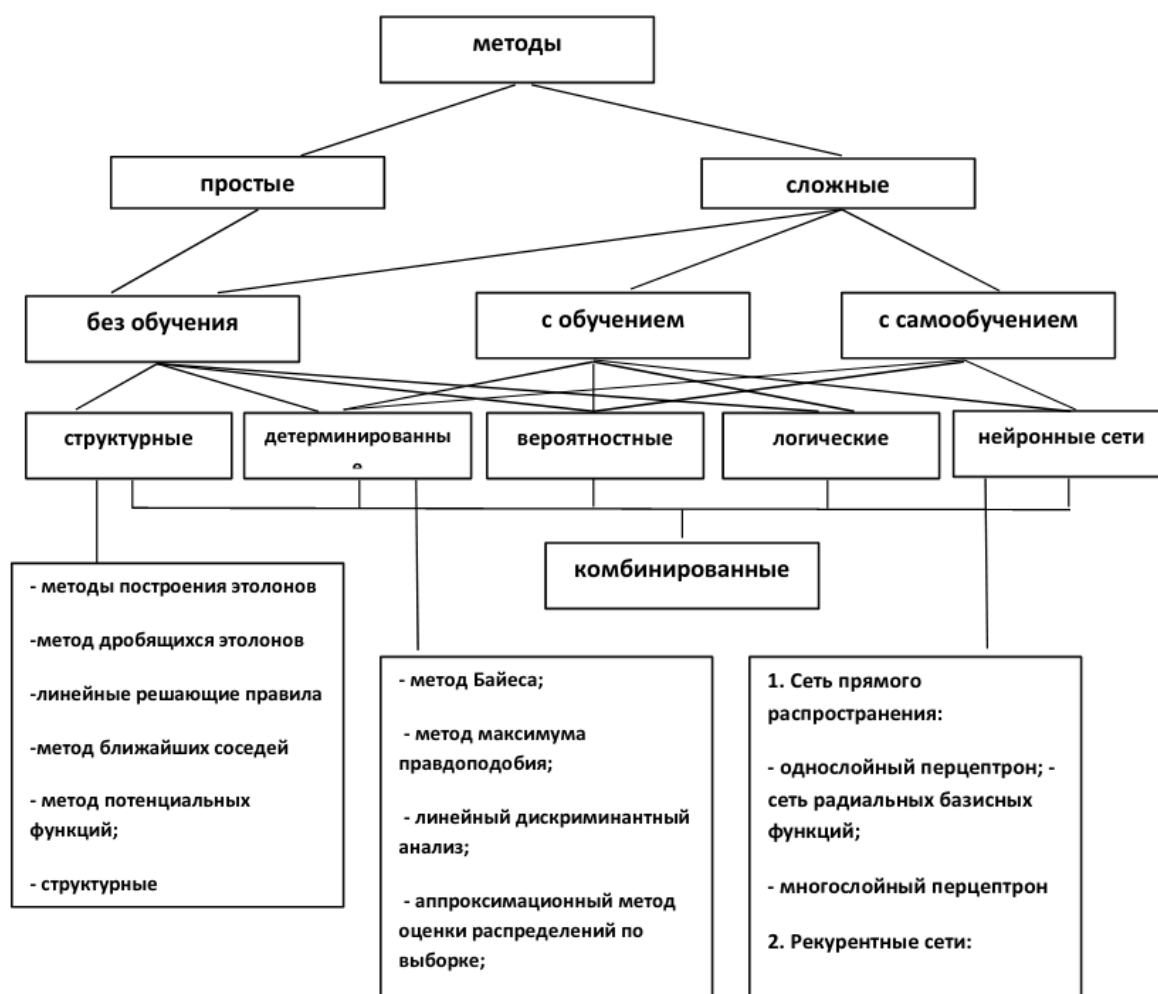


Рис. 1. Методы идентификации.

Часть методов предполагает построение модели идентификации, построенной на скрытой Марковской модели, Гауссовых смесях. В работах типа [3] исследованы вопросы адаптации к диктору акустических моделей, построенных на основе искусственных нейронных сетей для задачи автоматического распознавания речи. Цель адаптации к диктору заключается в улучшении точности работы системы автоматического распознавания речи при работе с конкретным диктором. Метод обучения и адаптации акустических моделей на основе глубоких нейронных сетей

(DNN) использует вспомогательную GMM (Gaussian Mixture Models, модель смеси гауссовских распределений) и GMMD (GMM-derived, полученные с использованием GMM) признаки. Главное достоинство GMMD-признаков состоит в возможности адаптации модели глубокой нейронной сети с помощью адаптации вспомогательной GMM-модели. Такой подход позволяет применять любые алгоритмы адаптации GMM для адаптации моделей глубоких нейронных сетей (рис. 2).

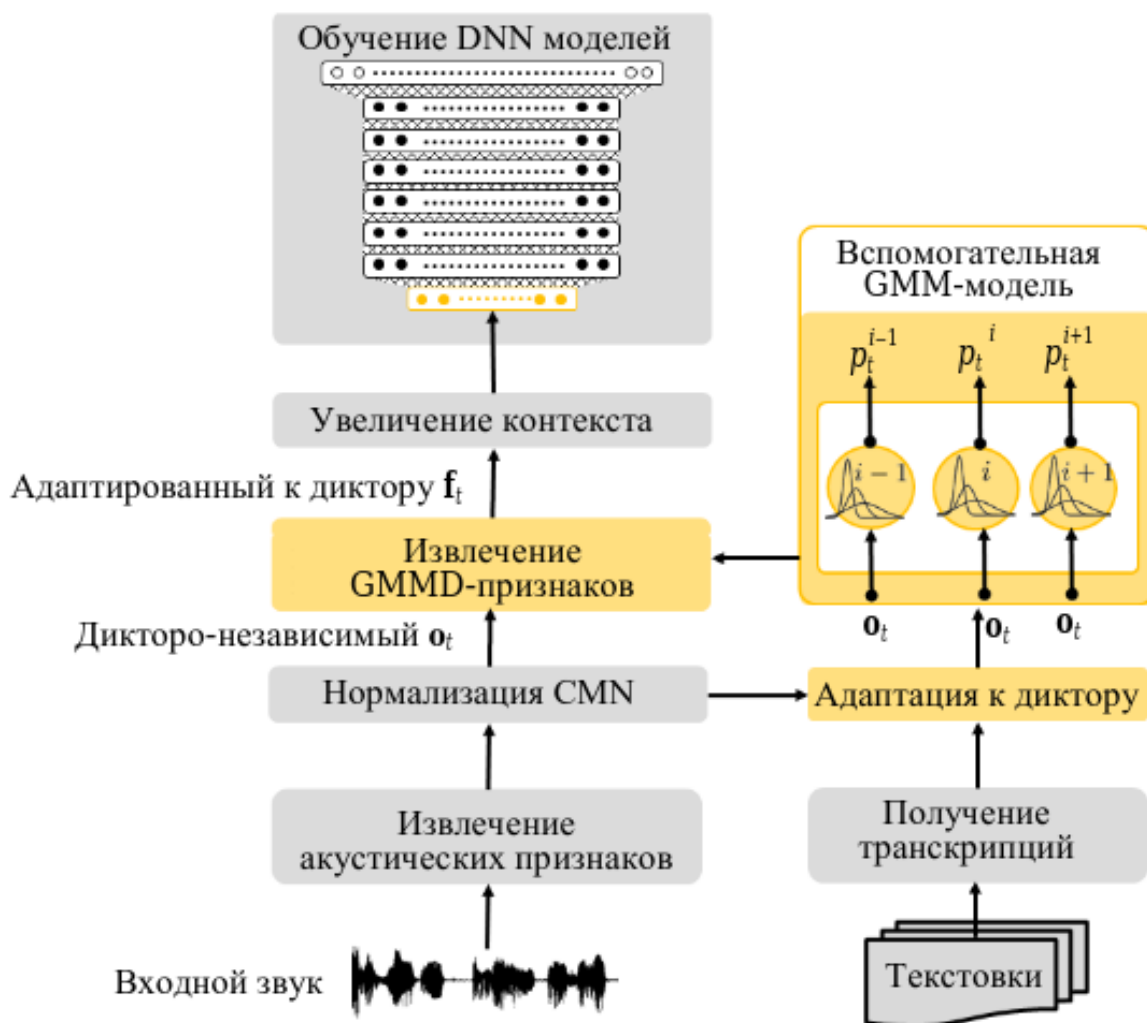


Рис. 2. Схема обучения акустических моделей на основе DNN с использованием GMMD- признаков

Во многих работах, например, в [1, 2, 5], используются мел-кепстральные коэффициенты, или MFCC-коэффициенты. Этот метод считается наиболее популярным среди известных методов, поскольку обеспечивает максимальную точность при распознавании личности диктора. Использование спектрального анализа и преобразования Фурье позволяет получить массив данных, характеризующих спектры речевых фрагментов. Уменьшение объема анализируемых данных позволяет достичь оптимального использования коэффициентов линейного предсказания

речи, кепстральных коэффициентов и мел-частотных кепстральных коэффициентов.

Подобные единицы измерения активно применяют при решении задач распознавания, так как их использование позволяет приблизиться к механизмам человеческого восприятия, которые нашли широкое применение в биометрических системах идентификации человека.

Идентификация личности по голосу в настоящее время реализуется на базе целого ряда принципов:

1) использование заданного текста на основе анализа и сравнения начитанных человеком определенных слов или фраз с эталонными;

2) зависимости от текста – сравниваются произнесенные фразы с произношением ранее записанного текста;

3) прямая обработка речи – обработка любой фразы говорящего, выделение основных ее параметров и характеристик и сравнение их показателей с эталонными;

4) диалоговый принцип – классическое распознавание речи во время диалога (при общении по телефону и т. д.).

Несмотря на то, что методы идентификации во многом отличаются, в целом можно выделить следующие основные этапы, присущие каждому из рассматриваемых методов.

1. Извлечение признаков из входного речевого сигнала.

2. Построение модели (шаблона) пользователя на основе полученных на предыдущем шаге векторов признаков.

Процесс определения пользователя, зарегистрированного в системе, по входному речевому сигналу во всех рассматриваемых методах состоит в поиске наиболее подходящей сохраненной модели на основе каких-либо критериев.

Среди наиболее перспективных систем биометрической идентификации, основанных на физиологических особенностях человека, большую роль играет голосовая идентификация. Это обусловлено целым рядом преимуществ: акустический амплитудно-частотный спектр речевых сигналов, уникальный для каждого человека, достаточно легко записывается. Эти записи удобно хранить в компьютерных базах данных, подвергая при необходимости анализу и обработке, что обеспечивает удобство в использовании и относительно небольшие затраты на применение.

Существенной проблемой для систем голосовой идентификации, основанных на вышеперечисленных методах, является сильное воздействие внешнего окружающего шума на исходные голосовые записи, из которых выделяются информативные признаки. Обусловленное шумом искажение этих признаков вызывает высокий уровень ошибок идентификации. В работе [6] предлагается помехоустойчивая обработка сигналов, основанная на декомпозиции на эмпирические моды.

Биометрические показатели, основанные на уникальных индивидуальных особенностях человека, наиболее надежно характеризуют отдельного пользователя. Разработка новых методов и средств для предотвращения несанкционированного доступа к информационным ресурсам посторонних лиц требует развития новых систем и процедур голосовой идентификации личности.

Список литературы

1. Бойков И. В., Иванов А. И., Калашников Д. М. Алгоритм построения статистического дискретно-континуального описания длительности звуков потока осмысленной речи диктора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2015. № 4. С. 64–78.
2. Бойков И. В., Калашников Д. М. Алгоритм построения звукового фрагментатора речи для распознавания голосовых образов с учетом биометрических особенностей диктора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2016. № 1. С. 78–91 .
3. Томашенко Н. А., Хохлов Ю. Ю., Ларшер Э., Эстев Я., Матвеев Ю. Н. Использование в системах автоматического распознавания речи GMM-моделей для адаптации акустических моделей, построенных на основе искусственных нейронных сетей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16, № 6. С. 1063–1072. doi:10.17586/2226-1494-2016-16-6-1063-1072
4. Шамсиев Э. Х., Мокшин В. В. Сравнение методов голосовой идентификации человека. URL: <https://www.cs.vsu.ru/ipmt-conf/conf/2022/works/3.%20Технологии%20обработки%20и%20защиты%20информации/1931.dokl.pdf>
5. Сорокин В. Н., Вьюгин В. В., Тананыкин А. А. Распознавание личности по голосу: аналитический обзор // Информационные процессы. 2012. Т. 12, № 1. С. 1–30.
6. Алимуратов А. К. Алгоритм помехоустойчивой обработки речевых команд для систем голосового управления // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2017. № 1 (19). С. 86–92.

Математическая модель распределения тепла в прямоугольной пластине

Оксана Юрьевна Барсукова¹, Наталья Юрьевна Скибицкая²,
Дарья Сергеевна Шишикина³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²natalia.skibitskaya@yandex.ru, ³shishikina.2560@mail.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель, описывающая процесс распределения тепла в прямоугольной пластине и представленная смешанной задачей для двумерного дифференциального параболического уравнения в частных производных с граничными условиями первого рода. Решение данной задачи получено с применением конечно-разностных схем.

Ключевые слова: численные методы, разностная схема, теплопроводность, параболическое уравнение, тепло, пластина

Mathematical model of heat distribution in a rectangular plate

Oksana Yu. Barsukova¹, Natal'ya Yu. Skibitskaya², Dar'ya S. Shishikina³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

²natalia.skibitskaya@yandex.ru, ³shishikina.2560@mail.ru

Abstract. The article considers a mathematical model, which describes the process of distribution of heat in a rectangular plate, represented by a mixed problem for a two-dimensional partial differential parabolic equation with boundary conditions of the first kind. The solution to this problem is obtained using finite-difference schemes.

Keywords: numerical methods, difference scheme, thermal conductivity, parabolic equation, heat, plate

Процесс распределения тепла является частью широкого спектра различных технических и инженерных задач. В частности, распределение тепла в прямоугольной пластине применяется при разработке температурных датчиков (биметаллические пластины), используемых для контроля тяги, давления или перегрева в газовых котлах и колонках; при проектировании корпусов с целью анализа свойств обшивки, при термообработке металлов для определения времени разогрева или застывания заготовки и пр.

Для каждого конкретного случая требуется специфическая математическая модель, учитывающая все особенности объекта, однако все они будут представлять собой описание процесса теплопроводности при тех или иных условиях.

Теплопроводность зависит от распределения температуры внутри объекта, и совокупность значений температуры в определенный момент времени называется температурным полем. Если температура изменяется в пространстве и во времени, температурное поле является нестационарным. Если температура не меняется во времени, температурное поле является стационарным.

Рассмотрим тонкую однородную прямоугольную пластину, контур которой поддерживается при температуре 0°C , тепловой обмен между окружающей средой и боковой поверхностью пластины отсутствует. Точка внутри пластины описывается координатами (x, y) . Начальное распределение температуры задано. Задача заключается в определении температуры пластины в любой момент времени $t > 0$ и сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$, $\text{м} / \text{с}^2$ – коэффициент температуропроводности, c – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, ρ – плотность материала, $\text{кг}/\text{м}^3$ λ – коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Уравнение (1) также можно представить в виде

$$U_t = a^2 \Delta U, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Запишем граничные условия:

$$U|_{x=0} = U|_{x=p} = 0, \quad U|_{y=0} = U|_{y=p} = 0 \quad (3)$$

и начальное условие

$$U|_{t=0} = \varphi(x, y). \quad (4)$$

С учетом (1), (3) и (4) получаем смешанную нестационарную задачу для двумерного однородного (источник тепла $f(x, y, t) \equiv 0$, т.е. отсутствует) параболического уравнения теплопроводности с начальным условием и граничными условиями первого рода. Физически имеем однородную прямоугольную пластину, имеющую в начальный момент времени распределение тепла, описанное функцией (4), и температуру, равную 0, на границах. Внутри пластины температура понижается или повышается в зависимости от начального распределения тепла и стремится к граничной.

При программировании вычислений, связанных с физическими и техническими задачами, большой популярностью пользуются численные методы, в частности, метод конечных разностей.

Однако для многомерных уравнений естественные многомерные разностные схемы оказываются невыгодными, так как явные являются устойчивыми только при небольшом шаге по времени, а неявные схемы устойчивы, но требуют решения многомерной системы алгебраических уравнений, для чего необходимо выполнить слишком большое количество операций [1].

Для решения задачи (1), (3)–(4) воспользуемся методом переменных направлений (продольно-поперечная схема), относящимся к так называемым экономичным методам, сочетающим в себе плюсы явных и неявных разностных схем.

В целом суть экономичных методов состоит в сведении перехода с одного временного слоя на другой к решению одномерных задач вдоль строк и столбцов. Для двумерной задачи в прямоугольнике сетку можно представить как совокупность узлов $n=1,2,3,\dots,N$ в столбцах и $m=1,2,3,\dots,M$ в строках, тогда имеем $N+1$ столбцов и $M+1$ строк, и, если решать одномерную задачу методом прогонки вдоль строк (при фиксированном m), а затем вдоль столбцов (при фиксированном m), для отыскания решения во всех узлах сетки понадобится осуществить $O(NM)$ операций, что пропорционально числу узлов сетки [2].

Рассмотрим алгоритм применения метода переменных направлений, предложенного Писменом и Рекфордом [3], для задачи (1), (3)–(4).

Строится сетка по направлению x с шагом h_x , $x_n \in [a_1, b_1]$, по направлению y с шагом h_y , $y_m \in [a_2, b_2]$, по времени t с шагом τ , $t_j \in [0, T]$. Пусть $\omega_{m,n}^j$ – численное решение в точках x_n и y_m на временном слое j . Введем промежуточный временной слой $j + \frac{1}{2}$, $\omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}}$ – решение на промежуточном слое. Тогда переход с временного слоя j на слой $j+1$ будем осуществлять в два этапа: сначала происходит переход со слоя j на слой $j + \frac{1}{2}$, затем переход со слоя $j + \frac{1}{2}$ на слой $j+1$. Эти действия описываются следующими формулами:

$$\frac{\omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}} - \omega_{m,n}^j}{0,5\tau} = \Lambda_1 \omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \omega_{m,n}^j, \quad (5)$$

$$\frac{\omega_{m,n}^{j+1} - \omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 \omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \omega_{m,n}^{j+1}. \quad (6)$$

Первая схема неявна по направлению y и явна по направлению x , вторая схема явна по направлению y и неявна по направлению x .

Таким образом, при переходе со слоя j на слой $j + \frac{1}{2}$, при каждом фиксированном $m = 1, \dots, M - 1$ (вдоль строк) решаем СЛАУ:

$$A\omega_{m,n-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2C\omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}} + B_{m,n+1}^{j+\frac{1}{2}} = -F, \quad (7) \quad n = 1, \dots, N - 1,$$

где

$$A = B = \frac{1}{h_x^2}, C = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{\tau} \right), F = \frac{2}{\tau} \omega_{m,n}^j + \omega_{m,n-1}^j - 2\omega_{m,n}^j + B_{m,n+1}^j.$$

Решение $\omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}} = 0$ при $n = 0$ и $n = N$ (из граничных условий (3)).

При переходе со слоя $j = 0$ в качестве $\omega_{m,n}^j$ используются начальные значения (4).

При переходе со слоя $j + \frac{1}{2}$, на слой $j + 1$ при каждом $n = 1, \dots, N - 1$ (вдоль столбцов) решаем СЛАУ, используя вычисленные ранее значения $\omega_{m,n}^{j+\frac{1}{2}}$:

$$A\omega_{m-1,n}^{j+1} - 2C\omega_{m,n}^{j+1} + B_{m+1,n}^{j+1} = -F, \quad (7) \quad m = 1, \dots, M - 1,$$

где

$$A = B = \frac{1}{h_y^2}, C = \left(\frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{\tau} \right), F = \frac{2}{\tau} \omega_{m,n}^{j+1/2} + \omega_{m-1,n}^{j+1/2} - 2\omega_{m,n}^{j+1/2} + B_{m+1,n}^{j+1/2}.$$

Решение $\omega_{m,n}^{j+1} = 0$ при $m = 0$, $m = M$, $n = 0$ или $n = N$ (из граничных условий).

Все СЛАУ решаются методом прогонки. При переходе со слоя $j + 1$ на слой $j + 2$ действия повторяются, т.е., происходит чередование направлений.

На рисунке 1 представлены решения для задачи (1), (3) – (4) при коэффициенте $a = 1$, $\varphi(x, y) = 2xy$ в моменты времени $t = 0$ (1, а), $t = 1$ (1, б), $t = 25$ (1, с) и $t = 50$ (1, д).

На рисунке 2 представлены решения для задачи (1), (3) – (4) при коэффициенте $a = 1$, $\varphi(x, y) = -2xy$ в моменты времени $t = 0$ (2, а), $t = 1$ (2, б), $t = 25$ (2, с) и $t = 50$ (2, д).

Видим, что при изначально нагретой пластине с каждым моментом времени происходит остывание, т.е., температура пластины понижается, стремясь к граничной (нулевой). При изначально охлажденной пластине с каждым моментом времени происходит повышение температуры, т.е., температура также стремится к граничной.

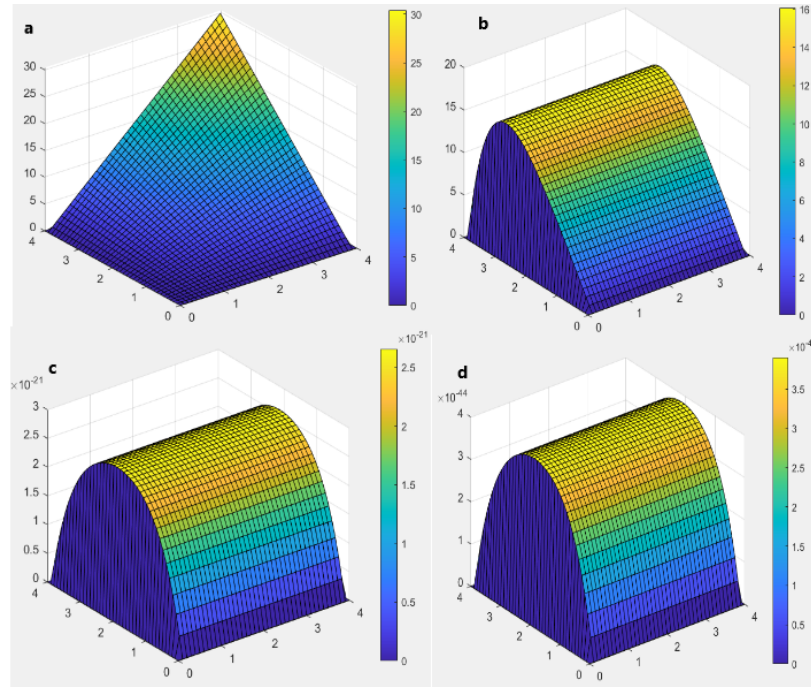


Рис. 1. Численное решение задачи в момент времени $t = 0$ (a), $t = 1$ (b), $t = 25$ (c), $t = 50$ (d) для $\varphi(x, y) = 2xy$

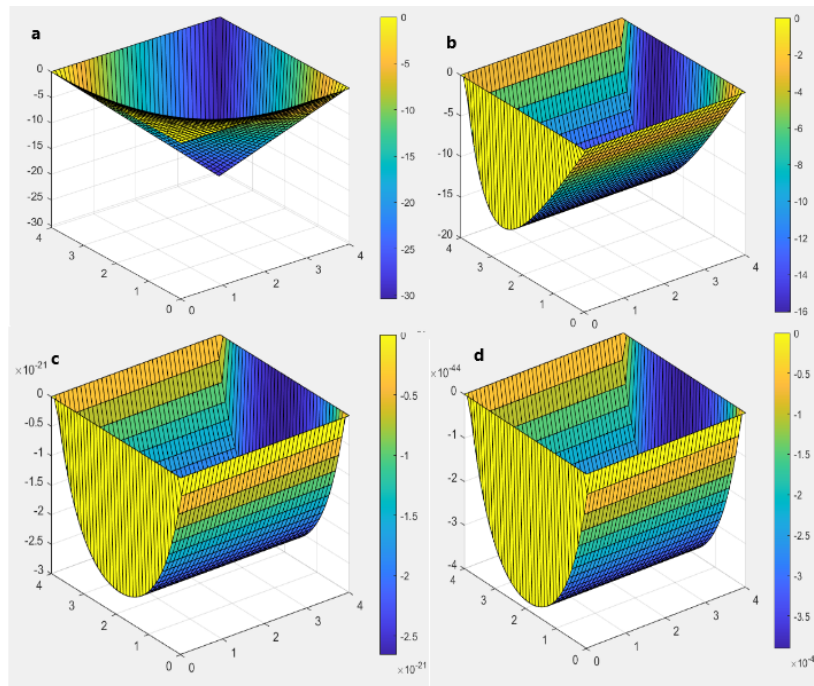


Рис. 2. Численное решение задачи в момент времени $t = 0$ (a), $t = 1$ (b), $t = 25$ (c), $t = 50$ (d) для $\varphi(x, y) = -2xy$

Список литературы

1. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 553 с.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // Journal of The Society for Industrial and Applied Mathematics. 1955. Vol. 3, № 1. P. 28–41.

Численное исследование характеристического уравнения трехслойного сферического резонатора, заполненного метаматериалом

Юлия Александровна Петрова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
petroval1999@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается система уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром, которая сводится к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. Полученное характеристическое уравнение исследовано для случая, когда параметры структуры внутреннего и внешнего слоев шара совпадают, а средний слой заполнен метаматериалом.

Ключевые слова: трехслойный шаровой резонатор, уравнения Максвелла, электромагнитные колебания, потенциалы Дебая, метаматериал

Numerical study of the characteristic equation of a three-layer spherical resonator filled with metamaterial

Yuliya A. Petrova

Penza State University, Penza, Russia
petroval1999@rambler.ru

Abstract. Review the system of Maxwell's equations is solved in the case of a space with a dielectric ball, which is reduced to solving a scalar equation for the so-called Debye potentials. The obtained characteristic equation is investigated for the case when the parameters of the structure of the inner and outer ball coincide, and the middle layer is filled with metamaterial.

Keywords: Triple Layered Ball Resonator, Maxwell's equations, electromagnetic oscillations, Debye Potentials, metamaterial

1. Постановка задачи на трёхслойном сферическом резонаторе

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, заполненное изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещен трехслойный шар радиуса r_3 , расположенный в изотропной среде, где внутренний шар имеет радиус r_1 , а другие диэлектрические слои сферически симметричны ему и удовлетворяют системам:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r \leq r_1; \\ \varepsilon_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \varepsilon_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \varepsilon_4, & r_3 \leq r; \end{cases} \quad \mu(r) = \begin{cases} \mu_1, & r \leq r_1; \\ \mu_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \mu_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \mu_4, & r_3 \leq r; \end{cases}$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_{0j}(1 + i\delta_{0j})$, $\mu_j = \mu_{0j}$; $\varepsilon_{0j}, \mu_{0j}$ ($j=1, 2, 3, 4$) – постоянные относительные диэлектрические и магнитные проницаемости; $\text{tg}\delta_{0j}$ – тангенс угла диэлектрических потерь j -го слоя.

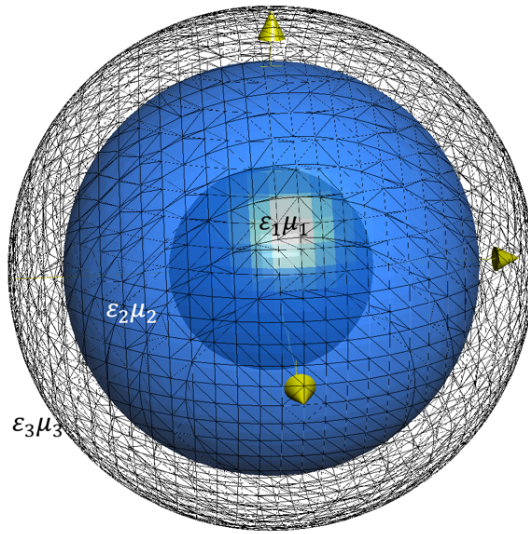


Рис. 1. Геометрия задачи

Сведем решение уравнений Максвелла к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Для этого воспользуемся сферической системой координат r, θ, φ и получим дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов вида:

$$\left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right)U_j^E(r, \theta, \varphi) = 0, \quad \left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right)U_j^H(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta_{\perp} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad T_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_j^2; \quad \chi = \sqrt{\varepsilon \mu} k; \quad k = \frac{\omega}{c},$$

c – скорость света.

Решения уравнений (1) должны удовлетворять условиям: конечность амплитуд полей колебаний в центре сферы ($r=0$), отсутствие приходящей и наличие уходящей волны при $r \rightarrow \infty$, непрерывность тангенциальных компонент полей на поверхностях раздела сред [1].

Решение системы (1) можно свести к характеристическому уравнению вида [2]:

$$\begin{aligned} & [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = \\ & = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $j_n(x), \eta_n(x), h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции, связанные соотношениями вида $z_n(x) = \sqrt{\pi x / 2} Z_{n+1/2}(x)$ с цилиндрическими функциями Бесселя $J_{n+1/2}(x)$, Неймана $N_{n+1/2}(x)$ и Ханкеля $H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ соответственно;

$$[f_i g_j]_k = q_i f'_{i,k} g_{j,k} - q_j f_{i,k} g'_{j,k}, q_i = \frac{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{\zeta_i}.$$

где $\zeta_i = \epsilon_i$ для Е-типа и $\zeta_i = \mu_i$ для Н-типа колебаний.

Корни данного характеристического уравнения при заданных параметрах структуры определяют комплексные частоты собственных колебаний.

Определение 1. ТЕ-волны – электромагнитные волны, в которых вектор электрического поля E ортогонален волновому вектору, т.е. компонента E_z вектора E равна 0. ТЕ-волны относятся к классу плоских монохроматических волн. ТЕ-волны также называют волнами магнитного типа или H -волнами.

Определение 2. ТМ-волны – электромагнитные волны, в которых вектор магнитного поля H ортогонален волновому вектору, т.е. компонента H_z вектора H равна 0. ТМ-волны относятся к классу плоских монохроматических волн. ТМ-волны также называют волнами электрического типа или E -волнами.

2. Численное исследование характеристического уравнения

Перенесем правую часть равенства (2) влево, то мы получим дисперсионное уравнение для вычисления собственных значений χ в виде:

$$\begin{aligned} \Delta(\chi) \equiv & [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} - \\ & - [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Представим $\chi = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда взяв вещественную и мнимую части от выражения (3), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей волнового числа χ :

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\chi) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\chi) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

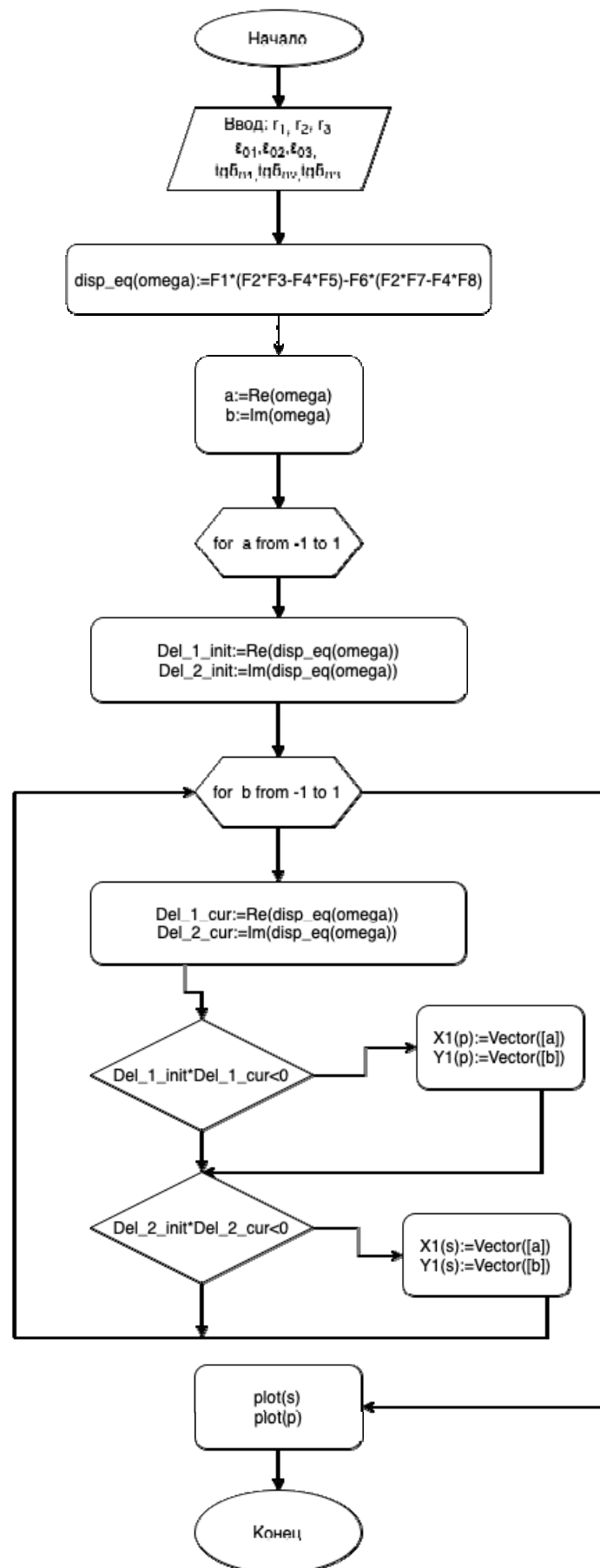


Рис. 2. Блок-схема алгоритма

Поставим перед собой задачу численного исследования характеристического уравнения в случае, когда внешний и внутренний слой выполнены из одного материала, а средний слой имеет разные значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ_{02} и различную толщину $\Delta = r_2 - r_1$. Для определения (α, β) решим систему уравнений (4) с помощью метода пристрелки.

3. Входные данные и алгоритм

Будем исследовать, помещенную в вакуум структуру, на вход подаются значения радиусов r_1, r_2 и r_3 . Магнитная проницаемость всех этих сред равна единице. Фиксируются значения параметров $\epsilon_{01} = \epsilon_{03}$ и $\operatorname{tg} \delta_{01} = \operatorname{tg} \delta_{03}$ (задаются материалы, из которых будет изготовлены внутренний и наружный слой шара). Так как исследуется структура, когда средний слой заполнен метаматериалом, то значения ϵ_{02} должны быть заданные отрицательные.

С помощью, математического пакета Maple методом пристрелки решим уравнение (2) и получим две кривые в плоскости $O\alpha\beta$, которые являются приближенными решениями вещественной и мнимой части характеристического уравнения. Очевидно, что точка пересечения расчетных кривых – найденное приближённое решение зависимости волнового числа χ от круговой частоты ω [3].

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г., Петрова Ю. А. Численное и аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 9. С. 1266–1273.
2. Суворова О. А., Филиппов Ю. Ф. Трехслойный шаровой резонатор для измерения диэлектрических проницаемостей веществ // Радиофизика и радиоастрономия. 2007. № 2. С. 214–222.
3. Петрова Ю. А. Численное исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных сферических резонаторов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 1. С. 3–12.

Моделирование формирования оптических ловушек на основе апертурной аподизации

Ольга Андреевна Дюкарева

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия
dukarevaola@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены свойства пучков со степенной зависимостью от радиуса с различной апертурной аподизацией. Продемонстрирована возможность формирования оптической ловушки, полученной за счет интерференции кольцевых оптических пучков.

Ключевые слова: оптические ловушки, преобразование Френеля, апертурная аподизация

Modeling of optical traps generation based on aperture apodization

Ol'ga A. Dyukareva

Samara National Research University, Samara, Russia
dukarevaola@gmail.com

Abstract. The properties of beams with power-law dependence on the radius and different aperture apodization are considered. A possibility of an optical trap generation obtained due to the interference of ring optical beams is demonstrated.

Keywords: optical traps, Fresnel transform, aperture apodization

Оптические ловушки, позволяющие захватывать микрочастицы, являются перспективным направлением развития лазерной физики и прикладной оптики [1, 2].

В исследованиях [3] показана возможность создания оптических ловушек на основе полиномиальных пучков с использованием бинарного аксикона: рассеивающий компонент аксикона позволяет получить максимальную интенсивность пучка в области после фокуса, а собирающий компонент – в области до фокуса. Между максимумами располагается область низкой интенсивности, что и является оптической ловушкой.

В данном исследовании мы будем рассматривать пучки с фазовой степенной зависимостью от радиуса с различной апертурной аподизацией, а также возможность получения оптических ловушек с помощью их комбинаций.

Теоретические основы

Будем рассматривать пучки со степенной зависимостью от радиуса и кольцевым распределением амплитуды:

$$f(r) = \exp\left(\frac{-ikr^n}{2f}\right) \sum_{i=1}^N c_i \text{ring}(r_i, \Delta_i),$$

где r_i – радиус до кольца, Δ_i – половина ширины кольца, $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число для лазерного излучения с длиной волны λ , f – положение фокуса линзы.

Для моделирования распространения светового поля радиально-симметричных пучков в параксиальном приближении используется преобразование Френеля-Ханкеля:

$$F_0(\rho, z) = \frac{ik}{z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \int_a^b A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr,$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Для вычисления распределения на оптической оси ($\rho = 0$) используется формула:

$$F_0(z) = \frac{ik}{z} e^{ikz} \int_a^b f(r) e^{\frac{ikr^2}{2z}} r dr.$$

Моделирование

Рассмотрим входной пучок с длиной волны $\lambda = 0,0005$ мм. Известно, что пучок Гаусса фокусирует энергию в точке f , для дальнейших вычислений положим $f = 1000$ мм.

С внесением амплитудной аподизации и уменьшением радиуса кольца изначальный фокус удлиняется по оптической оси. Из поперечных картин интенсивности в точке фокуса стоит отметить, что при $\Delta \rightarrow 0$ функция становится подобной функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr_0 r)$.

Рассмотрим влияние удаленности кольца фиксированной ширины от центра линзы на распространение оптического пучка вдоль оси. Для оценки протяженности фокуса будем использовать параметр длины по полуспаду.

Для всех пучков, амплитуда которых может быть описана одним кольцом, максимум интенсивности на оси является единственным. Для моделирования оптических ловушек необходимо иметь несколько минимумов интенсивности на оптической оси, которые мы можем получить благодаря интерференции.

Таблица 1

Длина по полуспаду кольцевых пучков

r_0	Начало, мм	Конец, мм	Длина, мм
0,5	219	605	386
1	372	929	557
1,5	480	1095	615
2	561	1173	612

На рис. 3 показаны оптические пучки с кольцами, находящимися в $r_0 = 1$ и $r_0 = 2$. Логично предположить, что наибольшее влияние на распространение пучков интерференция будет оказывать в области пересечения длин по полуспаду.

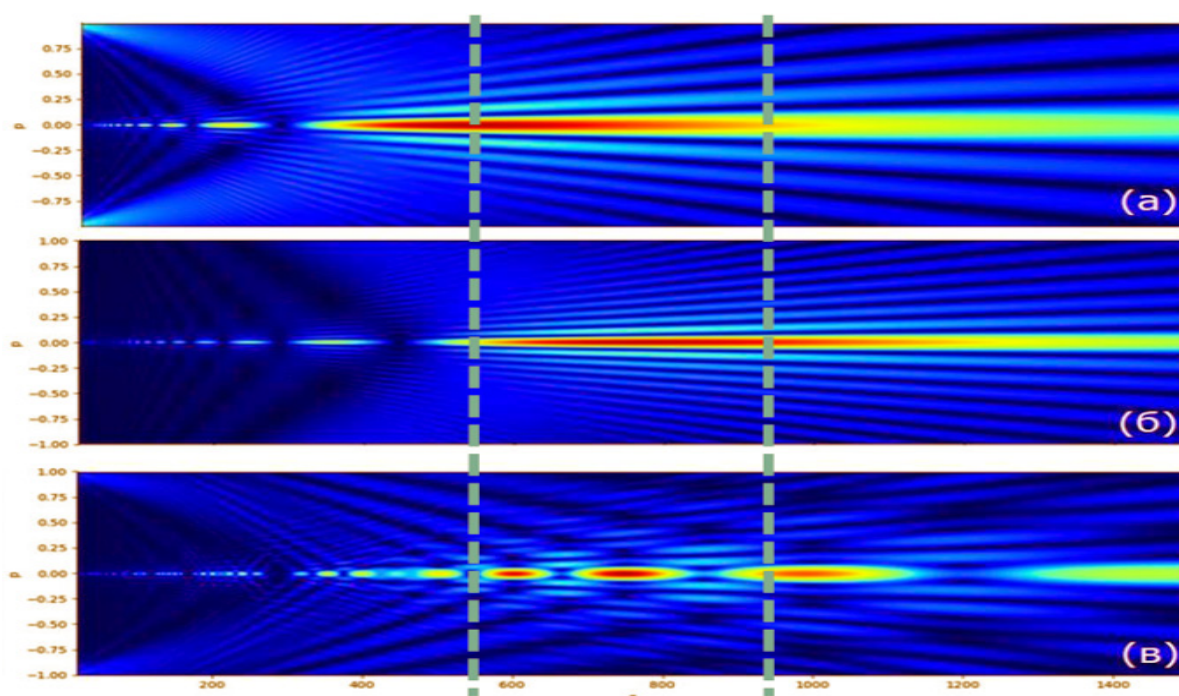


Рис. 3 Распространение пучка с (а) амплитудным кольцом $r_0 = 1$; (б) амплитудным кольцом $r_0 = 2$; (в) интерференция двух колец

Для внутреннего кольца $r_0 = 1$ промежуток длины полуспада имеет значение $[372; 929]$, для внешнего кольца $r_0 = 2$ – $[561; 1173]$. Из рис. 3 видно, что именно в промежутке пересечения $[561; 929]$ можно получить оптическую ловушку.

В общем случае добавление апертурной аподизации позволяет получить двусоставный оптический элемент, внешняя часть которого является фокусирующей, а внутренняя рассеивающей, что приводит к появлению оптических ловушек на оси в области за счет интерференции.

Для пучков с кольцевыми распределениями амплитуды показано, что интерференция в области пересечения длин по полуспаду позволяет получить несколько ловушек в системах с более чем одним кольцом.

Список литературы

1. Khonina S. N., Porfirev A. P. 3D transformations of light fields in the focal region implemented by diffractive axicons // *Applied Physics B*. 2018. Vol. 124. P. 191–193.
2. Khonina S. N. Specular and vortical Airy beams // *Optics Communications*. 2011. Vol. 284. P. 4263–4271.
3. Дюкарева О. А. Моделирование распространения полиномиальных круговых лазерных пучков // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2021) : VII Международная конференция и молодежная школа. 2021. Т. 1. С. 10242–10242.

Исследование материального баланса в модели окислительной регенерации сферического зерна

**Ольга Сергеевна Язовцева¹, Ирек Марсович Губайдуллин²,
Анастасия Сергеевна Иншакова³, Елизавета Евгеньевна Пескова⁴,
Дарья Александровна Родькина⁵**

^{1,3,4,5}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия

²Институт нефтехимии и катализа Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

¹kurinaos@gmail.com, ²irekmars@mail.ru, ³anastasi_ins@mail.ru,
⁴e.e.peskova@mail.ru, ⁵dasha.rodkina@bk.ru

Аннотация. Рассматриваются уравнения материального баланса процесса окислительной регенерации сферического зерна катализатора. Полученная система содержит неоднородные нелинейные уравнения параболического типа. Преобразованиями исследование нелинейной системы сведено к исследованию линейного уравнения, которое разложено с использованием непрерывного метода Галеркина. В результате получена устойчивая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения. На основе разложения сделан вывод о динамической устойчивости решений уравнений материального баланса.

Ключевые слова: окислительная регенерация, материальный баланс, параболические уравнения, метод Галеркина, динамическая устойчивость

Финансирование: работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (тема № FMRS-2022-0078).

Investigation of material balance in the model of oxidative regeneration of spherical grain

**Ol'ga S. Yazovtseva¹, Irek M. Gubaydullin², Anastasiya S. Inshakova³,
Elizaveta E. Peskova⁴, Dar'ya A. Rod'kina⁵**

^{1,3,4,5}National Research Mordovian State University, Saransk, Russia

²Institute of Petrochemistry and Catalysis of the RAS, Ufa, Russia

¹kurinaos@gmail.com, ²irekmars@mail.ru, ³anastasi_ins@mail.ru,
⁴e.e.peskova@mail.ru, ⁵dasha.rodkina@bk.ru

Abstract. The equations of the material balance of oxidative regeneration of the catalyst spherical grain are considered. The resulting system contains inhomogeneous nonlinear equations of parabolic type. The study of a nonlinear system is reduced to the study of a linear equation by transformations, which is decomposed using the continuous Galerkin method. The stable linear system of ordinary differential equa-

tions with respect to the decomposition coefficients is obtained. The conclusion is made about the dynamic stability of solutions to the equations of material balance based on the decomposition.

Keywords: oxidative regeneration, material balance, parabolic equations, Galerkin method, dynamic stability

Acknowledgments: The work was carried out within the framework of the state task of the Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS (topic No. FMRS-2022-0078).

Наиболее распространенные процессы в области химических и нефтехимических производств – это каталитические (протекающие с участием катализаторов). Однако с течением времени каталитическое воздействие снижается. Зачастую причиной ухудшения режимных показателей таких процессов является отложение кокса на активной поверхности катализатора. Для того, чтобы восстановить активность катализатора, используют окислительную регенерацию – выжиг кокса с его поверхности. Чаще всего кокс представляет собой углеводородные соединения, поэтому эффективным способом его удаления является выжиг кислородсодержащим газом. В связи с этим во избежание дополнительных затрат удобно использовать обыкновенный воздух. Процесс выжига коксовых отложений может проводиться при различной температуре. На скорость восстановления активной поверхности влияет форма гранул катализатора, степень закоксованности и другие параметры.

Окислительная регенерация закоксованных катализаторов предполагает проведение комплекса химических реакций, совершающихся протекающих при взаимодействии кислорода с коксом, в результате которых кокс удаляется в виде газообразных продуктов окисления – оксидов углерода, паров воды. Необходимо осуществить выжигание коксовых отложений с наименьшими временными и материальными расходами, однако при этом исключить уменьшение активности регенерируемого катализатора. Это приводит к неосуществимости использования значительных температур с целью стремительного окисления кокса.

Многочисленные задачи химической промышленности предполагают существенный объем вычислений, которые в некоторых случаях обеспечивают тем не менее, довольно невысокую точность, а проведение экспериментов очень дорого и небезопасно. Некоторые возникающие задачи предполагается решать с использованием средств математического моделирования [1–7].

Исследуем устойчивость решений уравнений материального баланса процесса окислительной регенерации сферического зерна катализатора с использованием непрерывного метода Галёркина [8-9]. В работе будем использовать диффузионный подход к моделированию процессов в зерне катализатора, допущения о равномерности распределения кокса по зерну катализатора, а также предположение об изотермичности зерна катализатора [2, 3, 6].

В качестве кинетической модели будем использовать модель из работ [2, 3].

Уравнения материального баланса для сферического зерна катализатора примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x_1}{\partial r} \right) - kx_1x_2, \\ \varepsilon \frac{\partial x_2}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x_2}{\partial r} \right) - kx_1x_2, \\ \varepsilon \frac{\partial x_3}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x_3}{\partial r} \right) + 2kx_1x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x_1(t, r)$, $x_2(t, r)$ и $x_3(t, r)$ – концентрации (мольные доли) кислорода, угля и углекислого газа соответственно; ε – пористость зерна катализатора; k – константа скорости химической реакции, с^{-2} ; r – радиальная координата, м; $t \in [0, +\infty)$ – время, с; D – эффективный коэффициент диффузии, $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$; $r \in [0, R]$, R – радиус зерна катализатора.

При этом начально-краевые условия для системы (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x_i}{\partial r} \right|_{r=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial x_i}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \\ x_1(0, r) &= x_1^0, \quad x_2(0, r) = x_3(0, r) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ставится задача об исследовании устойчивости решений системы (1).

Из равенства нулю суммы правых частей уравнений системы (1) следует

$$x_1 + x_2 + x_3 = C, C \in R,$$

т.е. можно исключить из исследования третье уравнение системы (1):

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x_1}{\partial r} \right) - kx_1x_2, \\ \varepsilon \frac{\partial x_2}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial x_2}{\partial r} \right) - kx_1x_2. \end{cases} \quad (3)$$

Вычитая из первого уравнения системы (1) второе и обозначив

$$u = x_1 - x_2,$$

получим следующее уравнение с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

Приближенное решение задачи (4)-(5) будем искать в виде:

$$\tilde{u}(t, r) = v_1(t) \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) + v_2(t) \cos\left(\frac{2\pi r}{R}\right),$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – функции зависящие от времени, причем $v_1(0) = v_1^0$ и $v_2(0) = v_2^0$; $\cos\left(\frac{\pi r}{R}\right)$ и $\cos\left(\frac{2\pi r}{R}\right)$ – базисные функции для разложения, подобранные из требования выполнения граничных условий.

Из условия ортогональности невязки базисным функциям составим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ и решим ее (для краткости записи принято $\pi \approx 3.14$ и $\varphi = D\varepsilon^{-1}R^{-2} > 0$):

$$\begin{cases} v_1 = -0.56 \exp(-6.5 \varphi t) (v_2^0 - 2v_1^0) - 0.05 \exp(-49 \varphi t) (9.2v_2^0 - 2v_1^0), \\ v_2 = -0.12 \exp(-6.5 \varphi t) (v_2^0 - 2v_1^0) - 0.12 \exp(-49 \varphi t) (9.2v_2^0 - 2v_1^0). \end{cases} \quad (6)$$

Исходя из асимптотической устойчивости по Ляпунову решений (6) и ограниченности базисных функций разложения можно сделать вывод о динамической устойчивости приближенного решения задачи (4)-(5).

Из замены $u = x_1 - x_2$, следует, что решения системы (2) тоже будут обладать свойствами динамической устойчивости.

Решения системы (3) тоже будут обладать свойством динамической устойчивости, поскольку $x_3 = C - (x_1 + x_2)$.

Таким образом, решения уравнений материального баланса будут динамически устойчивы независимо от размера и пористости зерна катализатора.

В настоящей статье использована одностадийная кинетическая модель реакции выжиг коксовых отложений без детализации химических процессов, что позволило свести исследование нелинейной модели к исследованию линейной. Однако, в моделях многостадийных реакций возникают существенные нелинейности [1, 5–7], при исследовании которых хорошо зарекомендовал себя метод асимптотической эквивалентности [11–13].

В статье проанализирован материальный баланс модели окислительной регенерации сферического зерна катализатора с использованием непрерывного метода Галеркина. Сделан вывод о динамической устойчивости решений системы параболических уравнений.

Список литературы

1. Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М. : Химия, 1987. 144 с.
2. Reshetnikov S. I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A. N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. P. 380.
3. Zazhigalov S., Chumakova N., Zagoruiko A. Modeling of the multidispersed adsorption-catalytic system for removing organic impurities from waste gases // Chemical Engineering Science. 2012. Vol. 76. P. 81–89. doi:10.1016/j.ces.2012.04.015.
4. Kern C., Jess A. Regeneration of coked catalysts – modelling and verification of coke burn-off in single particles and fixed bed reactors // Chemical Engineering Science. 2005. Vol. 60. P. 4249–4264.
5. Губайдуллин И. М., Язовцева О. С. Исследование усредненной модели окислительной регенерации закоксованного катализатора // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 1. С. 149–161.
6. Губайдуллин И. М., Пескова Е. Е., Язовцева О. С., Загоруйко А. Н. Численное моделирование окислительной регенерации сферического зерна катализатора // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 11. С. 48–66.
7. Yazovtseva O., Grishaeva O., Gubaydullin I., Peskova E. Construction of a Parallel Algorithm for the Numerical Modeling of Coke Sediments Burning from the Spherical Catalyst Grain // Parallel Computational Technologies / eds. by L. Sokolinsky, M. Zymbler. PCT 2022. Communications in Computer and Information Science. Cham : Springer, 2022. Vol. 1618. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-11623-0_17
8. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89–97.
9. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., Киреев С. В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 2. С. 106–114.
10. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 321–332. doi:<https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201803.321-332>
11. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317.
12. Шаманаев П. А., Язовцева О. С. Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 1. С. 102–115.

Решение интегро-дифференциального уравнения, содержащего в коэффициентах линейные функции специального вида

Андрей Петрович Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

a.p.shilin@gmail.com

Аннотация. Решено в явном виде интегро-дифференциальное уравнение произвольного порядка. Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару. Уравнение задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения являются переменными и имеют специальный вид. Для решения используются обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, метод вариации произвольных постоянных. Приведен пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение

Solution of an integro-differential equation containing linear functions of a special form in the coefficients

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

a.p.shilin@gmail.com

Abstract. Some integro-differential equation of arbitrary order is solved explicitly. Integrals in the equation are understood in the sense of the finite part according to Hadamard. The equation is given on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are variables and have a special form. The generalized formulas of Sokhotsky, the theory of the Riemann boundary value problem, the method of variation of arbitrary constants are used for the solution. An example is given.

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equation

Постановка задачи. Схема решения

Пусть L — простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Обозначим D_+ и D_- области на комплексной плоскости, для которых эта кривая является границей. Будем считать, что $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Зададим H -непрерывные (т.е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$, $t \in L$. За-

дадим также комплексные числа $\lambda_1, \mu_1, \alpha_k, \beta_k, k = \overline{0, n+2}, n \geq 2$, причем $\alpha_k = \beta_k = 0$ при $k = 0, n+1, n+2$, $\alpha_n = \beta_n = 1$.

Введем линейные функции

$$\begin{aligned} A_k(z) &= (\alpha_k - \lambda_1 \alpha_{k+1})z + (k+1)(\alpha_{k+1} - \lambda_1 \alpha_{k+2}), \\ B_k(z) &= (\beta_k - \mu_1 \beta_{k+1})z + (k+1)(\beta_{k+1} - \mu_1 \beta_{k+2}), \quad k = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \left[(a(t)A_k(t) + b(t)B_k(t))\varphi^{(k)}(t) + \right. \\ &\left. + \frac{k!}{\pi i} (a(t)A_k(t) - b(t)B_k(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right] = f(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (1)$$

в котором искомая функция $\varphi(t)$, $t \in L$, H -непрерывна вместе со своими производными до порядка n включительно, а интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару.

Схема исследования таких уравнений, основанная на использовании обобщенных формул Сохоцкого [1], содержится в [2]. По этой схеме решены, например, уравнения в [2, 3]. Актуальным вопросом представляется указание функций $A_k(t)$, $B_k(t)$, для которых удастся найти точное аналитическое решение уравнения (1). Рассматриваемый в настоящей работе случай таких функций является новым. Согласно упомянутой схеме, решение уравнения (1) сводится к последовательному решению краевой задачи Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L, \quad (2)$$

и линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^n A_k(z) \Phi_+^{(k)}(z) = F_+(z), \quad z \in D_+, \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^n B_k(z) \Phi_-^{(k)}(z) = F_-(z), \quad z \in D_-. \quad (4)$$

Искомые функции $F_{\pm}(z)$, $\Phi_{\pm}(z)$ должны быть аналитическими в соответствующих областях $D_{\pm}$ и иметь H -непрерывные предельные значения на L . Кроме того, должно быть $F_-(z) = O(1)$ при $z \rightarrow \infty$, $\Phi_-(\infty) = 0$. Если решения в (2)–(4) существуют, то решение уравнения (1) записывается по формуле $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$.

Как условия разрешимости задачи (2) (если они возникают), так и формулы ее решения (если оно существует) зависят от индекса $\kappa = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}$, могут быть записаны в явном виде [4] и здесь не приводятся. Предположим, что эта задача разрешима, а ее решение найдено.

Решение дифференциальных уравнений

Обозначим $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ корни многочлена $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} \lambda^k$. Будем предполагать, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны.

Лемма 1. *Фундаментальную систему решений однородного уравнения (3) образуют функции $\frac{e^{\lambda_j z}}{z}$, $j = \overline{1, n}$.*

Доказать лемму можно, непосредственно подставляя указанные в ее формулировке функции в однородное уравнение (2). Можно также использовать тот факт, что решение однородного уравнения (2) сводится к последовательному решению более простых уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} \Omega^{(k)}(z) = 0, \quad z \Phi'_+(z) - (\lambda_1 z - 1) \Phi_+(z) = \Omega(z), \quad z \in D_+.$$

Лемма 2. *Формула общего решения неоднородного уравнения (2) имеет вид*

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^n \frac{e^{\lambda_j z}}{z} \left(C_j^+ + \gamma_j \int_0^z e^{-\lambda_j \zeta} F_+(\zeta) d\zeta \right), \quad (5)$$

где

$$C_j^+ \in \mathbb{C}, \quad \gamma_j = \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Формула (5) получена с помощью метода вариации произвольных постоянных после надлежащего упрощения подынтегральных функций. Добиваясь аналитичности $\Phi_+(z)$ в нуле, где возможен полюс, получим равенство

$$\sum_{j=1}^n C_j^+ = 0, \quad (6)$$

ограничивающее произвол постоянных C_j^+ .

Обозначим $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ корни многочлена $\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k+1} \mu^k$. Будем предполагать, что числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ попарно различны. Для определенности будем предполагать также, что среди чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ нет равного нулю. Решение уравнения (4) записывается по формуле

$$\Phi_{-}(z) = \sum_{j=1}^n \frac{e^{\mu_j z}}{z} \left(C_j^{-} + \delta_j \int_{z_0}^z e^{-\mu_j \zeta} F_{-}(\zeta) d\zeta \right), \quad (7)$$

аналогичной формуле (5).

Здесь

$$C_j^{-} \in \mathbb{C}, \quad \delta_j = \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\mu_k - \mu_j)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad z_0 \in D_{-}.$$

Чтобы функция $\Phi_{-}(z)$ была в формуле (7) однозначной, следует потребовать выполнение условий

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \left(e^{-\mu_j z} F_{-}(z) \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Формула (7) даст у функции $\Phi_{-}(z)$ на бесконечности, вообще говоря, существенно особую точку. Добиваясь аналитичности на бесконечности у этой функции (с условием $\Phi_{-}(\infty) = 0$), разложим ее в окрестности бесконечности в ряд Лорана и приравняем к нулю нужные коэффициенты. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных C_j^{-} :

$$\sum_{j=1}^n \mu_j^m C_j^{-} = \sigma_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$\sigma_m = -\frac{m!}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{dt}{t^{m+2}} \sum_{j=1}^n \delta_j e^{\mu_j t} \int_{z_0}^t e^{-\mu_j \zeta} F_{-}(\zeta) d\zeta,$$

R – достаточно большое число.

Матрица системы (9) лишь отсутствием первой строки, состоящей из единиц, отличается от бесконечной матрицы Вандермонда попарно различных ненулевых чисел. Ранг такой матрицы равен n , поэтому система (9) имеет разве что единственное решение.

Основной результат. Пример

Теорема. Если задача Римана (2) разрешима, условия (8) выполнены и система (9) совместна, то решение уравнения (1) существует и записывается по формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \left[e^{\lambda_j t} \left(C_j^+ + \gamma_j \int_0^t e^{-\lambda_j \zeta} F_+(\zeta) d\zeta \right) - e^{\mu_j t} \left(C_j^- + \delta_j \int_{z_0}^t e^{-\mu_j \zeta} F_-(\zeta) d\zeta \right) \right],$$

в которой постоянные C_j^+ связаны равенством (6), а в остальном произвольны, постоянные C_j^- являются (единственным) решением системы (9).

Отметим, что при $\kappa \geq 0$ условия (8) в развернутом виде будут означать совместность системы линейных алгебраических уравнений для постоянных, входящих в решение задачи Римана. Отметим также, что H -непрерывность найденной функции $\varphi(t)$ вместе с ее производными до порядка n включительно легко обосновывается на основании свойств решения задачи Римана и формул для производных решений дифференциальных уравнений, полученных методом вариации произвольных постоянных.

Решим пример:

$$t(t+1)\varphi''(t) + (2-t-t^2)\varphi'(t) + (t-6t^2-3)\varphi(t) + \frac{3(1-t-2t^2)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} + \\ + \frac{5t-t^2-2}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{2t(t-1)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} = 60t-4, \quad |t|=1.$$

Так выглядит уравнение (1) на единичной окружности в случае $n=2$, $a(t)=t$, $b(t)=1$, $f(t)=60t-4$, $\alpha_1=2$, $\lambda_1=3$, $\beta_1=-1$, $\mu_1=2$.

Задача Римана (2) приобретает вид

$$F_+(t) = \frac{1}{t} F_-(t) + 30 - \frac{2}{t}, \quad |t|=1,$$

и имеет единственное решение $F_+(z)=30$, $F_-(z)=2$ в классе ограниченных на бесконечности функций. Для соответствующего уравнения (3)

$$z\Phi_+''(z) + (2-z)\Phi_+'(z) - (6z+1)\Phi_+(z) = 30, \quad |z|<1,$$

формула (5) с учетом условий (6) даст решение

$$\Phi_+(z) = \frac{1}{z} \left(C \left(e^{-2z} - e^{3z} \right) + 5 \left(e^{3z} - 1 \right) \right)$$

с единственной произвольной постоянной C . Наконец, для соответствующего уравнения (4)

$$z\Phi''_-(z) - (3z-2)\Phi'_-(z) + (2z-3)\Phi_-(z) = 2, \quad |z| > 1,$$

формула (7) даст

$$\Phi_-(z) = \frac{C_1^- e^z + C_2^- e^{2z} + 1}{z}.$$

Условия (8), очевидно, выполнены. Легко усмотреть, что при $C_1^- = C_2^- = 0$ получим решение $\Phi_-(z) = \frac{1}{z}$ с нужными свойствами. Так как такое решение может быть единственным, то записывать и решать систему (9) нет необходимости. Приведем окончательное решение примера:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \left(C \left(e^{-2t} - e^{3t} \right) + 5e^{3t} - 6 \right).$$

Список литературы

1. Зверович Э. И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.
2. Шилин А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56. URL: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56>
3. Шилин А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2020. Т. 56, № 3. С. 298–309. URL: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309>
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

Оценка влияния технологических погрешностей изготовления на работу фотонно-кристаллических волноводов

**Даниил Вадимович Сошников¹, Димитрий Львович Головашкин²,
Владимир Сергеевич Павельев³**

^{1,2,3}Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия

^{1,2,3}Институт систем обработки изображений РАН –
филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия
¹soshnikov.d.v@mail.ru

Аннотация. Рассматривается влияние технологических погрешностей изготовления фотонно-кристаллических волноводов на их работу. Выбирается допустимый диапазон отклонения характерных размеров волноводов (радиусов каверн) от заданных, при которых исследуемые структуры сохраняют волноводные свойства.

Ключевые слова: волновод, фотонный кристалл, технологические погрешности изготовления, вычислительный эксперимент

Evaluation of the influence of technological manufacturing errors on the operation of photonic-crystal waveguides

Daniil V. Soshnikov¹, Dimitriy L. Golovashkin², Vladimir S. Pavel'ev³

^{1,2,3}Samara National Research University, Samara, Russia

^{1,2,3}IRSI RAS – Branch of the FSRC

“Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

¹soshnikov.d.v@mail.ru

Abstract. The influence of technological manufacturing errors on the operation of photonic-crystal is considered. The admissible range of errors is determined for which the structures under study retain their waveguide properties.

Keywords: waveguide, photonic crystal, technological manufacturing errors, computational experiment

Введение

Расчет оптических элементов целесообразно производить с учетом несовершенства технологий их изготовления. Действительно, теоретически ожидаемая эффективность элемента и результаты натурных испытаний его работы могут существенно отличаться в случае, когда применяемая технология изготовления не обеспечивает соблюдение расчетных геометрических параметров его топологии. Так, в [1] экспериментально подтверждается необходимость ограничения числа уровней квантования

высоты микрорельефа 32 уровнями при изготовлении гармонических линз, хотя теоретически линзы с большим их числом (технология прямой лазерной записи по резисту позволяет формировать рельеф и с 256 уровнями) характеризуются лучшим качеством формируемого изображения.

Развитие методов расчета и технологий изготовления оптических фотонно-кристаллических (ФК) элементов [2] обуславливает интерес к исследованию влияния несовершенства упомянутых технологий на работу таких устройств. В частности, в [3] изучается зависимость работы биосенсоров на ФК резонаторах от погрешностей литографической технологии. Волноведущие структуры также являются объектом исследований такого рода; например, работа [4] посвящена выяснению допустимых отклонений при изготовлении нелинейного волновода, предназначенного для организации квантовой памяти. Основное внимание в [4] уделяется формулировке рекомендаций, позволяющих далее выбрать технологию изготовления.

В аналогичном ключе проведено и представляемое исследование, связанное с конкретными ФК волноводами, один из которых используется в [5] для построения интерференционного логического элемента.

Исследование ФК волновода с гексагональной решеткой

Первый подлежащий исследованию волновод представляет из себя двумерный фотонный кристалл с гексагональной решеткой (воздушные каверны круглого сечения в объеме кремния) и линейным дефектом, образованным исключением ряда упомянутых каверн [5] (рис. 1).

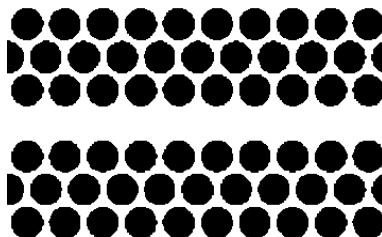


Рис 1. Фрагмент ФК волновода на основе кристалла с гексагональной решеткой

Период кристалла a (расстояния между центрами каверн) и радиусы каверн r подбирались методом, изложенным в [6], и для длины волны $\lambda=1,55$ мкм, значения показателя преломления кремния на этой длине $n=3,4757$ (при 20°C [7]) были найдены равными $a=459$ нм и $r=183,9$ нм.

Само исследование состояло в варьировании радиуса каверн (в одном вычислительном эксперименте всех одновременно) при неизменном периоде, равном расчетному, что имитировало погрешность изготовления кристалла. Вычислительные эксперименты проводились в пакете Ansys Lumerical R1, где падающая слева из однородного массива кремния на торец волновода плоская волна (магнитное поле поляризовано линейно

вдоль каверн) задавалась по технологии TF/SF, а проходящее по волноводу излучение регистрировалось мониторами (вертикальными отрезками шириной 1,18 мкм; энергия проходящей через такой отрезок волны фиксируется), расположенными на входе и выходе из волновода. Размеры фотонного кристалла, с учетом горизонтального линейного дефекта, проходящего через центр, составляли $150a$ по горизонтали на $9\sqrt{3}a$ по вертикали.

На рис. 2 с разной степенью детализации представлена зависимость величины δ (отношения значения вышедшей из волновода энергии к вошедшей), характеризующей волноводные свойства структуры, от погрешности реализации радиуса каверн в %.

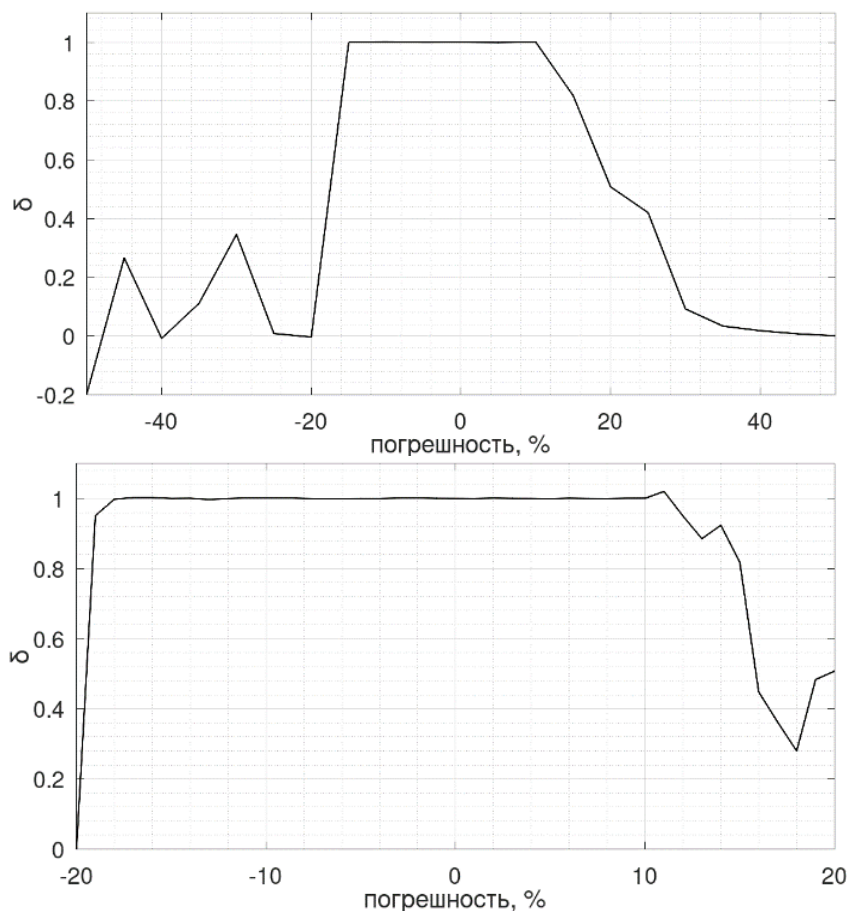


Рис. 2. Зависимость значения δ для волновода с гексагональной решеткой от изменения радиуса каверн (слева недетализированный случай, справа – детализированный)

В недетализированном случае (рис. 2) радиус каверн изменяется с шагом 5% по оси абсцисс; где значение 0% соответствует расчетному $r=183,9$ нм, сами проценты исчисляются от данной величины, а значение радиуса либо растет (до +50 %), либо уменьшается (до -50 %). В детализированном случае шаг изменения радиуса составляет 1 %, а интервал изменения варьируется от -20 % до +20 %.

Из рис. 2 видно, что погрешности формирования каверн на отрезке $[-18\%, +10\%]$ вовсе не влияют на волноводные свойства изучаемой ФК структуры. С уменьшением радиуса более чем на 18 % значение δ резко снижается, с увеличением более чем на 10 % снижение значения δ также отчетливо наблюдается, однако оно уже не столь драматично.

Исследование ФК волновода с прямоугольной решеткой

Второй исследуемый волновод также представляет из себя двумерный фотонный кристалл, однако уже с прямоугольной решеткой (тоже воздушные каверны кругового сечения в массиве кремния) и линейным дефектом, образованным исключением ряда упомянутых каверн (рис. 3).

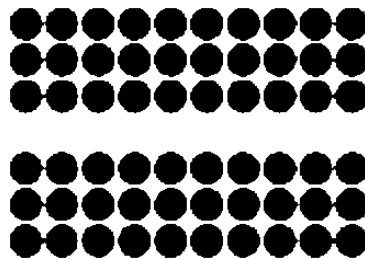


Рис. 3. Фрагмент ФК волновода на основе кристалла с прямоугольной решеткой

Период кристалла a (расстояния между центрами каверн) и радиусы каверн r подбирались методом, изложенным в [6], и для длины волны $\lambda = 1,55$ мкм, показателя преломления кремния на этой длине $n = 3,4757$ (при 20 °C [7]) были найдены равными $a = 345$ нм и $r = 165,6$ нм. Исследование проводилось с фотонным кристаллом, характеризующимся размерами $150a$ по горизонтали и $21a$ по вертикали.

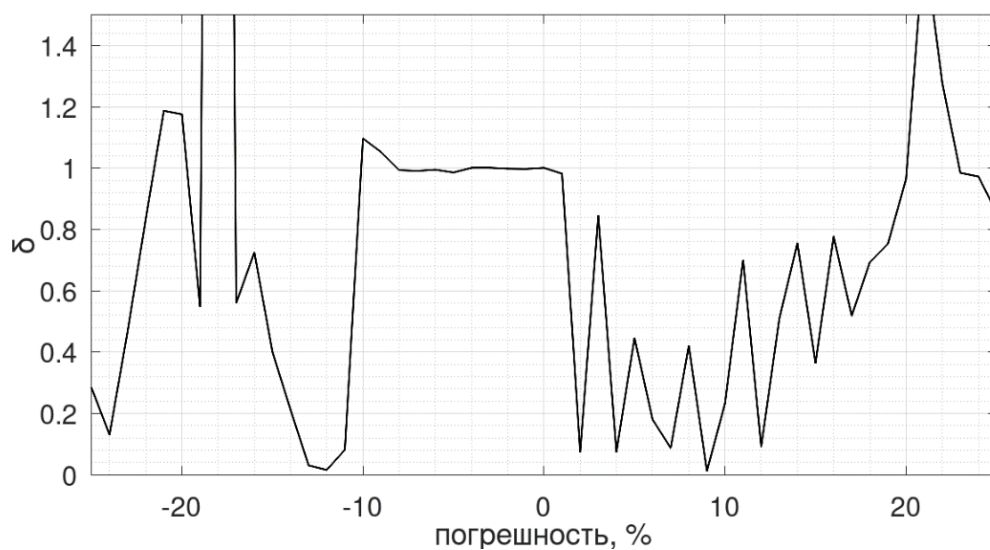


Рис. 4. Зависимость значения δ для волновода с прямоугольной решеткой от изменения радиуса каверн

На рис. 4 представлена зависимость значения δ исследуемого волновода от изменения радиуса каверн, где последние меняются с шагом в 1 % на отрезке $[-25 \%, +25 \%]$ от $r = 165,6$ нм (0 % соответствует расчетному значению радиуса).

В первую очередь объяснению подлежат случаи превышения величиной δ значения единицы; ведь из волновода не может выйти энергии больше, чем вошло. Наблюдаемые на рис. 4 всплески δ , превышающие единицу, свидетельствуют о работе с кристаллом, для которого выбранная длина волны более не находится в запрещенной зоне, в силу чего монитор на входе в волновод уже не регистрирует энергию всей проходящей в кристалл волны (входной монитор отстоял от торца волновода на 15 периода структуры). На рис. 5 приведены дифракционные картины, соответствующие случаям волноводного распространения (каверна расчетного радиуса) и выхода из запрещенной зоны (радиус на 20 % меньше расчетного).

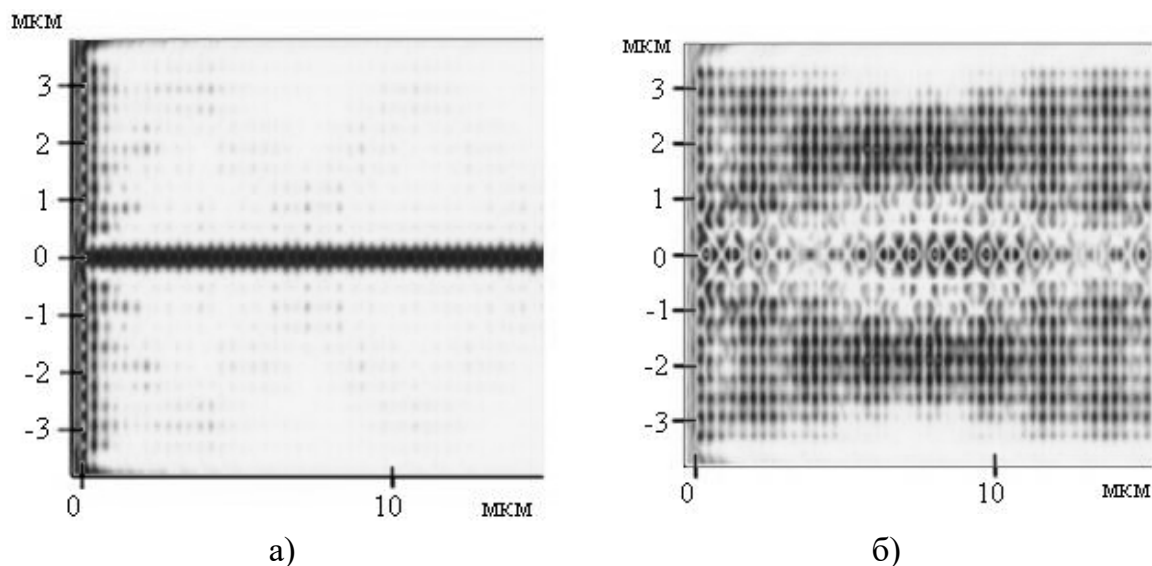


Рис. 5. Дифракционные картины внутри кристаллов с дефектами:

- а – случай каверн расчетного радиуса;
- б – радиуса, меньше расчетного на 20 %

Примечательно, что при исследовании кристалла с гексагональной решеткой до выхода из запрещенной зоны при заданных параметрах численного эксперимента не доходило.

Выделяя допустимые отклонения радиуса каверн от расчетного значения, при которых работа рассматриваемого ФК волновода не нарушается, отметим, что значения погрешности изготовления лежат на отрезке $[-8\%, +1\%]$, существенно более узком, чем в случае рассмотрения ФК волновода с гексагональной решеткой. При выходе за пределы этого отрезка элемент полностью теряет волноводные свойства.

Заключение

В результате сравнительного исследования двух выбранных ФК волноводов выяснилось, что гексагональная решетка обеспечивает лучшую толерантность к технологическим погрешностям формирования фотонного кристалла и позволяет довольствоваться менее точной технологией изготовления. Так, волновод на основе гексагональной решетки с погрешностями формирования воздушных каверн в кремнии сохраняет полную работоспособность при изменении радиуса каверны от -18% (уменьшение радиуса от расчетного) до +10% (увеличение радиуса). В то время, как волновод на основе прямоугольной решетки работоспособен лишь при радиусах, изменяющихся от -8% до +1%.

Список литературы

1. Скиданов Р. В., Ганчевская С. В., Васильев В. С., Казанский Н. Л. Ограничение числа уровней квантования гармонической линзы как метод повышения качества формируемого изображения // Квантовая электроника. 2020. Т. 50, № 7. С. 675–678.
2. Li W., Meng F., Chen Y., Li Y. fan, Huang X. Topology Optimization of Photonic and Phononic Crystals and Metamaterials: A Review // Advanced Theory and Simulations. 2019. № 7. P. 1900017.
3. Danaie M., Kiani B. Design of a label-free photonic crystal refractive index sensor for biomedical applications // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. 2018. Vol. 31. P. 89–98.
4. Santandrea M., Stefszky M., Ansari V., Silberhorn C. Fabrication limits of waveguides in nonlinear crystals and their impact on quantum optics applications // New Journal of Physics. 2019. Vol. 21, № 3.
5. Preeti Rani, Yogita Kalra R. K. Sinha Realization of AND gate in Y shaped photonic crystal waveguide // Optics Communications. 2013. Vol. 298–299. P. 227–231.
6. Mokshin P., Golovashkin D., Pavelyev V., Yablokova L. Iterative approach based on the FDTD method for the design of metal-dielectric photonic crystal devices // 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). 2022. P. 1–4.
7. Li H. H. Refractive index of silicon and germanium and its wavelength and temperature derivatives // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 1993. Vol. 9. P. 561–658.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.986.7; 517.584

Об одной аппроксимации оператора полугруппы и некоторых ее применениях

Елена Сергеевна Алексеева¹, Александр Эдуардович Рассадин²

^{1,2}Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия

¹kometarella@mail.ru, ²brat_ras@list.ru

Аннотация. Рассматривается новая аппроксимация оператора полугруппы с ограниченным инфинитезимальным генератором, построенная из самого этого генератора и его резольвенты. Предложенная аппроксимация оператора полугруппы резко отличается от аппроксимаций Иосиды или Чернова отсутствием предельного перехода по последовательности операторов, аппроксимирующих оператор полугруппы. Качество этой аппроксимации исследуется на примере полугруппы Вольтерра, генератором которой является оператор интегрирования. В результате этого исследования также найдены новые аппроксимации функции Бесселя мнимого аргумента нулевого индекса – как трансцендентная, так и рациональная.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, банахово пространство, линейный оператор, степенной ряд, норма оператора, относительная погрешность

On one approximation of the semigroup operator and some of its applications

Elena S. Alekseeva¹, Aleksandr E. Rassadin²

^{1,2}Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

¹kometarella@mail.ru, ²brat_ras@list.ru

Abstract. The article considers a new approximation of the semigroup operator with a bounded infinitesimal generator, constructed from this generator itself and its resolvent. The proposed approximation of the semigroup operator differs sharply from the Yosida approximants or the Chernoff product formula due to the absence of a limit transition over a sequence of operators approximating the semigroup operator. The quality of this approximation is investigated by the example of the Volterra semigroup, the generator of which is the integration operator. As a result of this research, new approximations of modified Bessel function of the zero order are also found – both transcendental and rational.

Keywords: the abstract Cauchy problem, the Banach space, linear operator, power series, operator norm, relative error

Теория однопараметрических полугрупп линейных операторов, созданная в первой половине XX века, в настоящее время весьма популярна среди математиков и физиков-теоретиков, потому что колоссальное число задач математической физики, теории управления и теории вероятностей могут быть поставлены как следующая абстрактная задача Коши [1]:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0 \in V, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где V – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор, который называется генератором полугруппы.

Как хорошо известно, формальное решение задачи Коши (1) имеет вид [1]:

$$u(t) = \exp(At)u_0, \quad (2)$$

однако оператор полугруппы $(\exp(At))_{t \geq 0}$ можно вычислить в явном виде в исключительных случаях.

С другой стороны, по генератору A оператора полугруппы $(\exp(At))_{t \geq 0}$ определяется его резольвента [1] (I – тождественный оператор):

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda \cdot I)^{-1}, \quad (3)$$

причём этот важный линейный оператор находится в явном виде гораздо чаще, чем оператор полугруппы.

Из всего этого следует, что для инженерно-технических приложений целесообразно искать аппроксимацию оператора полугруппы $(\exp(At))_{t \geq 0}$ с помощью генератора A этой полугруппы и его резольвенты (3).

В работе [2] для ограниченного оператора A была предложена одна из таких возможных аппроксимаций, а именно:

$$(\exp(At))_{t \geq 0} \approx (A^2 + 2\lambda A + \lambda^2 I) \cdot \frac{dR_\lambda(A)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=4/t}. \quad (4)$$

Для исследования пригодности правой части формулы (4) к приближению точных решений задачи Коши (1) выберем в качестве генератора полугруппы оператор интегрирования:

$$(Au)(x) = \int_0^x u(\xi) \cdot d\xi. \quad (5)$$

Этот оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ — ограничен: $\|A\| = 1$. Его квадрат есть:

$$(A^2 u)(x) = \int_0^x (x - \xi) \cdot u(\xi) \cdot d\xi. \quad (6)$$

Далее, резольвента (3) для оператора (5) равна [3]:

$$(R_\lambda(A)u)(x) = -\frac{u(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot \int_0^x \exp\left[\frac{x-\xi}{\lambda}\right] \cdot u(\xi) \cdot d\xi. \quad (7)$$

Видно, что множество $\rho(A) = \{\lambda \in C \mid \lambda \neq 0\}$ — это резольвентное множество оператора (7).

Дифференцируя почленно выражение (7) по λ , получим:

$$\left(\frac{dR_\lambda(A)}{d\lambda}u\right)(x) = \frac{u(x)}{\lambda^2} + \int_0^x \left(\frac{2}{\lambda^3} + \frac{x-\xi}{\lambda^4}\right) \cdot \exp\left[\frac{x-\xi}{\lambda}\right] \cdot u(\xi) \cdot d\xi. \quad (8)$$

Таким образом, с помощью формул (5), (6) и (8) можно вычислить результат действия правой части выражения (4) на начальное условие u_0 задачи Коши (1) непосредственно:

$$\tilde{u}(t) = (A^2 + 2\lambda A + \lambda^2 I) \cdot \frac{dR_\lambda(A)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=4/t} u_0, \quad (9)$$

причём функцию (9) следует сравнивать с точным решением (2) исходной задачи Коши (1).

Пусть $u_0(x) = 1$, тогда подстановка этой функции в формулу (9) даёт:

$$\tilde{u}(x, t) = 1 + x \cdot t \cdot \exp(x \cdot t/4). \quad (10)$$

С другой стороны, в работе [4] доказано, что для начального условия $u_0(x) = 1$ формула (2) с генератором полугруппы (5) даёт следующее точное решение абстрактной задачи Коши (1):

$$u(x, t) = I_0(2\sqrt{x \cdot t}), \quad (11)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого индекса.

Используя известное разложение этой функции в ряд Тейлора [5], легко получить, что:

$$\tilde{u}(x, t) - u(x, t) = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{k}{4^{k-1}} - \frac{1}{k!} \right] \cdot \frac{(xt)^k}{k!}. \quad (12)$$

Степенной ряд (12) показывает, что функции (10) и (11) совпадают друг с другом с точностью до членов порядка $(xt)^2$ включительно. Кроме того, методом математической индукции несложно доказать, что при $k \geq 3$ выражение в квадратных скобках в правой части формулы (12) яв-

ляется неотрицательным, то есть при $x \in [0,1]$ и $t > 0$ функция (10) является приближением сверху для функции (11).

Точность приближения функции (11) функцией (10) также удобно охарактеризовать пространственно-временным полем $\delta(x,t)$ относительной погрешности:

$$\delta(x,t) = \frac{\tilde{u}(x,t) - u(x,t)}{\tilde{u}(x,t)}. \quad (13)$$

График функции (13) представлен на рис. 1. Из рис. 1 видно, что при $x \in [0;1]$ и $t \in [0;1,95]$ $\delta(x,t) < 0,01$.

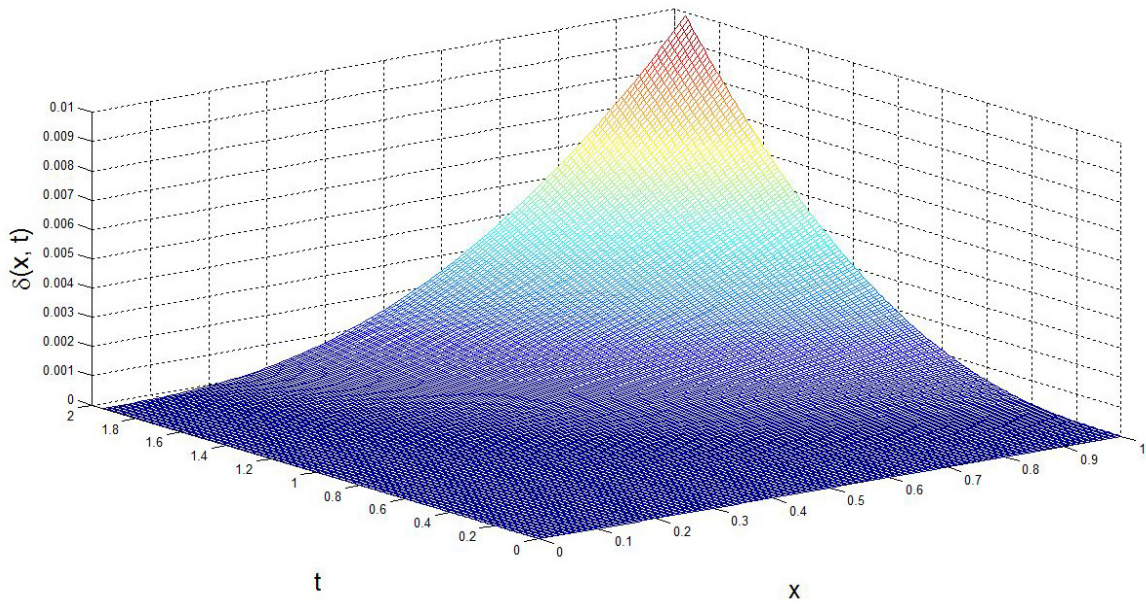


Рис. 1. Поле относительной погрешности приближения

Далее, положив в обеих формулах (10) и (11) $x=1/4$ и $t=z^2$, придём к следующему приближённому равенству:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{z^2}{4} \cdot \exp\left(\frac{z^2}{16}\right). \quad (14)$$

Наконец, подставив в выражение (14) рациональную аппроксимацию экспоненты, данную в работе [2], получим для функции $I_0(z)$ ещё одну приближённую формулу:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{z^2}{4} \cdot \left(\frac{1 + z^2/64}{1 - z^2/64} \right)^2. \quad (15)$$

Назовём аппроксимацию (14) трансцендентной аппроксимацией, а аппроксимацию (15) – рациональной аппроксимацией функции $I_0(z)$.

Графики относительной погрешности этих аппроксимаций представлены на рис. 2.

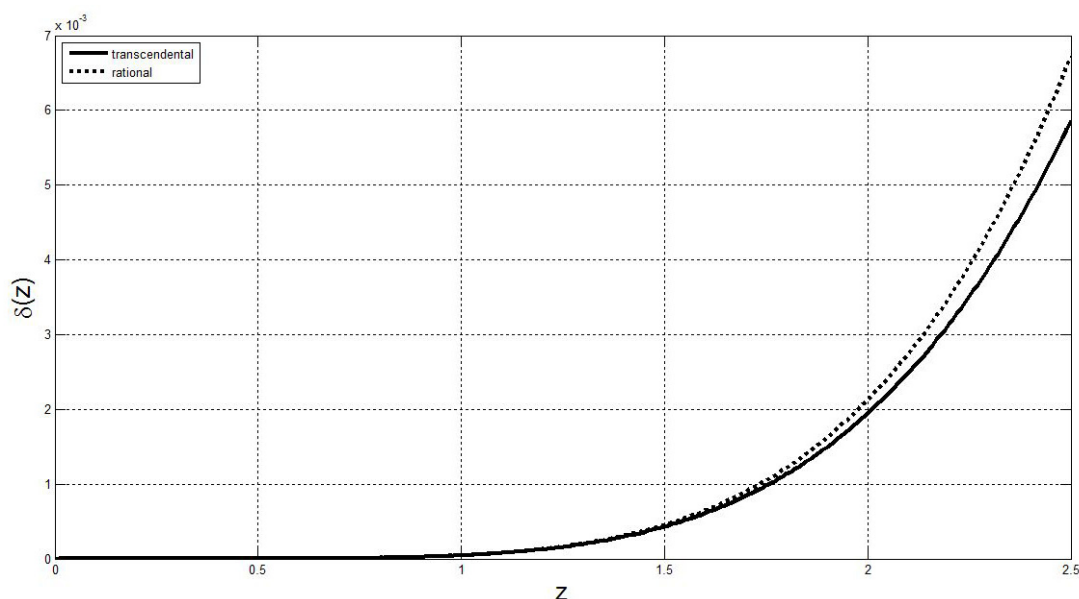


Рис. 2. Относительные погрешности приближения функции $I_0(z)$

Из рис. 2 видно, что при $z \in [0; 2,5]$ для обеих аппроксимаций $\delta(z) < 0,01$. Также из него видно, что при $z \in [1,5; 2,5]$ аппроксимация (15) немного хуже, чем аппроксимация (14).

Таким образом, в представленной работе показано, что формула (4) для полугруппы с генератором (5) даёт вполне пригодные для инженерных расчётов приближения оператора полугруппы. Кроме того, с помощью формулы (4) получены новые аппроксимации для функции Бесселя мнимого аргумента нулевого индекса. Поскольку в работе [4] доказано, что для начальных условий $u_0(x) = x^n/n!$ ($n \in \mathbb{N}$) функции $(x/t)^{n/2} I_n(2\sqrt{xt})$ являются точными решениями задачи Коши (1) с тем же генератором полугруппы, то перспективой развития данной работы является получение аппроксимаций функций Бесселя мнимого аргумента натурального индекса согласно описанной выше методике.

Список литературы

1. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. Абстрактные дифференциальные уравнения с приложениями. М. : Мир, 1992. 352 с.
2. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Новая аппроксимация экспоненты и её применение в теории C0-полугрупп // Уфимская осенняя математическая школа : материалы международной научной конференции (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.). Т. 1 / отв. редактор З. Ю. Фазуллин. Уфа : РИЦ БашГУ, 2022. С. 91–93.

3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М. : ИЛ, 1962. 896 с.

4. Марусеев И. А., Рассадин А. Э. Точное решение одного интегро-дифференциального уравнения и некоторые его применения // Молодежь и наука: преобразования через образование : Материалы VI Всероссийской научной студенческой конференции НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 26–28 апреля 2022 года / под ред. Е. А. Сергеевой. Н. Новгород : НИУ ВШЭ – Нижний Новгород, 2022. С. 78–80.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М. : Наука, 1974. 296 с.

Об одном численном методе решения задачи аналитического продолжения на плоскости

Наталья Юрьевна Кудряшова¹, Лилия Александровна Купряшина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются численные методы решения задачи аналитического продолжения на плоскости, в частности метод сингулярных интегральных уравнений, установлены условия однозначной разрешимости приближенных уравнений, получены оценки погрешности квадратурных формул.

Ключевые слова: численные методы, аналитическое продолжение функции, интеграл типа Коши, сингулярные интегральные уравнения

On a numerical method for solving the problem of analytical continuation on the plane

Natal'ya Yu. Kudryashova¹, Liliya A. Kupryashina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹math.kudryashova@yandex.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Abstract. The article considers numerical methods for solving the problem of analytic continuation on a plane, in particular, the method of singular integral equations, establishes conditions for the unique solvability of approximate equations, and obtains error estimates for quadrature formulas.

Keywords: numerical methods, analytic continuation of a function, Cauchy integral, singular integral equations

Задача аналитического продолжения является классической задачей теории функций комплексного переменного.

Исследованию различных плоских полей методами аналитического продолжения посвящены многочисленные публикации, из которых в первую очередь следует указать на работы [3–7]. Подробная библиография по методам аналитического продолжения в геофизике приведена в [1, 2].

Широкое применение при решении задачи аналитического продолжения получил аппарат интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений. При этом не исследованными оказались вопросы приближенного решения задач аналитического продолжения методами сингулярных интегральных уравнений.

Пусть на комплексной плоскости дана область G , ограниченная замкнутой кривой L . Пусть $G \subset G^*$. Пусть в области G^* задана аналитическая функция $x(z)$, значения которой известны только в области G . Требуется распространить $x(z)$ из области G на G^* .

Для простоты будем рассматривать в качестве контура L единичную окружность на комплексной плоскости. Обозначим единичную окружность на комплексной плоскости через γ_0 . Сначала будем искать приближенные значения функции $x(z)$ на окружности с центром в начале координат и радиусом большим 1. Для этого нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = x_0(t), \quad t \in \gamma_0, \quad (1)$$

где $x_0(t)$ – известная функция, определяющая значения $x(z)$ на γ_0 .

Это уравнение представляет собой формулу Коши. Сделаем в (1) замену переменных $\tau = (1+h)e^{i\sigma}$, $d\tau = (1+h)e^{i\sigma} i d\sigma$, $t = e^{is}$.

В результате имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h)e^{i\sigma})(1+h)e^{i\sigma}}{(1+h)e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma = x(e^{is}). \quad (2)$$

Уравнение (2) будем решать методом коллокации. В качестве узлов коллокации возьмем

$$t_k = e^{is_k}, \quad k = 0, \dots, 2n,$$

где

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 0, \dots, 2n.$$

Контур $[0; 2\pi)$ будем считать закольцованным, т.е. точка 0 отождествляется с 2π . Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = x_n((1+h)e^{is}) = \sum_{k=0}^{2n} x_n(t_k^1) \psi_k(s),$$

где фундаментальный многочлен $\psi_k(t)$ определяется формулой

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s - s_k)}{\sin \frac{s - s_k}{2}},$$

а узлы

$$t_k^1 = (1+h)e^{is_k}, k = 0, \dots, 2n.$$

Выберем целое число v_1 и для каждого узла s_k построим свою квадратурную формулу следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h)e^{i\sigma})(1+h)e^{i\sigma}}{(1+h)e^{i\sigma} - e^{is_k}} d\sigma = R_n + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-v_1} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \\ + \frac{2v_1}{2n+1} \frac{x(t_k^1)(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+v_1+1}^{2n} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя метод коллокации и выше указанную квадратурную формулу для решения уравнения (2), получим систему линейных алгебраических уравнений, откуда можно будет найти значения $x_n(t_k^*)$. Эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \frac{2k_1}{2n+1} \frac{x(t_k^1)(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \\ + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} = x(t_k), k = 0, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, зная значения функции $x(t)$ на окружности радиуса $1+h$, найдем ее значения на окружности радиуса $1+2h$. Продолжая процесс, по значениям $x(t)$ на окружности радиуса $1+lh$ найдем значения этой функции на окружности радиуса $1+h(l+1)$ из уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h(l+1))e^{i\sigma})(1+h(l+1))e^{i\sigma}}{(1+h(l+1))e^{i\sigma} - (1+hl)e^{is}} d\sigma = x((1+hl)e^{is}). \quad (5)$$

Выберем узлы

$$t_k^l = (1+hl)e^{is_k}, k = 0, \dots, 2n; l = 0, 1, \dots$$

Решение уравнения (5) для каждого $l = 0, 1, \dots$ будем искать в виде полинома

$$x_n((1+h(l+1))e^{is}) = \sum_{k=0}^{2n} x_n(t_k^{l+1}) \psi_k(s),$$

где фундаментальный многочлен $\psi_k(t)$ был определен выше.

Значения $x_n(t_k^{l+1})$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-v_{l+1}+1} \frac{x(t_j^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_j}}{(1+h(l+1))e^{is_j} - (1+hl)e^{is_k}} + \\ & + \frac{2v_{l+1}}{2n+1} \frac{x(t_k^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_k}}{(1+h(l+1))e^{is_k} - (1+hl)e^{is_k}} + \\ & + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+v_{l+1}+1}^{2n} \frac{x(t_j^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_j}}{(1+h(l+1))e^{is_j} - (1+hl)e^{is_k}} = x(t_k^l), k=0, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Значение параметра v_{l+1} определяется из условия однозначной разрешимости системы (6):

$$v_{l+1} > n/2. \quad (7)$$

Следует отметить, что значение v_{l+1} может и не совпадать с v_l .

Оценим разность между интегралом из уравнения (5) и квадратурной формулой из системы (6)

Для этого покажем сначала, что для функции

$$f(\sigma, s) = \frac{e^{i\sigma}}{(1+h(l+1))e^{i\sigma} - (1+hl)e^{is}}$$

справедливо неравенство

$$|f(\sigma_1, s) - f(\sigma_2, s)| \leq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{h^2}. \quad (8)$$

$$f'_\sigma = -i(1+hl) \frac{\cos(\sigma - s) + i \sin(\sigma - s)}{[(1+h(l+1))\cos \sigma + i \sin \sigma - (1+hl)(\cos s + i \sin s)]^2}.$$

Производная терпит разрыв в точках $(s, s + 2\pi k), k=0, \pm 1, \dots$, лишь при $h=0, h=-2/(l+1)$. Но по предположению $h>0$ и 1 – целое положительное число. Следовательно, в наших условиях функция $f(\sigma, s)$ имеет непрерывную производную по переменной σ , причем

$$\max |f'_\sigma| = \frac{1}{h^2}.$$

Откуда и следует выполнение неравенства (8):

$$|R_n| \leq \frac{A(1+h(l+1))^\alpha}{hn^\alpha} \left(1 + \frac{v_{l+1}}{n}\right) + \max |x(1+h(l+1))e^{i\sigma}| \frac{B}{h^2 n} \left(1 + \frac{v_{l+1}^2}{n}\right).$$

Описанный метод дает достаточно хорошие результаты, однако он неустойчив. Поэтому возникает необходимость в регуляризации этого метода.

Рассмотрим итерационную регуляризацию вычислительной схемы (1.6). Значения $x_n(t_k^l)$, $k = 0, \dots, 2n$, определяются по следующей схеме

$$x^{m+1} = \alpha_m x^m + (1 - \alpha_m)(x^m - \gamma(A^* A x^m - A^* f)), \quad (1.9)$$

где m – номер итерации, A^* – сопряженная матрица, $0 < \alpha < \alpha_m < 1 - \beta < 1$, а параметр

$$\gamma = \min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \|A^* A\|} \right)$$

Сходимость этого метода обоснована в работе [8], где показано, что для его устойчивой сходимости достаточно выполнение условия $\|I - \gamma A^* A\| \leq 1$, которое выполняется.

Список литературы

1. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравirazведки : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. 400 с.
2. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения // Геофизический журнал. 2000. № 1. С. 3.
3. Страхов В. Н. К теории плоской обратной задачи магнитного потенциала при переменной намагниченности // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 3. С. 44–58.
4. Страхов В. Н. Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала // Известия АН СССР. 1970. № 9. С. 31–41.
5. Страхов В. Н. Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии // Известия АН СССР. Физика Земли. 1970. № 12. С. 32–44.
6. Хачай О. А., Цирульский А. В. Об интерпретации повысотных аэромагнитных наблюдений // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. № 12. С. 47–56.
7. Цирульский А. В. О связи задачи аналитического продолжения логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Известия АН СССР. Геофизика. 1964. № 11. С. 1646–1693.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 512 с.

Об одном способе моделирования нелинейной динамики полиномами Вольтерра и цепными дробями

Светлана Витальевна Солодуша¹, Юлия Игоревна Коконова²

¹Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия

¹Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия

²Иркутский национальный исследовательский
технический университет, Иркутск, Россия

¹solodusha@isem.irk.ru, ²dudareva.yuliya@mail.ru

Аннотация. Рассматривается некоторый способ моделирования динамики нелинейных систем типа «вход-выход». В идейном плане он основан на применении интегральных моделей в виде комбинации аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра и присоединенных цепных дробей.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, интегральная модель, полиномы Вольтерра, цепные дроби

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-11-00173.

On one method for modeling nonlinear dynamics by Volterra polynomials and continued fractions

Svetlana V. Solodusha¹, Yuliya I. Kokonova²

¹Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

¹Matrosov Institute for System Dynamics
and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia

²Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹solodusha@isem.irk.ru, ²dudareva.yuliya@mail.ru

Abstract. The paper addresses a certain method for modeling the dynamics of nonlinear systems of the input-output type. Conceptually, it is based on the using integral models in the form of a combination of Volterra integral-power series tool and adjoint continued fractions..

Keywords: nonlinear dynamic system, integral model, Volterra polynomials, continued fractions

Acknowledgments: This research was funded by Russian Science Foundation, grant 22-11-00173.

Введение

При моделировании динамического объекта типа "вход-выход" достаточно часто применяется аппарат интегро-степенных рядов Вольтерра

[1]. Универсальные свойства интегральных моделей позволяют применить их для описания во временной области динамики различных технических объектов. В частности, в работах [2, 3] показано применение квадратичного отрезка ряда (полинома) Вольтерра

$$\int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y_{et}(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

при моделировании нелинейных откликов тепло- и электроэнергетических объектов. В (1) $y_{et}(0)=0$, t – время, функция $K_2(s_1, s_2)$ симметрична по переменным s_1, s_2 в силу скалярности входного сигнала $x(t)$. Для построения модели (1) требуется решить задачу непараметрической идентификации переходных характеристик $K_1(s_1)$, $K_2(s_1, s_2)$ – ядер Вольтерра. В теории математического моделирования динамических объектов также хорошо известны непрерывные цепные дроби, применение которых позволяет учесть стохастический характер объектов [4, 5]. Для построения моделей на базе данного подхода требуется решить задачу структурно-параметрической идентификации. Полагая, что динамическая система обладает квадратичной нелинейностью, рассмотрим комбинированную интегральную модель, основанную на совместном применении (1) и присоединенных цепных дробей.

Основной результат

Рассматривается модифицированная интегральная модель на основе квадратичного полинома Вольтерра (1), в котором линейная составляющая представлена в виде эквивалентной присоединенной цепной дроби

$$\int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1 = \frac{\alpha}{1 - \frac{\int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}{\alpha + \int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}} - \alpha, \quad (2)$$

где параметр присоединения $\alpha \neq 0$, $\alpha + \int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1 \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, с учетом (2), модель (1) примет следующий вид:

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}{\alpha + \int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}} - \alpha + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y(t). \quad (3)$$

Будем предполагать, что задача поиска ядер Вольтерра тем или иным образом решена. Как правило, в задаче идентификации участвуют тестовые наборы входных сигналов из семейства допустимых входов $x(t)$. Поэтому (1) имеет нулевую невязку только в частных случаях и можно считать, что ядра Вольтерра известны с возмущением. Для определенности будем считать, что $\tilde{K}_1(s) = K_1(s) + \delta$, где δ – некоторая погрешность. Обозначим через

$$y_1(t) = \int_0^t \tilde{K}_1(s_1)x(t-s_1)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2. \quad (4)$$

Случай, когда в (3) вместо $K_1(s)$ имеется $\tilde{K}_1(s)$, вырождается в (4), поэтому рассмотрим следующую ситуацию:

$$y_2(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\int_0^t \tilde{K}_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}{\alpha + \int_0^t K_1(s_1)x(t-s_1)ds_1}} - \alpha + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2. \quad (5)$$

Заметим, что выбор значения α влияет на прогностические свойства интегральной модели (5) и, как следствие, на точность моделирования $y_{et}(t)$ при произвольном возмущении δ . Естественно поставить задачу об оптимальном в некотором смысле выборе значения α . В качестве целевой функции примем модуль невязки между (1) и (5) при фиксированном значении δ : $|\epsilon(t)| = |y_{et}(t) - y_2(t)|$. Фактически функция $\epsilon(t) = \bar{\epsilon}(\alpha, t)$ зависит от α и t . Рассмотрим следующую экстремальную задачу: найти α^* , такую что

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \left\{ \max_{t \in [0, T]} |\bar{\epsilon}(\alpha, t)| \right\}. \quad (6)$$

Таким образом, задача параметрической идентификации для построения (5) может быть сведена к решению экстремальной задачи вида (6). Проиллюстрируем решение задачи (6) на примере.

Пример. Пусть $K_1(s_1)=1$, $K_2(s_1,s_2)=s_1+s_2$, $x(t)=e(t)$, где $e(t)$ – функция Хевисайда, $t \in [0, T]$, $\delta=10^{-1}$. Тогда, следуя (1), (3)-(5), имеем

$$y_{et}(t)=t+t^3, \quad y_1(t)=t(1+\delta)+t^3, \quad y_2(t)=\frac{t\alpha(1+\delta)}{\alpha-\delta t}+t^3.$$

Непосредственное вычисление дает

$$\bar{\epsilon}(\alpha, t) = \frac{t\delta(\alpha+t)}{\delta t - \alpha}. \quad (7)$$

Пусть $T=10$, тогда $y_{et}(T)=1010$. Выберем для определенности $\alpha \in [-T, -\frac{T}{2}]$. С учетом (7) получим, что максимум $|\bar{\epsilon}(\alpha, t)|$ достигается либо в точке $0 < t_1 < 10$, либо на правой границе – при $t_2=10$. Выбирая параметр α из условия согласования $|\bar{\epsilon}(\alpha, t_1)| = |\bar{\epsilon}(\alpha, t_2)|$, при фиксированном значении δ имеем:

$$\alpha^* \approx -8,201, \quad t_1 = (10 - \sqrt{110})\alpha^* \approx 4,003.$$

График функции $|\bar{\epsilon}(\alpha^*, t)|$ представлен на рис. 1.

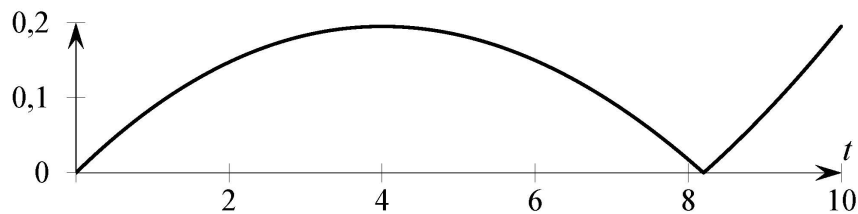


Рис. 1. График $|\bar{\epsilon}(\alpha^*, t)|$ для $\delta=10^{-1}$

Окончательно получим, что

$$y_1(T)=1011; \quad y_2(T)=1009,804; \quad |\bar{\epsilon}(\alpha^*, T)| \approx 0,196.$$

Из расчетов видно, что $|y_{et}(t) - y_1(t)| > |\bar{\epsilon}(\alpha^*, T)|$.

Список литературы

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М. : Наука, 1982. 302 с.
2. Апарцин А. С., Солодуша С. В., Таиров Э. А. Математические модели нелинейной динамики на базе рядов Вольтерра и их приложения // Известия

РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. Т. 1, № 2. С. 115–125.

3. Солодуша С. В., Герасимов Д. О., Суслов К. В. Моделирование динамики ветрогенератора с помощью полиномов Вольтерра // VII Международный симпозиум «Обобщенные постановки и решения задач управления» (GSSCP-2014) : сб. трудов конф. Геленджик, Дивноморское, 2014. С. 161–163.

4. Карташов В. Я., Новосельцева М. А. Структурно-параметрическая идентификация линейных стохастических объектов с использованием непрерывных дробей // Управление большими системами. 2008. № 21. С. 27–48.

5. Корнеев П. К., Гончарова Е. Н., Журавлева И. А. Комбинированное приближение функций двух переменных полиномами и присоединенными цепными дробями // Вестник Ставропольского государственного университета. 2008. № 4. С. 28–34.

Использование технологии OpenMP на многопроцессорных вычислительных системах с общей памятью для решения интегральных уравнений

Дмитрий Викторович Тарасов¹, Вячеслав Владимирович Лапкин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tarasovdv@mail.ru, ²lapkin2001@inbox.ru

Аннотация. Рассмотрены возможные подходы применения параллельных вычислений с использованием технологии OpenMP к численным методам решения интегральных уравнений.

Ключевые слова: OpenMP, интегральные уравнения, параллельные вычисления

Using OpenMP technology on multiprocessor computing systems with shared memory to solve integral equations

Dmitriy V. Tarasov¹, Vyacheslav V. Lapkin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹tarasovdv@mail.ru, ²lapkin2001@inbox.ru

Abstract. Possible approaches to the application of parallel computing using OpenMP technology to numerical methods for solving integral equations are considered.

Keywords: OpenMP, integral equations, parallel computing

Введение

Современные численные методы решения интегральных уравнений как правило требуют выполнения огромного числа алгебраических операций, и естественно исследователю всегда хотелось бы получения численного решения, удовлетворяющего заданной точности, за приемлемое время. Поэтому если эффективность работы компьютера может быть повышена на уровнях задач, данных, алгоритмов, инструкций, битов, а это и есть параллелизм, то его несомненно стоит задействовать.

Одним из подходов к параллельным вычислениям является использование многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью [1]. В частности к ним можно отнести даже домашние ПК, обладающие многоядерными процессорами. В качестве наиболее используемых инструментов здесь можно указать стандарт MPI и технологию OpenMP для языка C++, параллельное программирование в .NET 4.0 для языка C# [1, 2].

Применение технологии OpenMP для решения интегрального уравнения

Механизм OpenMP предназначен для написания параллельных программ для систем с общей памятью и включает в себя набор библиотечных функций (библиотека `omp.h` для языка C++) и директив компилятора. Данные директивы имеют вид:

#pragma omp ... конструкция [условие [условие]...],

и они не требуют значительного изменения, уже написанного на языке C/C++, программного кода. Эти директивы обрабатываются до начала компиляции программы. В случае если используется компилятор, который не понимает подобные директивы, то программа получится, но правда последовательная.

Рассмотрим применение подобной технологии на примере решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом Бубнова – Галеркина [3, с. 208; 4, с. 176]:

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in (a, b). \quad (1)$$

где ядро $K(t, \tau)$ непрерывно на $[a, b]^2$; $f(t)$ непрерывно на $[a, b]$; $x(t)$ – искомая функция.

Метод Бубнова – Галеркина относится к семейству проекционных методов и приближенное решение уравнения (1) ищется в виде суммы $f(t)$ и линейной комбинации заранее выбранных линейно-независимых функций $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ (образующих полную ортогональную систему) из пространства $L_2[a, b]$

$$\bar{x}(t) = f(t) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t). \quad (2)$$

Коэффициенты c_i формируются исходя из решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной из условия ортогональности на отрезке $[a, b]$:

$$\left\langle \bar{x}(t) - \lambda \int_a^b K(t, \tau) \bar{x}(\tau) d\tau - f(t), \varphi_i(t) \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

или более подробно

$$\left\langle \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(t) - \lambda \int_a^b K(t, \tau) \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(\tau) d\tau - \lambda \int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau, \varphi_i(t) \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Окончательно система примет вид

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt, \quad \beta_{ij} = \int_a^b dt \int_a^b K(t, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) d\tau, \\ \gamma_i &= \int_a^b dt \int_a^b K(t, \tau) \varphi_i(t) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что быстрота сходимости метода Галеркина определяется свойствами гладкости точного решения, но не ядра интегрального уравнения, что может оказаться полезным при решении сингулярных интегральных уравнений. Основным недостатком метода Галеркина является необходимость вычисления нескольких интегралов (4). Данные вычисления, прежде всего, мы и попробуем подвергнуть параллелизму.

Рассмотрим случай когда вычисление интегралов ведется по формуле прямоугольников (рис. 1).

```
float Rect_parallel_ver1(double (*f) (double), float a, float b, int n)
{
    float h = fabs((b - a) / n);
    float sum = 0;
    #pragma omp parallel reduction (+: sum)
    {
        # pragma omp for
        for (int i = 0; i < n; i++)
            sum += f(a + i * h) * h;
    }
    return sum;
}
```

Рис. 1. Формула прямоугольников для одномерного интеграла при параллельной реализации с технологией OpenMP

Заметим, что:

- для включения технологии OpenMP требуется в страницах свойств проекта во вкладке Свойства конфигурации\С\С++\Язык\Поддержка Open MP указать Да(/openmp).

- директива `#pragma omp parallel` служит для выделения параллельных фрагментов и в конце ее блока обеспечивается синхронизация потоков;

- директива `#pragma omp for` распределяет итерации цикла между потоками;

– все переменные, объявленные внутри параллельной области являются локальными.

Кроме того, параллелизм достигается за счет коллективной операции «+» и происходит при помощи параметра `reduction (operator: list)` директивы `for`. Список `list` задает набор локальных переменных, для которых должна быть выполнена коллективная операция, а поле `operator` указывает тип этой операции. Операция редукции обычно применяется к переменным, для которых вычисления (обычно, это операции: `+`, `-`, `*`, `&`, `|`, `^`, `&&`, `||`) задаются в виде выражений следующего вида [1]: `x = x <operator> <expression>`.

Таким образом, итерации цикла будут распределены между потоками.

Реализация метода прямоугольников, рассмотренная на рис. 1, может быть выстроена и несколько иначе. А именно, путем разбиения области интегрирования $[a, b]$ на несколько частей (скажем по числу ядер) Δ_m , и все вычисление интеграла по каждому такому отрезку Δ_m должно полностью осуществляться на отдельном ядре. Закончится этот процесс суммированием значений полученных по всем отрезкам Δ_m (рис. 2).

```
float Rectangle(double (*f) (double), float a, float b, int n) {
    float h = fabs((b - a) / n);
    float sum = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        sum += f(a + i * h) * h;
    return sum;
}

float Rect_parallel_ver2(double (*f) (double), float a, float b, int n)
{
    float sum=0;
    #pragma omp parallel reduction (+: sum)
    {
        int m = omp_get_num_procs();//определяем число вычислительных ядер
        # pragma omp for
        for (int i = 0; i < m; i++)
        {
            sum += Rectangle(f, a+i*(b-a)/m, a+(i+1)*(b-a)/m, n);
        }
    }
    return sum;
}
```

Рис. 2. Параллельный код, для случая когда на каждом ядре выполняется вычисление интеграла по формуле прямоугольников, но для своего отрезка Δ_m

Заключительным этапом решения интегрального уравнения является решение полученной системы линейных алгебраических уравнений любым удобным методом, например методом Гаусса или методом Яко-

би. Выигрыш по времени на машине с двухядерным процессором Intel Pentium G860 (3M Cache, 3.00 GHz) при использовании классического метода Гаусса заметен для системы размерности 100×100 , а вот двукратное увеличение быстродействия наблюдается для систем размерностью порядка 500×500 [5].

Выводы

Программная реализация с использованием технологии OpenMP не требует существенной переработки кода и может активно использоваться при выстраивании параллелизации уже существующего кода на языке C/C++. Такой подход, вполне оправдан при реализации даже небольших задач на современных процессорах с большим числом ядер.

Список литературы

1. Гафаров Ф. М., Галимянов А. Ф. Параллельные вычисления : учеб. пособие. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2018. 149 с.
2. Волосова А. В. Параллельные методы и алгоритмы : учеб. пособие. М. : МАДИ, Электронные текстовые и графические данные, 2020. 176 с. URL: <https://lib.madi.ru/fel/fel1/fel20E533.pdf> (дата обращения: 08.09.2022).
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения : справочное пособие. Киев : Наукова думка, 1986. 544 с.
4. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. М. : Факториал Пресс, 2000. 384 с.
5. Тарасов Д. В., Болотникова О. В., Тарасова Е. С. Численное решение задач вычислительной математики с использованием многопроцессорных вычислительных систем с общей памятью // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 20–22 мая 2015 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. С. 108–112.

Численное решение систем дифференциальных уравнений с производной Римана – Лиувилля

Татьяна Сергеевна Индуцкая

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия
indutskaya.tat@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена развитию численных методов решения систем дифференциальных уравнений дробного порядка с произвольным индексом матричного пучка. К интегральным аналогам этих уравнений применяется квадратурная формула правых прямоугольников и метод интегрирования произведений.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическое уравнение, производная Римана – Лиувилля, квадратурная формула правых прямоугольников, метод интегрирования произведений

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>

Numerical solution of systems of differential equations with Riemann – Liouville derivative

Tat'yana S. Indutskaya

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia
indutskaya.tat@yandex.ru

Abstract. This note is devoted to the development of numerical methods for solving systems of differential equations of fractional order with an arbitrary index of the matrix pencil. The quadrature formula of right-hand rectangles and product integration method are used for integral analogs of these equations.

Keywords: differential-algebraic equation, Riemann – Liouville derivative, quadrature formula of right rectangles, product integration method

Acknowledgments: the research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation No. 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>

Рассмотрим дифференциально-алгебраическое уравнение дробного порядка

$$D_{0+}^{\alpha} (Au(t)) + Bu(t) = f(t), \quad t \in [0; 1], \quad (1)$$

$$D_{0+}^{\alpha} (Au(t)) \Big|_{t \rightarrow +0} = u_0, \quad u_0 \in R^n. \quad (2)$$

Здесь A, B – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, причем $\det A = 0$, а $u = u(t)$, $f = f(t)$ – искомая и заданная n -мерные вектор-функции, и введено обозначение производной Римана – Лиувилля [1]

$$D_{0+}^{\alpha} q(t) = \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} q(s) ds,$$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$. Начальная задача (1), (2) традиционно называется задачей типа Коши [1]. Под ее решением будем понимать вектор-функцию $u(t) \in C([0;1], R^n)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2). Как следует из работы [2], равенство $u_0 = 0 \in R^n$ должно выполняться за необходимостью, чтобы решение задачи типа Коши было непрерывным на отрезке $[0;1]$. Далее будем рассматривать задачу типа Коши (1), (2) с нулевым начальным условием (2).

Действие оператором интегрирования Римана – Лиувилля I_{0+}^{α} дробного порядка $0 < \alpha < 1$ на уравнения (1) преобразует задачу типа Коши (1), (2) к интегро-алгебраическому уравнению типа Абеля

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds = g(t), \quad (3)$$

с правой частью $g(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t)$.

Если индекс матричного пучка $\lambda A + B$ равен k , $f \in C^{k-1}([0;1], R^n)$, $f^{(i)}(0) = 0$, где $i = 0, \dots, k-1$, и $u_0 = 0$, то задача типа Коши (1), (2) и ее эквивалентная интегральная форма (3) имеют единственное непрерывное решение.

Численный метод решения задачи типа Коши (1), (2) построен на основе интегрального представления (3). Для вычисления интегрального слагаемого будем использовать квадратурную формулу левых прямоугольников с выделенной весовой функцией $p(t,s) = (t-s)^{\alpha-1}$. Задавая на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N},$$

и вводя обозначение $v_i = v(t_i)$ для некоторой функции $v = v(t)$, получим цепочку равенств

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} v(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_i - s)^{\alpha-1} v(s) ds \approx$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^i v_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_i - s)^{\alpha-1} ds = \sum_{j=1}^i \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left((i-j+1)^\alpha - (i-j)^\alpha \right).$$

Введем обозначения $g_i = g(t_i)$, $u_i \approx u(t_i)$, тогда численный метод имеет вид

$$Au_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^i h^\alpha \left((i-j+1)^\alpha - (i-j)^\alpha \right) Bu_j = g_i, \quad i=1, \dots, N.$$

Численные расчеты проведены на тестовых примерах дифференциально-алгебраических уравнений порядков 0,05 и 0,95, близких к граничным значениям параметра α , порядка 0,5, который является центральным интервальным значением параметра α , а также порядков 0,25 и 0,75, выбранных произвольно. Рассмотрим один из таких примеров

$$D_{0+}^\alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \alpha \in (0;1),$$

в котором матричный пучок $\lambda A + B$ имеет индекс 2, точным решением является двумерная вектор-функция

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\ t^3 \end{pmatrix},$$

а правая часть интегрального аналога (3) имеет вид

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6t^{3+\alpha}}{\Gamma(4+\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов, выполненные с помощью указанного выше алгоритма, приведены в табл. 1.

Результаты численных экспериментов показали, что предлагаемый алгоритм имеет первый порядок точности. Дальнейшее направление работы связано с исследованием свойств предложенного алгоритма и его переносом на дифференциально-алгебраические уравнения дробного порядка с переменными матричными коэффициентами, а также разработкой численных методов решения таких дифференциально-алгебраических уравнений более высоких порядков.

Таблица 1

Расчеты тестового примера

h	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.95$
0.2	0.0670	0.3126	0.5917	0.8457	1.0213
0.1	0.0416	0.1894	0.3438	0.4690	0.5481
0.05	0.0250	0.1093	0.1888	0.2477	0.2836
0.025	0.0146	0.0609	0.1002	0.1276	0.1442

Список литературы

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam ; Boston ; Heidelberg : Elsevier Science Publishers, 2006. 541 p.

2. Индуцкая Т. С., Орлов С. С. Разрешимость начальной задачи типа Коши для дифференциально-операторного уравнения дробного порядка // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 59 : материалы XIX Всероссийской молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2020». Ижевск : ООО «Принт», 2020. С. 61–65.

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях

Анастасия Александровна Пивкина

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

nastyashaldaeva@mail.ru

Аннотация. Сингулярными интегральными уравнениями в исключительных случаях моделируются многие процессы в физике и технике, поэтому возникает необходимость в разработке приближенных методов их решения. Для решения таких уравнений в работе предложена вычислительная схема с использованием преобразования Фурье.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, исключительный случай, преобразование Фурье, непрерывный метод, итерационные методы

Финансирование: работа выполнена при частичной поддержке Ректорского гранта Пензенского государственного университета (договор № ХП-221/22 от 31.03.2022).

Approximate methods for solving singular integral equations in exceptional cases

Anastasiya A. Pivkina

Penza State University, Penza, Russia

nastyashaldaeva@mail.ru

Abstract. Singular integral equations in exceptional cases model many processes in physics and technology, so there is a need to develop approximate methods for solving them. To solve such equations, we propose a computational scheme using the Fourier transform.

Keywords: singular integral equation, exceptional case, Fourier transform, continuous method, iterative methods

Acknowledgments: The work was supported by the Rector's Grant of the Penza State University (agreement No. ХП-221/22 dated March 31, 2022).

Стоит отметить, что теорию и приближенные методы решения решения сингулярных интегральных уравнений нормального типа можно считать в настоящее время можно считать полностью разработанными. Значительно менее исследованными являются сингулярные интегральные уравнения в исключительных и вырожденных случаях. Напомним их определение.

При исследовании сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L h(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in L$$

1) когда функция $a^2(t) \pm b^2(t)$ обращается в нуль в конечном числе точек $t_k \in L$, $k = \overline{0, N}$, $N = \text{const}$ – исключительный случай;

2) когда функция $a^2(t) \pm b^2(t)$ обращается в нуль на целых многообразиях типа сегментов – вырожденный случай.

В данной работе представлена вычислительная схема для решения сингулярного интегрального уравнения вида

$$x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \quad (1)$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (1), тогда

$$X(\omega)G(\omega) = F(\omega), \quad (2)$$

где $G(\omega) = \begin{cases} 2, & -\infty < \omega < 0, \\ 0, & 0 < \omega < \infty. \end{cases}$ Из (2) при $-\infty < \omega < 0$ имеем $X(\omega) = \frac{F(\omega)}{2}$.

Получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{F(\omega)}{2}, \quad -\infty < \omega < 0. \quad (3)$$

Построим вычислительную схему для приближенного решения уравнения (3).

Введем три сетки узлов

$$t_k = -A + \frac{Ak}{N}, \quad k = \overline{0, 2N},$$

$$\omega_k = -2B + \frac{Bk}{N}, \quad k = \overline{0, 2N},$$

$$\bar{\omega}_k = \omega_k + \frac{B}{N}, \quad k = \overline{0, 2N-1},$$

причем A и B достаточно большие числа.

И интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, 2N-2}$, $\Delta_{2N-1} = [t_{2N-1}, A]$.

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k. \end{cases}$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{0, 2N-1}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{A}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} e^{i\bar{\omega}_l t} dt = \frac{F(\bar{\omega}_l)}{2}, \quad l = \overline{0, 2N-1}. \quad (4)$$

Интегралы в (2) вычисляются аналитически

$$\frac{A}{N} \frac{1}{i\bar{\omega}_l} \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \left(e^{i\bar{\omega}_l t_{k+1}} - e^{i\bar{\omega}_l t_k} \right) = \frac{F(\bar{\omega}_l)}{2}, \quad l = \overline{0, 2N-1}. \quad (5)$$

Запишем систему (5) в матричном виде

$$K(\alpha) = G, \quad (6)$$

где $K = \{k_{ij}\}$, $i, j = \overline{0, 2N-1}$ – матрица левой части системы (5),

$G = \frac{F(\bar{\omega}_l)}{2}$, $l = \overline{0, 2N-1}$ – правая часть системы (5).

Далее вычисляем логарифмическую норму матрицы K по формуле

$$\Lambda(K) = \max_i \left(k_{ii} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2N-1} |k_{ij}| \right).$$

Согласно теоремам в [1] норма должна быть отрицательной. В случае если это не выполняется, то необходимо проводить регуляризацию [2]. Тогда умножаем систему (6) слева на сопряженную матрицу K^*

$$K^* K Y = K^* G. \quad (7)$$

Согласно рассуждениям в [1, 2] логарифмическая норма $\Lambda(K^* K)$ должна быть больше или равна нулю. Если это условие выполняется, то в системе (7) можно применить непрерывный метод решения операторных уравнений

$$\frac{dY(u)}{du} = -[K^* K Y(u) - K^* G]. \quad (8)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) решается методом Эйлера

$$Y(n+1) = Y(n) - h[K^* K Y(n) - K^* G],$$

где h – шаг метода Эйлера.

Приведем результаты ряда вычислительных экспериментов.

Пример 1. Пусть точное решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$, тогда преобразование Фурье $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.

Результаты приближенного решения представлены в табл. 1 при $A = 10, B = 20, N = 100, h = 0,001, 1000$ итераций.

Таблица 1

Результаты решения примера 1

№ точки	Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
0	$6,309 \cdot 10^{-4}$	$6,586 \cdot 10^{-4} - 1,623 \cdot 10^{-5}i$	$2,793 \cdot 10^{-5}$
20	$7,796 \cdot 10^{-4}$	$8,159 \cdot 10^{-4} - 2,965 \cdot 10^{-5}i$	$3,682 \cdot 10^{-5}$
40	$9,879 \cdot 10^{-4}$	$1,039 \cdot 10^{-3} - 5,544 \cdot 10^{-5}i$	$5,299 \cdot 10^{-5}$
60	$1,292 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-3} - 1,134 \cdot 10^{-4}i$	$9,246 \cdot 10^{-5}$
80	$1,762 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3} - 2,763 \cdot 10^{-4}i$	$2,662 \cdot 10^{-4}$
100	$2,544 \cdot 10^{-3}$	$3,91 \cdot 10^{-3} + 5,531 \cdot 10^{-5}i$	$1,366 \cdot 10^{-3}$
120	$3,99 \cdot 10^{-3}$	$4,51 \cdot 10^{-3} + 6,19 \cdot 10^{-5}i$	$5,718 \cdot 10^{-4}$
140	$7,131 \cdot 10^{-3}$	$7,605 \cdot 10^{-3} + 6,41 \cdot 10^{-5}i$	$5,009 \cdot 10^{-4}$
160	0,016	$0,017 + 9,859 \cdot 10^{-4}i$	$8,495 \cdot 10^{-4}$
180	0,065	$0,067 + 3,191 \cdot 10^{-3}i$	$2,742 \cdot 10^{-3}$
199	1	$0,973 - 0,039i$	0,026

Пример 2. Пусть точное решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \frac{t}{t^4 + 1}, \text{ тогда преобразование Фурье } F(\omega) = i\pi e^{-\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

Результаты приближенного решения представлены в табл. 2 при $A = 5, B = 10, N = 100, h = 0,001, 1000$ итераций.

Таблица 2

Результаты решения примера 2

№ точки	Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
0	$-1,269 \cdot 10^{-4}$	$-1,265 \cdot 10^{-4} - 1,33 \cdot 10^{-6}i$	$3,568 \cdot 10^{-7}$
20	$-1,744 \cdot 10^{-4}$	$-1,733 \cdot 10^{-4} - 2,81 \cdot 10^{-6}i$	$9,932 \cdot 10^{-7}$
40	$-2,488 \cdot 10^{-4}$	$-2,453 \cdot 10^{-4} - 6,73 \cdot 10^{-6}i$	$3,392 \cdot 10^{-6}$
60	$-3,723 \cdot 10^{-4}$	$-3,555 \cdot 10^{-4} - 1,83 \cdot 10^{-5}i$	$1,639 \cdot 10^{-5}$
80	$-5,934 \cdot 10^{-4}$	$-4,854 \cdot 10^{-4} + 4,75 \cdot 10^{-6}i$	$1,079 \cdot 10^{-4}$
100	$-1,031 \cdot 10^{-3}$	$-1,081 \cdot 10^{-3} + 2,91 \cdot 10^{-4}i$	$8,909 \cdot 10^{-5}$
120	$-2,028 \cdot 10^{-3}$	$-2,456 \cdot 10^{-3} - 1,09 \cdot 10^{-5}i$	$4,283 \cdot 10^{-4}$
140	$-4,865 \cdot 10^{-3}$	$-5,095 \cdot 10^{-3} - 2,26 \cdot 10^{-4}i$	$2,347 \cdot 10^{-4}$
160	-0,017	$-0,017 - 3,91 \cdot 10^{-4}i$	$2,615 \cdot 10^{-4}$
180	-0,135	$-0,137 - 1,04 \cdot 10^{-3}i$	$1,593 \cdot 10^{-3}$
199	-0,1	$-0,101 - 2,74 \cdot 10^{-3}i$	$7,959 \cdot 10^{-4}$

Пример 3. Пусть точное решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = \frac{e^{it}}{t^2 + 1}$, тогда преобразование Фурье $F(\omega) = \pi e^{-|\omega-1|}$.

Результаты приближенного решения представлены в табл. 3 при $A = 10, B = 20, N = 100, h = 0,001, 1000$ итераций.

Таблица 3

Результаты решения примера 3

№ точки	Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
0	$-3,19 \cdot 10^{-4} - 5,44 \cdot 10^{-4}i$	$-3,192 \cdot 10^{-4} - 5,33 \cdot 10^{-4}i$	$9,443 \cdot 10^{-6}$
20	$-2,514 \cdot 10^{-3} + 7,38 \cdot 10^{-4}i$	$-2,655 \cdot 10^{-4} + 7,29 \cdot 10^{-4}i$	$3,399 \cdot 10^{-6}$
40	$9,159 \cdot 10^{-4} - 3,71 \cdot 10^{-4}i$	$9,401 \cdot 10^{-4} - 3,82 \cdot 10^{-4}i$	$2,681 \cdot 10^{-5}$
60	$-1,15 \cdot 10^{-3} - 5,91 \cdot 10^{-4}i$	$-1,159 \cdot 10^{-4} - 5,41 \cdot 10^{-4}i$	$1,364 \cdot 10^{-5}$
80	$4,156 \cdot 10^{-4} + 1,72 \cdot 10^{-3}i$	$3,377 \cdot 10^{-4} + 1,62 \cdot 10^{-3}i$	$1,104 \cdot 10^{-4}$
100	$1,479 \cdot 10^{-3} - 2,07 \cdot 10^{-3}i$	$1,715 \cdot 10^{-3} - 1,76 \cdot 10^{-3}i$	$9,14 \cdot 10^{-5}$
120	$-3,973 \cdot 10^{-3} + 3,67 \cdot 10^{-4}i$	$-4,135 \cdot 10^{-3} + 1,24 \cdot 10^{-4}i$	$1,466 \cdot 10^{-4}$
140	$5,137 \cdot 10^{-3} + 4,95 \cdot 10^{-3}i$	$5,422 \cdot 10^{-3} + 5,01 \cdot 10^{-3}i$	$2,478 \cdot 10^{-4}$
160	$8,725 \cdot 10^{-4} - 0,016i$	$4,805 \cdot 10^{-4} - 0,016i$	$3,551 \cdot 10^{-4}$
180	$-0,051 + 0,04i$	$-0,052 + 0,038i$	$1,869 \cdot 10^{-4}$
199	$0,942 - 0,191i$	$0,865 - 0,187i$	$0,077$

Пример 4. Пусть точное решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = \frac{(\beta - it)^{-\nu}}{t^2 + \alpha^2}$, тогда преобразование Фурье $F(\omega) = \pi \frac{(\beta - \alpha)^{\nu}}{\alpha} e^{\alpha\omega}$.

Результаты приближенного решения представлены в табл. 4 при $\alpha = 0,5, \beta = 0,7, \nu = -0,5, A = 5, B = 10, N = 100, h = 0,001, 1000$ итераций. Продемонстрирована эффективность построенного алгоритма.

Таблица 4

Результаты решения примера 4

№ точки	Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
0	$8,102 \cdot 10^{-3} + 7,82 \cdot 10^{-3}i$	$7,786 \cdot 10^{-4} + 7,1 \cdot 10^{-3}i$	$7,229 \cdot 10^{-4}$
20	$9,514 \cdot 10^{-3} + 9,15 \cdot 10^{-3}i$	$9,036 \cdot 10^{-3} + 8,12 \cdot 10^{-3}i$	$1,054 \cdot 10^{-3}$
40	$0,011 + 0,011i$	$0,011 + 9,28 \cdot 10^{-3}i$	$1,641 \cdot 10^{-3}$
60	$0,014 + 0,013i$	$0,013 + 0,01i$	$2,807 \cdot 10^{-3}$
80	$0,018 + 0,017i$	$0,017 + 9,69 \cdot 10^{-4}i$	$4,965 \cdot 10^{-3}$
100	$0,023 + 0,022i$	$0,049 + 0,012i$	$0,018$
120	$0,033 + 0,03i$	$0,048 + 0,037i$	$0,016$
140	$0,052 + 0,046i$	$0,063 + 0,053i$	$0,013$
160	$0,099 + 0,083i$	$0,112 + 0,092i$	$0,016$
180	$0,302 + 0,211i$	$0,33 + 0,233i$	$0,035$
199	$3,347$	$3,391 + 0,164i$	$0,048$

Список литературы

1. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
2. Бойков И. В., Пивкина А. А. Итерационные методы решения уравнений Амбарцумяна. Часть 2 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 3–21.
3. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю., Шалдаева А. А. К вопросу о единственности решений вырожденных сингулярных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1. С. 3–21. doi:10.21685/2072-3040-2020-1-1
4. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю., Шалдаева А. А. Приближенные методы решения полисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 2. С. 44–60. doi:10.21685/2072-3040-2020-2-5
5. Бойков И. В., Шалдаева А. А. Итерационные методы решения уравнений Амбарцумяна. Часть 1 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2. С. 14–34. doi:10.21685/2072-3040-2021-2-2

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

УДК 37.012:007

Автоматизация динамики долгосрочного прогнозирования экономических процессов по отраслям

Татьяна Фанадовна Мамедова¹, Иван Иванович Лихорадов²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия

¹mamedovatf@yandex.ru, ²ivan098123@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача моделирования и исследования динамики долгосрочного прогнозирования экономических процессов по отраслям. Представлено программное обеспечение, реализующее прогнозирование динамики многосекторной экономики.

Ключевые слова: моделирование, динамика, прогнозирование, экономические процессы, математическая модель

Automation of the dynamics of long-term forecasting of economic processes by industry

Tat'yana F. Mamedova¹, Ivan I. Likhoradov²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹mamedovatf@yandex.ru, ²ivan098123@gmail.com

Abstract. The problem of modeling and studying the dynamics of long-term forecasting of economic processes by industry is considered. The software that implements the forecasting of the dynamics of a multi-sector economy is presented.

Keywords: modeling, dynamics, forecasting, economic processes, mathematical model

Задача моделирования и исследования динамики долгосрочного прогнозирования экономических процессов не является новой.

Многие ученые успешно решали эту задачу. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет внести в решение этой задачи новые методы [1, 2].

Обычно процесс математического моделирования для более успешного его применения, любого научного направления можно разбить на несколько этапов (рис. 1). Рассмотрим многосекторную модель экономики и функциональные взаимосвязи модулей в ней (рис. 2).

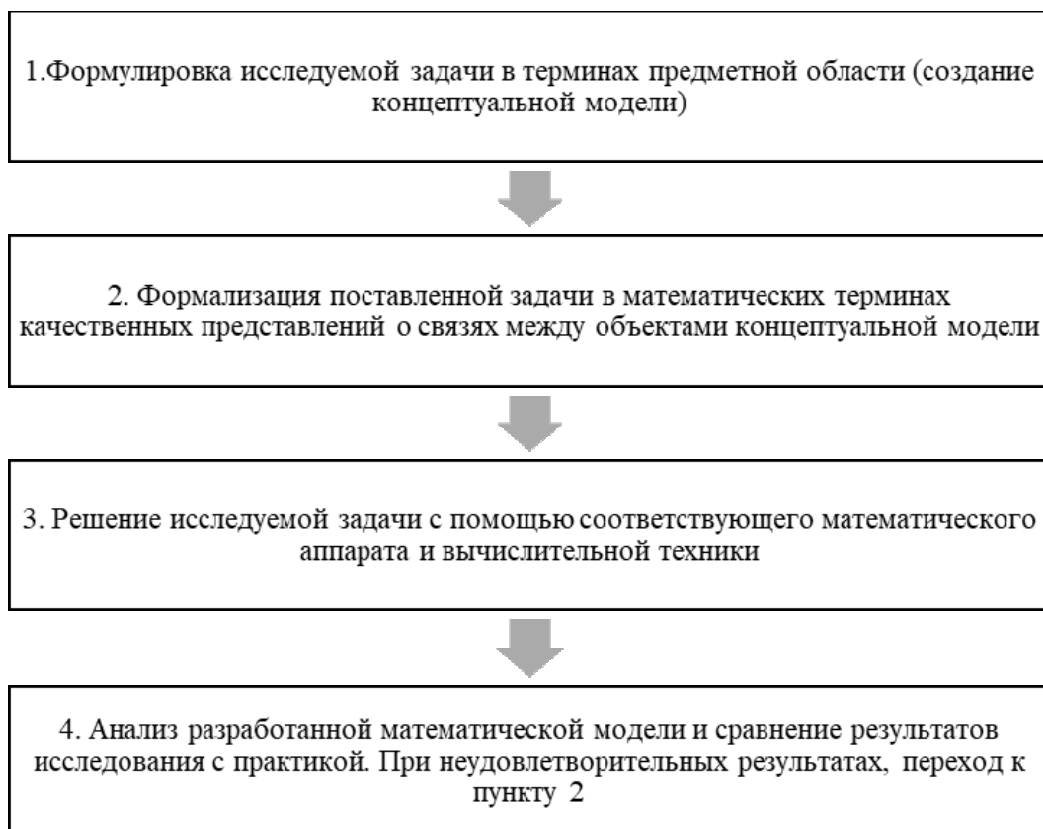


Рис.1. Блок-схема этапов моделирования

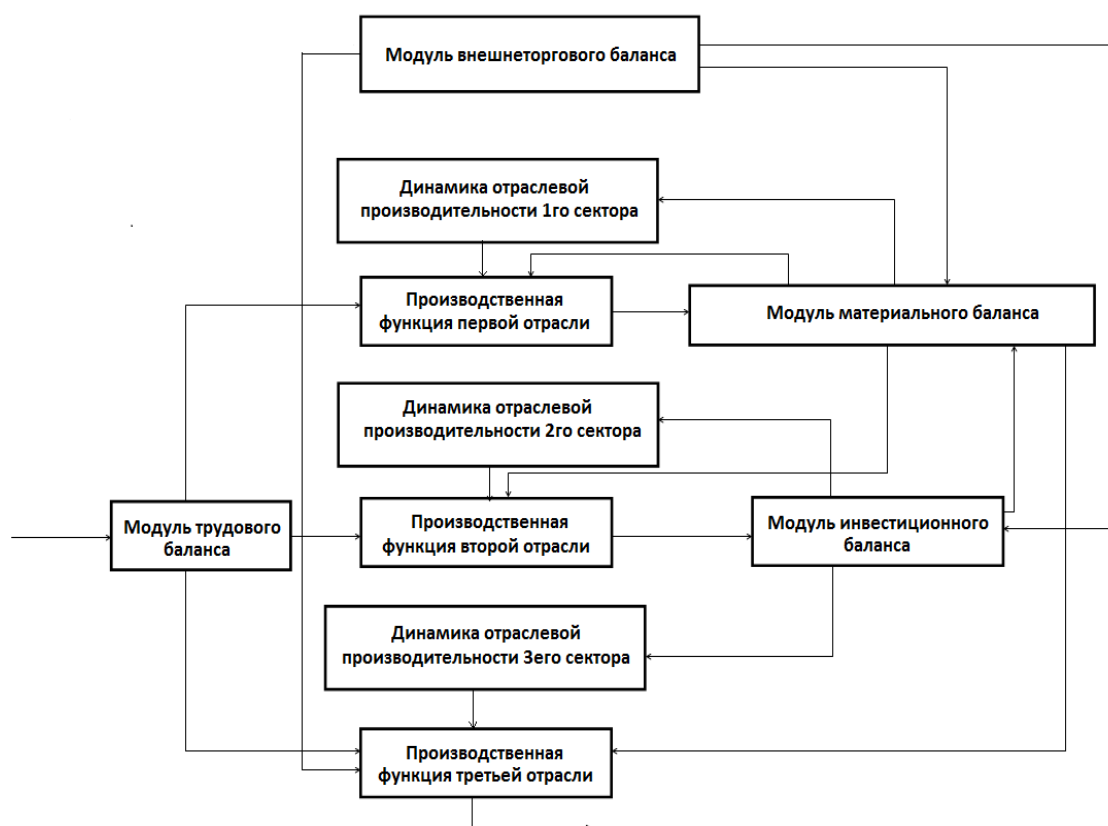


Рис. 2 Структура модулей многосекторной модели

Для создания программного комплекса в данной работе использовался объектно-ориентированный язык программирования C#.

Для наглядной демонстрации принципа работы созданного пакета программ рассмотрим пример решения задачи прогнозирования динамики прибыли основных производственных фондов по отраслям [3,4].

Программный комплекс был написан на объектно-ориентированный язык программирования C#.

Во-первых, необходимо ввести исходные данные (рис. 3).

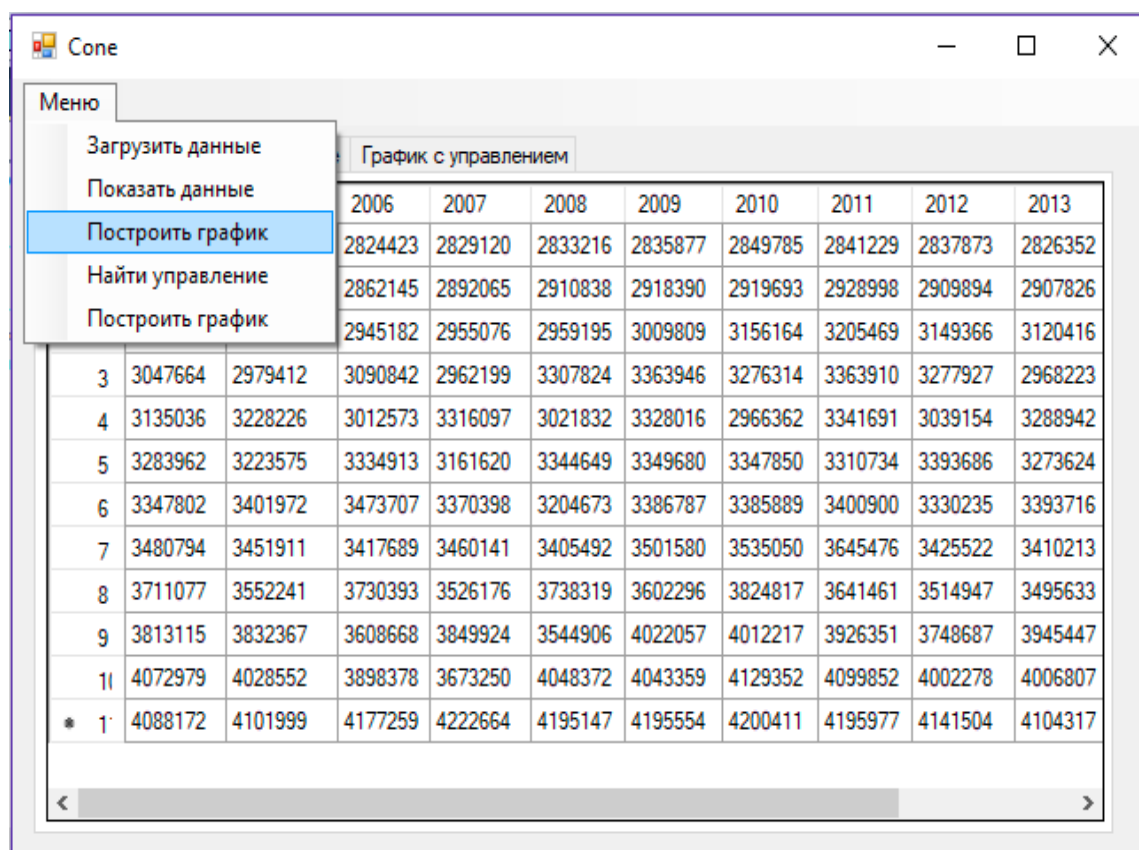


Рис. 3. Страница программного пакета с данными статистики

В созданном пакете прикладных программ предусмотрен вывод результата решения задачи в различных форматах, например, в табличном и графическом представлении, а так же экспорт в Word или Excel.

Для решения задачи прогнозирования расчета прибыли по отраслям пользователю необходимо ввести статистическую базу данных по группе значений показателей за требуемый временной интервал (рис. 4):

Графическое решения задачи расчета динамики прибыли по отраслям представлено на рис. 5.

Анализируя графическое решение задачи, можно сделать вывод о неизменном возрастании прибыли по всем рассмотренным отраслям.

Таким образом, разработанный программный комплекс, позволяет отслеживать состояния экономической системы в динамике на долгосрочный период.

С Cone

Параметры трехсекторной модели

Выберите отрасль для просмотра параметров

Сельское хозяйство

Коэффициенты функций Кобба-Дугласа

α_i (эластичность по капиталу)

β_i (эластичность по труду)

Коэффициенты прямых материальных затрат a_i

Начальная доля инвестиций s_i

Начальная доля трудовых ресурсов θ_i

Начальное значение фондовооруженности

Рис. 4. Страница ввода исходных данных

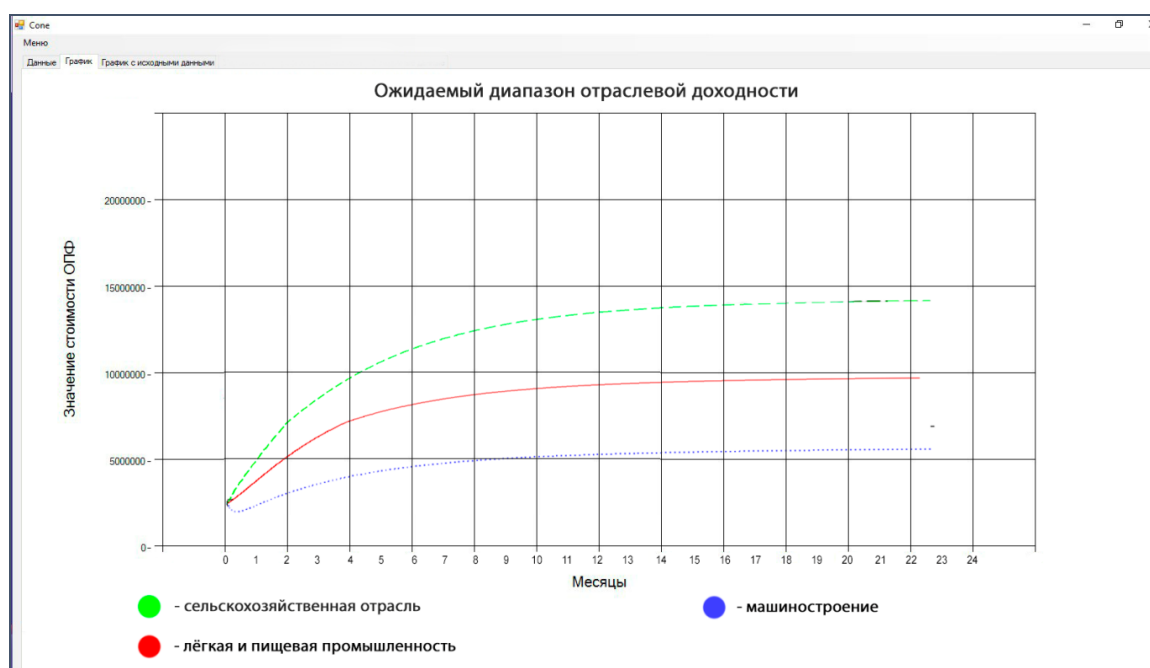


Рис. 5. Графики прибыли по отраслям.

В программном комплексе предусмотрена возможность для каждого вида задачи подбирается свой, наиболее эффективный метод решения.

Список литературы

1. Андреев В. В., Семёнов М. И. Математическое моделирование динамики социально-экономической системы России: определение наилучшего пути развития // Нелинейный мир. 2013. Т. 11, № 1. С. 58–72.
2. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Якунина А. Д. О моделировании динамических процессов // XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых) : Международная молодёжная научная конференция (7–8 ноября 2019 г.) : материалы конф. Казань : Изд-во ИП Сагиева А. Р., 2019. С. 229–232.

3. Сузиков А. М., Мамедова Т. Ф. Создание модели машинного обучения для прогнозирования экономического развития. Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем // Материалы XIV Международной науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. (г. Пенза, 1–4 июня 2020 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 129–133.

4. Мамедова Т. Ф., Поверинов А. И., Якунина А. Д., Яшин Е. Е. Анализ частичной устойчивости процессов долгосрочного прогнозирования // Актуальные проблемы математики, механики, естествознания и образования : сб. статей Всерос. науч.-практ.конф., посвящ. 100-летию профессора А. А. Шестакова. Москва, 2021. С. 94–101.

Анализ моделей спроса и предложения инженерно-технических специалистов

**Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова², Павел Владимирович Айкашев³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Аннотация. Проблема отсутствия сбалансированности спроса и предложения на рынке труда специалистов высшей и средней квалификации не только приводит к потерям человеческого капитала, но также в значительной мере препятствует инновационному и научно-технологическому развитию. Предварительный анализ показал, что количество выпускаемых инженерно-технических специалистов начиная с начала 1990-х гг. в процентной составляющей постепенно уменьшалось, пока не стабилизировалось на уровне около 20 % с 2010 г. При этом, как показывают исследования, в последние годы с каждым годом все больше и больше открывается новых вакансий для инженеров. Другой проблемой для сбалансированности спроса и предложения для инженерно-технических кадров процесс деиндустриализации и снижения престижности и уровня заработной платы инженерных специальностей в России, что приводит к оттоку кадров и устройству инженеров на специальности, никак не связанные с той специальностью, которую они получали в высших учебных заведениях. Приведен обзор основных причин несбалансированности спроса для инженерно-технических специальностей и описаны основные экономические модели, используемые для анализа моделей спроса и предложения инженерно-технических специалистов.

Ключевые слова: инженерно-технические специалисты, спрос на труд, предложение труда, моделирование, выпуск специалистов, сбалансированность спроса и предложения

Analysis of supply and demand models of engineering and technical specialists

Tat'yana V. Cherusheva¹, Natal'ya V. Zverovshchikova², Pavel V. Aykashev³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹tank1100@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³aikashev.pavel@mail.ru

Abstract. The problem of the lack of balance between supply and demand in the labor market of specialists of higher and medium qualifications not only leads to losses of human capital, but also greatly hinders innovation and scientific-technological development. Preliminary analysis has shown that the number of graduating engineers and technicians has been gradually decreasing in the percentage component since the early 90's, until it stabilized at about 20 % since 2010. At the same time,

research shows that in recent years more and more new positions for engineers have been opened every year. Another problem for the balance of supply and demand for engineering and technical personnel is the process of deindustrialization and reduction of prestige and salary level of engineering professions in Russia, which leads to the outflow of personnel and engineers' employment in professions not related to the specialty they graduated from higher education institutions. The article reviews the main causes of imbalanced demand for engineering specialties and describes the main economic models used to analyze the supply and demand models of engineering specialists.

Keywords: engineering and technical professionals, labor demand, labor supply, modeling, graduation of specialists, balance of supply and demand

Начиная с первой половины 1990-х годов в России стала наблюдаться следующая ситуация: количество выпускников, заканчивающих инженерно-технические специальности, начало стремительно сокращаться: если в начале 90-х годов прошлого века около 28% всех выпускников высших учебных заведений являлись инженерами, то к 2010 году число выпускающихся инженеров сократилось на 6%, что дает сокращение выпускаемых инженеров на четверть. Начиная с 2010 года ситуация стабилизировалась. Так в 2013 г. количество инженеров составило 20.8% от общего количества всех выпускников.

Как показали исследования, в последние годы с каждым годом все больше и больше открывается новых вакансий для инженеров: 270 тысяч в 2019 г, 300 тысяч в 2020 и 96 тысяч новых вакансий только за первый квартал 2021 года.

Это показывает необходимость решения задачи анализа спроса и предложения инженерно-технических специалистов (ИТС).

Другой проблемой является отток наиболее перспективных кадров за рубеж, связанный с низким уровнем заработной платы, невысоким престижем инженерно-технических специальностей и неудовлетворенной потребностью работодателей в уровне подготовки выпускаемых инженеров [1].

При этом, как показали некоторые исследования, часть инженерно-технических специалистов работают по профессиям, никак не связанным с той специальностью, которую они получали в высших учебных заведениях.

Все это подчеркивает актуальность задачи разработки моделей и подходов для осуществления сценарного прогнозирования возможной степени сбалансированности спроса и предложения труда ИТС.

Начиная с послевоенного времени в СССР в связи с необходимостью экономического восстановления проводилась программа стимулирования повышенного спроса на инженерно-технических специалистов.

Данный период можно разделить на 3 временных промежутка:

1950-1960-е г, в которые был повышенный спрос на ИТС, при наблюдаемом дефиците;

вторая половина 60-х годов прошлого века – первая половина 70-х годов, рынок спроса и предложения были сбалансированы относительно друг друга, при том, что количество подготавливаемых ИТС было значительно увеличено;

с середины 60-х годов 20-го века и до 1991 года наблюдалась избыточность инженерно-технических специалистов, из-за чего рост численности ИТС замедлился, а общее количество выпускаемых инженеров и техников стало сокращаться.

Развитие методов анализа задачи моделирования спроса и предложений инженерно-технических специалистов началось лишь в второй половине 20-го века.

Возможно, одной из первых работ, посвященной этой задаче являлась работа С.Г. Струмилина [4], в которой автор продемонстрировал важную роль ИТС для построения нового технологического уклада.

Рассмотрению ИТС как совокупность трудовых ресурсов, так и отдельной группы работников, посвящены работы [5], [6].

Задаче анализа дефицита и прогнозирования потребности в инженерах посвящены работы [7]-[10], среди которых можно особенно отметить работы К. Эрроу и У. Капрона [7], Д. Бланка и Дж. Стиглера [8].

Изменению в содержании и структуре труда, а также влияние научно-технического прогресса были посвящены многие работы 70-х годов прошлого века [11]. В эти годы было опубликовано несколько работ, посвященных непосредственно анализу роли инженерно-технических специалистов, особенностям труда и подготовки кадров [13], [14], и формированию ИТС как отдельной социальной группы [15].

Фундаментальными работами в задачах моделирования перехода работников из одной социальной группы (или роли) в другую и планирования трудовых ресурсов являются работы Э.Ф. Баранова, Б.Д. Бреева [16], [17]. Планированию численности инженерно-технических специалистов посвящена работа О.Т. Лебедева [18].

Начиная с перехода к рыночной экономике в России стали уделять большое внимание проблемам рынка труда высококвалифицированных специалистов, в том числе и ИТС. Это можно видеть по работам А.Г. Коровкина [19], Р.И. Капелюшникова [20], в которых рассматриваются проблемы спроса и предложения высококвалифицированных работников, продемонстрированы текущие причины дефицита и избытка кадров некоторых отдельных групп.

Анализу и поиску решений проблемы дефицита и избытка работников научно-технической сферы в целом посвящены работы Варшавского А.Е. [22], Варшавского Л.Е. [23], Дубининой М.Г. [24], Никоновой М.А. [25], Нанавян А.М. [26]. Например, определению факторов, влияющих на изменение динамики научных кадров, посвящена работа [27]. Также в этой работе была предложена модель прогнозирования численности научных специалистов.

Начиная с начала 21-го века, множество работ было посвящено проблемам преемственности [22], [23], [24]; дефициту высококвалифицированных кадров [21]; риску возникновения избытка рабочей силы с третичным образованием [28].

Исследование существующих проблем в подготовке и последующем трудоустройстве инженерно-технических специалистов (включая трудоустройство по полученной специальности) было проведено в работе [29].

Анализу и сравнению показателей трудоустройства экономических и инженерных специальностей посвящена работа [30].

Одними из основных методов, применяемых для анализа спроса и предложений высококвалифицированных кадров (в том числе инженерно-технических и научных специалистов), являются нормативный метод и численное моделирование.

Нормативный метод заключается в определении основных показателей на основе известных соотношений. Обычно он применяется в тех отраслях, в которых существует стабильная упорядоченная структура кадров. Примерами таких отраслей может служить строительство, в котором можно спрогнозировать, какое количество различных специалистов потребуется для завершения проекта. Это возможно благодаря существующим строгим нормативам, описывающим требования для различных строительных и инженерных работ [31]. Другой областью, где может применяться нормативный подход, является энергетика, где данный подход используется для расчета потребности в специалистах по специальностям образования [32]. Так как данный метод требует наличия достоверных нормативов и наличия подробной статистической базы, то это и является его главным недостатком. Поэтому он не может быть применен в новых областях, в которых ещё не были сформулированы точные нормативы необходимого числа требуемых кадров.

Более универсальным методом для прогнозирования спроса и предложений инженерно-технических специалистов является разработка балансовых и матричных моделей,

Разработкой балансовых моделей занимались такие ученые СССР как Э.Ф. Баранова, Б.Д. Бреева [16], [17]. Из иностранных авторов можно выделить балансовые модели построенные Бюро статистики труда США [33] и Великобритании [34].

Фундамент для прогнозирования потребности в инженерно-технических специалистах используя матрицы соответствия «профессия – специальность» был заложен в работах G.Psacharopoulos [35] и др.

Балансовые модели оценки потребности в специалистах рассмотрены в работах G.Evans [36], R.Bezdek [37] и др.

Матричные модели основаны на тех же принципах и соотношениях, что и балансовые модели, однако, в матричных моделях, модель для

определения потребности в кадрах дополняется моделями динамики макроэкономических показателей и учетом сценариев социально экономического развития [38].

Одним из наиболее часто применяемого подхода для построения матричных моделей является рассмотрение процесса изменения социальных групп в виде марковского процесса, [27]. При этом подобный подход позволяет получить точные результаты только для краткосрочного периода. Как было показано в работе Э.Ф. Баранова и Б.Д. Бреева [17].

Разработкой многофакторных численных моделей решения задачи моделирования потребностей и предложения на рынке труда занимался А.Г. Коровкина [39]. В своих работах он выделял отдельные блоки потребности и предложения специалистов на российском рынке труда. Каждый из таких блоков задается с помощью регрессионных уравнений для каждого из исследуемых экономических секторов, агрегирование и равновесие определяется благодаря балансовым уравнениям.

В экономических исследованиях для описания динамики показателей, отражающих конкурентные отношения двух агентов, используются модели, аналогичные моделям межвидовой конкуренции в экологии. В общем виде такие модели могут быть представлены системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 (a_1 - b_{12}x_2 - c_1x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 (a_2 - b_{21}x_1 - c_2x_2) \end{cases} \quad (1)$$

где x_1, x_2 – численность агентов в конкурирующих группах, c_1, c_2 – константы, ограничивающие численность, b_{12}, b_{21} – константы, определяющие характер взаимодействия

Подобные модели рассматривались в работах Гудвина [40], А.Г. Коровкина [39], В. Вайдлиха [41] и др.

В работе [42] для оценки изменения численности занятых в отдельных регионах России (в том числе занятости иностранных специалистов) была использована нелинейная модель типа хищник-жертва.

R. Freeman в своей работе [43] построил паутиннообразную модель для анализа динамики рынка труда для инженерно-технических специалистов.

Эта модель состоит из 4 блоков:

1. Формирование потока абитуриентов:

$$ENT = a_1SAL * (0) - a_1ASAL * (0) + \mu_1. \quad (2)$$

2. Предложение труда выпускников:

$$GRAD = b_1ENT(-4) + b_2(SAL(-3) + SAL(-2)) +$$

$$+b_3(ASAL(-3)+ASAL(-2))+\mu_2. \quad (3)$$

3. Определение уровня оплаты труда:

$$SAL = c_1RD + c_2DUR - c_3GRAD + \mu_3 \quad (4)$$

4. Формирование ожиданий уровня оплаты труда (рассмотрены 2 варианта):

$$(a) \begin{cases} SAL^* = SAL; \\ ASAL^* = ASAL. \end{cases} \quad (5)$$

$$(b) \begin{cases} SAL^* = \lambda SAL + (1-\lambda)SAL(-1); \\ ASAL^* = \lambda ASAL + (1-\lambda)ASAL(-1). \end{cases} \quad (6)$$

В этой модели ENT – численность абитуриентов, поступивших на инженерные специальности; SAL^* – ожидаемый уровень оплаты труда инженеров спустя 4 и более года после поступления (в момент $t+4$); $ASAL^*$ – ожидаемый уровень оплаты труда альтернативных профессий 4 года или более спустя после года поступления (в момент $t+4$); SAL – фактический уровень оплаты труда инженеров; $ASAL$ – фактический уровень оплаты труда по альтернативным профессиям; $GRAD$ – численность выпускников по инженерным специальностям; RD – расходы на НИОКР; DUR – выпуск продукции длительного пользования.

Однако, как показано в работе [44], данная модель имеет ограниченное применение, в связи с тем, что заработная плата обладает невысокой эластичностью по объему спроса и предложения на рынке труда в краткосрочный период. Поэтому разными исследователями были предложены различные модификации этой модели, среди которых были рассмотрены такие предложения как: замена абсолютной величины заработной платы по специальности относительной, выбор в качестве эндогенной переменной в моделях спроса численности занятых инженеров, учет фактора «заинтересованности» абитуриентов специальностью [45].

Таким образом, анализ известных подходов показывает перспективность дальнейшего развития динамических моделей, связывающих отдельные блоки спроса и предложения труда ИТС и учитывающих как поведенческие особенности агентов при выборе будущей специальности, так и макроэкономические факторы спроса на рассматриваемую категорию специалистов.

Список литературы

1. Гимпельсон В. Е. Дефицит квалификации и навыков на рынке труда: недостаток предложения, ограничения спроса или ложные сигналы работодателей? М. : ГУ ВШЭ, 2004. 36 с.

2. Сбытова Л. С. Структура занятости и эффективность производства. М. : Наука, 1982. 175 с.
3. Варшавский А. Е., Кочеткова Е. В. Анализ показателей численности инженерно-технических специалистов в России // Экономический анализ: теория и практика. 2016. № 9 (456). С. 67–85.
4. Струмилин С. Г. Проблемы экономики труда: избранные сочинения : в 5 т. М. : Изд-во АН СССР, 1963. Т. 3. 576 с.
5. Бляхман Л. С., Шкаратан О. И. НТР, рабочий класс, интеллигенция. М. : Политиздат, 1973.
6. Движение рабочих кадров в промышленности / под ред. Л. М. Данилова. М. : Статистика, 1973.
7. Arrow K. J., Capron W. M. Dynamic Shortages and Price Rises: The Engineer-scientist Case // The Quarterly Journal of Economics. 1959. Vol. 73, Iss. 2. P. 292–308.
8. Blank D. M., Stigler G. J. The Demand and Supply of Scientific Personnel. New York : National Bureau of Economic Research, 1957. P. 29–30.
9. Hansen W. L. The Shortage of Engineers // Review of Economics Statistics. 1961. Vol. 43. P. 251–256
10. Hansen W. L., Moser C., Brown D. The Economics of Scientific and Engineering Manpower // The Journal of Human Resources. 1967. Vol. 2, № 2. P. 191–220.
11. Гвоздев Н. Н. Проблемы стимулирования труда. М. : Мысль, 1980.
12. Кривневич В. В. Влияние научно-технического прогресса на изменение структуры рабочего класса СССР. Итоги и перспективы. М. : Наука, 1971.
13. Минц Л. Е. Трудовые ресурсы в СССР. М. : Наука, 1975.
14. Головачев А. С., Скаржинский М. И. Эффективность инженерного труда. М. : Экономика, 1983.
15. Крыштановская О. В. Инженеры: становление и развитие профессиональной группы. М. : Наука, 1989.
16. Бреев Б. Д., Крюков В. П. Межотраслевой баланс движения населения и трудовых ресурсов: Методологические вопросы. М. : Наука, 1974.
17. Баранов Э. Ф., Бреев Б. Д. Основные принципы построения балансов движения трудовых ресурсов. М. : ЦЭМИ АН СССР, 1969.
18. Лебедев О. Т. Прогнозирование подготовки инженерных кадров для электронной промышленности (методологические проблемы). Л. : Издательство Ленинградского университета, 1977.
19. Коровкин А. Г., Долгова И. Н., Единак Е. А., Королев И. Б. Прогнозно-аналитическое исследование взаимосвязей сферы занятости и профессионального образования в России // Вестник Российского фонда фундаментальных исследований. Гуманитарные и общественные науки. 2018. № 4 (93). С. 38–49.
20. Капелюшников Р. И. Спрос и предложение высококвалифицированной рабочей силы в России: кто бежал быстрее? : препринт // ГУ ВШЭ. Серия WP3 «Проблемы рынка труда». 2011. № 09.
21. Гимпельсон В. Е., Капелюшников Р. И., Лукьянова А. Л. Спрос на труд и квалификацию в промышленности: между дефицитом и избытком //

Экономический журнал Высшей школы экономики. 2007. Т. 11, № 2. С. 163–199.

22. Варшавский А. Е. Актуальные вопросы разработки научно-технологической и инновационной политики. Модернизация и экономическая безопасность России. Т. 4 / под ред. акад. Н. Я. Петракова. М. ; СПб. : Нестор-история, 2014. С. 11–52.

23. Варшавский Л. Е. Кадры науки: анализ состояния и прогноз долгосрочных тенденций изменения // Наука и высокие технологии России на рубеже третьего тысячелетия (социально-экономические аспекты развития) / Руководители авт. кол. В. Л. Макаров, А. Е. Варшавский. М. : Наука, 2001. С. 134–157.

24. Варшавский Л. Е., Дубинина М. Г., Петрова И. Л. Развитие человеческого капитала в научно-технической сфере в России и за рубежом // Информационное общество. 2006. № 2-3. С. 115–123.

25. Варшавский А. Е., Никонова М. А. Анализ региональных особенностей динамики численности исследователей // Вестник университета. 2010. № 2.

26. Нанавян А. М. Динамика занятости в науке и подготовка кадров высшей квалификации в регионах России // Евразийское Научное Объединение. 2019. № 10-4 (56). С. 318–321. doi:10.5281/zenodo.3533721

27. Варшавский Л. Е. Прогнозирование динамики кадровой составляющей научного потенциала России // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 1. С. 43–55.

28. Гуртов В. А., Питухин Е. А., Серова Л. М. Моделирование потребностей экономики в кадрах с профессиональным образованием // Проблемы прогнозирования. 2007. № 6. С. 91–107.

29. Серова Л. М., Степуть И. С. Актуальные проблемы подготовки и трудоустройства кадров инженерно-технического профиля в Российской Федерации // Спрос и предложение на рынке труда и рынке образовательных услуг в регионах России : сб. докладов по материалам Десятой Всерос. науч.-практ. конф. Петрозаводск, 2013. С. 225–236.

30. Варшавская Е. Я., Котырло Е. С. Выпускники инженерно-технических и экономических специальностей: между спросом и предложением // Вопросы образования. 2019. № 2. С. 98–128. doi:10.17323/1814-9545-2019-2-98-128.132

31. Chan A. P. C., Anson M., Chiang Y. H., Hui E. C. M., Chan E. H. W., Tse R. Y. C., Wong A. K. D., Mak S. W. K., Choy L. H. T., Wong J. M. W. Final Report to the Consultancy Study on the Demand and Supply of the Construction Personnel // Unpublished Consultancy Report to the ETWB of the HKSAR. Government, 2002.

32. Merikull J., Eamets R., Humal K., Espenberg K. Power without manpower: Forecasting labour demand for Estonian energy sector // Energy Policy. 2012. Vol. 49. P. 740–750.

33. Wong J. M. W., Chan A. P. C., Chiang Y. H. A critical review of forecasting models to predict manpower demand // The Australian Journal of Construction Economics and Building. 2012. Vol. 4, № 2. P. 43–55.

34. Smith A. R., Bartholomew D. J. Manpower Planning in the United Kingdom: A Historical Review // The Operational Research Society. 1988. Vol. 39, № 3. P. 235–248.
35. Psacharopoulos G. From manpower planning to labour market analysis // International Labour Review. 1991. Vol. 130. P. 459–474.
36. Evans G. J., Lindley R. M. The Use of RAS and Related Models in Manpower Forecasting // Economics of Planning. 1973. Vol. 13, № 1-2.
37. Bezdek R. H. Long-Range U.S. Manpower Forecasts in Retrospect: How Accurate Were We? // Economic Change and Restructuring. 1986. Vol. 20, Iss. 1. P. 52–67.
38. Bezdek R. H. Alternate Manpower Forecasts for the Coming Decade: Second Guessing the US Department of Labor // Socio-Economic Planning Sciences. 1973. Vol. 7. P. 511–521.
39. Коровкин А. Г. Динамика занятости и рынка труда. Вопросы макроэкономического анализа и прогнозирования. М. : МАКС-Пресс, 2001.
40. Kodera J., Vosvrda M. Goodwin's Predator-Prey Model with Endogenous Technological Progress // IES Working Paper 9/2007. IES FSV. Charles University. 2007.
41. Вайдлих В. Социодинамика: Системный подход к математическому моделированию в социальных науках : пер. с англ. ; под ред. Ю. С. Попкова, А. Е. Семечкина. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
42. Хавинсон М. Ю., Кулаков М. П., Мишук С. Н. Прогнозирование динамики внешней трудовой миграции на региональном уровне // Проблемы прогнозирования. 2013. № 2. С. 99–111.
43. Freeman R. B. A cobweb model of supply and starting salary of new engineers // Industrial and new relations review. 1976. Vol. 29, Iss. 2, P. 236–248.
44. O'Connell J. F. The Labor Market for Engineers: An Alternative Methodology // Journal of Human Resources. 1972. Vol. 7, № 1. P. 71–86.
45. Ryoo J., Rosen S. The Engineering Labor Market // Journal of Political Economy. 2004. Vol. 112, № 1. P. 110–140.

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

УДК 004.9

Методы машинного обучения для определения гипер-гипонимических отношений языка

Дмитрий Викторович Тарасов¹, Никита Андреевич Переломов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹tarasovdv@mail.ru, ²nikitaperelomov2@gmail.com

Аннотация. Рассмотрен обзор наиболее мощных библиотек языка Python для анализа родо-видовых отношений между словами, а именно связи общего (гиперонима) и частного (гипонима).

Ключевые слова: машинное обучение, Python, гипер-гипонимические отношения языка

Machine learning methods for determining hyper-hyponymic relations of a language

Dmitriy V. Tarasov¹, Nikita A. Perelomov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹tarasovdv@mail.ru, ²nikitaperelomov2@gmail.com

Abstract. The review of the most powerful Python libraries for the analysis of genus-species relations between words, namely the connection of the general (hyperonym) and private (hyponym), is considered.

Keywords: machine learning, Python, hyper-hyponymic relations of language

Традиционно под гипер-гипонимическими отношениями языка понимается родо-видовая связь однотипных по значению слов, объединённых в группу базовым словом. Получается, что слова выражающие некоторое общее понятие (гипероним) находятся в тесной, например иерархической связи, со словами описывающими однотипное частное (гипоним) значение.

Можно заметить, что конструкция «гипероним – гипоним» чем-то может напоминать знакомый по текстовым редакторам тезаурус. «Тезаурус – словарь, собрание сведений, корпус или свод, полномерно охватывающие понятия, определения и термины специальной области знаний или сферы деятельности, что должно способствовать правильной лексической, корпоративной коммуникации (пониманию в общении и взаимодействию лиц, связанных одной дисциплиной или профессией); в совре-

менной лингвистике – особая разновидность словарей, в которых указаны семантические отношения (синонимы, антонимы, паронимы, гипонимы, гиперонимы и т. п.) между лексическими единицами. Тезаурусы являются одним из действенных инструментов для описания отдельных предметных областей.» [1].

Отметим, что тезаурус позволяет выявить смысл не только с помощью определения, но и путем сопоставления слова с другими понятиями и их лексико-семантическими группами. Как раз это и позволяет активно использовать тезаурусы для наполнения (и конечно хотелось бы не вручную) датасетов систем искусственного интеллекта [2]. Интересно, что поиск гиперонимов для новых слов может быть организован не только для существительных, но скажем и для глаголов [3, 4].

Таким образом, нахождение гипер-гипонимическими отношений для машинного обучения языка достаточно интересная и требующая дальнейшего изучения задача.

Анализ существующих библиотек машинного обучения

Существуют библиотеки word2vec, fastText, BERT и прочие, содержащие широкий круг методов машинного обучения, и которые можно использовать на напрямую для конструкция «гипероним – гипоним». Однако эта универсальность и все применимость содержит ряд недостатков:

1) статистические модели типа Bag of Word (BOW – «мешок слов»), которые определяют количество вхождений ключевых слов в анализируемый текст, часто выдают трудно интерпретируемые результаты. И здесь решающую роль приобретает наполнение и объем словаря данных;

2) статистические модели нередко смешивают во едино разные виды связей между словами (общее-частное, часть-целое, синонимы-антонимы, и даже схожесть написания), а вот в случае изучения определенного вида связанности слов требуется дополнительный анализ или опять же датасет.

Рассмотрим существующие модели, которые отдельным словам и группам слов сопоставляют некоторые численные (в виде вектора) представления с сохранением семантической связи. Данное векторное представление слова часто называют эмбедингом.

Обзор существующих библиотек языка Python начнем с word2vec, модель которого предложена в 2013 году. Метод основывался на предположении, что слова, которые часто находятся в одинаковых контекстах, имеют схожие значения. Изменения по сравнению с BOW были просты – устранение скрытого слоя и аппроксимация (упрощение) цели. Здесь алгоритм типа Bag of Word модель Word2Vec был преобразован в алгоритм Skip-gram (словосочетание с пропуском). Цель этой модели –

предсказать окружающие слова на основе центрального. В походе Skip-Gram формируется «контекстное окно» – последовательность из k слов в тексте. Одно из этих слов пропускается, и нейросеть пытается его предсказать. Таким образом, слова, которые часто встречаются в похожем контексте, будут иметь похожие векторы.

Часто чтобы сделать обучение более эффективным, используется негативное семплирование (Negative Sampling): модели предоставляются слова, которые не являются контекстными соседями. Такой подход позволяет максимизировать вероятность встречи нужного слова в контексте, который является для него типичным, и минимизировать – в редком (нетипичном) контексте [5].

FastText – популярная библиотека с открытым исходным кодом для классификации текстов, которая была опубликована в 2015 году исследовательской лабораторией искусственного интеллекта Facebook. Здесь для векторизации слов помимо использования и skip-gram, и негативного семплирования, и алгоритм непрерывного мешка к основной модели Word2Vec добавлена модель символьных n -грамм. Каждое слово представляется композицией нескольких последовательностей символов определённой длины. Например, слово they в зависимости от гиперпараметров может состоять из "th", "he", "ey", "the", "hey". По сути, вектор слова – это сумма всех его n -грамм. Результаты работы классификатора хорошо подходят для слов с небольшой частотой встречаемости, так как они разделяются на n -граммы [5].

К положительной стороне модели FastText можно отнести ее способность генерировать эмбединги для неизвестных слов. Среди недостатков можно выделить, что обучение в данной модели идет на уровне слов без учета совместной встречаемости и не затрагивает контекста, в котором используется слово.

Языковая модель BERT – это двунаправленная контекстная мультязычная модель с transformer-архитектурой (рис. 1), предназначенная для решения конкретных NLP-задач, например, определение эмоциональной окраски (тональности) текста, вопросно-ответные системы, классификация текстов, построение выводов по тексту и т.д.

BERT-модель предварительно обучена без учителя на двух NLP-задачах: моделирование языковых масок и предсказание следующего предложения. До BERT языковая модель смотрела на последовательность текста во время обучения либо слева направо, либо в сочетании слева направо и справа налево. Этот односторонний подход хорошо работает для генерации предложений – мы можем предсказать следующее слово, добавить его в последовательность, а затем предсказать следующее за следующим словом, пока не получим полное предложение. BERT же переходит к языковой модели, которая обучается двунаправленно, что приводит к более глубокому пониманию языкового контекста.

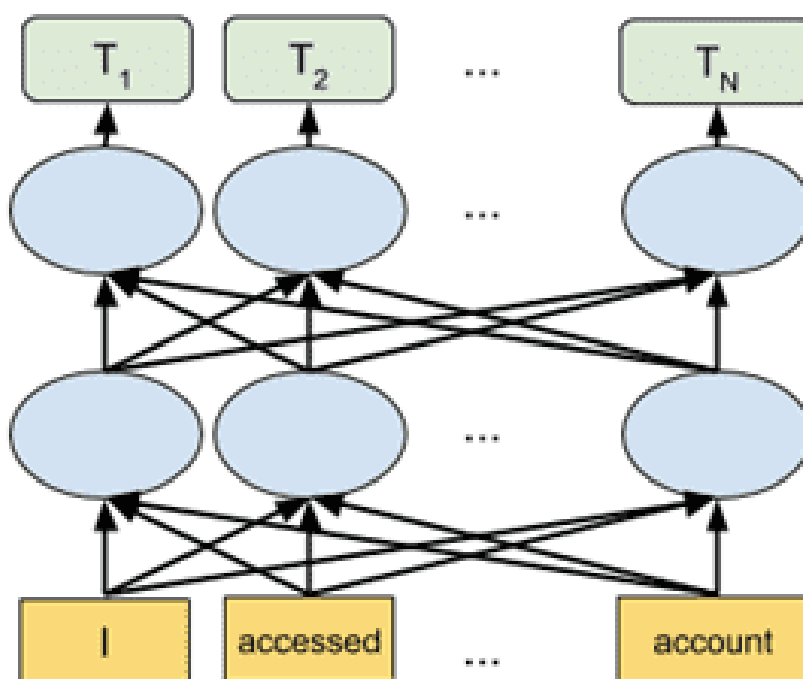


Рис. 1. Архитектура BERT

Вместо того, чтобы предсказывать следующее слово в последовательности, BERT использует новую технику под названием Masked LM (MLM): он случайным образом маскирует слова в предложении, а затем пытается их предсказать. Маскирование означает, что модель смотрит в обоих направлениях и использует полный контекст предложения, как левое, так и правое окружение, чтобы предсказать замаскированное слово. В отличие от предыдущих языковых моделей, здесь учитываются как предыдущий, так и следующий токены одновременно [6].

Поиск пар гипер-гипоним

Способ решения задачи поиска пар гипер-гипоним направлен на улучшение решения, полученного стандартной библиотекой для эмбединга.

Составим для каждого объекта гиперонима c базы знаний S список k_S кандидатов-гипонимов – ближайших в смысле близости между векторными представлениями элементов словаря $s \in S$. Теперь для всех пар (c, s) , где c – объект, а s – соответствующий ему кандидат, поставим задачу бинарной классификации: является ли кандидат гипонимом к данному объекту базы знаний. В качестве алгоритма классификации можно использовать машину опорных векторов (SVM) [7].

Для каждой (c, s) -пары могут быть сформированы специальные числовые признаки, основанных на близости между векторными представлениями c и s . Эти признаки и подаются на вход классификатору SVM.

Для (c, s) -пар составляются группа признаков:

- близость c к s определяется в смысле косинуса угла между векторными представлениями;
- позицию кандидата гипонима s в списке k_s ближайших в смысле близости между векторными представлениями элементов S к объекту c ;
- позицию объекта c в списке k_C ближайших в смысле близости между векторными представлениями объектов C к кандидату s . Если c не входит в число k_C ближайших, признаку присваивается значение k_C . Целью использования этого признака является исключение кандидатов гипонимом, относящихся скорее к другим объектам, нежели к исходному объекту c ;

Оптимальные значения k_C и k_s , необходимо определить в ходе эксперимента.

Список литературы

1. Словарь русского языка : в 4 т. / РАН, Ин-т лингвистич. исследований ; под ред. А. П. Евгеньевой. 4-е изд., стер. М. : Рус. яз. : Полиграфресурсы, 1999.
2. Toloka. Открытые датасеты. Lexical Relations from the Wisdom of the Crowd (LRWC) URL: https://toloka.ai/ru/datasets/#n_1_p (дата обращения: 15.09.2022).
3. RUSSE. Обогащение систематики для русского языка. URL: <https://russe.nlpub.org/2020/isa/> (дата обращения: 07.10.2022).
4. Хабр. Как предсказать гипероним слова (и зачем). Моё участие в соревновании по пополнению таксономии. URL: <https://habr.com/ru/post/507228/> (дата обращения: 07.10.2022).
5. Обзор четырёх популярных NLP-моделей. URL: <https://proglib.io/p/obzor-chetyreh-populyarnyh-nlp-modeley-2020-04-21> (дата обращения: 12.10.2022).
6. BERT: прорыв в NLP-технологиях или очередной хайп на теме Deep Learning? URL: <https://chernobrovov.ru/articles/bert-proryv-v-nlp-tehnologiyah-ili-ocherednoj-hajp-na-teme-deep-learning.html> (дата обращения: 12.10.2022).
7. Воронцов К. В. Лекции по методу опорных векторов. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/SVM.pdf>

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 37.091.3

К вопросу о преподавании методов решения интегральных уравнений при подготовке бакалавров

Татьяна Владимировна Грунина

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
eliseevat@mail.ru

Аннотация. Рассматривается подход к освоению и закреплению материала при изучении интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма, последовательные подстановки, теория Фредгольма

On the question of teaching methods for solving integral equations in the preparation of bachelors

Tat'yana V. Grunina

Penza State University, Penza, Russia
eliseevat@mail.ru

Abstract. An approach to the mastering and consolidation of the material in the study of integral equations is considered.

Keywords: Fredholm integral equation, consecutive substitutions, Fredholm theory

При подготовке бакалавров по направлениям «Физика» и «Прикладная математика» большое внимание уделяется изучению методов решения интегральных уравнений. Теория интегральных уравнений имеет важное теоретическое и прикладное значение.

В частности, изучаются следующие методы решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с параметром λ :

- метод последовательных подстановок, развитый Нейманом, Ливиллем, Вольтеррой, дает решение $u(x)$ в виде степенного ряда относительно λ , причем коэффициенты при различных степенях λ являются функциями от x . Ряд сходится при всех значениях λ , меньших по абсолютной величине, чем некоторое постоянное число;
- метод последовательных приближений;
- решение уравнения Фредгольма с помощью построения взаимной функции, данное Вольтеррой;

– метод, принадлежащий Фредгольму, дает решение $u(x)$ в виде отношения двух целых рядов относительно λ , каждый из которых имеет бесконечный радиус сходимости. Коэффициенты при степенях в числителе являются функциями от x , знаменатель не зависит от x .

– метод, развитый Гильбертом и Шмидтом, выражает $u(x)$ через фундаментальные функции.

С целью лучшего усвоения и закрепления пройденного материала в качестве упражнения может быть поставлена задача о нахождении решения одного и того же интегрального уравнения Фредгольма II рода некоторыми из изученных ранее методами.

Приведем подобное упражнение для уравнения Фредгольма, имеющего единственное решение.

1. Решение интегральных уравнений II рода методом последовательных подстановок.

Теорема 1. Если

а) ядро $K(x, \xi) \neq 0$ вещественно и непрерывно в прямоугольнике $R(a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b)$ и $|K(x, \xi)| \leq M$;

б) $f(x) \neq 0$ вещественна и непрерывна в интервале $l(a \leq x \leq b)$;

в) $\lambda - const, |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$

то уравнение $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi, a, b - const,$ имеет одно и

только одно решение в l , выражающееся абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \\ + \lambda^3 \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi + \dots$$

Пример 1. Решить интегральное уравнение методом последовательных подстановок $u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 x\xi u(\xi) d\xi.$

► В виду выполнения условий теоремы 1 применим метод последовательных подстановок. На первом шаге получим

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 x\xi \left(\frac{5}{6}\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 \xi\xi_1 u(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{2^2}x \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 \xi_1 u(\xi_1) d\xi_1 d\xi.$$

На втором шаге имеем

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{2^2}x \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 \xi_1 \left(\frac{5}{6}\xi_1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \xi_1 \xi_2 u(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 d\xi = \\ &= \frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2}x + \frac{1}{2^3}x \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 \xi_1^2 \xi_2 u(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned}$$

Продолжая последовательные подстановки, получим решение уравнение в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2}x + \dots = \\ &= \frac{5}{6}x \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{5}{6}x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = x. \end{aligned}$$

Искомое решение интегрального уравнения $u(x) = x$. ■

2. Решение уравнения Фредгольма с помощью построения взаимной функции, данное Вольтеррой.

Вольтерра показал, как найти решение уравнения

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

если известна функция $k(x, \xi)$, взаимная с $K(x, \xi)$.

Теорема 2. Если

а) ядро $K(x, \xi) \neq 0$ вещественно и непрерывно в R ;

в) $f(x) \neq 0$ вещественна и непрерывна в l ;

г) функция $k(x, \xi)$, взаимная с $K(x, \xi)$, существует,

то уравнение $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi$ имеет одно и только одно

непрерывное решение $u(x)$ в l и это решение выражается формулой

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 x\xi u(\xi) d\xi$$

методом построения взаимной функции.

► Построим итерированные функции по формулам

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi), \quad K_i(x, \xi) = \int_a^b K(x, s) K_{i-1}(s, \xi) ds.$$

$$K_1(x, \xi) = \frac{1}{2}x\xi, \quad K_2(x, \xi) = \int_0^1 \frac{1}{2}xs \cdot \frac{1}{2}s\xi ds = \frac{1}{4}x\xi \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{12}x\xi,$$

$$K_3(x, \xi) = \int_0^1 \frac{1}{2}xs \cdot \frac{1}{12}s\xi ds = \frac{1}{24}x\xi \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{72}x\xi, \dots$$

Продолжая описанный процесс, получим функция $k(x, \xi)$, взаимную с $K(x, \xi)$, по формуле

$$-k(x, \xi) = K_1(x, \xi) + K_2(x, \xi) + \dots + K_n(x, \xi) + \dots$$

$$-k(x, \xi) = \frac{1}{2}x\xi \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \dots \right)$$

В скобках получили сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{6}$. Таким образом,

$$-k(x, \xi) = \frac{1}{2}x\xi \frac{6}{5} = \frac{3}{5}x\xi.$$

Тогда искомое решение интегрального уравнения

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \int_0^1 x\xi^2 d\xi = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x = x.$$

Итак, $u(x) = x$. ■

3. Решение уравнения Фредгольма II рода с параметром.

В виду того, что рассматривается случай уравнения Фредгольма, имеющего единственное непрерывное решение, применим следующую теорему.

Теорема 3. Первая фундаментальная теорема Фредгольма. Если

а) $D(\lambda) \neq 0$;

б) ядро $K(x, \xi)$ непрерывно в R ;

в) $f(x)$ непрерывна в l ;

то уравнение $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi$ имеет одно и только одно непрерывное решение в l , выражаемое формулой

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, \xi; \lambda) f(\xi)}{D(\lambda)} d\xi,$$

где $D(\lambda)$ и $D(x, \xi; \lambda)$ – степенные ряды, сходящиеся при любом λ , а ряд $D(x, \xi; \lambda)$, кроме того, сходится равномерно относительно всех $(x, \xi) \in R$.

Здесь $D(\lambda)$ – определитель (детерминант) Фредгольма, $D(x, \xi; \lambda)$ – первый минор Фредгольма.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 x\xi u(\xi) d\xi.$$

► Ядро интегрального уравнения $K(x, \xi) = x\xi$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Вычислим определитель и первый минор Фредгольма.

$$D(\lambda) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \xi^2 d\xi + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 - \dots = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

$$D(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{2} x\xi.$$

Так как $D\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, то уравнение имеет единственное непрерывное решение

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} x\xi \cdot \frac{5}{6} \xi}{\frac{5}{6}} d\xi = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3} = x.$$

Таким образом, $u(x) = x$. ■

Такой подход способствует лучшему усвоению и закреплению пройденного материала, позволяет на конкретном примере оценить удобство того или иного метода. Кроме того, сравнение методов реше-

ния задач помогает в формировании компетенции ОПК-1 «Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности».

Список литературы

1. Васильева А. Б. Интегральные уравнения. М. : Физматлит, 2002.
2. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека / под ред. Забрейко П. П. [и др.]. М. : Наука, 1968. 448 с.
3. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. : Физматгиз, 1977.

7. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 519.711

Виктор Иосифович Левин.
Ученый, педагог, организатор образования

Виталий Ильич Левин

Пензенский государственный
технологический университет, Пенза, Россия
vilevin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается биография видного ученого-математика Виктора Иосифовича Левина. Цель статьи – на примере научной работы В. И. Левина сформировать у начинающих ученых понимание различных подходов к формированию новых научных знаний. Для достижения цели статьи использована отечественная и зарубежная литература. Воссоздана научная биография В. И. Левина. Акцент сделан на работы В. И. Левина в области теории функции. Работа будет полезна молодым ученым, изучающим методологию научных исследований.

Ключевые слова: математика, В. И. Левин, Москва, Берлин, Кембридж, Советский Союз, Германия, Англия, Индия

Viktor Iosifovich Levin. Scientist, teacher, organizer of education

Vitaly I. Levin

Penza State Technological University, Penza, Russia
vilevin@mail.ru

Abstract. The biography of the prominent mathematician Viktor Iosifovich Levin is considered. The purpose of the article is to use the example of V.I. Levin's scientific work to form an understanding of various approaches to the formation of new scientific knowledge among novice scientists. To achieve the purpose of the article, domestic and foreign literature is used. The scientific biography of V.I. Levin has been recreated. The emphasis is placed on the work of V.I. Levin in the field of function theory. The work will be useful for young scientists studying the methodology of scientific research.

Keywords: mathematics, V.I. Levin, Moscow, Berlin, Cambridge, Soviet Union, Germany, England, India

Мое первое знакомство с Виктором Иосифовичем Левиным – правда заочное – произошло в далеком 1956 году, когда я был студентом политехнического института в литовском городе Каунасе. Тогда в книж-

ном магазине мне попала в руки только что вышедшая из печати книжка: В.И.Левин. Методы математической физики. Москва. Меня поразило то, что в ней сложные физические процессы систематически изучались единообразными математическими методами. А еще то, что фамилия и инициалы автора книги в точности совпадали с моими. Подумалось: а что, если когда-нибудь в будущем мне тоже удастся написать подобную книгу? Следующая моя встреча с Виктором Иосифовичем – опять заочная – случилась через 15 лет в Риге, где я работал научным сотрудником Института электроники и вычислительной техники АН Латвии. Тогда из ВИНИТИ (Всесоюзный институт научной технической информации) в Москве мне пришло приглашение работать референтом в отделе математики института. И сразу после моего согласия посыпались статьи, на которые надо было составлять рефераты. Статьи были на различных языках (русский, английский, немецкий, французский), а их тематика была мне – кибернетику – неинтересна. Постепенно я понял, что в ВИНИТИ путают меня и Виктора Иосифовича, поскольку наши фамилии и инициалы полностью совпадают. И, соответственно, шлют мне его статьи чисто математического профиля, а ему – мои статьи кибернетического профиля. На что я прореагировал в ВИНИТИ. Но путаница не прекратилась полностью, и пришлось отказаться от этой работы. Еще раз наши с Виктором Иосифовичем пути пересеклись в Пензе в 1975 году, когда я начал работать заведующим кафедрой математики в Пензенском заводе-вузе- филиале Пензенского политехнического института. Там я узнал, что в этом институте в 1949–1951 годах Виктор Иосифович работал в качестве заведующего кафедрой высшей математики, проживая в Пензе в своеобразной «ссылке»!

Дедушка и бабушка Виктора Иосифовича жили в Могилеве, были небогатыми людьми – владельцами небольшого магазина по торговле тканями. В семье было 6 детей – 3 мальчика и 3 девочки. Одна дочь не училась, рано вышла замуж, родила детей и жила в Минске. Другая дочь уехала в Москву, проработала 52 года главбухом на крупном предприятии, получила орден Ленина за самоотверженный труд. За все годы работы у нее не было ни одного больничного листа. Третья дочь тоже уехала в Москву и там дослужилась до звания профессора химии в МГУ. Сыновья тоже не подкачали. Один – Иосиф Яковлевич Левин - отец Виктора Иосифовича – был крупный инженер – строитель, работал зам. Начальника строительства высотного здания МИДа в Москве. Другой сын Григорий Яковлевич Левин был с 1923 года главврачом Центральной клинической больницы железнодорожников им. Семашко. Третий сын, который рано умер, был крупнейший специалист по бетону и всю Вторую Мировую войну провел в США, где изучал и закупал технологию изготовления специального бетона для строительства военных сооружений.

Отец Виктора Иосифовича окончил гимназию в Могилеве, гимназистом участвовал в революционных демонстрациях 1905 года. В 1908

году он женился. Его жена принадлежала к одной из самых богатых семей в Могилеве. Ее родители были категорически против ее брака, и она порвала с ними. Ей было в ту пору 19 лет. После женитьбы молодая семья переехала в Москву. Там глава семьи получил высшее образование, став инженером-строителем. Там же 01.12.1909 года родился Виктор Иосифович, который стал единственным ребенком в семье. Рожать ребенка мать Виктора приезжала к родителям в Могилев. Поэтому в документах Виктора Иосифовича значилось, что он родился в Могилеве. Через 5 лет, при родах второго ребенка - уже в Москве, мать Виктора и новорожденный скончались. Так что Виктор рос без матери.

Отец Виктора Иосиф Яковлевич участвовал в крупных строительных проектах в Москве, так что его семья была хорошо обеспечена. В доме была хорошая библиотека. Все хозяйство вела экономка – гувернантка Эмма – полунемка, полуэстонка. Она разговаривала с Виктором на своем родном немецком языке, и к 17 годам он знал немецкий очень хорошо – на уровне «*deutsche Mund*». Он также знал английский, но хуже. После смерти матери Виктора она, насколько это возможно, заменяла ему мать.

В 1916 году Виктор поступил в Москве в гимназию. Потом, уже в Советское время, учился в хорошей московской школе, которую успешно закончил в 1926 году. В школе Виктор пристрастился к шахматам, достиг 1-го разряда. Реально он играл на уровне кандидата в мастера и имел несомненный шахматный талант. Кроме того, в старших классах у него появилась любовь к математике. Отец не поддерживал его математические устремления, так как не считал математику профессией. Он считал, что человек должен быть инженером. Надо сказать, что в школе Виктор интересовался не только шахматами и математикой. Изучал латынь и греческий, понимал и говорил по-французски.

В 1927 году в жизни Виктора Иосифовича произошел крутой перелом: его отец решил, что пора бежать из Советской России. От знакомого врача он получил справку, что у Виктора туберкулез легких и он нуждается в лечении в Швейцарии. Однако власти выезд в Швейцарию не разрешили, но дали разрешение на выезд в Германию. В конце весны 1927 года они приехали в Берлин. В этом году Виктору Иосифовичу исполнилось 18 лет. И, уступая настоянию отца, он поступил в Берлинскую высшую техническую школу, чтобы учиться на инженера. А для себя, тайком от отца, он факультативно поступил в Берлинский технический университет, где давалось общее естественно-научное высшее образование, в том числе, математическое. Оба учебных заведения были очень высокого, международного уровня, с хорошими профессорами. Однако учеба в Высшей технической школе мало интересовала Виктора Иосифовича, хотя выбранная им специальность «Судостроение и гражданское строительство» была близка к кругу его интересов (В.И. с детства любил все, связанное с флотами: суда, их технические свойства и т.д.). Тем не ме-

нее, он старательно учился, регулярно ходил на занятия, аккуратно сдавал все экзамены и в 1932 году получил инженерный диплом и очень хорошую рекомендацию на работу. А его имя было занесено в список лучших выпускников школы. Что касается Берлинского технического университета, то он сыграл огромную роль в научной судьбе Виктора Иосифовича. В этом университете Виктор Иосифович формально не учился, но посещал факультативно лекции по математике, которые читал профессор Эдмунд Ландау – очень крупный математик, один из ведущих математиков мира того времени. Кроме лекций, Э.Ландау очень много занимался с ним индивидуально, давал ему какие то задачи, говоря: «попробуйте разобраться в этом и в этом...». Виктор Иосифович все это решал, и они обсуждали результаты вместе с Ландау. На третий год этих занятий он подготовил две статьи и затем опубликовал их в серьезном немецком математическом журнале «Mathematische Zeitschrift» (математический журнал). Эти статьи были основным итогом занятий с профессором Ландау и были посвящены математическим неравенствам. Этот немецкий журнал регулярно читали в Кембридже профессор Харди и профессор Литлвуд – ведущие английские математики того времени (Харди был членом редколлегии журнала). Они заметили эти статьи. И в самом начале 1933 года профессор Харди пригласил Виктора Иосифовича в Кембридж в Тринити Колледж. Приглашение было принято. А научный руководитель Виктора Иосифовича профессор Ландау дал ему очень хорошую характеристику для Харди, указав, что ученик подает большие надежды. И в начале 1933 года, сразу после прихода Гитлера к власти (30 января 1933 года), В.И.Левин уехал в Англию – в Кембридж. Перед самым отъездом из Германии Виктор Иосифович успел защитить в Берлинском техническом университете диссертацию «О суммах коэффициентов некоторых классов степенных рядов». Название которой совпадает с названием статьи, опубликованной в 1934 году в берлинском «Математическом журнале».

Надо отметить, что в период проживания в Германии Виктор Иосифович не только учился в университете и делал первые шаги в науке: у него было немало и других дел. Прежде всего, у него с отцом была проблема добычи средств существования. К счастью, довольно быстро отец Виктора Иосифовича стал постоянным консультантом советского посольства в Германии по закупке стройматериалов. На заработанные им деньги они оба и жили. Дополнительно Виктор Иосифович сам что-то зарабатывал в качестве репетитора, а после окончания Берлинской высшей технической школы в 1932 году - в качестве ассистента профессора Ландау (проверка работ студентов, прием экзаменов и т.д.). В этот последний период его пребывания в Германии его занятия и общение с профессором Ландау стали заметно более активными и интенсивными.

Итак, в начале 1933 года 23-летний Виктор Иосифович Левин оказался в английском университетском городке Кембридже, в 100 км к се-

веру от Лондона. В соответствии с приглашением профессора Харди он собирался поступить в аспирантуру Тринити Колледжа Кембриджского университета для обучения по программе подготовки на степень доктора философии в области математики. Он сдавал вступительный трехдневный экзамен по 6 часов в день, где надо было решать довольно сложные задачи. Он успешно решил большинство задач, хотя это было нелегко. Но этого оказалось достаточно, и он был зачислен в аспирантуру. Программа обучения в аспирантуре предполагала написание докторской диссертации в области теории чисел и теории функций (математические неравенства). Формально руководителем аспирантской подготовки Виктора Иосифовича был профессор Харди. Однако реально основным человеком, с кем он занимался математикой, был профессор Литтлвуд. С Харди же он виделся раз в неделю: у них были какие-то общие разговоры по математике и просто общение. В процессе этих разговоров Харди рассказывал о гениальном индийском математике Рамануджане. А Виктор Иосифович рассказывал ему – о шахматах и шахматной жизни в СССР, об Алехине. Именно в это время он нашел себе в Кембридже какого-то шахматного партнера. Регулярно, каждую неделю по четвергам у Харди была вечеринка, куда приглашались 6-7 человек, в том числе Литтлвуд и Виктор Иосифович. Она длилась всю вторую половину дня.

После завершения учебы в Тринити Колледже в конце 1934 года Виктор Иосифович защитил докторскую диссертацию и получил степень доктора философии в области математики. Сразу после этого Великобритания, как она это делала со всеми молодыми учеными, отправила его на год «по распределению» в Британскую Индию, которая была тогда ее колонией. В Индии Виктор Иосифович жил в Калькутте, работая в Калькуттском университете. Результатом его официальной деятельности явилась разработанная им с индийскими коллегами учебная программа по математике для студентов индийских университетов. А свои научные результаты он опубликовал, в частности, в немецком математическом журнале. Стоит отметить, что в Индии Виктор Иосифович жил в замечательных условиях: у него был огромный дом с забором и обезьянами, сидящими на заборе, и два человека прислуги – один следил за домом, другой – за участком, окружившим дом.

После возвращения в Кембридж жизнь Виктора Иосифовича сильно изменилась. Он начал вести занятия по математике со студентами Тринити Колледжа. Однако все эти занятия проводились частным образом, а получить штатную должность в колледже никак не удавалось. Из-за этого в какой-то момент он даже решил съездить в Россию и выяснить принципиальную возможность получить там работу. Позже у Виктора Иосифовича появилась невеста – студентка-математик Тринити Колледжа из Исландии, так что вопрос его устройства на постоянную работу в той или иной другой стране встал в полную силу. В принципе

он прекрасно жил в Англии, у него были деньги, была машина, но ему очень не хватало серьезной, постоянной преподавательской работы. Это было не только его стремление профессионала – это был также вопрос статуса, который в Англии никак не удавалось решить. При этом Виктор Иосифович наивно считал, что если он устроится на постоянную работу в Советском Союзе, то его невеста придет к нему. Если же он не устроится, то вернется в Англию. Причем от русских ученых – математиков, бывших в то время в Кембридже, с которыми он немного общался, он слышал, что математика в Советском Союзе расцветает, и он наверняка найдет там работу. На наш взгляд, причина, по которой Виктор Иосифович не мог получить работу в Англии, была совсем другой: он был иностранец!

В один прекрасный день, когда Виктор Иосифович в очередной раз приехал в Советское посольство в Лондоне продлевать визу, ему сказали: « Мы больше не можем ее продлевать. Поэтому либо Вы обращаетесь за получением британского подданства, которое Вы несомненно получите, либо Вам надо возвращаться в Россию». И в феврале 1938 года он решил и сел на пароход «Александр Пушкин», направлявшийся в Ленинград. Первое, что он обнаружил: каюта не запирается изнутри, но запирается снаружи, а горячей воды в ней нет. По прибытии в Ленинград у него забрали багаж из двух огромных чемоданов – один с его одеждой, а другой с книгами. Половину книг конфисковали. Книги для конфискации выбирались явно случайным образом: наряду с книгами, которые для понимающего не должны были быть пропущены, были совершенно безобидные книги (например, математические), которые были тоже отобраны. В заключение Виктора Иосифовича привели к очень приятному седому человеку, который дал ему листок бумаги, на котором типографским способом было напечатано « Показания обвиняемого». Виктор Иосифович спросил: « А в чем меня собственно обвиняют?». И получил ответ: « Не обращайтесь внимания, у нас просто нет другой бумаги». Он заполнил 4 страницы, отвечая на вопрос « Чем Вы занимались за границей?»: когда, где, с кем он учился и работал в Германии, Англии и Индии. Седовласый чиновник сказал ему: «Хорошо, спасибо». Ему поставили штамп в паспорте, вернули обобранный багаж. События, произошедшие в дороге, должны были насторожить Виктора Иосифовича. Однако, судя по всему, он воспринял их достаточно спокойно: ведь он возвращался на родину, полный надежд на то, что, наконец, получит постоянную работу и начнет профессионально заниматься любимым делом – математикой. Он сел в поезд и поехал в Москву. Столица оказалась полна неожиданностей: ведь он отсутствовал в стране целых 11 лет. И каких лет – 1927–1937! Словом, Виктор Иосифович приехал совсем в другую страну.

8. ДИСКУССИОННЫЙ РАЗДЕЛ

УДК 021.271-614.258.1; 021.475-614.258.1

Математические модели законов рождения здоровых и талантливых и предотвращения рождения детей с пороками развития при помощи законов астрофизики и эфемеридной механики

Михаил Иванович Гринцов¹, Виктория Михайловна Гринцова²

¹Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²Дорожная больница, Москва, Россия

¹grintsovM@mail.ru, ²grintsova2012@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы, построенные на астрофизических моделях зачатия и рождения исторических лиц, признанных обществами выдающимися и гениальными, а также алгоритмы зачатия и рождения детей с детским церебральным параличом (ДЦП), которые сравниваются с моделями зачатия и рождения детей, у которых в младенческом и раннем детском возрасте выявлены пороки развития по типу онко- и гематопатологии. На основании выявленных закономерностей предложены алгоритмы технологии предотвращения рождения детей, которым не угрожает ни ДЦП, ни онкопатология. Алгоритмы технологии вычисления моментов времени зачатия и моментов времени рождения здоровых и талантливых детей значительно проще, чем алгоритмы детей, которым в младенческом или раннем детском возрасте угрожают врожденные пороки развития по типу ДЦП и онкопатологии.

Ключевые слова: здоровые, талантливые, пороки развития, ДЦП, детская онкология, эфемериды, механизмы патогенеза, цифровые модели

Благодарности: выражаем благодарность профессору Бойкову И. В. за важные замечания по статье.

Mathematical models of the laws of the birth of healthy and talented and the prevention of the birth of children with malformations using the laws of astrophysics and ephemeris mechanics

Mikhail I. Grintsov¹, Viktoriya M. Grintsova²

¹Penza State University, Penza, Russia

²Road Hospital, Moscow, Russia

¹grintsovM@mail.ru, ²grintsova2012@mail.ru

Abstract. Algorithms based on astrophysical models of conception and birth of historical persons recognized by societies as outstanding and brilliant, as well as algo-

rhythms for conception and birth of children with cerebral palsy (cerebral palsy) are considered, which are compared with models of conception and birth of children in whom developmental defects of the type of onco- and hematopathology were detected in infancy and early childhood. Based on the revealed patterns, algorithms of technology for preventing the birth of children who are not threatened by either cerebral palsy or oncopathology are proposed. Algorithms of the technology of calculating time points per conception and moments of birth of healthy and talented children are much simpler than algorithms for children who are threatened with congenital malformations of the type of cerebral palsy and oncopathology in infancy or early childhood.

Keywords: healthy, talented, malformations, cerebral palsy, pediatric oncology, ephemerides, pathogenesis mechanisms, digital models

Acknowledgements: we express our gratitude to professor I.V. Boikov for important comments on the article.

Состояние проблемы

Несмотря на то, что национальным приоритетом и главной ценностью России является идея «Дети России» [1], данные статистики свидетельствуют об отсутствии снижения заболеваемости детей с врождёнными пороками развития (далее ВПР) в виде/форм детского церебрального паралича (далее ДЦП) или детской онкогематопатологии (далее Д Онко – ДО). Проблемы ДЦП и ВПР и ДО до сих пор не решены. В сознании ряда генетиков господствует точка зрения, что основными причинами ВПР являются /должны быть факторы, как правило, «земного» происхождения. На тщательный поиск земных факторов генетических изменений направлены основные силы генетики и репродуктологии. Тот факт, что биологические и клинические науки, в отличие от астрофизики, в объяснении причин клинического и биологического разнообразия во времени и в пространстве планеты не столь однозначны и категоричны обусловлено тем, что ни объём, ни структура видов и подвидов не только микро-, но и макромира до сих пор не определена: открытие новых организмов происходит и в XXI веке. Сложности и, по видимому – нереальность установления биологического и клинического разнообразия обусловлена тем, что в биологическом мире происходят постоянные изменения.

В исследовании [2] обращается внимание исключительно на проблемы «времени и пространства планеты». Подавляющее количество исследований по экологическим проблемам климата также ограничено границами Земли [3, 7, 8, 10, 11, 13–15, 18 и др.]. Наряду с «земной экологической парадигмой» существуют идеи о том, что факторами земного происхождения объяснить клиническое разнообразие невозможно [4, 6, 9, 12, 16, 17, и др.]: причины множества клинических событий могут иметь космическое происхождение. Исходя из предпочтений толкования причин ВПР, ДЦП или ДО одну группу исследователей условно можно отнести к «земным экологам», а другую группу – к «космистам».

Солнечная система и наша Галактика, воплощают в себе структуры пространственно - временных кристаллов очень большой размерности = масштабов. Всё, что происходит в природе, должно носить не случайный, а закономерный характер. Считать, что в Солнечной системе потоки вещества и энергии перемещаются «как попало», «куда попало» или «абы как» – абсурд. Предполагаем, что и клинические события также должны соответствовать закономерностям, которые происходят в пределах Солнечной системы. Главное в том, как увидеть эти закономерности, правильно их истолковать и оценить происходящее. Возникает подозрение, что имеются силы в клинической генетике и медицине, которые предписывают «не переступать черту земной экологической оседлости» [4–10, 11, 12, 14]. Постоянно, настойчиво повторяется тезис о «более тщательном поиске – земных причин» клинических событий. К последним мы относим большую группу ВПР, ДЦП и ДО. Здесь целесообразно привести мысль Николая Кузанского: «Не познаётся часть без познания целого, поскольку часть измеряется целым». Если следовать логике Н. Кузанского, то она уводит нас с Земли и увлекает «в пределы Солнечной системы». Мы рискнули переступить черту «земной экологической оседлости», оказались от Декартовой системы координат, приняли за основу Гринвичскую сферическую систему координат со всеми планетами/ эфемеридами и увидели, что при «взгляде из космоса» с учётом законов астрофизики и эфемеридной механики получается, что и ДЦП и ДО могут рассматриваться как клинические события, захватившие вещество и энергию из космоса, но происходящие на Земле.

Постановка задачи

Цель исследования. Создать модель рождения здоровых и талантливых детей и модель предотвращения рождения детей с ДЦП и ДО на основе вычисления моментов времени зачатия и момента времени рождения при помощи технологии редактирования эфемерид в Гринвичской системе координат с учётом законов астрофизики и небесной механики.

Задачи исследования: 1. Провести изучение связей основных типов взаиморасположений= конфигураций эфемерид/планет Солнечной системы как возможных причин рождения как здоровых и талантливых, так и больных ДЦП и ДО исходя из законов перемещения вещества и энергии в Солнечной системе. 2. Изучить эфемеридные факторы риска мутаций /или отсутствия таковых при рождении здоровых и талантливых. 3. Создать действенную практическую систему прогнозирования рождения здоровых и талантливых детей. 4. Создать эффективную систему предотвращения рождения детей с ВПР, ДЦП и ДО. на основе технологии редактирования эфемерид в гринвичской сферической системе координат с учётом законов эфемеридной механики и астрофизики.

Объект исследования. А Первая группа – дети и подростки, которым установлен диагноз онкологической патологии (ДО) составила 220

лиц. Это дети, состоящие на учёте у детского онкогематолога. **Б. Вторую группу** составляли дети, которым установлен диагноз ДЦП. Таких 124. **В. Третью** контрольную группу составили здоровые и талантливые исторические личности, талантливость или гениальность которых доказана служением обществу (Э. Резерфорд, П.Капица, Н.Бор, и мн. др. Всех исторических здоровых и талантливых лиц изучено 120. Сравнимые группы репрезентативны.

Вычисления

Для решения проблемы ВПР требовалась идея, которая позволяла бы это сделать. Такая идея заложена в трудах [4, 6, 9, 12, 16, 17 и др.]. Потоки вещества и высокие плотности ионизирующих видов энергии космоса, вторгающаяся на Землю по гравитационным каналам могут обладать мутагенной активностью и функционировать не постоянно, а по законам астрофизики и эфемеридной механики.

Проект исследования состоял из довольно простой последовательности вычислительных действий. 1. Из открытых источников получали сведения о моментах времени рождения здоровых и талантливых /гениальных личностей; 2. Принимали = пусть, «золотым сроком беременности» мог быть срок $273 \pm 2-3$ дня. Предполагалось=пусть, все родились доношенными. По «золотому стандарту» времени протекания беременности вычисляем момент времени предполагаемого зачатия каждой личности, каждого ребёнка. 3. По данным эфемерид [12], сопоставляли / редактировали информацию о конфигурациях / взаиморасположениях эфемерид, которые вычислены как на момент времени зачатия, так и на момент времени рождения каждого ребёнка с ВПР, ДЦП или ДО и сравнивали с космограммами взрослых личностей, которые обществом признаны талантливыми или гениальными; 4. Местоположение и конфигурации планет/эфемерид удобно изучать при помощи общедоступной системы «ZET», которая обрабатывает и выдаёт в визуальном виде картинку месторасположения эфемерид на полях эклиптики в каждый момент времени. Программа «ZET» распознаёт: местоположение каждой эфемериды и основные координаты эклиптики и создаёт «визуально читабельную картинку на экране монитора за «миг» времени. Всего переменных, которые обрабатывалась системой «ZET» с учётом директного и ретроградного движения $\approx$ не менее 30 параметров. [Читателю сообщим, что мы осведомлены о том, что проблема трёх тел в космосе в Декартовой (x,y,z) прямоугольной системе не решена). Мы рискнули принять принцип «равенства планет». 4. Сопоставляем вычисленный момент времени зачатия с датой / моментом времени образования джетов/потоков вещества и энергии при определённых конфигурациях планет и ионизирующих видов энергии, которые приходились на момент времени зачатия и на момент времени рождения как здоровых и талантливых, так и больных детей и подростков. 5. Сравниваем их, сопоставля-

ем момент времени зачатия и рождения с потоками вещества и энергии, которые в изучаемые сутки были образованы в Солнечной системе. При толковании механизмов патогенеза этих потоков энергии и частиц мы ссылались на работы физиков [4, 6, 9, 13, 16, 17]. 6. На основании «совпадения» или «не совпадения» моментов времени зачатия и рождения с моментом времени образования определённых джетов/потоков вещества и ионизирующих видов энергии излучения галактических космических лучей (ГКЛ), делаем выводы о клинических эффектах как при «совпадении», так и при «несовпадении» моментов зачатия и рождения с «встречей» потоков вещества или ионизирующей радиации ГКЛ; 7. Истолкование результатов исследования проводилось на основе законов астрофизики и эфемеридной механики. Астрологические технологии толкования клинических событий нами не применялись.

Обсуждение результатов

Для изучения ряда клинических событий удобнее пользоваться математическими моделями». Из логики суждений следует, что математическими моделями онкопатологии манипулировать удобнее. Из той же логики следует, что можно создать технологии математических моделей полного предотвращения возникновения такой патологии, как ДЦП или ДО. В нашем исследовании роль «аэродинамической трубы», через которую «продува лись» как здоровых и талантливых, так и детей с ВПР, в том числе и с ДЦП и с ДО выполняли конфигурации всех планет/эфемерид Солнечной системы, циклы их обращений в их прямых и ретроградных движениях, а также цикл овуляции и цикл «золотого срока беременности». Нами установлен следующие прямые зависимости: между совпадением или не совпадением моментов астрономического времени зачатия, образования зиготы, момента времени рождения с моментами времени «встречи=наслоения» потоков масс вещества и высоких плотностей ионизирующих видов энергии из пределов Солнечной системы.

На рисунке 1 изображена «планетная конфигурация защиты», которая предотвращает влёт космического вещества и ионизирующих форм лучевой энергии в магнито- и атмосферу Земли. При таких астрофизических условиях геном гамет и/или вновь образованной зиготы не разрушается. Зачатые в этот астрономический момент времени дети рождались здоровыми.

На рис. 2. изображена конфигурация эфемерид=планет Солнечной системы, при которой «космический щит» из планет не образован.

Комментарий. Конфигурация планет на момент времени зачатия не образовывала надёжную защиту от влёта вещества и ионизирующих видов энергии. Гаметы родителей и/или зигота были повреждены. На свет появился больной ребёнок. В данном случае лейкоз можно признать врождённым пороком развития. Массы вещества и высокие потоки иони-

зирующих форм лучевой энергии свободно проникают сквозь пространство Солнечной системы, достигают магнитосферы Земли, проникают сквозь магнитосферу и атмосферу Земли, достигают гамет, пребывающих в «свободном полёте» до образования зиготы и/или зиготы, которая не плацентировалась, и вызывают разрушение генома. В таких случаях на свет появляется ребёнок с ВПР, у которого по мере взросления станут проявляться признаки заболеваний. Поток вещества и ионизирующих излучений, вырвавшись из космоса, не встретив на своём пути преград из планет/эфмерид, достигают генома гамет и/или зиготы и вызывают необратимые мутации.

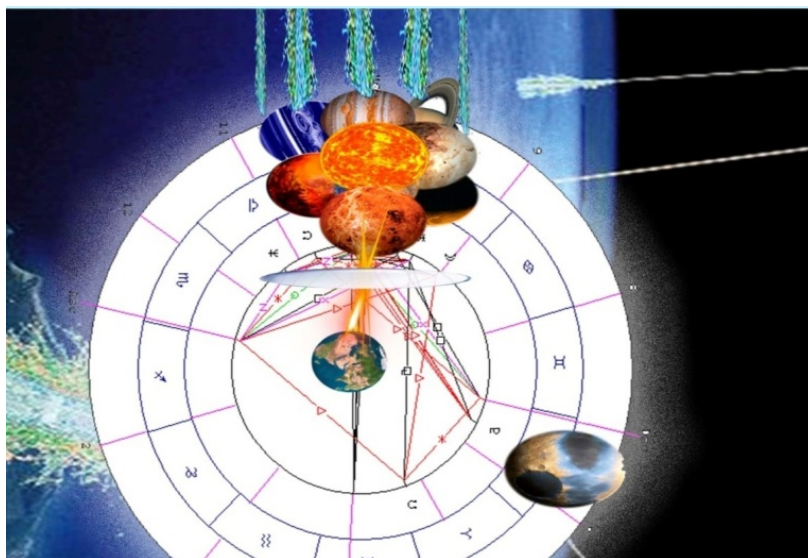


Рис. 1.

МАЛЬЧИК ЗАЧАТ 7.08.2002 г. в ЧЕРКЕССКЕ Д-З: ЛЕЙКОЗ.
Плацидус
Топоцентрическая

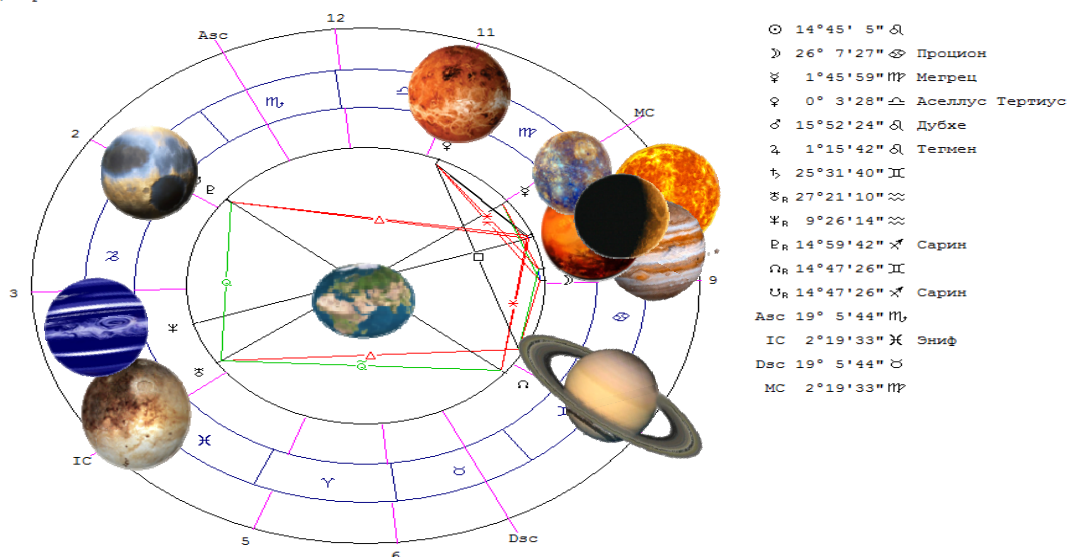


Рис. 2. Ребёнок зачат 07.08.2002. В детском возрасте установлен Д-з: Лейкоз

Дата 1 мая 2027г. является благоприятной для продолжения рода. На свет появится здоровый и талантливый ребёнок.
Плацидус
Топоцентрическая

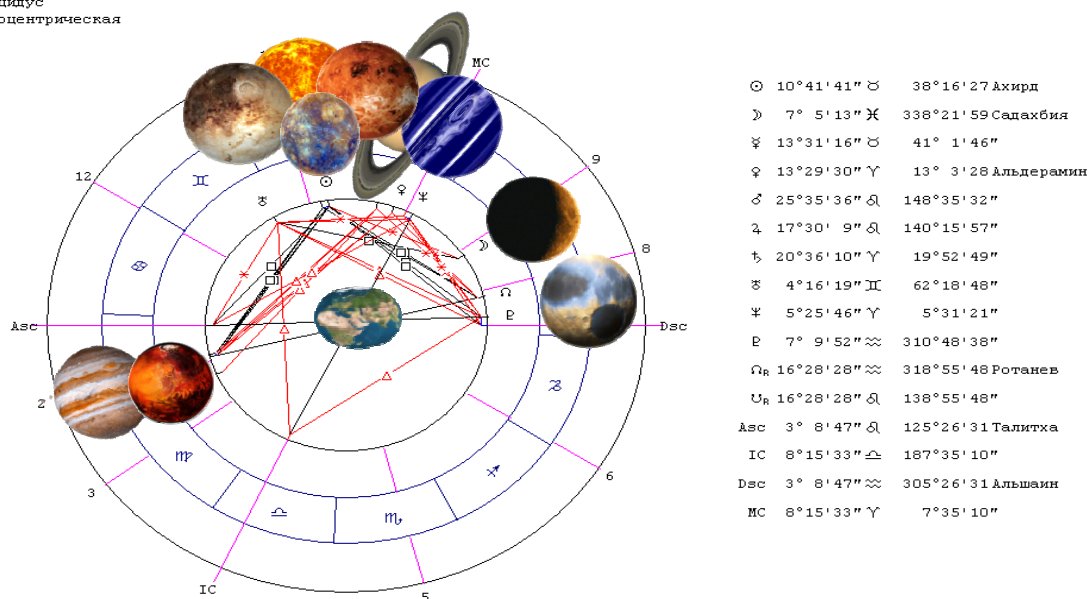


Рис. 3. Астрономическое время примерно с 5 апреля по 15 мая 2027 г. будет благоприятным астрономическим периодом для продолжения рода на территории Пензенской обл. Этот период времени будет благоприятным для множества женщин, которые примут решение продлить свой род

Заключение

1. Благоприятными условиями рождения здоровых и талантливых детей могут быть такие конфигурации эфемерид, которые образуют «космическую защиту» от потоков вещества и ионизирующих излучений космического происхождения, которые предотвращают поражение генома гамет и/или зиготы до момента времени плацентации.

2. Моделирование рождения здоровых и талантливых детей и предотвращение рождения детей с пороками развития, в том числе и в виде ДЦП и онкопатологии, требует вычисления точных астрономических дат для регулировки = маневра моментом времени зачатия в каждом конкретном случае планирования продления рода. 3. Технология моделирования рождения здоровых и талантливых и предотвращение рождения детей с пороками развития базируется на тех законах астрофизики и эфемеридной механики, на законах цикла созревания яйцеклетки, которые оцениваются как «ошеломляюще знакомые».

Список литературы

1. Путин В. В. Послание Федеральному собранию. 2020, 2021.
2. Кальнер В. Д. «Зомби-экономика» и биоразнообразие планеты // Экология и промышленность России. 2021. Т. 25, № 1. С. 60–64.
3. Аптекарев А. И. В поисках двойника // В мире науки. 2022. № 1-2.
4. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. М. : Физматлит, 2011. 559 с.

5. Баранов В. С. Пренатальная диагностика наследственных и врождённых болезней. Реальность и перспективы // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 10. С. 32–36.
6. Гринцов М. И., Гринцова В. М. Врождённые пороки развития у детей и подростков. Пенза, 2021. 145 с.
7. Инге-Вечтомов С. Г. Экологическая генетика. Что это такое? // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 59–65.
8. Кудрявцева А. В. Победить рак // В мире науки. 2017. № 4.
9. Кольцов Н. К. Очерки, статьи, документы. М. : Научный мир, 2021. 598 с.
10. Киселёв В. И., Пальцев М. А. Регуляция активности генов и новые лекарственные средства. От классической геноцентрической концепции – к эпигенетике // Вестник РАН. 2016. Т. 86, № 6. С. 514–524.
11. Курцер М. А. Предиктивные технологии и возможности молекулярной генетики в репродуктивной медицине // Вестник РАН РФ. 2017. Т. 87, № 8. С. 689–695.
12. Михельсон Нейл Ф. Таблицы эфемерид на 2001-2050 года на полночь. М., 1996. 304 с.
13. Овсянников В. А. Энергетическая модель канцерогенеза // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51, № 1.
14. Свердлов Е. Д. Взгляд на жизнь через окно генома. Т. 2. М. : Наука, 2019, 406 с.
15. Заваденко Н. Н., Немкова С. А. Нарушения развития и когнитивные дисфункции у детей с заболеваниями нервной системы. М., 2016. 359 с.
16. Вильчек Ф. Кристаллы во времени // В Мире науки. 2020. № 1-2. С. 24–33.
17. Ямпольский Ю. С. Пространственная среда – единая основа взаимодействий в природе материального мира. СПб., 2013. 125 с.
18. Янковский Н. К. О «белой», «серой» и «черной» областях в генетике // В Мире науки. 2018. № 08/09.

**Об успешном применении окружности, вписанной
во вспомогательный равнобедренный треугольник
в задаче трисекции произвольного угла**

Сергей Леонидович Михайлов

г. Заречный Пензенской области, Россия
smthrsol@internet.ru

Аннотация. Использование равнобедренного треугольника со вписанной в него окружностью позволяет создать необходимое соотношение углов 2:1 в другом служебном треугольнике с тем же основанием, что ведет к успеху в решении неразрешимой задачи трисекции произвольного угла исключительно циркулем и линейкой без делений на ней.

Ключевые слова: трисекция произвольного угла, равнобедренный треугольник, вписанная окружность, касательная к окружности, внешний угол

**About the successful method for the three-section problem
task of the arbitrary angle now by approach, contain
the triangle with circle on to the him**

Sergey L. Mikhaylov

Zarechny, Penza region, Russia
smthrsol@internet.ru

Abstract. The use of an isosceles triangle with a circle inscribed in it allows you to create the necessary ratio of angles 2:1 in another service triangle with the same base, which leads to success in solving the unsolvable problem of trisection of an arbitrary angle exclusively with a compass and ruler without divisions on it.

Keywords: trisection of an arbitrary angle, isosceles triangle, inscribed circle, tangent to the circle, outer angle

1. Пусть нам дан произвольный угол $\angle BAC = \beta$ – Рис.1. Продолжим его стороны за вершину А на достаточное для нашего построения расстояние и обозначим их как XS – для АВ луча и MN – для AC луча соответственно.

2. Для произвольного отрезка r проведём прямую, параллельную XS – прямая PQ – и она пересечёт MN в некоторой точке О.

3. Из О как из центра построим окружность радиуса r – квантор $((r - O))$, и она пересекает MN в точке F, а PQ – в точке Q.

4. Опустим из О на XS перпендикуляр – точка Т и отрезок $OT = r$.

5. Соединяя F с Q, получим прямую, пересекающуюся с XS в некоторой точке D₁.

6. Решаем задачу касания к окружности $((r - O))$ из точки D_1 [1] (IV.А.,17, Рис.37, с. 257), и касательная прямая даст нам на MN некоторую точку G_1 .

7. Отрезок OD_1 из O отложим на MN противоположно отрезку OG_1 , получая на ней отрезок G_1D_2 и находим его середину – точка G_2 .

8. Далее, отрезок G_1G_2 из O центра откладываем на прямых: на MN – в сторону точки G_1 , получая этим точку G_3 ; на XS – в сторону точки D_1 , получая точку D_3 .

9. Эти новые точки равноудалены от центра O . Решаем теперь задачу касания из них к $((r - O))$. Из G_3 - получим радиус касания – отрезок $OG_4 = G_3O/2$ и из G_4 получим засечку H_2 на $((r - O))$.

10. Аналогично и из D_3 - сначала получим точку D_4 , а затем и засечку H_3 , в общем (пока ещё) не совпадающую с H_2 .

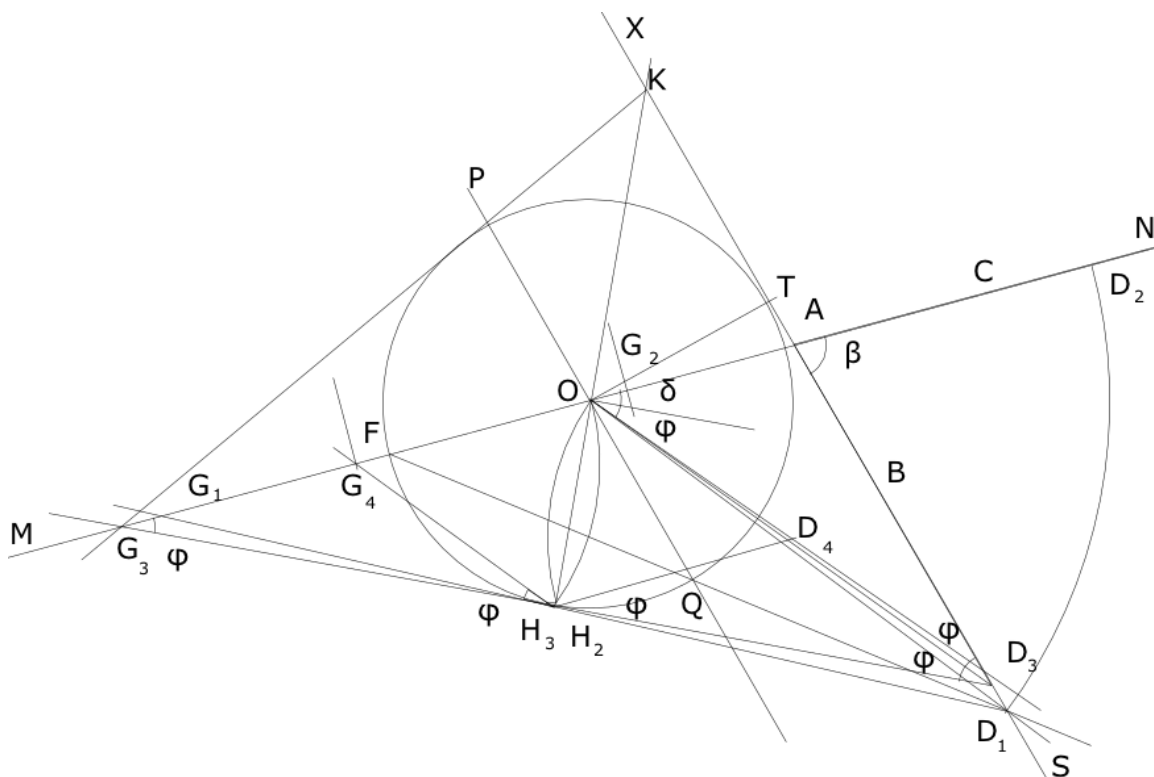


Рис. 1. Успешное геометрическое построение для решения задачи трисекции произвольного угла $\angle BAC = \beta = 3\varphi = 75^\circ$, угол $\angle G_3D_3K = 50^\circ$, $\angle D_3G_3K = 25^\circ = \varphi$. Равнобедренный треугольник $\triangle KG_3D_3$ со вписанной в него окружностью некоторого радиуса r и с центром O пересечения всех биссектрис создаёт также $\triangle AG_3D_3$, составленный из трёх прямоугольных равных треугольников с меньшими острыми равными φ углами. Для него угол $\angle BAC$ – внешний и потому равен сумме двух несмежных с ним углов, что и решает задачу трисекции этого произвольного угла. Прямая OD_3 с точкой D_4 на ней – средняя в пучке прямых. Риски поперёк прямой MN относятся к результатам деления соответствующих отрезков пополам. Рисунок выполнялся в полу ручном режиме и потому для эталонных измерений по нему здесь не используется и носит демонстрационный характер

11. Так как мы получили две точки, равно удалённые от центра O , но лежащие на разных прямых, то возникает сомнение о возможности единой касательной прямой G_3D_3 к окружности $((r - O))$. Соединяя центры касания G_4 и D_4 с точками касания H_2 и H_3 соответственно, получаем два равных равнобедренных треугольника $\Delta G_3G_4H_2$ и $\Delta D_3D_4H_3$ с равными углами φ при их основаниях и равными боковыми сторонами.

12. Тогда основание G_3H_2 образует с прямой MN тот же угол φ .

13. Основание D_3H_3 , если оно также образует с MN тот же угол, то оба основания – суть – одна прямая линия и она же – единая касательная к $((r - O))$ в одной общей точке – в H_2 .

14. Из O проведём отрезок прямой, параллельный основанию D_3H_3 . Он с прямой MN образует некоторый угол δ . Рассмотрим ΔAOD_3 . Угол $\angle OAD_3 = 180^\circ - \beta$, $\angle OD_3A = \varphi$, так как $\angle OD_3H_3 = \angle OD_3T$. Они прямоугольные и имеют общую гипотенузу OD_3 и равные r меньшие катеты и потому – равны.

15. Тогда $\angle AOD_3 = 180^\circ - (180^\circ - \beta + \varphi) = \beta - \varphi$. Вычитая из него угол φ как угол при параллельных прямых, в итоге получаем $\delta = \beta - 2\varphi$.

16. Но – если сам угол $\angle BAC = \beta = 3\varphi$, то тогда и $\delta = \varphi$ также, что означает и тот факт, что касательная H_3D_3 расположена под тем же углом φ к прямой MN и продолжается по прямой H_2G_3 до MN прямой, образуя так единую касательную прямую G_3D_3 , и отрезок G_3D_3 делится в точке касания H_2 в точности пополам, так как – см п.11 выше – отрезки $G_3H_2 = D_3H_3$ и потому – точки H_2 и H_3 совпадают. И вот почему.

17. Несложно доказать, что равны прямоугольные треугольники $\Delta OG_3H_2 = \Delta OD_3H_3$ как имеющие равные гипотенузы и равные малые r -катеты и потому и точки H_2 и H_3 совпадают также как два равных перпендикуляра-отрезка, опущенные из одной общей точки O на одну общую прямую G_3D_3 .

18. Соединяя H_2 с центром O прямой линией, продолжим её до пересечения с прямой XS – точка K и прямая H_2K .

19. Теперь соединяем K с G_3 и получаем равнобедренный треугольник KG_3D_3 со вписанной в него окружностью $((r - O))$, формально подтверждающий решение задачи трисекции произвольного угла $\angle BAC = \beta$ как внешнего для ΔAG_3D_3 в котором $\angle AD_3G_3 = 2\varphi$, $\angle AG_3D_3 = \varphi$, и потому $\beta = 3\varphi$, а $\varphi = \beta/3$ соответственно.

20. Тот факт, что ΔOD_3T входит в треугольник ΔAG_3D_3 не полностью, для нас факт не существенный, так как здесь важны острые φ -углы в нём, а не линейные размеры.

21. Работа выполнялась автором лично и по собственной инициативе.

22. Авторское право было зафиксировано за мною заранее.

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М. : Наука, 1974. 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<i>Алиев Б. А., Гусейнова Т. М.</i> Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для уравнения Лапласа	3
<i>Вельмисов П. А., Ликанин А. В., Алексанин Н. Д.</i> Исследование динамики одной упругой конструкции при вибрационном воздействии	8
<i>Горбунов В. К., Львов А. Г.</i> Метод производственных функций с оценкой эффективных фондов.....	13
<i>Горбаченко В. И., Стенькин Д. А.</i> Основанные на физике сети радиальных базисных функций	22
<i>Смольникова Е. Э., Кривошеева Ю. Ю., Головашкин Д. Л.</i> Моделирование распространения инфракрасного излучения через дифракционные алмазные элементы с антиотражающим покрытием	35
<i>Макеева Г. С.</i> Электродинамическая и вероятностная модели электрически управляемых терагерцовых фильтров на основе метаматериалов графен-диэлектрик	41
<i>Макеева Г. С.</i> Электродинамическое моделирование взаимодействия микроволн с анизотропными наноматериалами на основе 3D-решеток углеродных нанотрубок	53
<i>Макеев А. А., Мартынов С. И.</i> Модель работы установок электроцентробежных насосов в периодическом режиме	66
<i>Сидоров Н. А., Дрегла Сидоров Л. Р. Д.</i> Аналитическое построение решений интегральных уравнений с линейными функционалами и параметрами	70
<i>Фараджев А. С.</i> Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения с частными производными шестого порядка с дополнительными интегральными условиями	75

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<i>Мартынова В. Ю., Тихов С. В., Кондырев О. В.</i> Об одной двухпараметрической нелинейной краевой задаче, возникающей в теории распространения электромагнитных волн	79
<i>Артамонов Д. В., Литвинов А. Н.</i> Оптимизация режимов технологической вибрации изделий приборостроения	84
<i>Помещиков М. И.</i> Исследование влияния различных аберраций волнового фронта на искажение интенсивности вихревых пучков	92
<i>Черушева Т. В.</i> Обзор методов идентификации личности по речевому сигналу.....	97

Барсукова О. Ю., Скибицкая Н. Ю., Шишикина Д. С.	
Математическая модель распределения тепла в прямоугольной пластине	102
Петрова Ю. А. Численное исследование характеристического уравнения трехслойного сферического резонатора, заполненного метаматериалом	108
Дюкарева О. А. Моделирование формирования оптических ловушек на основе апертурной аподизации	113
Язовцева О. С., Губайдуллин И. М., Иншакова А. С., Пескова Е. Е., Родькина Д. А. Исследование материального баланса в модели окислительной регенерации сферического зерна.....	117
Шилин А. П. Решение интегро-дифференциального уравнения, содержащего в коэффициентах линейные функции специального вида	122
Сошников Д. В., Головашкин Д. Л., Павельев В. С. Оценка влияния технологических погрешностей изготовления на работу фотонно-кристаллических волноводов	128

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Об одной аппроксимации оператора полугруппы и некоторых ее применениях	134
Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Об одном численном методе решения задачи аналитического продолжения на плоскости.....	140
Солодуша С. В., Коконова Ю. И. Об одном способе моделирования нелинейной динамики полиномами Вольтерра и цепными дробями	145
Тарасов Д. В., Лапкин В. В. Использование технологии OpenMP на многопроцессорных вычислительных системах с общей памятью для решения интегральных уравнений	150
Индущая Т. С. Численное решение систем дифференциальных уравнений с производной Римана – Лиувилля	155
Пивкина А. А. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях	159

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Мамедова Т. Ф., Лихорадов И. И. Автоматизация динамики долгосрочного прогнозирования экономических процессов по отраслям	165
Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Анализ моделей спроса и предложения инженерно-технических специалистов	170

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

<i>Тарасов Д. В., Переломов Н. А.</i> Методы машинного обучения для определения гипер-гипонимических отношений языка	179
--	-----

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

<i>Грунина Т. В.</i> К вопросу о преподавании методов решения интегральных уравнений при подготовке бакалавров	184
--	-----

7. ПЕРСОНАЛИИ

<i>Левин В. И.</i> Виктор Иосифович Левин. Ученый, педагог, организатор образования	190
---	-----

8. ДИСКУССИОННЫЙ РАЗДЕЛ

<i>Гринцов М. И., Гринцова В. М.</i> Математические модели законов рождения здоровых и талантливых и предотвращения рождения детей с пороками развития при помощи законов астрофизики и эфемеридной механики	196
--	-----

<i>Михайлов С. Л.</i> Об успешном применении окружности, вписанной во вспомогательный равнобедренный треугольник в задаче трисекции произвольного угла	204
--	-----

Научное издание

Аналитические и численные методы моделирования
естественно-научных и социальных проблем

*Сборник статей по материалам
XVII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.*

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Analytical and Numerical Methods of Modelling
of Natural Science and Social Problems
(ANM–2022)

*Materials of the seventeenth All–Russian Conference
with international participation ANM-2022*

Penza, Russian Federation, 28 November – 4 December, 2022

E d i t e d b y
Илья В. **Boykov**

Все материалы представлены в авторской редакции

*Корректор А. Г. Темникова
Компьютерная верстка Д. В. Тарасова*

Подписано в печать 27.12.2022. Формат 60×84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 12,21.
Заказ № 832. Тираж 100.

Издательство ПГУ
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru