

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем**

*Материалы
XIII Международной научно-технической конференции
г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2018 г.*

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

**Analytical and Numerical Methods of Modelling
of Natural Science and Social Problems
(ANM-2018)**

*Proceedings of the Thirteenth International
Conference ANM-2018
Penza, Russian Federation, 4–6 December, 2018*

E d i t e d b y
Ilya V. Boikov

Пенза
Издательство ПГУ
2018

УДК 51
ББК 22.1
А64

**Аналитические и численные методы моделирования
А64 естественно-научных и социальных проблем** : материалы
XIII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 4–6 декабря
2018 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. –
Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – 222 с.

ISBN 978-5-907102-70-5

Отражены основные результаты работы XIII Международной научно-технической конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, демографии, социальных наук; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Предназначено для обучающихся по направлению «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 21.1

О р г а н и з а ц и о н н ы й к о м и т е т

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
Д. В. Артамонов, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. И. Горбаченко**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. К. Задирака**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН Украины (Киев, Украина); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. В. Маркин**, д.социол.н., профессор (Москва, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Д. Г. Саникидзе**, д.ф.-м.н., профессор (Тбилиси, Грузия); **В. С. Сизиков**, д.т.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

О т в е т с т в е н н ы й с е к р е т а р ь к о н ф е р е н ц и и

А. Н. Тында, к.ф.-м.н., доцент (Пенза, Россия)

П р и к а з

о проведении XIII Международной научно-технической конференции
«Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных
и социальных проблем» № 924/о от 12.10.2018

ISBN 978-5-907102-70-5

© Пензенский государственный
университет, 2018

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УРАВНЕНИЕ РАЗВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

А. А. Шалдаева, Н. Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru, math.kudryashova@yandex.ru

При решении нелинейных интегральных уравнений возникают вопросы о продолжаемости и ветвлении решений таких уравнений. Находится решение нелинейного уравнения, зависящее от некоторых параметров, причем при каких-то значениях параметров решение может разветвляться. Далее возникает задача о нахождении самого решения уравнения и тех значений параметров, при которых оно разветвляется, о числе ветвей и о представлении каждой ветви как функции параметров.

Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона первого рода

$$x(s) = \int_B G(s, t, x(t), \mu) dt, \quad (1)$$

в котором B – ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, $G(s, t, x(t), \mu)$ – вещественная непрерывная функция, заданная на $B \times B \times I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 – это промежутки вещественной оси.

Кроме того, функция $G'_{x(t)}(s, t, x(t), \mu)$ является монотонной по переменной $x(t)$.

Введем обозначения $x(s) = x_0(s) + u(s)$, $\mu = \mu_0 + \lambda$. Будем предполагать, что функция $G(s, t, x(t), \mu)$ представима в виде равномерно сходящегося ряда [1]

$$G(s, t, x_0(t) + u(t), \mu_0 + \lambda) = \sum_{m+n \geq 0} A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) \lambda^n, \quad (2)$$

где $A_{mn}(s, t, \mu_0)$ непрерывны по совокупности аргументов (s, t) .

Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$x_0(s) + u(s) = \int_B \sum_{m+n \geq 0} A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) \lambda^n dt. \quad (3)$$

Пусть при некотором значении $\mu = \mu_0$ уравнение (1) имеет непрерывное решение $x_0(s) = \int_B G(s, t, x_0(t), \mu_0) dt$.

Тогда выражение (3) примет следующий вид

$$u(s) + \int_B G(s, t, x_0(t), \mu_0) dt = \int_B \sum_{m+n \geq 0} A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) \lambda^n dt.$$

Если расписать первые слагаемые ряда (2)

$$\begin{aligned} \sum_{m+n \geq 0} A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) \lambda^n &= A_{00}(s, t, \mu_0) + A_{01}(s, t, \mu_0) \lambda + A_{10}(s, t, \mu_0) u(t) + \\ &+ \sum_{m+n \geq 2} A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) \lambda^n \end{aligned}$$

и ввести обозначения $A_{00}(s, t, \mu_0) = G(s, t, x_0(s), \mu_0)$, $A_{10}(s, t, \mu_0) = K(s, t)$, $\int_B A_{01}(s, t, \mu_0) dt = f(s)$, то получим уравнение

$$u(s) - \int_B K(s, t) u(t) dt = \lambda f(s) + \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_B A_{mn}(s, t, \mu_0) u^m(t) dt. \quad (4)$$

Таким образом, получим, что решение уравнения (1) сводится к нахождению всех непрерывных решений $u(s)$ уравнения (4).

Одномерный случай ветвления

Рассмотрим линейный интегральный оператор T и сопряженный оператор T^*

$$Tu = \int_B K(s, t) u(t) dt, \quad (5)$$

$$T^* u = \int_B \overline{K(t, s)} u(t) dt. \quad (6)$$

Пусть 1 является простым собственным значением оператора (5), $\phi_1(s)$ – нормированная собственная функция оператора (5), а $\psi_1(s)$ – нормированная собственная функция сопряженного оператора (6) [1].

Рассмотрим ядро в виде $E(s, t) = K(s, t) - \psi_1(s) \overline{\phi_1(t)}$.

Положим

$$\xi = \int_B \overline{\phi_1(t)} u(t) dt. \quad (7)$$

Подставив (7) в уравнение (4), получим

$$u(s) - \int_B E(s,t)u(t)dt = \xi \psi_1(s) + \lambda f(s) + \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_B A_{mn}(s,t,\mu_0) u^m(t) dt.$$

По лемме Шмидта существует резольвента Фредгольма $R(s,t)$ ядра $E(s,t)$. Тогда последнее уравнение преобразуется к виду

$$u(s) = \xi \left[\psi_1(s) + \int_B R(s,t) \psi_1(t) dt \right] + \lambda \left[f(s) + \int_B R(s,t) f(t) dt \right] + \\ + \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_B \left[A_{mn}(s,t,\mu_0) + \int_B R(s,\tau) A_{mn}(\tau,t,\mu_0) d\tau \right] u^m(t) dt.$$

В данной работе для нахождения резольвенты Фредгольма $R(s,t)$ использовали способ определителей Фредгольма [2].

Для сокращения записи, введем следующие обозначения

$$g(s) = f(s) + \int_B R(s,t) f(t) dt,$$

$$g_{mn}(s,t) = A_{mn}(s,t,\mu_0) + \int_B R(s,\tau) A_{mn}(\tau,t,\mu_0) d\tau,$$

тогда получаем уравнение

$$u(s) = \xi \varphi_1(s) + \lambda g(s) + \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s,t) u^m(t) dt, \quad (8)$$

где $\varphi_1(s) = \psi_1(s) + \int_B R(s,t) \psi_1(t) dt$.

При достаточно малых фиксированных $|\lambda|$ и $|\xi|$, уравнение (8) имеет единственное непрерывное решение, и оно представимо в виде равномерно сходящегося ряда с непрерывными коэффициентами

$$u(s) = \xi \varphi_1(s) + \lambda g(s) + \sum_{i+k \geq 2} a_{ik}(s) \xi^i \lambda^k. \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов $a_{ik}(s)$ воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для этого подставим (9) в (8) и получим следующее уравнение

$$\sum_{i+k \geq 2} a_{ik}(s) \xi^i \lambda^k = \\ = \sum_{m+n \geq 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s,t) \left[\xi \varphi_1(t) + \lambda g(t) + \sum_{p+q \geq 2} a_{pq}(t) \xi^p \lambda^q \right]^m dt. \quad (10)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ и λ , получаем рекуррентную систему для нахождения коэффициентов $a_{ik}(s)$, которая подробно представлена в работе М.М. Вайнберга, В.А. Треногина [1].

Для определения возможных значений ξ , входящих в уравнение [9], подставим (9) в (7), и учитывая $\int_B \overline{\phi_1(t)} \phi_1(t) dt = 1$, получим

$$\lambda \int_B g(t) \overline{\phi_1(t)} dt + \sum_{i+k \geq 2} \xi^i \lambda^k \int_B a_{ik}(t) \overline{\phi_1(t)} dt = 0.$$

Введем обозначения

$$L_{01} = \int_B g(t) \overline{\phi_1(t)} dt, \quad L_{mn} = \int_B a_{mn}(t) \overline{\phi_1(t)} dt, \quad m+n \geq 2,$$

тогда получаем уравнение разветвления в одномерном случае

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0} \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn} \lambda^n = 0, \quad (11)$$

где L_{mn} – коэффициенты уравнения разветвления.

Уравнение разветвления

Будем искать все малые решения уравнения разветвления (11) с помощью диаграммы Ньютона [1, 3], т.е. непрерывные решения этого уравнения $\xi = \xi(\lambda)$, обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$ или равные нулю тождественно.

Решение уравнения (11) будем искать в виде ряда

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + \xi_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + \xi_{\varepsilon''} \lambda^{\varepsilon''} + \dots, \quad (12)$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \dots$, $\xi_\varepsilon \neq 0$, $\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + o(\lambda^\varepsilon)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Для построения диаграммы Ньютона определим точки, по которым будем ее строить. Для этого в уравнении разветвления группируются коэффициенты при одинаковых степенях ξ . В полученных многочленах при одинаковых степенях ξ определяются наименьшие степени λ . Тем самым получаем точки $(0, \rho_0)$, $(1, \rho_1)$, ..., (n, ρ_n) , где ρ_i , $i = \overline{0, n}$ – показатели степеней λ при соответствующих значениях ξ .

Отмечаем полученные точки $(0, \rho_0)$, $(1, \rho_1)$, ..., (n, ρ_n) в прямоугольной системе координат. Проводим через точку $(0, \rho_0)$ прямую, совпадающую с осью ординат, и вращаем ее вокруг этой точки против хода часовой стрелки, пока какая-нибудь из других отмеченных точек (k, ρ_k) не окажется на этой прямой. Продолжаем процесс до тех пор,

пока не пройдем все точки и не окажемся в точке (n, ρ_n) . Полученная выпуклая ломанная, соединяющая точки, представляет собой диаграмму Ньютона.

Перейдем к нахождению значений коэффициента ξ_ε . Пусть (i, ρ_i) и (j, ρ_j) – концы какого-нибудь отрезка диаграммы, определяющего одно из возможных значений ε . Для его нахождения воспользуемся следующим равенством [3]:

$$\rho_i + i\varepsilon = \rho_j + j\varepsilon, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Чтобы найти значения ξ_ε , составим следующее уравнение

$$F_{i0}\xi_\varepsilon^i + F_{i+1,0}\xi_\varepsilon^{i+1} + \dots + F_{j,0}\xi_\varepsilon^j = 0,$$

где F_{k0} , $k = \overline{i, j}$ – многочлены перед соответствующими степенями ξ_ε^k . Это уравнение относительно ξ_ε имеет $j - i$ корней. Решив его, получим первый коэффициент правой части разложения (12). Для нахождения вторых и последующих коэффициентов в (12), поставляем $\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + V$ в (11). Получим уравнение относительно V , которое также решаем с помощью диаграммы Ньютона. Продолжая данный процесс вычисления, мы определим все коэффициенты разложения (12).

Тем самым, при решении нелинейного интегрального уравнения Урысона первого рода (1) возникает разветвление решения. В данной работе был рассмотрен случай одномерного ветвления.

От данного уравнения мы перешли к уравнению разветвления в одномерном случае, которое решили с помощью диаграммы Ньютона.

При решении модельной задачи удалось построить решение уравнения разветвления с точностью до $o(\lambda)$. В итоге, получили комплексно-сопряженные точки бифуркации уравнения.

Библиографический список

1. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986.
3. Чеботарев, Н. Г. Теория алгебраических функций / Н. Г. Чеботарев. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.
4. Вайнберг, М. М. Методы исследования в теории разветвления решений / М. М. Вайнберг, П. Г. Айзенгендлер // Итоги науки. Сер. : Математика. Мат. анализ. – М. : ВИНТИ, 1966. – С. 7–69.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ ВНЕ ТЕЛА¹

Р. О. Евстигнеев

НИЦ «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике»,
Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: Roman_cezar@mail.ru

Введение

Задачи определения параметров материала по измерениям поля вне тела являются актуальными в подоблостях акустики и электродинамики. Данная задача применима при поиске объектов, СВЧ-томографии, анализе исследуемого объекта и т.п. В случае акустической задачи определяемым параметром является волновое число характеризующую структуру материала. Рассматриваемая в работе задача решается плоская задача. Задача в пространстве $\mathbb{R}^3$ рассматривается в работах [1, 2].

1. Постановка прямой задачи

Рассмотрим двумерную задачу дифракции акустической волны на прямоугольном теле P , расположенном в свободном пространстве $\mathbb{R}^2$ с волновым числом свободного пространства $k_0 > 0$.

Поведение поля внутри тела описывается уравнением Гельмгольца [3]

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), x = (x_1, x_2), \quad (1)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем, $k^2(x)$ – непрерывная вещественная функция, $k^2(x) > 0$.

На границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения [3]

$$[u]_{\partial P} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial P} = 0, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ – скалярная функция на ∂P , и условия излучения Зоммерфельда [3]

$$\frac{\partial u}{\partial |x|} = iku + O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Задача (1) – (3) сводится к решению уравнению Липпмана – Швингера [4]:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-01-00219 А и Фонда содействия инновациям по программе «У.М.Н.И.К.» (договор № 13085ГУ/2018 от 14.05.2018).

$$u(x) = f^0(x) + \int_P G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy \quad (4)$$

Уравнение (4) разрешимо в пространстве $L_2(P)$. Обозначим

$$Au := \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (5)$$

и пусть $u := u(x)$, $F := f^0(x)$ и запишем уравнение в операторном виде: $Lu := u - Au := F$, $u \in L_2(Q)$, $F \in L_2(Q)$, $L: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$.

Теорема 1 [5]. При $\text{Im} k(x) \geq 0$ задача (1) – (3) имеет не более одного квазиклассического решения.

Теорема 2 [5]. Если $u(x)$ является квазиклассическим решением задачи, то $u(x)$ удовлетворяет уравнениям (1)-(3). Обратно, если $u \in L_2(P)$ – решение уравнения (4) в $\mathbb{R}^2$, является квазиклассическим решением задачи.

Теорема 3 [5]. Оператор $(I - A): L_2(P) \rightarrow L_2(P)$ непрерывно обратим.

2. Обратная задача восстановления волнового числа неоднородного рассеивателя

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ неоднородный прямоугольник P . Рассмотрим некоторую ограниченную область D такую, что $\overline{D} \cap \overline{P} = \emptyset$. Введем в P функцию $J(x) = (k^2(y) - k_0^2)u(x)$. Двухшаговый метод, предложенный в [6], состоит в следующем:

- считая известными падающее поле $u_0(x)$ и полное поле $u(x)$ в области D находим "ток" J в области P из линейного уравнения

$$\int_P G(x, y) J(y) dy = u(x) - u_0(x) = u_s(x), \quad x \in D,$$

- вычисляем явно значения $k(x)$ в точках $x \in P$ из уравнения

$$\frac{J(x)}{k^2(x) - k_0^2} - \int_P G(x, y) J(y) dy = u_0(x), \quad x \in P.$$

Теорема 4 [6]. При заданном разбиении области P на n^2 прямоугольников Π_I уравнение

$$\int_P G(x, y) J(y) dy = u_s(x), \quad x \in D, \overline{D} \cap \overline{P} = \emptyset, u_s \in C^\infty(\overline{D}) \quad (6)$$

имеет не более одного кусочно-постоянного решения $J(x)$, если

$$k_0 > \frac{4\pi^2 n^4}{9l}, \quad l = \min \{ |b_1 - a_1|, |b_2 - a_2| \}. \quad (7)$$

3. Численные результаты

На рисунках, представленных ниже, проведен эксперимент. Точки наблюдения расположены снизу и сверху от исследуемого тела. Толщина слоёв составляет треть толщины тела. Источник наблюдения расположен снизу на расстояние равное половине длины тела. Излучаемая волна имеет частоту 50 МГц. Тела имеет форму куба со сторонами 15 см. Количество разбиений составляет 8 носителей по каждому из направлений. На большем количестве носителей возникает большое количество обусловленностей матрицы, при котором данная задача решается с ошибками.

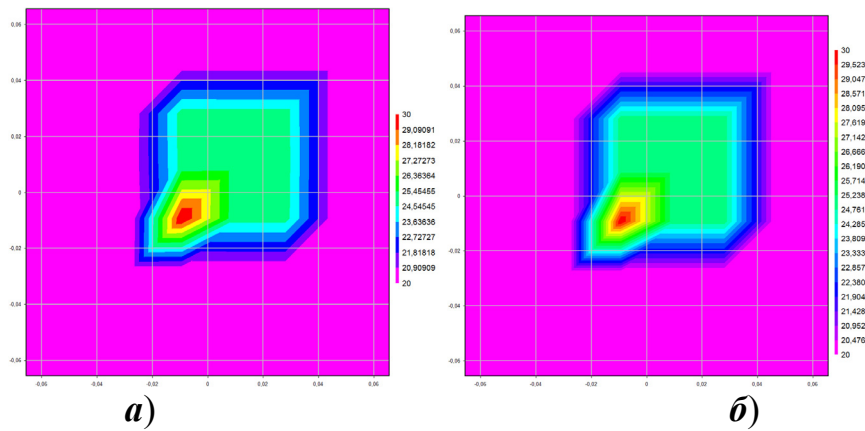


Рис. 1. Точные (а) и восстановленные (б) данные. Вещественная часть

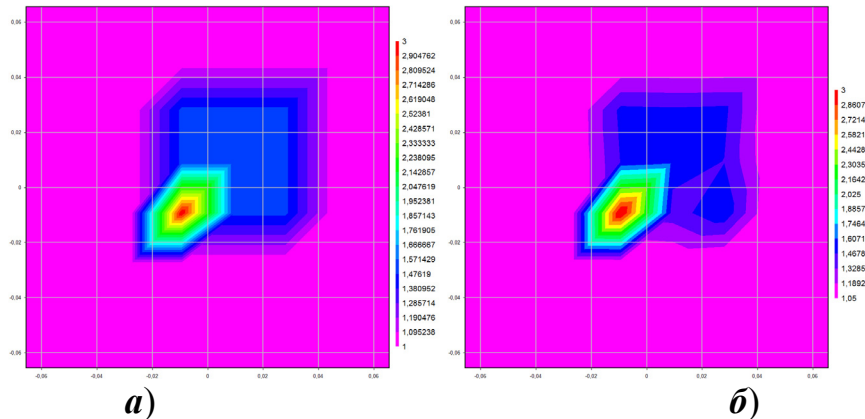


Рис. 2. Точные (а) и восстановленные (б) данные. Мнимая часть

Заключение

Разработан метод решения задачи восстановления коэффициента преломления в неоднородном теле по измерениям ближнего поля, основанный на решении линейного интегрального уравнения по области неоднородности. Проведенные численные эксперименты подтверждают

эффективность предложенного алгоритма для решения обратной задачи дифракции.

Библиографический список

1. Евстигнеев, Р. О. Обратная задача восстановления неоднородностей тела для ранней диагностики заболеваний с помощью микроволновой томографии / Р. О. Евстигнеев, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 3–17.
2. Евстигнеев, Р. О. Решение задачи определения параметров неоднородности в цилиндрических телах по измерению поля вне тела / Р. О. Евстигнеев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 87–95.
3. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния : пер. с англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – С. 312.
4. Медведик, М. Ю. Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липмана – Швингера на фигурах сложной формы / М. Ю. Медведик // Радиотехника и Электроника. – 2012. – Т. 57, № 2. – С. 175–183.
5. Цупак, А. А. О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (29). – С. 30–38.
6. Смирнов, Ю. Г. Двухмерная скалярная обратная задача дифракции на неоднородном препятствии с кусочно-непрерывным показателем преломления / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3. – С. 5–75.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГИБРИДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ АЗИМУТАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ЭКРАНИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ¹

М. О. Снегур, В. Ю. Курсеева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: snegur.max15@gmail.com, 79273698109@ya.ru

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, в которое помещен цилиндрический диэлектрический волновод

¹ Работа написана при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 18-31-00109)

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \{(\rho, \varphi, z) : r_1 \leq \rho < r_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Подобные волноводы были изучены в работе [1].

Запишем уравнение Максвелла в форме

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{H} &= \partial_t \tilde{D}, \\ \operatorname{rot} \tilde{E} &= -\partial_t \tilde{B}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{D} = \varepsilon \tilde{E}$, $\tilde{B} = \mu \tilde{H}$ и $\partial_t \equiv \partial / \partial t$.

Считаем, что зависимость электромагнитного поля от времени [2] имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\rho, \varphi, z, t) &= H^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + H^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \\ \tilde{E}(\rho, \varphi, z, t) &= E^+(\rho, \varphi, z) \cos \omega t + E^-(\rho, \varphi, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где ω — круговая частота, $\tilde{E}, E^+, E^-, \tilde{H}, H^+, H^-$ — действительные вектор-функции.

2. Гибридные нелинейные азимутально-симметричные волны

Перепишем систему уравнений Максвелла (1) в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} i\gamma E_\varphi &= -i\mu\omega H_\rho, \\ \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' &= -i\mu\omega H_z, \\ i\gamma H_\rho - H_z' &= -i\varepsilon\omega E_\varphi, \\ i\gamma H_\varphi &= i\varepsilon\omega E_\rho, \\ \frac{1}{\rho}(\rho H_\varphi)' &= -i\varepsilon\omega E_z, \\ i\gamma E_\rho - E_z' &= i\mu\omega H_\varphi, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

После некоторых преобразований используя обозначения:

$$u_1(\rho) := E_\rho(\rho), u_2(\rho) := E_\varphi(\rho), u_3(\rho) := iE_z(\rho). \quad (3)$$

из (2) при $0 \leq \rho < r_1$ получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^2 u_1 + \gamma u_3' &= k_0^2 \varepsilon_1 u_1, \\ \left(\rho^{-1}(\rho u_2)' \right)' - \gamma^2 u_2 &= -k_0^2 \varepsilon_1 u_2, \\ \gamma \rho^{-1}(\rho u_1)' + \rho^{-1}(\rho u_3')' &= -k_0^2 \varepsilon_1 u_3. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Используя условия ограниченности поля во всякой конечной области, получаем решение системы (4) в виде

$$\begin{cases} u_1(\rho; \gamma) = -\gamma k_1^{-1} C_1 I_0'(k_1 \rho), \\ u_2(\rho; \gamma) = C_2 I_1(k_1 \rho), \\ u_3(\rho; \gamma) = C_1 I_0(k_1 \rho), \end{cases} \quad (5)$$

где $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \epsilon_1$ и C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

В оболочке волновода $r_1 \leq \rho \leq r_2$ имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_2(\rho) + \alpha |\mathbf{u}|^2(\rho)$, где

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \text{ и } (u_1, u_2, u_3)^T.$$

Далее, перепишем систему (4) в следующем виде

$$\begin{cases} \gamma^2 u_1 + \gamma u_3' = k_0^2 (\epsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_1, \\ \left(\rho^{-1} (\rho u_2)' \right)' - \gamma^2 u_2 = -k_0^2 (\epsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_2, \\ \gamma \rho^{-1} (\rho u_1)' + \rho^{-1} (\rho u_3')' = -k_0^2 (\epsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_3. \end{cases} \quad (6)$$

3. Условия сопряжения

Из непрерывности H_ϕ , следует непрерывность величины $\tilde{\epsilon} u_1$ на границе раздела сред. А также справедливы условия сопряжения для функций u_1, u_2, u_2', u_3

$$\begin{aligned} [\tilde{\epsilon} u_1] \Big|_{\rho=r_1} &= 0, [u_2] \Big|_{\rho=r_1} = 0, \\ [u_2'] \Big|_{\rho=r_1} &= 0, [u_3] \Big|_{\rho=r_1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $[f] \Big|_{\rho=\rho_0} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0 - 0} f(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow \rho_0 + 0} f(\rho)$.

В задачах распространения поляризованных ТЕ и ТМ волн постоянные C_1 и C_2 могут быть выбраны независимо, но в рассматриваемой задаче постоянные C_1 и C_2 являются связанными величинами (сравните с [3]). Представим функции u_2 и u_3 на границе $\rho = r_1$ как

$$u_2(r_1) = C \cos \theta, u_3(r_1) = C \sin \theta, \quad (87)$$

где постоянная $C > 0$ должна быть известна, а параметр $\theta \in [0, 2\pi]$ можно определить, используя граничные условия (8) (сравните с [4]). Таким образом, получаем следующее выражение

$$C_1^2 I_0^2(k_1 r_1) + C_2^2 I_1^2(k_1 r_1) = C^2. \quad (9)$$

Используя условие (9) определим константы C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{C \sin \theta}{I_0(k_1 r_1)} \text{ и } C_2 = \frac{C \cos \theta}{I_1(k_1 r_1)}.$$

Определение 1. Задача P_H : необходимо доказать существование вещественных значений γ таких, что для постоянной C существуют параметр θ и ненулевые функции u_1, u_2 и u_3 такие, что:

1. $|\mathbf{u}|^2 \neq 0$;
2. при $\rho < r_1$ функции u_1, u_2 и u_3 находятся по формулам (9);
3. при $r_1 \leq \rho \leq r_2$ u_1, u_2 и u_3 переводят уравнение (6) в верное равенство;
4. функции u_1, u_2 и u_3 должны удовлетворять граничным условиям;
5. функции u_1, u_2 и u_3 обращаются в нуль на границе $\rho = r_2$;

Определение 2. Решения γ являются собственными значениями задачи P_H , а функции u_1, u_2 и u_3 которые им соответствуют, являются собственными функциями задачи P_H .

4. Численный метод

Для численного решения задачи предложен метод, основанный на решении вспомогательной задачи Каши [5], что позволяет, в частности, определить и построить нормированные собственные значения γ .

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} u_1' = P_1, \\ u_2' = P_2, \\ u_3' = P_3, \\ u_4' = P_4, \end{cases}$$

где

$$u_4 := u_2' + \frac{1}{\rho} u_2 \text{ и } P_1 = \frac{\varepsilon_2' + 2\alpha \left(u_2 u_4 - \frac{1}{\rho} u_2^2 - \gamma u_1 u_3 \right)}{\varepsilon_2 + \alpha (2u_1^2 + |\mathbf{u}|^2)} u_1 -$$

$$- \frac{1}{\gamma \rho} \frac{\gamma u_1 + \gamma^2 \rho u_3 + 2\alpha \rho k_0^2 u_1^2 u_3}{\varepsilon_2 + \alpha (2u_1^2 + |\mathbf{u}|^2)} (\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2),$$

$$P_2 = u_4 - \rho^{-1} u_2, \quad P_3 = -\gamma^{-1} \left(\gamma^2 - k_0^2 (\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2) \right) u_1,$$

$$P_4 = \left(\gamma^2 - k_0^2 \left(\varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2 \right) \right) u_2,$$

с начальными условиями

$$u_1(r_1) := x, \quad u_2(r_1) := C \cos \theta, \quad u_3(r_1) := C \sin \theta,$$

$$u_4(r_1) := C \cos \theta \frac{k_1 I_1'(k_1 r)}{I_1(k_1 r)} + \frac{C}{r_1} \cos \theta,$$

где x – действительный корень кубического уравнения $a_1 x^3 + a_2 x + a_3 = 0$; с коэффициентами $a_1 = \alpha$, $a_2 = \varepsilon_2 + \alpha C^2$, $a_3 = C \sin \theta \frac{\varepsilon_1 \gamma I_1(k_1 r_1)}{k_1 I_0(k_1 r_1)}$

Используя условия сопряжения в точке $\rho = r_2$ определим следующие функции

$$F_E(\gamma, \theta) = u_2(r_2), \quad F_M(\gamma, \theta) = u_3(r_2).$$

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_E(\gamma, \theta) = 0, \\ F_M(\gamma, \theta) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Выбирая значения константы C , изменяя значения углового параметра θ , мы можем определить (численно) решения уравнений $F_E = 0$, $F_M = 0$. Затем мы определяем точки пересечения этих кривых, эти точки являются собственными значениями задачи P_H .

5. Численные результаты

Для расчетов используются следующие значения параметров: $r_1 = 2$, $r_2 = 6$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$, $\alpha = 0.01$.

На рисунке 1 построена зависимость $\gamma(\omega)$. Мы называем зависимость $\gamma(\omega)$ дисперсионной кривой.

Изучается поведение нелинейных дисперсионных кривых с изменением коэффициента нелинейности α . Построенные кривые указаны на рисунке как H , H_1 , H_2 . Значение коэффициента нелинейности показано на рисунке. Как следует из численного эксперимента, по мере уменьшения α , значение собственного значения γ возрастает. Этот факт показывает, что когда $\alpha \rightarrow 0$, нелинейные гибридные моды не превращаются в линейные ТЕ или ТМ-моды.

Заключение

Приведены численные результаты, подтверждающие существование неполяризованных азимутально-симметричных волн в диэлектриче-

ском волноводе. Интересен тот факт, что эти волны не соответствуют нелинейным поляризованным волнам ТЕ и ТМ. Возникает естественный вопрос – возможно ли экспериментально доказать существование нелинейных гибридных волн.

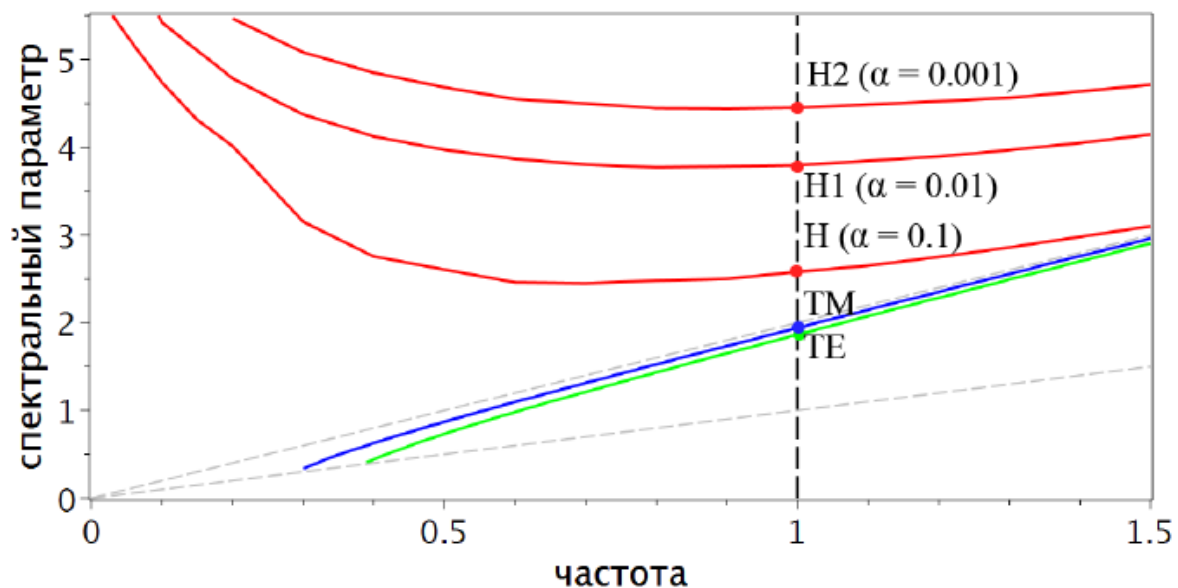


Рис. 1. Графики дисперсионной кривой для ТЕ, ТМ и нелинейных собственных значений: линейное ТЕ собственное значение $\gamma \approx 1.86$ (зеленая точка); линейное ТМ собственное значение $\gamma \approx 1.931$ (синяя точка); нелинейное гибридное собственное значение $\gamma \approx 2.58$ (красная точка)

Список литературы

1. Веселов, Г. И. Слоистые металлодиэлектрические волноводы / Г. И. Веселов, С. Б. Раевский. – М. : Радио и связь, 1988.
2. Eleonskii, P. N. Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics Jetp. – 1972. – Vol. 35, № 1. – P. 44–47.
3. Schürmann, H. W. TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure / H. W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58, № 1. – P. 1040–1050.
4. Smirnov, Yu. G. Coupled electromagnetic transverseelectric–transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 54. – P. 1–22.
5. Smolkin, E. The Azimuthal Symmetric Hybrid Waves in Nonlinear Cylindrical Waveguide / E. Smolkin // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings, 2017. – P. 1–6.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ¹

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: i.v.boykov@gmail.com, ryazantsevv@mail.ru

Данная статья представляет собой обзор результатов, полученных авторами в области построения адаптивных разностных схем восстановления физических полей, в частности, гравитационных и тепловых полей. Построения основаны на принадлежности функций, описывающих физические поля, функциональным классам специального вида. Для этих функциональных классов проводится оценка поперечников Колмогорова и Бабенко, и строятся локальные сплайны, оптимальным по точности образом аппроксимирующие функции указанных классов. Разностные схемы строятся по узлам оптимальных сплайнов. Результаты численного моделирования демонстрируют эффективность предложенных вычислительных схем.

Разработка и применение разностных методов решения уравнений математической физики имеет огромное прикладное значение вследствие их простоты вкупе с высокой эффективностью при сравнительно небольшой вычислительной трудоёмкости.

Известно большое число работ, посвящённых построению разностных схем с неравномерными сетками узлов [1–9].

В ряде работ [10–12] предлагается эффективный подход к построению численных методов, состоящий в поиске приближённого решения вышеупомянутых уравнений в экстремальных подпространствах, которые наилучшим образом аппроксимируют функциональные пространства, включающие в себя точные решения уравнений. Этот подход с успехом применяется в цикле работ статей, посвящённых построению разностных схем приближённого восстановления потенциальных и тепловых полей. Теоретической основой для этих работ являются работы И. В. Бойкова и его учеников [13–15], в которых вычислены поперечники

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

Колмогорова и Бабенко функциональных классов $Q_r(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $P_{r,\gamma}(\Omega, M, a)$.

Приведём определение поперечника Колмогорова. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство. Обозначим как X некоторое компактное множество, принадлежащее пространству $\mathbb{B}$. Пусть L^n – некоторое множество n -мерных линейных подпространств из пространства $\mathbb{B}$. Тогда n -поперечник Колмогорова определяется формулой

$$d_n(X, \mathbb{B}) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где оператор $\inf_{L^n}$ обозначает нахождение точной нижней границы по всем подпространствам L размерности n .

Приведём определения функциональных классов, для которых строятся адаптивные разностные схемы.

Обозначим $\Omega = [-1, 1]^l$, где $l = 1, 2, \dots$. Класс $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ включает в себя функции $\varphi(x_1, \dots, x_l)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq M, \quad 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq \frac{M}{[d(x, \Gamma)]^{|\nu| - r - \zeta}}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad r < |\nu| \leq s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ (γ – нецелое), $s = r + \gamma$ (γ – целое). Через $d(x, \Gamma)$ обозначено расстояние от точки x до границы Γ , определяемое в соответствии с формулой

$$d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|1 + x_i|, |1 - x_i|), \quad x = (x_1, \dots, x_l),$$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l), \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_l.$$

Функциональный класс $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < \gamma \leq 1$, состоит из функций $f(x_1, \dots, x_l)$ таких, что имеют место следующие условия:

$$\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}, \quad 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$\left| \frac{\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}} \right| \leq \frac{M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|}}{[d(x, \Gamma)]^{|\nu| - r - 1 + \gamma}}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad r < |\nu| \leq \infty.$$

Обозначим $\Omega = [-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T]$. Функциональный класс $P_{r,\gamma}(\Omega, M, a)$ определяется как множество функций $u(t, x)$, определённых

и непрерывных вместе со своими производными до r -го порядка в области Ω , для которых справедливы следующие условия:

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\},$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \frac{a^{(k-r)/2} M}{t^{(k-r)/2}} \cdot \frac{k!}{[k/2]!}, \quad k = r+1, r+2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\},$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \right| \leq \frac{a^k k!}{t^{k-\gamma}} M, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T] \setminus \{0\},$$

где $0 \leq \gamma \leq 1$ и $a > 0$.

Работа [16] посвящена построению разностных схем продолжения потенциальных полей. Актуальность этой проблемы продиктована часто возникающей в геофизике необходимостью решения задачи определения расположения и характеристик залегающих под поверхностью Земли аномалий силы тяжести. Однако разностные схемы с постоянными шагами сеток, сконструированные для решения этой задачи, оказались неустойчивыми [21].

В работе [16] за счёт построения неравномерной сетки удалось добиться устойчивого счёта для достаточно большого числа слоев.

В статье [16] при продолжении потенциальных полей предлагается использовать сетки с переменными шагами по координатным переменным. Такой подход позволил построить разностные схемы, устойчивые для практического применения наряду с существенно меньшим по сравнению с равномерными схемами объёмом вычислительной работы и более высокой точностью аппроксимации.

Предложенный в работе [16] метод разностной аппроксимации основан на принадлежности потенциальных полей функциональным классам $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Для этих классов в работах [17,18] построены локальные сплайны, которые аппроксимируют потенциальные поля оптимальным по точности образом. Узлы упомянутых сплайнов служат основой для построения неравномерной разностной сетки узлов, на которой затем строится аппроксимация поля.

Известно, что аномальные потенциальные поля, источником которых служат гравитирующие тела, относятся к функциональному классу $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, где Ω – область, в которой задано поле. В соответствии с оптимальным методом аппроксимации функций из класса $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ область Ω , которую по соображениям простоты определим формулой $\Omega = [-1, 1]^3$, разбивается на более мелкие области Δ^k , $k = \overline{1, N-1}$, где области $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2$, определяются соответственно формулами

$$0 \leq d(x, \Gamma) \leq 2^{-N(r+1-\gamma)/r}, \quad 2^{-N(r+1-\gamma)/r} \leq d(x, \Gamma) \leq 2^{-N}, \quad 2^{-N} \leq d(x, \Gamma) \leq 2^{2-N},$$

а области Δ^k , при $k > 2$, фиксируются в соответствии с формулой

$$2^{k-1-N} \leq d(x, \Gamma) \leq 2^{k-N}, \quad k = \overline{3, N}.$$

Каждая область Δ^k , в свою очередь, разбивается на более мелкие области Δ_{ij}^k , представляющие собой кубы с гранями, параллельными граням куба Ω и ребрами длины h_k , $k = \overline{0, N-1}$,

$$h_0 = 2^{-N(r+1-\gamma)/r}, \quad h_1 = 2^{-N} - 2^{-N(r+1-\gamma)/r}, \quad h_2 = 2^{-N}, \quad h_k = 2^{k-1-N}, \quad k = \overline{3, N-1}.$$

В каждой области Δ_{ij}^k потенциальное поле U аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{m,m,m}(U, \Delta_{ij}^k)$, где m – число узлов аппроксимации по каждой из независимых переменных, определяемое формулой

$$m = \left[2^{r+1-\gamma} M \sigma(N) N \right] + 1, \quad \sigma(N) = (\ln^3(N))^{1/N}.$$

Получаемый в результате описанных построений локальный сплайн обозначается через $f_N(x)$.

Точность аппроксимации потенциального поля $U(x_1, x_2, z)$ локальным сплайном $f_N(x_1, x_2, z)$ оценивается неравенством

$$\|U(x) - f_N(x)\|_C \leq C \cdot 2^{-(r+1-\gamma)N}.$$

Пусть в трёхмерном пространстве введена декартова система координат с осью аппликата, направленной вниз. Ставится задача об аппроксимации в пространственной области $\Omega = [a, b; a, b; 0, H]$ функции $U(x_1, x_2, z)$, являющейся решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [a, b]^2. \quad (2)$$

Пусть h_x – шаг разностной схемы по переменным x_1, x_2 , а $h_z(k)$, зависящий от порядкового номера k ($k = \overline{1, M}$) слоя, шаг разностной схемы по переменной z . В соответствии с алгоритмом построения оптимальной по порядку аппроксимации потенциального поля, фиксируется $h_z(k) = 2^{k-1-M}$, $k = \overline{1, M}$. Введём в рассмотрение следующие величины:

$$V_{i,j,k} = (\xi_i, \xi_j, \eta_k), \quad \xi_i = a + i \left[\frac{b-a}{N} \right], \quad i = \overline{0, N},$$

$$\eta_k = \frac{kH}{M}, k = \overline{0, M}, \eta_{-1} = -H / M.$$

Замечание 1. Сетка узлов $(V_{i,j,k})$ является равномерной и вводится для упрощения дальнейших выкладок. Описываемая ниже адаптивная разностная схема аппроксимации потенциальных полей предполагает построение неравномерной сетки, использующей только часть узлов равномерной сетки $(V_{i,j,k})$. Подробное построение адаптивной разностной схемы описано в [16].

Для проведения вычислений по описываемой разностной схеме необходимо предварительно определить значения неизвестной функции $U(x_1, x_2, z)$ на слоях $k=0$ и $k=-1$. Значения $U_{i,j,0}$, соответствующие слою $k=0$, находятся из условия (2). Значения $U_{i,h,-1}$, соответствующие слою $k=-1$, могут быть найдены в результате приближённого вычисления по одной из кубатурных формул интеграла Пуассона:

$$U(x_1, x_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zf(\xi, \eta) d\xi d\eta}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Для того, чтобы вычислить интеграл (3) необходимо тем или иным способом продолжить функцию $f(x_1, x_2)$ на множество $\mathbb{R}^2 \setminus [a, b]^2$. Простейший способ продолжения определяется формулой

$$f(x_1, x_2) = 0, \text{ если } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus [a, b]^2.$$

Далее, значения $U(V_{i,j,1})$ на слое $k=1$ вычисляются по семиточечной разностной схеме в соответствии с формулой

$$U(V_{i,j,1}) = 2U(V_{i,j,0}) - U(V_{i,j,-1}) - \frac{h_z^2(1)}{h_x^2} [U(V_{i+1,j,0}) + U(V_{i-1,j,0}) + U(V_{i,j+1,0}) + U(V_{i,j-1,0}) - 4U(V_{i,j,0})], \quad (4)$$

где $i, j = \overline{1, N-1}$. Значения $U(V_{0,j,1})$ при $j = \overline{1, N-1}$ вычисляются по формуле

$$U(V_{0,j,1}) = 2U(V_{0,j,0}) - U(V_{0,j,-1}) - \frac{h_z^2(1)}{h_x^2} [U(V_{0,j-1,0}) + U(V_{0,j+1,0}) - 2U(V_{0,j,0})] - \frac{h_z^2(1)}{h_x^2} [U(V_{2,j,0}) - U(V_{1,j,0}) - U(V_{1,j,0}) + U(V_{0,j,0})].$$

По аналогии с этой формулой определяются значения поля в узлах $U(V_{N,j,1})$, $j = \overline{1, N-1}$, $U(V_{i,0,1})$, $U(V_{i,N,1})$, $i = \overline{1, N-1}$.

Значение $U(V_{0,0,1})$ вычисляется по следующей разностной формуле:

$$U(V_{0,0,1}) = 2U(V_{0,0,0}) - U(V_{0,0,-1}) - \frac{h_z^2(1)}{h_x^2} \left[U(V_{2,0,0}) + U(V_{0,0,0}) - \right. \\ \left. - 2U(V_{1,0,0}) + U(V_{0,2,0}) + U(V_{0,0,0}) - 2U(V_{0,1,0}) \right].$$

Аналогичные формулы применяются для вычисления значений поля в узлах $U(V_{N,0,1})$, $U(V_{0,N,1})$, $U(V_{N,N,1})$.

Вычисления на слоях $k = 2^l - 1$, где $l = \overline{2, \log_2(M+1)}$ проводятся по аналогичным формулам с той разницей, что шаги сетки по всем переменным при переходе к каждому следующему слою удваиваются:

$$h_x(k+1) = 2h_x(k), \quad h_z(k+1) = 2h_z(k),$$

а вычисления проводятся по следующей формуле, аналогичной формуле (4).

Замечание 2. С целью упрощения обозначений нижеследующая формула записана в терминах ранее упомянутого индекса l .

$$U(V_{i,j,2^l-1}) = 2U(V_{i,j,2^{l-1}-1}) - U(V_{i,j,-1}) - \\ - \frac{h_z^2(l)}{h_x^2(l)} \left[U(V_{i+2^{l-1},j,2^{l-1}-1}) + U(V_{i-2^{l-1},j,2^{l-1}-1}) + U(V_{i,j+2^{l-1},2^{l-1}-1}) \right. \\ \left. + U(V_{i,j-2^{l-1},2^{l-1}-1}) - 4U(V_{i,j,2^{l-1}-1}) \right],$$

где индексы i, j изменяются в зависимости от текущего значения l по формуле $i, j = \overline{2^{l-1}, 2 \cdot 2^{l-1}, 3 \cdot 2^{l-1}, \dots, N - 2^{l-1}}$. Тем самым, значения поля U при $k > 1$, определяются не во всех узлах $V_{i,j,k}$, а только в тех, для которых имеют место формулы

$$i, j = \overline{2^{l-1}, 2 \cdot 2^{l-1}, 3 \cdot 2^{l-1}, \dots, N - 2^{l-1}},$$

$$k = 2^l - 1, \quad l = \overline{1, 2, \dots, \log_2(M+1)}.$$

Замечание 3. Для корректного описания представленной разностной сетки узлов необходимо потребовать целочисленности значения $\Theta = \log_2(M+1)$ и кратности числа N этому значению. При ее практическом использовании можно фиксировать Θ произвольным целым положительным числом и фиксировать значение M в соответствии с формулой $M = 2^\Theta - 1$; от требования кратности числа N значению Θ можно отказаться, но в этом случае она может утратить симметричность своей структуры.

Эффективность описанной разностной схемы подтверждена рядом модельных примеров.

В работе [19] проводится построение адаптивных разностных схем решения уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной. Рассматриваются решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (6)$$

в области $D = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty\}$.

Показано, что определяемое формулой

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, \quad t > 0, \quad (7)$$

решение задачи (5)-(6) в предположении о существовании у функции $u_0(x)$, $-\infty \leq x \leq \infty$, непрерывных производных до r -го порядка удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |u_0^{(k)}(x)| \leq M, \quad k = \overline{0, r}$$

принадлежит функциональному классу $P_{r, \gamma, \alpha}(D, M, a)$, входящему в класс $P_{r, \gamma}(D, M, a)$. Функции, принадлежащие классу $P_{r, \gamma, \alpha}(D, M, a)$, удовлетворяют дополнительному условию

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq M |t_1 - t_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Для функций из этого класса в [20] построены локальные сплайны, аппроксимирующие их оптимальным по точности (по порядку) образом. Узлы этих локальных сплайнов используются в качестве узлов разностной сетки, на которой строится аппроксимация задачи (5)-(6).

Опишем процесс построения упомянутых локальных сплайнов, оптимальным образом аппроксимирующих функции класса $P_{r, \gamma, \alpha}(\Omega, M, a)$.

Пусть область Ω определяется формулой

$$\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Зафиксируем также $a = 2$. Введём в рассмотрение следующие области:

$$\Omega_0 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 2^{-N}\},$$

$$\Omega_k = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq 1, \frac{2^{k-1}}{2^N} \leq t \leq \frac{2^k}{2^N} \right\}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Каждая из областей Ω_k , в свою очередь, разбивается на прямоугольники Δ_i^k , у каждого из которых длина параллельной оси Ox стороны равняется h_k , $k = \overline{0, N-1}$. Эти величины фиксируются следующим образом:

$$h_0 = \frac{\alpha N}{2^{\alpha N/r}}, \quad h_k = \frac{N^{1/2}}{(\pi \alpha N)^{1/2 \alpha N}} \cdot \left(\frac{\alpha}{e} \right)^{1/2} \cdot \frac{2^{k/2}}{2^{N/2}}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

В каждом прямоугольнике Δ_i^k исходную функцию предлагается приближать интерполяционным многочленом $L_{ss}(u, \Delta_i^k)$, ($s = [\alpha N] + 1$), построенным по s^2 узлам (s узлов по каждой из независимых переменных). В качестве узлов берутся образы узлов многочленов Чебышева первого рода, отображённые с сегмента $[-1, 1]$. Сплайн, составленный из многочленов $L_{ss}(u, \Delta_i^k)$, где $i, k = \overline{1, N-1}$, обозначается как $S(t, x)$. Погрешность аппроксимации теплового поля $u(t, x)$ локальным сплайном $S(t, x)$ в метрике пространства $C(\Omega)$ оценивается формулой:

$$\|u(t, x) - S(t, x)\|_C \leq \frac{C \lambda_s^2 N}{2^{\alpha N}}, \quad \text{где } \lambda_s - \text{константа Лебега.}$$

Уравнение (4) аппроксимируется в области

$$\tilde{D} = \{(x, t) : -A \leq x \leq A, 0 \leq t \leq T\}, \quad A > 0, T > 0.$$

следующей формулой:

$$u_{j+1,k} = \left(1 - \frac{2\tau(j)}{h^2(j)} \right) u_{j,k} + \frac{\tau(j)}{h^2(j)} (u_{j,k-1} + u_{j,k+1}), \quad (8)$$

где $u_{j,k} = u(t_j, x_{jk})$, $t_{j+1} = t_j + \tau(j)$, $x_{jk} = -A + kh(j)$, $j = \overline{0, L-1}$, $k = \overline{0, N}$. Величины шагов сетки $\tau(j)$ и $h(j)$ зависят от текущего слоя и определяются формулами $\tau(j+1) = 2\tau(j)$ и $h(j+1) = 2h(j)$, $\tau(0)$, $h(0)$ – фиксированные параметры сетки.

В результате проведения ряда очевидных преобразований приходим к следующей явной расчётной формуле:

$$u_{j+1,k} = \left(1 - 2^{1-j} \frac{\tau(0)}{h^2(0)} \right) u_{j,k} + 2^{-j} \frac{\tau(0)}{h^2(0)} (u_{j,k-1} + u_{j,k+1}). \quad (8)$$

Возможный вид разностной сетки узлов, используемой для аппроксимации уравнения (5), изображён на рисунке 1.

Замечание 4. На рисунке 1 обведена та часть сетки, в которой по условию решаемой задачи должно быть восстановлено поле. При этом

вне отмеченной области располагаются узлы, используемые как вспомогательные при организации вычислений по рассматриваемой адаптивной схеме.

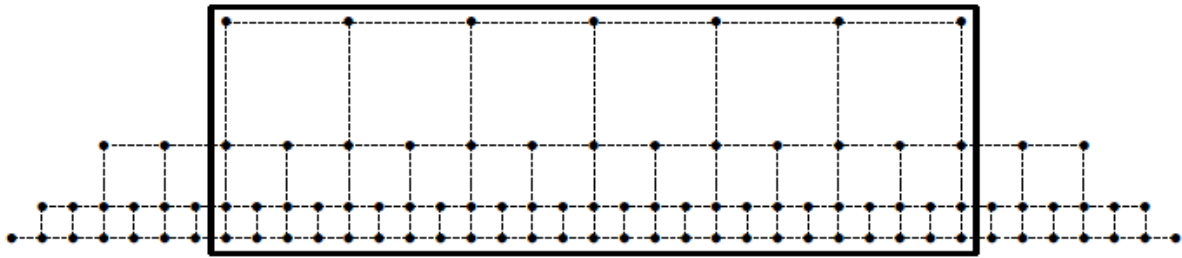


Рис. 1

Замечание 5. Реализация описанной адаптивной разностной схемы допускает использование различных вариантов построения неравномерной сетки. Проведённые вычислительные эксперименты подтверждают достаточность условия

$$1 \leq \frac{h_z(k+1)}{h_z(k)} \leq 2$$

для устойчивости вычислений по описанной выше адаптивной разностной схеме.

В статье [19], как и в данной работе, даётся упрощённое описание сетки в том смысле, что удвоение шагов сетки выполняется только в направлении переменной t , в то время, как согласно алгоритму построения оптимальной по точности аппроксимации поля локальными сплайнами, удвоение шага должно производиться в направлении обеих переменных. Тем не менее, результаты численного моделирования демонстрируют эффективность упрощённой разностной схемы.

Замечание 6. На практике при продолжении как потенциальных, так и тепловых полей целесообразным является удвоение шагов сетки не на каждом слое, а с периодичностью в несколько слоёв.

Библиографический список

1. Алалыкин, Г. Б. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках / Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов, И. Л. Киреев, Л. А. Плинер. – М. : Наука, 1970.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики / под ред. С. К. Годунова. – М. : Наука, 1976.
3. Бахвалов, Н. С. Об автоматическом конструировании сетки интегрирования при решении краевых задач с пограничным слоем / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1999. – Т. 39, № 8. – С. 1290–1295.
4. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский. – Минск : Критерий, 1996.

5. Ильин, В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В. П. Ильин. – Новосибирск : Изд-во Института математики, 2000.
6. Вабищевич, П. Н. Разностные методы на локально сгущающихся сетках / П. Н. Вабищевич, Г. И. Шишкин // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 7. – С. 1179–1183.
7. Шишкин, Г. И. Сеточная аппроксимация сингулярно возмущённых параболических уравнений с кусочно-непрерывными и начально-краевыми условиями / Г. И. Шишкин // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 218–233.
8. Жуков, В. Т. Об одном направлении в конструировании разностных схем / В. Т. Жуков, Л. Г. Страховская, Р. П. Федоренко, О. Б. Феодоритова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 2. – С. 222–234.
9. Калиткин, Н. Н. Вычисления на неравномерных сетках / Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Б. В. Рогов. – М. : Физматлит, 2005.
10. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под ред. К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979.
11. Бабенко, К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, № 1. – С. 3–28.
12. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1986.
13. Бойков, И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами / И. В. Бойков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 25–33.
14. Бойков, И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2007.
15. Бойков, И. В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов / И. В. Бойков // Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 8. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн ин-та, 1987. – С. 4–22.
16. Бойков, И. В. Об одном разностном методе продолжения потенциальных полей / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 20–33.
17. Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей. Ч. I / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 1998. – № 8. – С. 70–78.
18. Бойков, И. В. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей. Ч. II / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. – 2001. – № 12. – С. 78–89.
19. Бойков, И. В. Построение адаптивных разностных схем решения уравнения теплопроводности / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 1 (41). – С. 68–81.

20. Бойков, И. В. Оптимальные методы аппроксимации тепловых полей / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 5–16.

21. Андреев, Б. А. Геологическое истолкование гравитационных аномалий / Б. А. Андреев, И. Г. Клушин. – Л. : Недра, Ленингр. отд., 1965. – 495 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ НА ФРАКТАЛАХ¹

А. И. Бойкова, В. С. Елпатова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: allaboikova@mail.ru

В середине прошлого века Бенуа Мандельброт ввел в математику понятия <фрактал> и <фрактальная геометрия>, которые, подобно лесному пожару распространились по многим разделам математики и проникли в физику и во многие технологии. В настоящее время практически во всех областях естествознания, начиная с микробиологии и кончая астрофизикой, присутствуют фракталы и порожденные ими структуры [1–3].

Огромная заслуга Б. Мандельброта заключается не только в том, что он заложил основы теории фракталов, но и в том, что он продемонстрировал жизненность этой теории во многих направлениях.

Интересно отметить, что, по сути дела, с фракталами (задолго до того, как появилось само слово <фрактал>) ученые сталкивались в течение многих столетий.

Триста лет назад Готфрид Вильгельм Лейбниц воспользовался масштабной инвариантностью бесконечно длинной прямой для того, чтобы ввести понятие прямой. Понятие фрактальной геометрии послужило основанием для включения в повседневный математических обиход многих функций и математических объектов, которые в начале 20 века считались монстрами в математике. Известный французский математик Шарль Эрмит писал в 1893г.: <Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производных>.

Речь шла о построении непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производных. Самая знаменитая из серии подобных функций была представлена Карлом Вейерштрассом в 1861г.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

$$f(x) = W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где $0 < a < 1$, $b > 1$ - нечетные целые числа, $ab > 1 + 3\pi/2$.

Интересно отметить, что методы фрактальной геометрии позволяют легко и наглядно построить такую функцию. Простейшим примером является "снежинка" Коха. Эта фигура интересна еще и тем, что является примером кривой, расположенной в ограниченной области и имеющей бесконечную длину.

Многие понятия, введенные в теории множеств, одного из самых абстрактных в начале 20 века направлений математики, оказались чрезвычайно востребованы в физике, химии и биологии. Одним из них является понятие совершенного множества, введенного Г. Кантором для того, чтобы доказать существование несчетных множеств меры нуль. Сейчас это понятие стало одним из центральных во многих областях математики и во многих приложениях.

Несколько иначе отнеслись к непрерывным функциям, не имеющих производных ни в одной точке, физики.

Л. Больцман писал: <Если бы К. Вейерштрасс не придумал такой функции, то физикам просто не осталось бы ничего другого, как самим их изобрести>.

Это естественно, т.к. броуновское движение, изучаемое А. Эйнштейном и Н. Винером, представляет траектории, являющиеся нигде не дифференцируемыми функциями.

Показано, что броуновское движение является фракталом.

Таким образом, фрактальная геометрия естественным образом входит в обиход физики и, следовательно, различных приложений физики.

В связи с этим возникает проблема определения различных математических понятий на фракталах и способах их вычисления.

Многие понятия и фигуры фрактальной геометрии, как говорилось раньше, возникли задолго до возникновения самого слова "фрактал", исходя из повседневных нужд математики и ее приложений.

Еще триста лет назад Исаак Ньютон предложил итерационный метод решения уравнения $f(x)=0$. Взяв начальное приближение x_0 , следующее приближение получаем по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $f'(x_n)$ - производная функции $f(x)$ в точке x_n .

Существует большое число работ посвященных вопросам сходимости метода Ньютона (1).

Итерационный метод (1) может быть применим и в случае, если в уравнении $f(z)=0$ $f(z)$ является функцией комплексной переменной.

Удивительные построения возникают при применении метода Ньютона (1) к кубическому уравнению $f(z)=z^3-1$, которое имеет корни $z_1=1$, $z_2=e^{i2\pi/3}$, $z_3=e^{-i2\pi/3}$.

Итерации (1) для данного уравнения имеют вид

$$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

Казалось бы, итерации, в зависимости от начальных приближений, должны сходиться к одному из корней z_i , $i = 1, 2, 3$, и образовывать три четко выраженные области притяжения.

Напомним, что областью притяжения корня z_i , $i = 1, 2, 3$, называется множество начальных точек z_0^i , $i = 1, 2, 3$, для которых итерации (2) сходятся к корням z_i , $i = 1, 2, 3$, уравнения $z^3=1$.

Однако, на самом деле, происходят совершенно странные вещи: на плоскости комплексной переменной нет ни одного сколько-нибудь связанного фрагмента границы между двумя областями притяжения. Если z_0^1 - начальная точка итерационного процесса, сходящегося к решению z_1 , то в любой ее окрестности найдется точка z_0^2 , являющаяся начальной точкой итерационного процесса, сходящегося к точке z_2 , а в любой окрестности точки z_0^2 найдется точка z_0^3 , являющаяся начальной точкой итерационного процесса, сходящегося к точке z_3 . Результаты этих исследований, полученные к 1897г. Артуром Кэли, поразили математиков. И только в 1918г. Гастон Жюлиа и Пьер Фату показали, что это общее правило для итераций рациональных функций: граничные точки одной области притяжения являются общими для всех областей притяжения. Эти граничные точки образуют множества, называемыми множествами Жюлиа.

Другим, даже более известным множеством, является множество Мандельброта, которое определяется рекуррентной формулой $z_{n+1}=z_n^2+c$, $z_0=0$, и значением c при котором последовательность z_n , $n = 1, 2, \dots$, является ограниченной.

Программа построения множества Мандельброта представлена в приложении.

Одними из первых определений математических операторов на фракталах являются определения и вычисления интегралов. Совершенно очевидно, что аналитическое вычисление интегралов на столь сложных множествах невозможно, и здесь естественно применить численные методы и, в первую очередь, метод Монте-Карло.

Датой рождения метода Монте-Карло официально считается 1949г, когда вышла из печати статья [4]. Создателями метода Монте-Карло принято считать Джона фон Неймана и Станислава Улама.

Однако идея статистических испытаний, на которой основан метод Монте-Карло, давно и успешно используется при решении многих задач.

Достаточно вспомнить задачу Бюффона о статистическом методе вычисления числа π .

Одной из особенностей метода Монте-Карло является простота структуры вычислительного алгоритма. Как правило, составляется одна программа для осуществления одного случайного испытания. Затем эта программа независимо повторяется для каждого из N испытаний и результаты усредняются.

Вторая особенность метода Монте-Карло заключается в том, что ошибка вычислений, как правило, имеет порядок $\sqrt{D/N}$, где D - дисперсия случайной величины, используемой при построении алгоритма, а N - число испытаний. Из этой формулы следует, что точность вычислений по методу Монте-Карло не очень высокая. Поэтому метод Монте-Карло применяется или в случае, когда нужна не очень высокая точность, или, когда применение стандартных детерминированных методов практически невозможно из-за чрезмерной сложности исследуемой задачи.

Отметим, что задача вычисления интегралов на фракталах относится к последнему случаю.

Чаще всего метод Монте-Карло используется в ядерной физике.

Еще одной особенностью метода Монте-Карло является возможность решать одну и ту же задачу различными методами (в зависимости от выбора случайных последовательностей).

В таблице 1 приведены расчеты площади единичного круга методом Монте-Карло.

Таблица 1

Число точек, равномерно распределенных на площади $[-1.15; 1.15]^2$	Площадь единичного круга s / π , вычисленная методом Монте-Карло
1	2
100000	площадь единичного круга [1.0011217069807505, 1.0022667313033309, 0.9982254689883413, 1.0061732848744873, 1.0015089946192701] среднее значение площади круга 1.00185923735 среднеквадратическое отклонение площади круга 0.00255530627862
10000	площадь единичного круга [1.0123362099048461, 0.99398214355760262, 1.0096420350281865, 0.98236351440200798, 0.99280344204906412] среднее значение площади круга 0.998225468988 среднеквадратическое отклонение площади круга 0.0112112156299
1000	площадь единичного круга [0.99516084506614133, 0.97663839278910658, 1.008631719449439, 0.99684470436405337, 0.98842540787449229] среднее значение площади круга 0.993140213909 среднеквадратическое отклонение площади круга 0.010510303896

Окочание табл. 1

1	2
100	площадь единичного круга [1.0271541717264738, 0.97663839278910636, 0.95979979980998398, 1.1450243225803316, 0.99347698576822907] среднее значение площади круга 1.02041873453 среднеквадратическое отклонение площади круга 0.0661651722336

Рассмотрим задачу вычисления интегралов на фракталах. В качестве фрактала возьмем множество Мандельброта, которое построим в прямоугольнике $\Delta=[a, b]^2$, где $-2.0 < a < 0.5$, $-1.25 < b < 1.25$.

Вначале рассмотрим задачу вычисления площади, занимаемой фракталом Мандельброта, в евклидовой метрике.

Для моделирования метода Монте-Карло построим несколько случайных последовательностей, определенных в квадрате Δ . В качестве одной из них возьмем последовательность с равномерной функцией распределения.

Построим программу определения числа M точек случайной последовательности из N испытаний, попавших на множество Мандельброта.

В результате проведения численных экспериментов определим площадь фрактала Мандельброта, лежащего в квадрате Δ : $S = \frac{M}{N}(b-a)^2$.

Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2

Число точек	Число итераций	Площадь
1	2	3
10000	100000	площадь фрактала [1.475625, 1.53, 1.51125, 1.4837499999999999, 1.5149999999999999] среднее значение площади фрактала 1.503125 среднеквадратическое отклонение площади фрактала 0.0203024013358
10000	10000	площадь фрактала [1.526875, 1.5081249999999999, 1.528125, 1.535625, 1.44625] среднее значение площади фрактала 1.509 среднеквадратическое отклонение площади фрактала 0.0326573115856
10000	1000	площадь фрактала [1.53125, 1.51125, 1.55375, 1.4806250000000001, 1.4924999999999999] среднее значение площади фрактала 1.513875 среднеквадратическое отклонение площади фрактала 0.0263106442338

1	2	3
10000	100	площадь фрактала [1.50875, 1.5237499999999999, 1.5175000000000001, 1.5181249999999999, 1.5956250000000001] среднее значение площади фрактала 1.53275 среднеквадратическое отклонение площади фрактала 0.0318016312475

При вычислении интегралов на фрактале Мандельброта используются различные случайные последовательности.

Библиографический список

1. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с.
4. Metropolis, N. The Monte Carlo method / N. Metropolis, S. Ulam // J. Amer. statistic assoc. – 1949. – Vol. 44, № 247. – P. 335–341.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ И ТРАПЕЦИЙ

Л. Р. Абдуллина, Р. М. Ганеев, Л. В. Яблокова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
г. Самара, Россия
E-mail: lrabdullina5@gmail.com, amirxan418@gmail.com

Нам нужно вычислить определённый интеграл:

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке интегрирования $[a, b]$.

Необходимость применения численного интегрирования чаще всего может быть вызвана отсутствием у первообразной функции представления в элементарных функциях и, следовательно, невозможностью аналитического вычисления значения определённого интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Также возможна ситуация, когда вид первообразной

настолько сложен, что быстрее вычислить значение интеграла численным методом.

Формулы для решения этой задачи называются квадратурными. Квадратурная формула позволяет вместо точного значения интеграла (1) найти некоторое его приближенное значение $\tilde{I}$. Разность точного и приближенного значений интеграла называется абсолютной погрешностью квадратурной формулы (или численного метода),

$$R = I - \tilde{I}$$

Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = x_0 + k \cdot \frac{b-a}{N} \quad (k=0, 1, \dots, N) \quad (2)$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(x_{i-1} + \frac{b-a}{2N}\right), \quad (3)$$

Выражение (3) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис.1 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

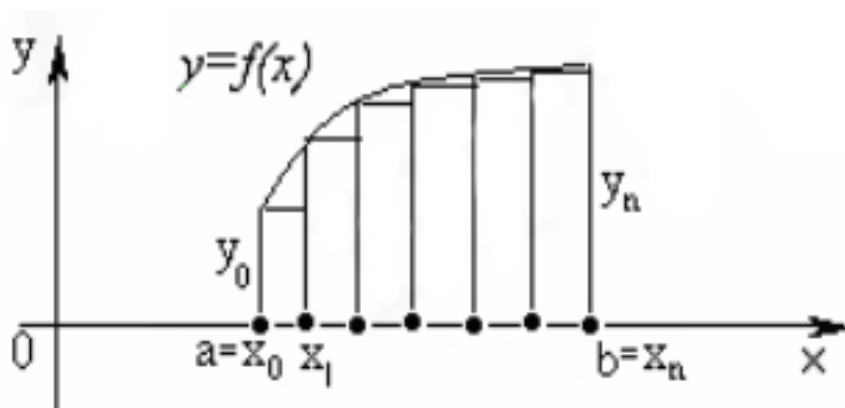


Рис. 1

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \rightarrow \infty$ правой части приближенного равенства (3) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала.

Так же мы можем заметить, что квадратурная формула прямоугольников точна для всех многочленов не выше первой степени.

Дадим ещё второй естественный способ приближенного вычисления определенного интеграла. Разобьем отрезок $[a, b]$ на равные части точками системы (2) и полагаем, что

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} \dots + \frac{f(x_{N-1}) - f(x_N)}{2} \right) =$$

$$= \frac{b-a}{2N} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]. \quad (4)$$

В формуле трапеций площадь рассмотренной выше криволинейной фигуры приближенно исчерпывается площадями трапеций (рис. 2). Формула трапеций не имеет преимущества перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.

Разность между левой и правой частями квадратурной формулы обозначим через $P_N(f)$ и будем называть остаточным членом квадратурной формулы.

Если функция f имеет кусочно-непрерывную производную f' , удовлетворяющую неравенству $|f'(x)| \leq M_1$, то остаточный член формулы прямоугольника (3) подчиняется неравенству

$$|P_N(f)| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{4N},$$

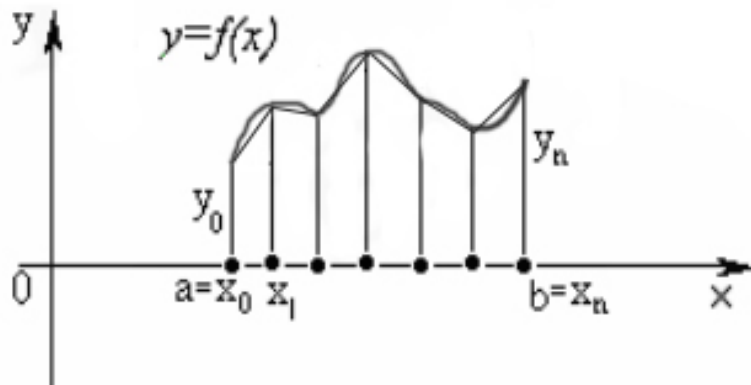


Рис. 2

Нужно сказать, что здесь константы вычислены точно — их нельзя уменьшить. Вывод оценки (3) приведём ниже.

Мы видим, что в обоих случаях для класса функций, имеющих ограниченную производную, остаточные члены имеют порядок $O(N^{-1})$ (т.е. формула точна для многочлена первой степени)

Для класса же функций, имеющих ограниченную вторую производную на $[a, b]$, имеет место оценка

$$|R_N(f)| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2},$$

Верная для формул прямоугольников и трапеций. Теперь уже порядок приближения посредством обеих рассматриваемых квадратурных формул есть $O(N^{-2})$.

Объяснение этого явления тесно связано с тем фактом, что обе квадратурные формулы являются точными для многочленов первой степени, но они неточны для многочленов степени выше чем 1.

Если функция f имеет третью ограниченную производную, то можно придумать квадратурную формулу, дающую погрешность приближения порядка $O(N^{-3})$.

Эта формула должна быть точной для многочленов второй степени. Но если она неточна для многочленов третьей степени, то для функций, имеющих ограниченную производную четвертого порядка, погрешность приближения остается имеющей порядок $O(N^{-3})$.

Пример 1. Квадратурная формула прямоугольников.

Возьмем определенный интеграл, значение которого мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, чтобы можно было совершить проверку. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{x^4 \sin x}{10} dx$ методом прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

В нашем примере $a = 4, b = 9, n = 10, f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$.

Чтобы применить формулу (3) на нужно вычислить шаг h и значения функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$ в точках $(x_{i-1} + \frac{h}{2}), i = 1, 2, \dots, 10$.

Вычислим шаг: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-4}{10} = 0.5$. Так как $x_{i-1} = a + (i-1) * h$, $i = 1, \dots, 10$ то $(x_{i-1} + \frac{h}{2}) = a + (i-1) * h + \frac{h}{2} = a + (i-0.5) * h, i = 1, \dots, 10$.

Для $i = 1$ имеем

$$x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_0 + \frac{h}{2} = a + (i-0.5) * h = 4 + (1-0.5) * 0.5 = 4.25 .$$

Находим соответствующее значение функции

$$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(4.25) = \frac{4.25^2 * \sin(4.25)}{10} \approx -1.616574.$$

Для $i = 2$ имеем

$$\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = \left(x_1 + \frac{h}{2}\right) = a + (i-0.5) * h = 4 + (2-0.5) * 0.5 = 4.75.$$

Находим соответствующее значение функции

$$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) = f(4.75) = \frac{(4.75)^2 \sin(4.75)}{10} \approx -2.254654$$

И так продолжаем вычисления до $i = 10$.

Для удобства представим результаты в виде таблицы 1.

Подставляем полученные значения в формулу прямоугольников:

$$\int_4^9 \frac{x^4 \sin x}{10} dx = (-1.616574 - 2.254654 - 2.367438 - 1.680497 - 0.129609 + \\ + 2.050513 + 4.326318 + 5.973808 + 6.279474 + 4.783042) = 7.682193.$$

Таблица 1

i	1	2	3	4	5
$x_{i-1} + \frac{h}{2}$	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25
$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$	-1.616574	-2.254654	-2.367438	-1.680497	-0.129607
i	6	7	8	9	10
$x_{i-1} + \frac{h}{2}$	6.75	7.25	7.75	8.25	8.75
$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$	2.050513	4.326318	5.973808	6.279474	4.783042

Значение исходного определенного интеграла можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_4^9 \frac{x^4 \sin x}{10} dx = \left(-\frac{1}{10} x^2 \cos x + \frac{1}{5} x \sin x + \frac{1}{5} \cos x \right) \Big|_4^9 = \\ = \frac{7}{5} \cos 4 - \frac{4}{5} \sin 4 - \frac{79}{10} \cos 9 + \frac{9}{5} \sin 9 \approx 7.630083.$$

Первообразная $-\frac{1}{10} x^2 \cos x + \frac{1}{5} x \sin x + \frac{1}{5} \cos x$ подынтегральной функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{10}$ была найдена интегрированием по частям.

Как видите, точное значение определенного интеграла отличается от значения, полученного по методу прямоугольников для $n = 10$, менее чем на шесть сотых долей единицы.

Пример 2. Квадратурная формула трапеций.

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 (\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60})dx$ методом трапеции с точностью до 0,01.

Что мы имеем из условия:

$$a=1; b=2; f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60}; \delta_n \leq 0,01.$$

В этом случае первым делом находим количество точек разбиения отрезка интегрирования, то есть n . Мы это можем сделать, используя неравенство для оценки абсолютной погрешности

$$|\delta_n| \leq \max |f''(x)| * \frac{(b-a)^3}{12n^2}, x \in [a, b].$$

Таким образом, если мы найдем n , для которых будет выполняться неравенство $\max |f''(x)| * \frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq 0,01$, то формула трапеций при данных n даст нам приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.

Найдем сначала наибольшее значение модуля второй производной функции на отрезке $[1; 2]$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{60} \right)' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \right)' = x^2;$$

Вторая производная функции является квадратичной параболой мы знаем из ее свойств, что она положительная и возрастающая на отрезке $[1; 2]$, поэтому $\max |f''(x)| = f''(2) = 4$.

Вернемся к нашему неравенству $\max |f''(x)| * \frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq 0,01$ и подставим в него полученное значение:

$$4 \cdot \frac{(2-1)^3}{12n^2} \leq 0,01 \Rightarrow n^2 \geq \frac{100}{3} \Rightarrow |n| \geq 5,7735$$

Так как n – число натуральное (n – количество элементарных интервалов, на которые разбивается отрезок интегрирования), то можно брать $n = 6, 7, 8, \dots$ Возьмем $n = 6$. Это позволит нам достичь требуемой точности метода трапеций при минимуме расчетов (хотя для нашего случая при $n=10$ производить вычисления вручную удобнее).

Итак, n найдено, теперь действуем как в предыдущем примере.

Библиографический список

1. Мысовских, И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И. П. Мысовских. – М. : Наука, 1981.
2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д : Феникс, 1997.
3. Федорюк, М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1987.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И БЛОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ НИХ¹

Д. Л. Головашкин, Н. Д. Морунов*

Институт систем обработки изображений –
филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
г. Самара, Россия;

* Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
г. Самара, Россия

E-mail: golovashkin2010@yandex.ru, niknixad@mail.ru

Введение

Метод разностного решения дифференциальных уравнений широко используется при постановке вычислительных экспериментов в различных областях физики: электродинамике [1], акустике [2], термодинамике [3] и других. Актуальной задачей, успех решения которой зачастую определяет прогресс в той или иной области естествознания, признается [4] сокращение длительности вычислений по разностным схемам. Традиционно для этого модифицируют математический аппарат, повышая порядки аппроксимации [5], накладывая подвижные [6] и нерегулярные [7] сеточные области; или (и) задействуют высокопроизводительную вычислительную технику [4].

В смежной области численных методов, вычислительной линейной алгебре, издавна широко применяются блочные алгоритмы, предназначенные для сокращения длительности коммуникаций между различными уровнями иерархической памяти ЭВМ [8,9]. Авторы работ, ориентированных на специалистов в области программирования ЭВМ, построение упомянутых алгоритмов связывают с приемом кодирования “tiling” [10].

В течение последних лет этот прием начали использовать и при решении сеточных уравнений трехслойных явных разностных схем для моделирования распространения электромагнитных [11,12,13] и акустических [14] волн. Суть его, применительно к теории разностных схем, состоит в переходе от традиционного послойного перебора временных слоев сеточной области в ходе вычислительного процесса к перебору блоков, каждый из которых пересекает несколько (десятков, сотен) временных

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-47-630560-р_а.

слоев. При согласовании объема блока с емкостью кэш-памяти центрального процессора или видеопамяти графического процессора достигается многократное ускорение вычислений на той же системной и аппаратной базе. Сама разностная схема при этом не модифицируется, ее свойства (аппроксимация, устойчивость) остаются прежними.

Однако до настоящего времени блочные алгоритмы известны лишь для трехслойных явных разностных схем. Неявные схемы и двухслойные явные в силу своих конструктивных особенностей не могут быть использованы при организации блочных вычислений без выделения дополнительной памяти для хранения промежуточных результатов. Такое выделение, в свою очередь, нивелирует эффект от сокращения коммуникаций между различными областями памяти. В настоящей работе предлагается методика синтеза новых явных разностных двухслойных схем, свободных от указанного недостатка.

Смешанная двухслойная схема со сдвигом

Определяя пример применения такой методики остановимся на одномерном нестационарном линейном однородном уравнении теплопроводности, как классическом объекте теории разностных схем [15], и двух простейших схемах для него, явной (1) и неявной (2):

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}, \quad (1)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad (2)$$

где функция U_i^n определена на сеточной области $\omega_h = \{(x_i, t_n): x_i = (i-1)h; i=1, \dots, I; t_n = (n-1)\tau; n=1, \dots, N\}$, а h и τ – шаги по пространству и времени соответственно. Значения сеточной функции в узлах $i=1$ и $i=I$ считаем связанными с краевыми условиями первого рода и заранее известными. Известны также значения этой функции при $n=1$, как дискретизация начальных условий.

Центральным моментом предлагаемой методики построения разностных схем является комбинация дифференциальных шаблонов для (1) и (2). Пусть на четном временном слое сначала вычисляются значения сеточной функции в нечетных по пространству узлах по явному шаблону (строка 2 Алгоритма 1), затем в четных – по неявному (строка 3). На нечетном слое, следующем за данным четным, наоборот: сначала по явному шаблону вычисляются значения в четных узлах (строка 4), затем по неявному в нечетных (строка 5). В Алгоритме 1, реализующем такую разностную смешанную схему со сдвигом и написанном на языке MatLab, переменные $c1=1-2*\tau/h/h$, $c2=\tau/h/h$, $c3=1/(1+2*\tau/h/h)$, $c4=\tau/h/h/(1+2*\tau/h/h)$, цикл служит для перебора слоев по времени (строки 1,6).

Алгоритм 1

```
1 for n=2:2:N
2   U(3:2:l-1)=c1*U(3:2:l-1)+c2*(U(2:2:l-2)+U(4:2:l));
3   U(2:2:l-1)=c3*U(2:2:l-1)+c4*(U(1:2:l-2)+U(3:2:l));
4   U(2:2:l-1)=c1*U(2:2:l-1)+c2*(U(1:2:l-2)+U(3:2:l));
5   U(3:2:l-1)=c3*U(3:2:l-1)+c4*(U(2:2:l-2)+U(4:2:l));
6 end
```

Несмотря на широкое применение неявного шаблона, все вычисления производятся в явном виде без решения СЛАУ в силу предварительного нахождения значений в соседних узлах по явному шаблону. Чередование разных шаблонов на одном временном слое и их смещение по пространству при переходе на следующий обусловило название предложенной схемы - “смешанная со сдвигом”.

Отличительной ее особенностью является простота векторизации вычислений, немаловажная при использовании инструкций SSE центрального процессора или выполнении расчетов на видеокарте. Главное достоинство заключается в возможности организации блочных вычислений.

Блочный алгоритм для смешанной разностной схемы со сдвигом

Следуя популярной методике построения блочных алгоритмов (Diamond Torre Algorithm) для разностных схем [11,14], основанной на представлении блока в виде четырехмерной наклонной башни, при решении рассматриваемой задачи редуцируем такую башню до параллелограмма с основанием m , высотой d и острым углом в 45° (рис. 1). Первый и заключительный блок каждого блочного слоя имеют форму прямоугольных треугольников, гипотенузы которых граничат с наклонными сторонами параллелограммов, горизонтальные катеты имеют длину m , вертикальные – d (рис. 1).

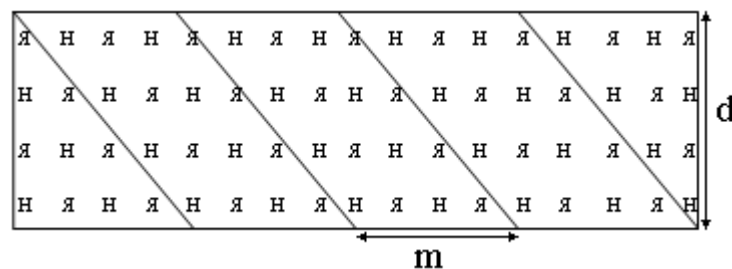


Рис. 1 Декомпозиция блочного слоя высоты d на блоки шириной m при $p=5$. В узлах “я” применяется явный дифференциальный шаблон, в “н” – неявный

Тогда искомый алгоритм выглядит следующим образом.

Алгоритм 2

```
01 for n=1:d:N
02   kr=m+1;
03   for j=2:2:d
04     U(3:2:kr) = c1*U(3:2:kr) + c2*(U(2:2:kr-1)+U(4:2:kr+1));
```

```

05  U(2:2:kr) =c3*U(2:2:kr) +c4*(U(1:2:kr-1)+U(3:2:kr+1));
06  U(2:2:kr-1)=c1*U(2:2:kr-1)+c2*(U(1:2:kr-2)+U(3:2:kr));
07  U(3:2:kr-1)=c3*U(3:2:kr-1)+c4*(U(2:2:kr-2)+U(4:2:kr));
08  kr=kr-2;
09  end
10  for k=2:p-1
11    kl=(k-1)*m+2; kr=kl+m-1;
12    for j=2:2:d
13      U(kl+1:2:kr) =c1*U(kl+1:2:kr) +c2*(U(kl:2:kr-1) +U(kl+2:2:kr+1));
14      U(kl:2:kr)   =c3*U(kl:2:kr)   +c4*(U(kl-1:2:kr-1)+U(kl+1:2:kr+1));
15      U(kl:2:kr-1) =c1*U(kl:2:kr-1) +c2*(U(kl-1:2:kr-2)+U(kl+1:2:kr));
16      U(kl-1:2:kr-1)=c3*U(kl-1:2:kr-1)+c4*(U(kl-2:2:kr-2)+U(kl:2:kr));
17      kl=kl-2; kr=kr-2;
18    end
19  end
20  kl=(p-1)*m+2;
21  for j=2:2:d
22    U(kl+1:2:l-1)=c1*U(kl+1:2:l-1)+c2*(U(kl:2:l-2) +U(kl+2:2:l));
23    U(kl:2:l-1)  =c3*U(kl:2:l-1)  +c4*(U(kl-1:2:l-2)+U(kl+1:2:l));
24    U(kl:2:l-1)  =c1*U(kl:2:l-1)  +c2*(U(kl-1:2:l-2)+U(kl+1:2:l));
25    U(kl-1:2:l-1)=c3*U(kl-1:2:l-1)+c4*(U(kl-2:2:l-2)+U(kl:2:l));
26    kl=kl-2;
27  end
28 end

```

Как и прежде, внешний цикл (строки 01,28) необходим для перебора всех временных слоев сеточной области, однако сейчас в его теле перебираются не пары слоев, а блоки высотой d . Первый вложенный цикл (строки 03,09) отвечает за действия внутри первого треугольного блока. Переменная kr в нем ограничивает блок справа, ее значение уменьшается с увеличением номера временного слоя внутри блока - j . Третий вложенный цикл (строки 21,27) связан с вычислениями внутри последнего блока, также треугольного. Переменная kl в нем ограничивает блок слева. Во втором цикле (строки 10,19) перебираются блоки в форме параллелограммов, общим количеством $p-2$. Каждому (с номером k) из них соответствует вложенная циклическая конструкция (строки 12,18). Переменные kl и kr по-прежнему ограничивают левую и правую границы блоков соответственно.

В телах вложенных циклов (строки 04-07, 13-16 и 22-25) производятся вычисления внутри блока по смешанной разностной схеме со сдвигом. Сдвигу соответствует наклон сторон параллелограмма, обеспечивающий возможность вычисления значений сеточной функции в левых узлах каждого не треугольного блока на любом временном слое по неявному шаблону. Значения в правых узлах находятся по явному. При этом отпадает необходимость в задании дополнительного массива для хранения промежуточных значений сеточных функций. Ширина блока m всегда выбирается четной в силу смешанного характера схемы. Общее число блоков на одном блочном временном слое определяется как $p=\text{fix}((l-$

2)/m)+1. Если количество блочных временных слоев N/d оказывается не целым, то алгоритм нуждается в небольшой доработке, связанной с отдельной организацией вычислений на верхнем блочном слое, высота которого меньше d .

Заключение

Разработанные двухслойная явная смешанная разностная схема со сдвигом и соответствующий ей блочный алгоритм позволят управлять коммуникациями между оперативной памятью ЭВМ и кэш-памятью процессора при организации вычислительного процесса, а следовательно и длительностью расчетов.

Развитие работы авторы видят в аналитическом исследовании свойств новой схемы, распространении предложенного приема построения разностных схем на случаи больших размерностей и других дифференциальных уравнений.

Библиографический список

1. Taflove, A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method / A. Taflove, S. Hagness. – ed. 3-d. – Boston : Artech House Publishers, 2005. – 852 p.
2. Бархатов, В. А. Решение динамических задач акустики методом конечных разностей во временной области. Основные соотношения. Анализ погрешностей / В. А. Бархатов // Дефектоскопия. – 2005. – № 3. – С. 12–26.
3. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
4. Parallel Finite-Difference Time-Domain Method / Yu Wenhua, Mittra Raj, Su Tao, Liu Yongjun, Yang Xiaoling. – Boston : Artech house, 2006. – 272 p.
5. Zygidis, T. Development of Higher Order FDTD Schemes With Controllable Dispersion Error / T. Zygidis, T. Tsiboukis // IEEE on Antennas and Propagation. – 2005. – Vol. 53, № 9. – P. 2952–2960.
6. Fidel, B. Hybrid ray-FDTD moving window approach to pulse propagation / B. Fidel, E. Heyman, R. Kastner, R.W. Ziolkowski // Computational Physics, 1997. – Vol. 138, iss. 2. – P. 480–500.
7. Shi, S. Analysis of diffractive optical elements using a nonuniform finite-difference time-domain method / S. Shi, X. Tao, L. Yang, D. W. Prather // Optical Engineering. – 2001. – Vol. 40, № 4. – P. 503–510.
8. Голуб, Дж. Матричные вычисления : пер. с англ. / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М. : Мир, 1999. – 548 с.
9. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения : пер. с англ. / Дж. Деммель. – М. : Мир, 2001. – 430 с.
10. Gallivan, K. Impact of Hierarchical Memory Systems on Linear Algebra Algorithm Design / K. Gallivan, W. Jalby, U. Meier, A.H. Sameh // International Journal of High Performance Computing Applications. – 1988. – Vol. 2, iss. 1. – P. 12–48.

11. Перепелкина, А. Ю. Алгоритм Diamond Torre и высокопроизводительная реализация FDTD метода для суперкомпьютеров с графическими ускорителями / А. Ю. Перепелкина, А. В. Закиров, В. Д. Левченко. – М. : Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2015. – 22 с.
12. Orozco, D. A. Mapping the FDTD Application to Many-Core Chip Architectures / D. A. Orozco, G. R. Gao // *Parallel Processing*. – 2009. – P. 309–316.
13. Automatic Parameter Tuning of Three-Dimensional Tiled FDTD Kernel / M. Takeshi et al. // *High Performance Computing for Computational Science – VECPAR*. – 2014. – Vol. 8969. – P. 284–297.
14. Perepelkina, A. Yu Diamond Torre Algorithm for High-Performance Wave Modeling / A. Yu. Perepelkina, V. D. Levchenko // *Keldysh Institute Preprints*. – 2015. – Vol. 18. – P. 20.
15. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ БЛОЧНОГО АЛГОРИТМА FDTD-МЕТОДА НА ЯЗЫКЕ МАТЛАВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА

Н. Д. Морунов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
г. Самара, Россия
E-mail: niknixad@mail.ru

Введение

Численное решение уравнений Максвелла является достаточно востребованным в настоящее время и активно используется для решения задач электродинамики и нанофотоники. Однако метод требует большого количества вычислительных ресурсов. Для решения этой проблемы давно применяют неспециализированные вычисления на графическом процессоре (GPGPU) в особенности технологию CUDA как наиболее распространенную и в ряде случаев наиболее производительную. Однако использование CUDA требует от исследователя написания процедурного ядра на языке C, что в свою очередь обременяет его на различного рода трудности низкоуровневого программирования, такие как отладка неопределенного поведения и утечка памяти. Синтаксис языка MATLAB очень простой, легко поддается освоению и идеально подходит для таких исследователей. В MATLAB есть специальный пакет для параллельных вычислений Parallel Computing Toolbox. С помощью этого пакета, используя несложный синтаксис, можно легко реализовать вычисления на

многоядерных процессорах, на кластерах, а также на GPU. Кроме того вычисления на графическом процессоре MATLAB выполняет используя всё тот же CUDA: в пакете PCT уже заготовлены CUDA-ядра под основные операции. Особенности реализации FDTD-метода на языке MATLAB с использованием графического процессора были уже рассмотрены автором в статье [1], а также другими авторами [2].

MATLAB для своих вычислений на GPU требует достаточно большое количество графической памяти. На современных вычислительных системах, в том числе на персональных компьютерах, максимально доступной оперативной памяти на порядок, а то и на два больше чем графической памяти. Существуют блочные алгоритмы, которые позволяют выполнять эффективные вычисления на системах с иерархией памяти. Ранее в 2016 году группой исследователей во главе с А.В. Закировым уже была представлена готовая реализация FDTD-метода на CUDA с использованием такого подхода в статье «Алгоритм DiamondTorre и высокопроизводительная реализация FDTD метода для суперкомпьютеров с графическими ускорителями» [3], но не существует готового решения на MATLAB. Кроме того, упомянутая реализация произведена для суперкомпьютеров, использование которых доступно не каждому по разным причинам (цена, очередь). Рассматриваемая в данной работе реализация блочного алгоритма FDTD-метода пригодна как для расчетов на суперкомпьютере с графическими ускорителями, так и на персональной ЭВМ. Однако в работе акцентируется внимание на возможности расчетов именно на персональном компьютере, поэтому трёхмерный случай очевидно избыточен и не рассматривается.

Целью работы является реализация на языке MATLAB блочного алгоритма двумерного случая FDTD-метода для преодоления ограничения на объём видеопамати при организации вычислений по данному методу на персональном компьютере.

Блочные алгоритмы

Существуют так называемые блочные алгоритмы, которые появились относительно недавно из алгоритмов разбиения цикла на блоки. В 1999 году Н. Просор были разработаны кэш-совместные и кэш-независимые алгоритмы [4], позднее они стали применяться для расчёта конечно-разностных задач [5]. И наконец на последнем этапе были разработаны локально рекурсивные не локально асинхронные алгоритмы, такие как DiamondTile и DiamondTorre (рис. 1) [6]. Такие алгоритмы предназначены для выполнения на вычислительных системах с некоторой иерархией памяти. Предполагая, что вычисления внутри блоков будут проходить с использованием более быстрой памяти, а вся сеточная область будет храниться в самой медленной памяти. В нашем случае вы-

числения будут проходить не только на более быстрой памяти (графической), но и на более быстром процессоре (GPU) за счёт большего числа вычислительных ядер.

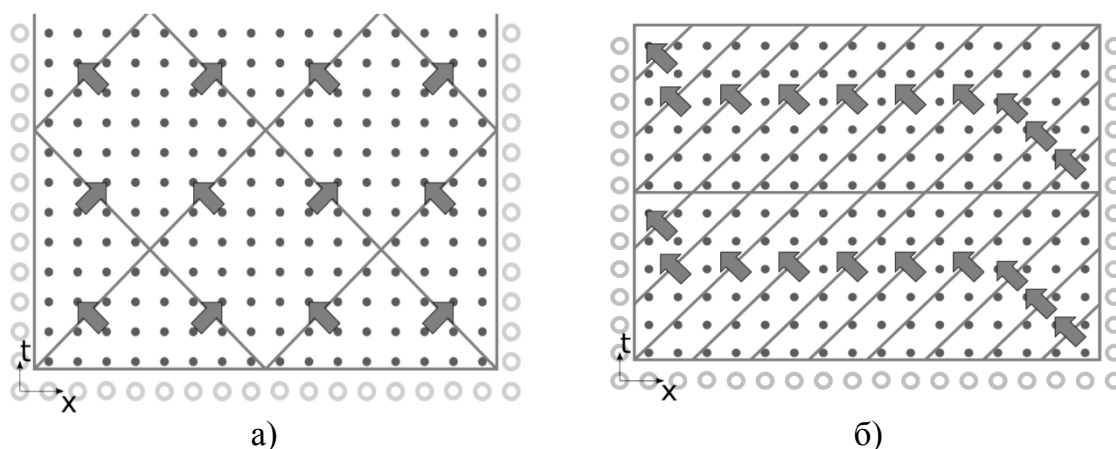


Рис. 1. Декомпозиция упрощённой сеточной области на блоки по алгоритму: а) DiamondTile; б) DiamondTorre. Точками обозначены узлы сеточной области, окружностями начальные и граничные условия, а стрелки показывают направление коммуникаций

Был проведен сравнительный анализ блочных алгоритмов, в результате которого установлено, что алгоритмы DiamondTile и DiamondTorre при достаточно большом времени коммуникаций (одного порядка со временем вычислений) в $T/2$ раз эффективнее, чем традиционный алгоритм с послойной синхронизацией.

Реализация блочного алгоритма на языке MATLAB

В работе была реализована одномерная декомпозиция двумерного случая FDTD-метода по алгоритму DiamondTorre (рис. 2), в котором все блоки выполняются последовательно по одному за раз, а операции внутри блока выполняются параллельно. За основу взята программа, выполняющая расчёт электромагнитной волны в двумерном пространстве, и адаптированная ранее под вычисление на графическом процессоре [1].

В ходе работы было установлено, что изменение индексов действующих массивов в цикле приводит к сильному ухудшению производительности (вплоть до полного отсутствия ускорения относительно вычислений на CPU). Решить эту проблему можно обрамлением блоков в прямоугольные рамки (рис. 2). Тогда вычисляющая функция, основываясь на номере итерации будет сама определять нужные узлы.

Алгоритм DiamondTile не подходит для обрамления, так как затрачивает в 2 раза больше памяти чем без него (площадь ромба, вписанного в квадрат в два раз меньше площади этого квадрата). Поэтому алгоритм DiamondTile в настоящей работе не использовался.

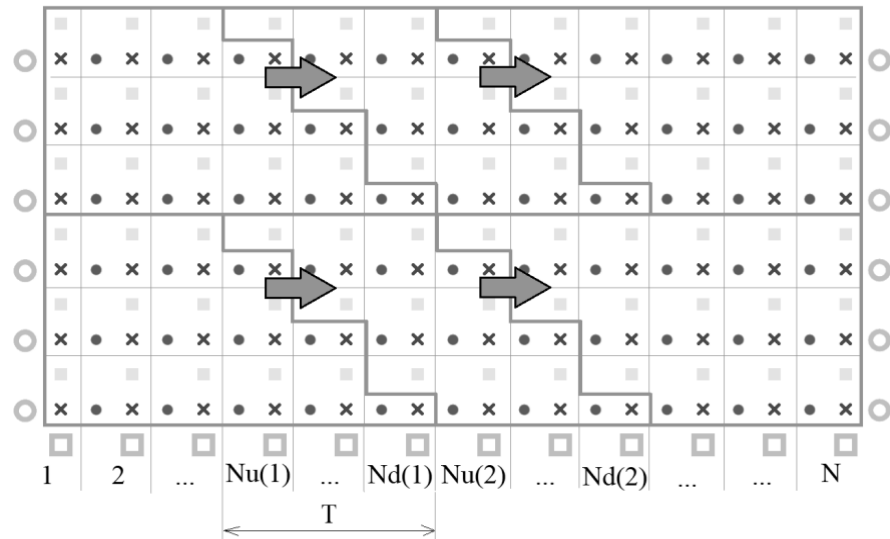


Рис. 2. Декомпозиция двумерной сеточной области по методу DiamondTorge с указанием размеров в сечении. Крестиками обозначены компоненты электрического поля E_x , кружками обозначены компоненты электрического поля E_y , квадратами компоненты магнитного поля H_u , а граничные и начальные значения представлены в виде полых фигур (окружности и полые квадраты)

В реализации использовались поглощающие слои CPML. Толщина слоя считалась постоянной и соответствовала значению меньшему чем разность длины блока и его высоты. Таким образом можно было разделить все блоки на начальный, центральный и последний. Ниже представлен алгоритм на языке MATLAB, отвечающий за обработку центрального блока:

```
% Копирование массивов для полей из оперативной памяти в графическую
ex=gpuArray(com_ex(Nu(p-1):Nd(p),:)); ..
block_width = Nd(p)-Nu(p-1)+1; C = gpuArray.colon(1,block_width);
zerorow = zeros(block_width, 1, 'gpuArray'); zerocol = zeros(1, je, 'gpuArray');
for n=1:nmax
Cb_e = (C-block_width+n-2 < 0) & (C-T+n-1>0);
% Расчёт электрического поля
[ex,ey] = arrayfun(@decomp_function_cpml_ef,ex,ey,
cat(2,zerorow,hz(:,2:end)),cat(2,zerorow,hz(:,1:end-1)), ...
cat(1,zerocol,hz(1:end-1,:)), cat(1,zerocol,hz(2:end,:)), ...
caex, cbex, caey, cbey, repmat(Cb_e',1,je));
...% Расчёт верхнего и нижнего полей CPML для электрического поля
...% Расчёт магнитного поля
...% Расчёт верхнего и нижнего полей CPML для магнитного поля
if (((is-Nu(p-1)+1) > (T-n)) && (is < (Nd(p)-n+1)))
hz(is-Nu(p-1)+1,js)=source(n+(nt-1)*nmax);% Задание волны методом жёсткого источника
end end
com_ex(Nu(p-1):Nd(p),:)=gather(ex); ..%Копирование массивов для полей из графической памяти
```

Экспериментальное исследование

Был проведен эксперимент, целью которого было исследовать эффективность блочного алгоритма двумерного случая FDTD-метода на языке MATLAB.

Программа запускалась под операционной системой Windows 10 на пользовательском ноутбуке с четырёх ядерным центральным процессором Intel Core i5-6300HQ с базовой тактовой частотой 2,3 ГГц и максимальной – 3,2 ГГц. Также на ноутбуке было установлено 8 Гб оперативной памяти типа DDR4-2133 и графическая карта NVIDIA GeForce GTX 960M, подключенная через шину PCI Express x16, с объёмом внутренней оперативной памяти GDDR5 – 2 Гб и числом CUDA-совместимых шейдерных процессоров – 640 с тактовой частотой 1,1 ГГц.

В результате эксперимента получили график зависимости производительности вычислений от количества узлов для блочного алгоритма двумерного случая FDTD-метода.

График (рис. 3) построен по особым точкам: максимальной производительности и производительности соответствующей максимальной дискретизации сеточной области.

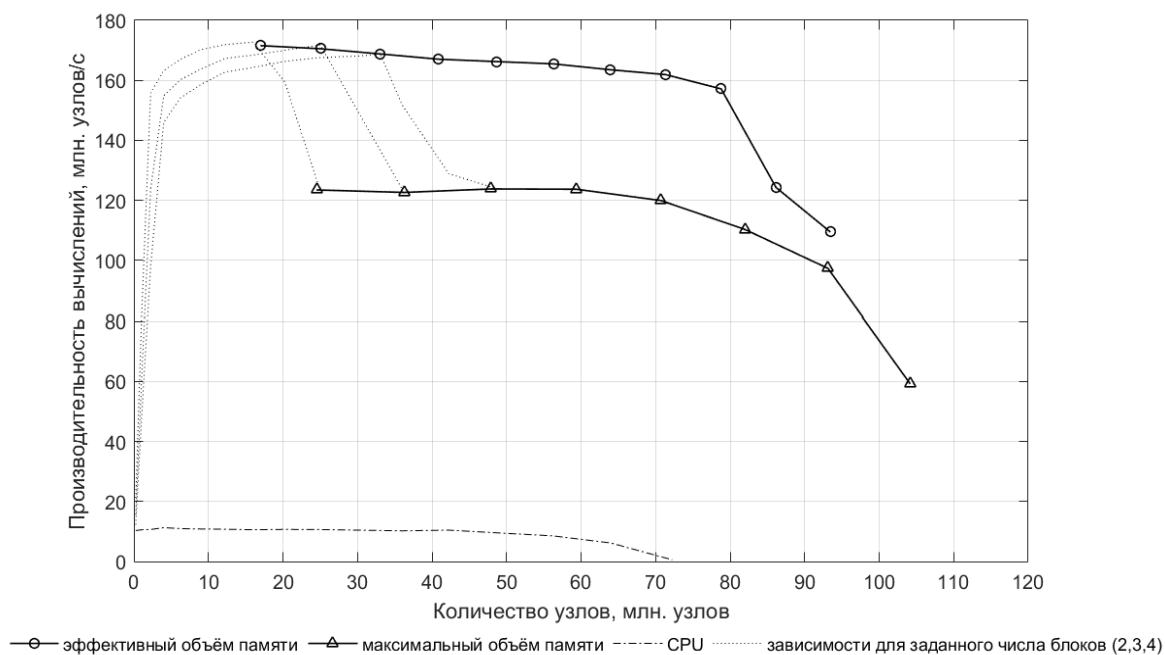


Рис. 3. Графики зависимости производительности вычислений от количества узлов (млн. узлов) для блочного алгоритма двумерного случая FDTD-метода с декомпозицией на несколько блоков

В статье [1] упоминалось, что MATLAB использует память не только для хранения результатов, но и для хранения промежуточных результатов при вычислении выражений, кроме того MATLAB не всегда синхронизирует результаты после выполнения каждого выражения, а

может выполнять несколько выражений одновременно, если память вмещает дополнительные массивы из нескольких выражений. Таким образом в работе различались максимальный объем памяти, т. е. такой объем памяти при котором в принципе могут проходить вычисления синхронизируя результаты после каждого выражения, и работая с минимальным количеством дополнительных массивов. И эффективный объем памяти, т. е. такой при котором было бы возможно асинхронное вычислений выражений.

На графике (рис. 3) видно, что производительность вычислений при использовании эффективного объема памяти в среднем держится на 165 (ускорение в 16 раз), и при достижении размера сетки 80 млн. узлов падает до 110 (ускорение в 10 раз), а при использовании максимального объема памяти производительность вычислений в среднем держится на 120 (ускорение в 11 раз) и при достижении 80 млн. узлов уменьшается до 60 (ускорение в 6 раз).

Итак, одномерная декомпозиция по алгоритму DiamondTorre решила проблему ограниченности графической памяти, расширив максимально возможную дискретизацию сеточной области до 80 млн. узлов без сжатия оперативной памяти (технология Windows 10), и до 110 с использованием сжатия оперативной памяти.

Заключение

Составлен блочный алгоритм для двумерного случая FDTD-метода, предназначенный для реализации на непрофессиональном графическом процессоре. До обсуждаемой работы речь шла исключительно о трехмерном случае и алгоритме, предназначенном для реализации на суперкомпьютере [3]. В ходе многочисленных экспериментов продемонстрирована эффективность предложенных алгоритмов и их реализаций. Одномерная декомпозиция по алгоритму DiamondTorre решила проблему ограниченности графической памяти расширив максимально возможную дискретизацию сеточной области при вычислениях на GPU с 14 до 80 млн. узлов с ускорением в 16 раз для двумерного случая FDTD-метода.

Библиографический список

1. Morunov, N. D. Implementation of the finite-difference method for solving Maxwell's equations in MATLAB language on a GPU / N. D. Morunov // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol. 2212. – P. 146–151.
2. Diner, J. E. FDTD Acceleration using MATLAB Parallel Computing Toolbox and GPU / J. E. Dinier, A. Z. Elsherbeni // Aces Journal. – 2017. – Vol. 32 (4). – P. 283–288.
3. Закиров, А. В. Алгоритм Diamond Torre и высокопроизводительная реализация FDTD метода для суперкомпьютеров с графическими ускорителя-

ми / А. В. Закиров, В. Д. Левченко, А. Ю. Перепёлкина, Я. Земпо // Суперкомпьютерные дни в России : сб. тр. конф. – М., 2016. – С. 80–94.

4. Prokop, H. Cache-Oblivious Algorithms / H. Prokop. – Massachusetts : Massachusetts Institute of Technology, 1999. – 70 p.

5. Frigo, M. Cache Oblivious Stencil Computations / M. Frigo, V. Strumpen // Proc. of the ICS '05. – N. Y., USA : ACM, 2005. – P. 361–366.

6. Левченко, В. Д. Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений / В. Д. Левченко // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2005. – № 1. – С. 68–92.

КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ СТАТИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

В. А. Засов, Е. Н. Никоноров, М. В. Ромкин

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия

E-mail: vzasov@mail.ru, romkinmaks@rambler.ru

Разделение сигналов – это решение задачи выделения отдельных сигналов из аддитивной смеси нескольких сигналов, поступающих в точки измерения от различных источников сигналов, недоступных для непосредственных измерений.

Для разделения и восстановления источников сигналов используются различные подходы, которые основываются на разном априорном знании об объекте контроля. Методы разделения сигналов можно разделить на две группы: детерминированные и статистические. [1]

Класс детерминированных методов основывается на преимущественной информации о каналах передачи сигналов (статистических, частотных, амплитудных и т.п. характеристик каналов), т.е. известны каналы передачи и наблюдаемые сигналы.

Класс статистических методов основывается на преимущественной информации об источниках сигналов. В этом случае информация о каналах передачи в явном виде недоступна, а известны лишь наблюдаемые сигналы, поэтому эти методы называют «слепыми».

Так как задача разделения сигналов относится к классу обратных задач, из чего следуют возможные некорректность и неустойчивость решения, актуальными являются исследования в области анализа и контроля устойчивости решения этой задачи в условиях неполной информации о параметрах объектов. Причинами неполной информации (априорной неопределенности), могут быть, например, погрешности определе-

ния параметров объектов, а также вариации этих параметров под влиянием возмущений, учесть и заранее предсказать влияние которых на устойчивость не представляется возможным.

Одним из эффективных алгоритмов контроля устойчивости является алгоритм, основанный на вычислении и анализе сингулярных интервалов смешивающей матрицы, описывающей модель образования сигналов. [2]

Однако данный алгоритм может применяться только для детерминированных методов разделения сигналов, так как не учитывает особенности статистических методов, такие как разделение с точностью до масштабного множителя и перестановки.

Целью работы является обобщение алгоритма контроля устойчивости разделения сигналов, основанного на вычислении сингулярных интервалов, для применения в статистических методах разделения сигналов.

Известно, что в статистических методах разделение сигналов производится с точностью до масштабного множителя и перестановки, т.е. решение задачи статистического разделения сигналов примет вид

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{P}$ – матрица перестановки, $\mathbf{A}$ – диагональная масштабирующая матрица, диагональными элементами которой являются масштабные множители.

Разделение сигналов с точностью до масштабного множителя означает, что амплитуды разделенных сигналов $\hat{\mathbf{s}}$ могут быть произвольными и не соответствовать их вкладам в аддитивные смеси $\mathbf{x}$ (в наблюдаемые сигналы), кроме того, фазы сигналов источников $\mathbf{s}$ и разделенных сигналов $\hat{\mathbf{s}}$ могут отличаться, т.е. сигналы источников и разделенных сигналов могут, например, быть в противофазе. Другими словами, в разделенных сигналах $\hat{\mathbf{s}}$ достоверна только их форма, а амплитудные и фазовые параметры произвольны.

Разделение с точностью до перестановки означает, что в процессе разделения позиция разделенных сигналов на выходах разделяющей матрицы $\mathbf{W}$ может меняться: сигнал от первого источника s_1 может быть на первом выходе $\hat{s}_1$, далее – на втором выходе $\hat{s}_2$, а сигнал второго источника s_2 может перейти на первый выход $\hat{s}_1$ и т.д.

Предлагаемый алгоритм контроля устойчивости статистического разделения при вариации параметров каналов состоит из шагов, приведенных в табл. 1.

На первом шаге с помощью выбранного метода слепого разделения сигналов решается задача разделения сигналов и соответственно определяется разделяющая матрица $\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}$.

Таблица 1

Алгоритм контроля устойчивости статистического разделения сигналов

№ шага	Действие	Комментарий
1	$\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}$	Вычисляется разделяющая матрица на основе статистического алгоритма
2	$\tilde{\mathbf{W}} = (\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{W}$	Учитываются эффекты перестановки и масштабирования
3	$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1}$	Вычисляется смешивающая матрица
4	Вычисление сингулярных интервалов $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$	Вычисление для выбранного вида вариации параметров
5	Проверка $ \Delta\mathbf{H}_{max} \leq \eta \cdot \Delta\tilde{\mathbf{H}} $	Производится контроль устойчивости

На втором шаге используется разработанный вспомогательный алгоритм, устраняющий влияние изменения масштабирования $\mathbf{A}$ и перестановок $\mathbf{P}$, т.е. определяется скорректированная разделяющая матрица $\tilde{\mathbf{W}}$, в которой влияние матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{A}$ устранено.

На третьем шаге на основе разделяющей матрицы вычисляется смешивающая матрица $\tilde{\mathbf{H}}$.

На четвертом шаге вычисляются сингулярные интервалы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}$ для выбранных видов вариации параметров.

На пятом шаге осуществляется контроль устойчивости путем сравнения вычисленных сингулярных интервалов с некоторыми пороговыми значениями.

Работоспособность предложенного алгоритма контроля устойчивости подтверждается методом компьютерного моделирования для задачи разделения двух источников сигналов на примере широко распространенного алгоритма ICA. [3, 4]

Рассмотрим модели образования сигналов, задаваемые смешивающими матрицами $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ разной степени обусловленности: $cond(\mathbf{H}_1) \approx 18.6$ и $cond(\mathbf{H}_2) \approx 1105.5$, $M = N = 2$, погрешность измерения элементов матриц определяются 9 двоичными разрядами:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.53 \\ 0.65 & 0.45 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.50 \\ 0.63 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Определим разделяющие матрицы $\tilde{\mathbf{W}}_1$ и $\tilde{\mathbf{W}}_2$ с помощью рассмотренного выше метода ICA с использованием вспомогательного алгоритма, устраняющего влияние перестановок и масштабирования

$$\tilde{\mathbf{W}}_1 \approx \begin{pmatrix} 4.55 & -5.39 \\ -6.50 & 9.88 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{W}}_2 \approx \begin{pmatrix} -161.18 & 244.56 \\ 324.38 & -489.08 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычислим смешивающие матрицы $\tilde{\mathbf{H}}_1$ и $\tilde{\mathbf{H}}_2$.

Шаг 3. Определим матрицы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_1$ и $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_2$ сингулярных интервалов параметров для критического вида вариации параметров. Найденные матрицы сингулярных интервалов параметров следующие:

$$\Delta\tilde{\mathbf{H}}_1 \approx \begin{pmatrix} -2.42 & 3.44 \\ 2.85 & -5.23 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}, \Delta\tilde{\mathbf{H}}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.4 & -0.7 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Видно, что для плохо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_2$ сингулярные интервалы $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_2$ на порядок меньше, что подтверждает правильность работы алгоритма.

Шаг 4. Исходя из разрядности АЦП $r=9$, выберем $\Delta\tilde{\mathbf{H}}_{max} = const = 10^{-3}$ и проведем контроль устойчивости решения путем сравнения вычисленных сингулярных интервалов с некоторыми пороговыми значениями. В соответствии с этим критерием решение для смешивающей матрицы $\mathbf{H}_2$ неустойчиво. Результаты моделирования приведены на рис. 1, на одном из которых (рис. 1, г) видно, что разделение сигналов происходит неправильно. Погрешности устойчивого разделения (для хорошо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_1$) равны 0.023 % для первого сигнала, 0.029 % для второго сигнала, а погрешности неустойчивого разделения (для плохо обусловленной матрицы $\mathbf{H}_2$) равны 5.86 % для первого сигнала, 21.27 % для второго сигнала.

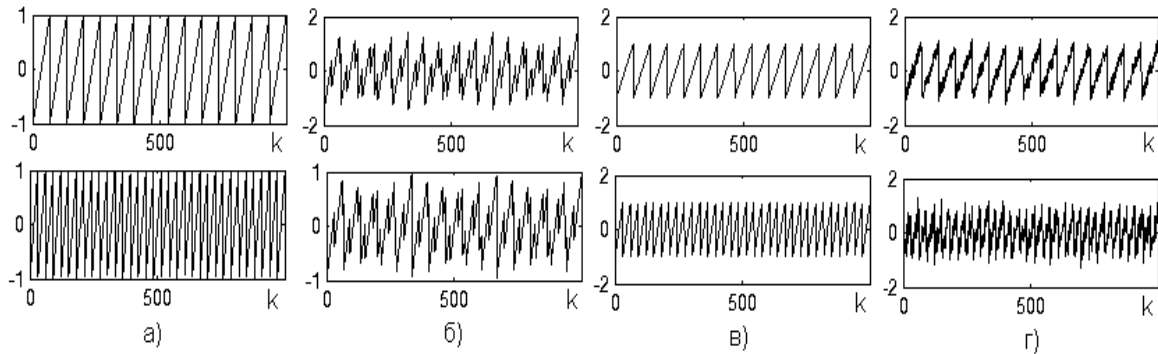


Рис. 1. Тестовые пилообразные сигналы: а – 15Гц и 35 Гц; б – образованные смеси; в – устойчивое; г – неустойчивое разделение алгоритмом ICA

Таким образом, проведенное моделирование подтверждает работоспособность предложенного алгоритма контроля устойчивости для этого распространенного статистического метода разделения сигналов при условии, что свойства сигналов, удовлетворяют априорным ограничениям, обеспечивающим устойчивое решение задачи.

Используем для моделирования хорошо обусловленную матрицу $\mathbf{H}_1$ из предыдущего примера. При этом для моделирования влияния от-

клонений параметров сигналов от априорных предположений исследуем зависимость погрешности разделения сигналов от коэффициента корреляции источников. В примере неустойчивое разделение будем моделировать выбором пилообразных источников сигналов с близкими частотами 15 Гц и 15.01 Гц.

Шаг 1. Определим разделяющую матрицу $\mathbf{W}_3$ с помощью рассмотренного выше метода ICA.

Шаг 2. Вычислим смешивающую матрицу $\check{\mathbf{H}}_3$.

Шаг 3. Определим матрицу $\Delta\check{\mathbf{H}}_3$ сингулярных интервалов параметров для критического вида вариации параметров:

$$\Delta\check{\mathbf{H}}_3 \approx \begin{pmatrix} -0.2 & -3.5 \\ 0.2 & 4.8 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Для хорошо обусловленной смешивающей матрицы $\mathbf{H}_l$ полученные сингулярные интервалы $\Delta\check{\mathbf{H}}_3$ очень малы. Это противоречие объясняется тем, что неустойчивость решения задачи разделения (плохая обусловленность матрицы $\mathbf{W}_3$) обусловлена несоответствием свойств источников сигналов априорным ограничениям, обеспечивающим устойчивое решение задачи (сильной коррелированностью источников).

Шаг 4. Для заданного $\Delta\check{\mathbf{H}}_{\max} = \text{const} = 10^{-3}$ проведем контроль устойчивости путем сравнения вычисленных сингулярных интервалов с некоторыми пороговыми значениями. В соответствии с критерием матрица $\check{\mathbf{W}}_3$ указывает на неустойчивость решения, что также видно из рис.2, в, сигналы разделяются неправильно, что подтверждает работоспособность алгоритма контроля устойчивости для случая несоответствия параметров источников априорным требованиям.

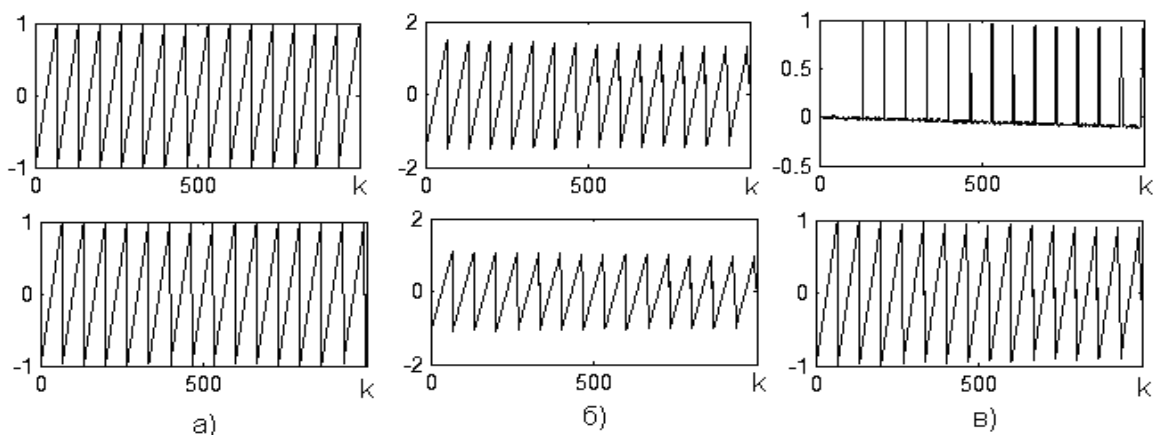


Рис. 2. Тестовые пилообразные сигналы: а – 15Гц и 15.01 Гц;
б – образованные смеси; в – неустойчивое разделение

Погрешности неустойчивого разделения равны 99% для первого сигнала, 0.9% для второго сигнала. При этом наблюдаемые сигналы $\mathbf{x}$ отличаются от источников $\mathbf{s}$ на 0.42 % для первого сигнала, 1.5 % для второго сигнала.

Таким образом, разделенные сигналы $\hat{\mathbf{s}}$ больше отличаются от источников $\mathbf{s}$, чем наблюдаемые $\mathbf{x}$, т.е. результаты разделения сигналов практически не приемлемы из-за их неустойчивости.

Предложен обобщенный алгоритм анализа и контроля устойчивости статистических методов разделения сигналов и проведено компьютерное моделирование, доказывающее его работоспособность.

Библиографический список

1. Ромкин, М. В. Анализ и классификация методов решения задачи разделения и восстановления сигналов / М. В. Ромкин // Современные информационные технологии : тр. Междунар. науч.-техн. конф. (Computer – based conference). – Вып. 17. – Пенза : Пенз. Гос. технолог. академия, 2013. – С. 127–130.
2. Засов, В. А. Алгоритмы и вычислительные устройства разделения и восстановления сигналов в многомерных динамических системах : монография / В. А. Засов. – Самара : СамГУПС, 2012. – 233 с.
3. Hyvarinen, A. Independent component analysis: Algorithms and applications / A. Hyvarinen and E. Oja // Neural Networks. – 2000. – № 13 (4-5). – P. 411–430.
4. Cichocki, A. Adaptive blind signal and image processing: Learning algorithms and applications / A. Cichocki, C. Amari. – Wiley, 2002. – 555 p.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СОПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Т. В. Никонова, В. Н. Горьковская

Витебский государственный университет,
г. Витебск, Белоруссия,
E-mail: st.rubon@mail.ru

В современном строительстве, в качестве составных и несущих частей различных конструкций, находят широкое применение тонкостенные цилиндрические оболочки. Способность выдерживать значительные нагрузки при минимальной толщине позволяет создавать из них в гражданском, транспортном и промышленном строительстве легкие

конструкции с хорошими жесткостными и прочностными характеристиками.

Разработанная методика расчета сопряженных тонкостенных конструкций может быть использована при проектировании широкопролетных подземных транспортных развязок, а также в гражданском строительстве при проектировании составных тонкостенных перекрытий.

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, лежащую в грунте на глубине H_2 и состоящую из трех сопряженных элементов гофрированных цилиндрических панелей.

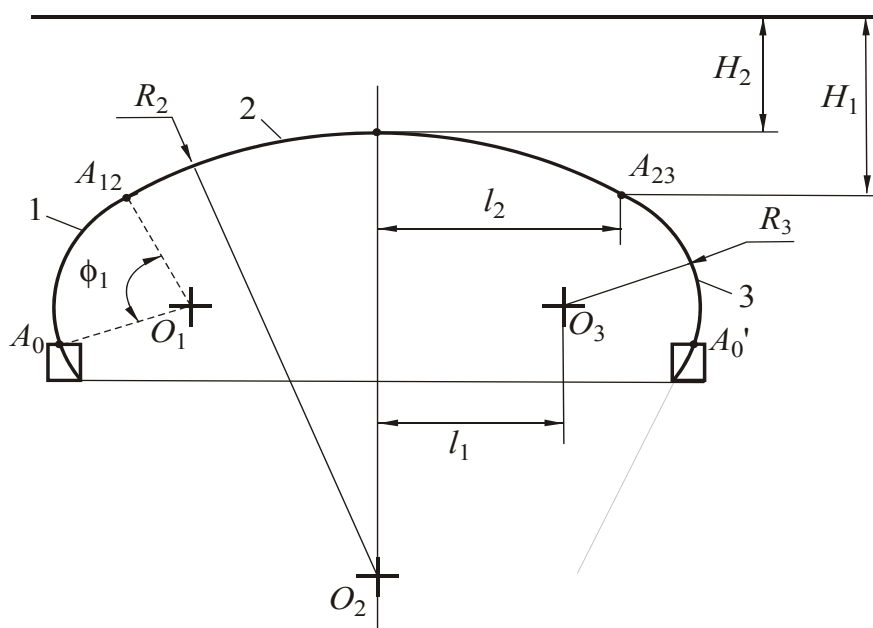


Рис. 1. Поперечное сечение конструкции

На рис. 1 изображено поперечное сечение данной конструкции и введены все необходимые обозначения. Цифрами 1, 2, 3 отмечены элементы конструкции, буквами A_{12} , A_{23} – точки сопряжения. Конструкция является симметричной относительно линии OO_2 , следовательно глубина залегания и радиус элементов 1 и 3 совпадают. Будем считать, что в точках A_0 , A_0' реализуется условие жесткого закрепления. Учитывая технологию скрепления гофрированных листов, в точках A_{12} , A_{23} , будем рассматривать условия жесткого соединения.

Для упрощения задачи введем следующие предположения:

1) длину конструкции в поперечном направлении (перпендикулярном плоскости рисунка) считаем достаточно большой, так что граничными условиями на ее торцах пренебрегаем;

2) воздействие внешнего упругого заполнителя (грунта) принимаем в предположении гидростатического характера его давления на конструкцию с учетом реакции заполнителя в рамках модели Фусса-Винклера [1, 2];

3) гофрированные панели будем заменять цилиндрическими панелями с толщиной, обеспечивающей совпадение ее изгибной жесткости с аналогичной жесткостью гофрированной панели.

Введем в рассмотрение глубину залегания H_1 элементов 1 и 3 (см. рис.1), тогда

$$H_1 = H_2 + R_2 - \sqrt{R_2^2 - l_2^2}. \quad (1)$$

Положение точки на k -ом элементе конструкции будем определять углом ϕ , отсчитываемым от вертикальной линии, проведенной через центр соответствующей окружности, в направлении противоположном ходу часовой стрелки, при этом $\phi_{k,1} \leq \phi \leq \phi_{k,2}$, где границы изменения угла ϕ для k -го элемента определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} &= \arcsin \frac{l_2 - l_1}{R_1}, \quad \phi_{1,2} = \phi_1 + \phi_{1,1}, \\ \phi_{2,1} &= -\arcsin \frac{l_2}{R_2}, \quad \phi_{2,2} = \arcsin \frac{l_2}{R_2}, \quad \phi_{3,1} = -\phi_{1,2}, \quad \phi_{3,2} = -\phi_{1,1}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание ранее сделанное предположение о большой длине конструкции в направлении x , перпендикулярном плоскости рисунка, будем считать, что все функции, характеризующие НДС конструкции, не зависят от координаты x . Тогда задача становится плоской, и для описания равновесия k -го элемента могут быть использованы безмоментные уравнения равновесия тонких оболочек [3]:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial s} - \frac{T_k}{R_k} + q_n^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial T_k}{\partial s} + \frac{Q_k}{R_k} + q_2 = 0, \quad \frac{\partial M_k}{\partial s} - Q_k = 0, \quad (2)$$

где $s = R_k \phi$ - длина дуги, на k -ом элементе ($k = \overline{1, 3}$), T_k , Q_k , M_k - кольцевое усилие, перерезывающее усилие и момент, соответственно, возникающие в срединной поверхности k -ого элемента, $q_n^{(k)}$, q_2 - нормальное и касательное усилия, приходящиеся на единицу площади поверхности k -ого элемента (оболочки). Здесь

$$\begin{aligned} q_n^{(k)} &= q_{n,зр}^{(k)} + q_{n,об}^{(k)} + q_{n,вин}^{(k)}, \quad q_{n,зр}^{(k)} = -\gamma [H_k + R_k (1 - \cos \phi)], \\ q_{n,об} &= -\gamma_0 h \cos \phi, \quad q_{n,вин}^{(k)} = -\frac{\alpha_0}{R_k} w_k, \quad q_2 = q_{2,об} = \gamma_0 h \sin \phi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q_{n,зр}^{(k)}$, $q_{n,об}^{(k)}$, $q_{n,вин}^{(k)}$ - нормальные составляющие нагрузки, вызванные действием грунта, веса оболочки и реакцией грунта (винклеровского основания), соответственно, w_k - нормальный прогиб k -го элемента,

$q_{2,об}$ – касательная составляющая нагрузки, вызванная весом оболочки, γ, γ_0 – удельные веса грунта и материала оболочек, α_0 – коэффициент постели винклеровского основания, h – толщина приведенной цилиндрической оболочки.

Уравнения равновесия (2) дополним уравнениями физического состояния, связывающими T_k и M_k с нормальным прогибом w_k и касательным перемещением v_k :

$$T_k = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial s} + \frac{w_k}{R_k} \right), \quad M_k = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial^2 w_k}{\partial s^2} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial v_k}{\partial s} \right), \quad (4)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала оболочки.

В основании конструкции (см. на рис. 1 точки A_0 и A_0') рассмотрим условия жесткого закрепления

$$\begin{aligned} w_1(\phi_{1,2}) = v_1(\phi_{1,2}) = 0, \quad w_1'(\phi_{1,2}) = 0, \\ w_3(\phi_{3,1}) = v_3(\phi_{3,1}) = 0, \quad w_3'(\phi_{3,1}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где штрих здесь и ниже означает дифференцирование по координате ϕ .

Рассмотрим условия сопряжения элементов в точках A_{12} и A_{23} . Пусть γ_{kl} – угол между единичными векторами – нормальными $\bar{\mathbf{e}}_k^{(n)}, \bar{\mathbf{e}}_l^{(n)}$ к кривым k и l , соответствующим k -ому и l -ому элементам. В случае жесткого соединения, условия сопряжения заключаются в равенстве векторов перемещения, сил, моментов и углов поворота каждого элемента в точке их пересечения [4]. Проектируя вектора перемещений и сил, например, на оси $\bar{\mathbf{e}}_k^{(n)}, \bar{\mathbf{e}}_k^{(l)}$, где $\bar{\mathbf{e}}_k^{(l)}$ – единичный вектор, касательный к k -ой кривой, получим следующие условия сопряжения в случае жесткого сочленения:

$$\begin{aligned} v_2 = \cos \gamma_{21} v_1 - \sin \gamma_{21} w_1, \quad w_2 = \sin \gamma_{21} v_1 + \cos \gamma_{21} w_1, \quad M_2 = M_1, \\ T_2 = \cos \gamma_{21} T_1 - \sin \gamma_{21} Q_1, \quad Q_2 = \sin \gamma_{21} T_1 + \cos \gamma_{21} Q_1, \quad \theta_2 = \theta_1, \\ v_2 = \cos \gamma_{23} v_3 + \sin \gamma_{23} w_3, \quad w_2 = \sin \gamma_{23} v_3 - \cos \gamma_{23} w_3, \quad M_2 = M_3, \\ T_2 = \cos \gamma_{23} T_3 + \sin \gamma_{23} Q_3, \quad Q_2 = \sin \gamma_{23} T_3 - \cos \gamma_{23} Q_3, \quad \theta_2 = \theta_3, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\gamma_{21} = \gamma_{23} = \arccos \frac{l_2 - l_1}{R_1} - \arccos \frac{l_2}{R_2}$.

Разрешающее дифференциальное уравнение относительно нормального прогиба w_k имеет вид:

$$w_k^{IV} + 2w_k'' + a_k w_k = b_k - \delta_k c_k^{(5)} + d_k \cos \phi. \quad (7)$$

Здесь $c_k^{(5)}$ – неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий и условий сопряжения,

$$\varepsilon_k = \frac{h^2}{12R_k^2}, \quad \delta_k = \frac{1 + \varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad a_k = 1 + \frac{\delta_k \alpha_0 (1 - v^2) R_k}{Eh},$$

$$b_k = -\frac{\delta_k (1 - v^2) \gamma R_k^2 (H_k + R_k)}{Eh}, \quad d_k = \frac{\delta_k (1 - v^2) R_k^2 (\gamma R_k - 2\gamma_0 h)}{Eh} \text{ при } k = \overline{1, 3}.$$

Для элементов конструкции уравнение (7) имеет следующее общее решение

$$w_k(\phi) = c_k^{(1)} e^{\alpha_k \phi} \cos \beta_k \phi + c_k^{(2)} e^{\alpha_k \phi} \sin \beta_k \phi + c_k^{(3)} e^{-\alpha_k \phi} \cos \beta_k \phi +$$

$$+ c_k^{(4)} e^{-\alpha_k \phi} \sin \beta_k \phi + \frac{b_k}{a_k} - \frac{\delta_k}{a_k} c_k^{(5)} + \frac{d_k}{a_k - 1} \cos \phi, \quad (8)$$

где $\alpha_k = \sqrt{\frac{\sqrt{a_k} - 1}{2}}$, $\beta_k = \sqrt{\frac{\sqrt{a_k} + 1}{2}}$, $k = \overline{1, 3}$. Тогда, тангенциальное перемещение

$$v_k = \frac{1}{1 + \varepsilon_k} \left(\varepsilon_k w'_k - \int w_k(\phi) d\phi + q_{2s}^{(k)} \sin \phi \right) + c_k^{(5)} \phi + c_k^{(6)}. \quad (9)$$

Построенные решения (8)-(9) содержат неопределенные постоянные $c_k^{(j)}$, которые могут быть найдены из граничных условий и условий сопряжения элементов. Рассмотрение этих условий приводит к системе из 18 неоднородных алгебраических уравнений относительно 18 неизвестных постоянных $c_k^{(j)}$, $k = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 6}$.

Для программной реализации исходной задачи выбрана математическая среда MAPLE. С использованием среды MAPLE выполнены расчеты усилий и моментов в элементах конструкции как функций аргумента ϕ . Из анализа выполненных расчетов следует, что тангенциальное усилие минимально в верхней точке конструкции и максимально в ее основании. Наиболее опасными являются точки сопряжения элементов A_{12} , A_{23} и основания конструкции, в которых перерезывающие силы и моменты достигают наибольшего значения.

Описанная методика позволяет вычислить значения перемещений, усилий и моментов в любой точке конструкции, определить ее наиболее «уязвимые» места без проведения экспериментальных испытаний. Это позволяет рекомендовать применение изложенной методики для расчета составных тонкостенных конструкций с целью уменьшения их веса и более детального исследования на несущую способность и прочность.

Библиографический список

1. Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. – М. : Госстройиздат, 1954. – 232 с.
2. Корбут, Б. А. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек / Б. А. Корбут, Ю. Н. Нагорный // Известия вузов. Машиностроение. – 1971. – № 6. – С. 16–21.
3. Новожлов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожлов. – Л. : Гос. союзное изд-во судостроит. промышл., 1962. – 431 с.
4. Филиппов, С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек / С. Б. Филиппов. – СПб. : Изд-во СПбГУ, 1999. – 196 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КВАДРАТУР НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А. О. Цуцаев, Ш. С. Хубежты*

Северо-Осетинский государственный университет
имени К. Л. Хетагурова,

г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания

*Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН,

г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания

E-mail: tsutsaev@yandex.ru, salva57@rambler.ru

Сингулярные интегральные уравнения находят широкое применение в задачах математической физики, гидро-аэродинамики, в теории упругости и других областях. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды известных математиков Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Н. И. Мусхелешвили, С. Г. Михлина, З. Пресдорфа и т.д.

Однако решение сингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении можно отметить труды В. В. Иванова, Б. Г. Габдулхаева, И. К. Лифанова Д. Г. Саникидзе, И. В. Бойкова и др. [6–8]. Как они отметили, численное решение сингулярного интегрального уравнения в основном зависит от аппроксимации сингулярного оператора. В книге В.В. Иванова [1] отмечен такой факт: строится приближенный метод нередко применяется для решения интегрального уравнения Фредгольма II рода и основанного на полиномиальной аппроксимации решения. Показывается на примере, что

в общем случае для сингулярных интегральных уравнений может быть доказана теорема о неразрешимости и сходимости аналогичная соответствующей теореме для интегрального сингулярного уравнения.

В работе [2] строятся квадратурные формулы почти гауссовской степени точности вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{U_{n-1}(x)T_{n+1}(x)}{x-x_{k,n+1}} \phi(x_{k,n+1}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x)U_n(x)}{x-x_{k,n}} \phi(x_{k,n}), \quad (1)$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ – ортогональные многочлены Чебышева соответственно I и II родов.

$\{x_{kn}\}_{k=1}^n = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ корни многочлена $T_n(x)$, $\{x_{k,n+1}\}_{k=1}^{n+1} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}$ корни многочлена $T_{n+1}(x)$.

Если плотность $\phi(t)$ имеет производный до $2n+1$ –го порядка, тогда остаточный член квадратурной формулы (1) имеет вид

$$|R_n(\phi, x)| = C_n(x) \frac{1}{(2n+1)! 2^{2n-1}} \left| \int_{-1}^1 \frac{\phi^{(2n+1)}(\xi) T_n(t) T_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt \right|$$

Как известно [3,4] квадратурная формула интерполяционного типа для сингулярных интегралов $\int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-x} dt = \sum_{k=1}^n A_k(x) f(x_k)$

имеет наивысшую степень точности, если x является корнем присоединенной функции Лежандра второго рода т.е. функции $\int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{t-x} dt$, где

$P_n(t)$ – многочлен Лежандра.

Для квадратурных формул (1) спектр Гауссовской степени точности расширен в 4 раза. Они будут иметь наивысшую степень точности, если x корень уравнений $T_n(x) = 0$, $U_n(x) = 0$, $T_{n+1}(x) = 0$.

Теперь рассмотрим сингулярные интегральные уравнения вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K(x,t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} = f(x), \quad (2)$$

где $K(x, t)$ $f(x)$ достаточно гладкие функции. Тогда решение $\phi(t)$ будет непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1, 1]$. Индекс уравнения (2) $k=1$. Поэтому [3,4] для единственности решения ставится дополнительное условие

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = C, \quad C = const$$

Используя квадратурную формулу (1) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{U_{n-1}(x) T_{n+1}(x)}{x - x_{k, n+1}} \phi(x_{k, n+1}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x) U_n(x)}{x - x_{k, n}} \phi(x_k) + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K(x, x_{k, n}) \phi(x_{k, n}) = f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Предавать x можно по разному. Но самое удобное будет когда значения x_j , корни многочлена $U_{n-1}(x)$, $x_j = \cos \frac{j}{n} \pi$ $j=1, 2, \dots, n-1$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x_j) U_n(x_j)}{x_j - x_{k, n}} \phi(x_{k, n}) + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K(x_j, x_{k, n}) \phi(x_{k, n}) = f(x_j), j=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(x_{k, n}) = C$$

Система (4) это система $n \times n$ порядка содержит n неизвестных $\phi(x_{1n}), \phi(x_{2n}), \dots, \phi(x_{nn})$. Упрощая и подставляя в (4) соответствующие значения $U_n(x_j) = (-1)^j$, $T_n(x) = (-1)^j$ получим

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\phi(x_{k, n})}{x_j - x_{k, n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n K(x_j, x_{k, n}) \phi(x_{k, n}) = f(x_j), j=1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(x_{k, n}) = C$$

Как было указано в начале, построение квадратурной формулы вида (5) было осуществлено по определенному процессу аппроксимации плотности $\phi(t)$, при котором возможно заведомое утверждение точности

полученной данным способом квадратурной формулы для любого многочлена степени $\leq 2n+1$ при значениях $x \in [-1,1]$. При этом можно распорядиться о таком выборе значений параметра x в указанных пределах, чтобы соответствующая квадратурная сумма содержала бы по возможности меньшее количество слагаемых (т.е., значений плотности $\phi(t)$ в узлах). Как известно, таковыми являются прежде всего уже известные квадратурные формулы Гаусса. Однако, как уже было оговорено, максимальное число значений параметра x и, тем самым, соответствующих им формул, при которых достижение такой степени точности осуществимо, в известном смысле невелико. С этой точки зрения может быть естественным вопрос о возможности построения другого вида квадратурных формул с такой же алгебраической точностью по возможности с наименьшим при этом (однако заведомо большим, чем в гауссовых формулах) числом ординат.

С использованием общей теории приближенных методов [5] справедлива теорема

Теорема. Если функции $K(x,t)$, $f(x)$ имеет непрерывные производные до $r-1$ -го ($r \geq 1$) порядка, а производная порядка k удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha < 1$), тогда система (4) имеет единственное решения и для оценки справедливо неравенство

$$|\phi(x) - \phi_n(x)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (6)$$

Библиографический список

1. Иванов, В. В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов // Итоги науки. Сер : Мат. анализ. – М. : ВИНТИ, 1965. – С. 125–177.
2. Саникидзе, Д. Г. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с ядром Коши, имеющих близкую к гауссовской степени точности / Д. Г. Саникидзе, К. Р. Купатадзе, Ш. С. Хубежты // Вісник Харківського національного університету. – 2013. – № 1063. – С. 90–98.
3. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М. : Янус, 1995.
4. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 3-е изд. – М. : Наука, 1984.
6. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М. : Физматгиз, 1962. – 599 с.
7. Хубежты, Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения / Ш. С. Хубежты. – Владикавказ : Изд-во ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011. – 236 с.

8. Цуцаев, А. О. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности на отрезке $[-1;1]$ с весовой функцией вида $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ / А. О. Цуцаев, Ш. С. Хубежты // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – 153 с.

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Р. И. Новиков, Т. В. Черушева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: mr.retoko@mail.ru, tank1100@yandex.ru

Как известно, облачные технологии позволяют существенно снизить затраты на приобретение дорогостоящего оборудования, мощных компьютеров и соответствующего программного обеспечения, позволяют взаимодействовать с пользователями и другими компаниями по всему миру. Исходя из этого, IT-компании создают собственные облачные сервисы.

Облачные вычисления обладают многими достоинствами:

- позволяют снизить затраты на оборудование,
- предоставляют большое количество вычислительных ресурсов за короткое время,
- они доступны из любой точки планеты, с любого устройства, имеющего доступ к сети Интернет,
- производят резервное копирование данных, а также аварийное восстановление документов;
- непрерывность работы бизнеса при таких вычислениях становится проще и дешевле,
- все данные автоматически распределяются по нескольким серверам.
- при краже или поломке компьютера данные не теряются, а остаются в «облаке».

К недостаткам следует отнести:

- необходимость постоянного подключения к сети Интернет,
 - конфиденциальность данных, хранимых в публичных облаках.
- Она в настоящее время вызывает много разногласий. Большинство экспертов сходится в том, что не рекомендуется хранить наиболее ценные

для компании документы на публичном облаке, так как нет технологии, которая бы гарантировала полную конфиденциальность данных,

- возможность кибератак на облачное хранилище,
- потеря данных из-за природных катастроф или сбоев работы сервера.

Построим приложение для хранения данных – облачное хранилище – максимально свободное от перечисленных недостатков. Запустим сервер на виртуальной машине с установленной на ней операционной системой (ОС) Ubuntu Server. Данная ОС из семейства Linux показывает хорошую производительность и проста в настройке.

Для хранения информации понадобится база данных (БД) и система управления базой данных (СУБД). В качестве СУБД используем PostgreSQL, который поддерживает сложные структуры и широкий спектр встроенных и определяемых пользователем типов данных, а также обеспечивает расширенную емкость данных и бережное отношением к целостности данных.

Для программирования сервера выбираем Ruby – объектно-ориентированный, динамический, интерпретируемый, высокоуровневый язык программирования. Он обладает независимой от операционной системы реализацией многопоточности, сильной динамической типизацией, является «сборщиком мусора» и обладает многими другими возможностями. Наиболее популярный фреймворк для Ruby – Rails, который обеспечивает большую функциональность, имеет мощные инструменты для работы с БД, удобную маршрутизацию, скорость обработки данных. Таким образом, язык обеспечивает безопасную работу с БД, и это отчасти решает проблему безопасности.

Взаимодействие пользователей с сервером будет происходить по схеме, представленной на рис. 1.

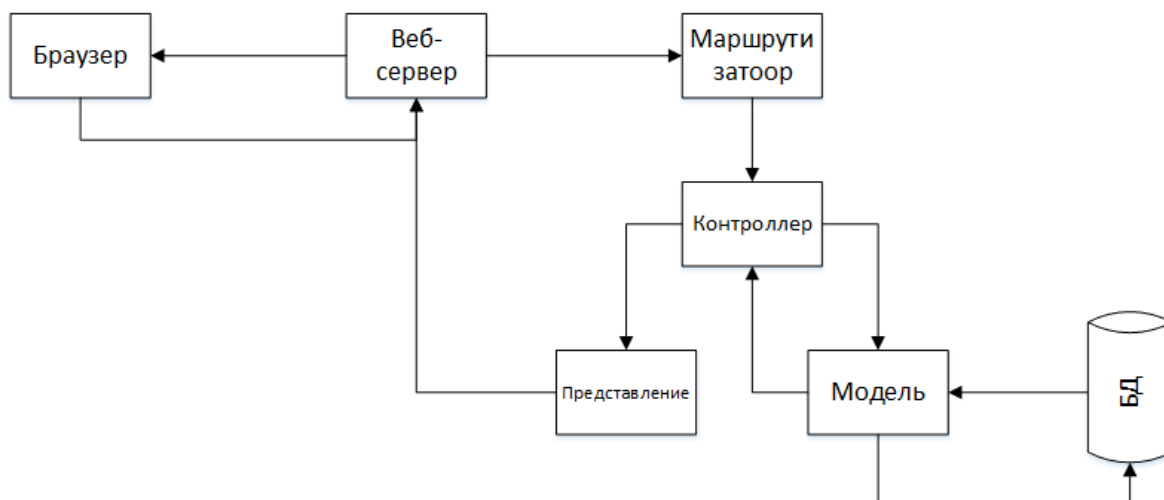


Рис. 1

В качестве веб-сервера предлагается использовать прокси-сервер `nginx`, т.к. он отлично подходит для сайтов с высокой нагрузкой и с легкостью справляется с тысячами одновременных соединений. Все запросы клиентов проходят через `nginx` и попадают в архитектуру приложения `Rails`. Запросы с маршрутизатора переходят на необходимый контроллер, где выполняется аутентификация пользователя. Далее происходит взаимодействие с моделью и представлением для выполнения задачи пользователя. В итоге возвращается готовое представление, которое и видит пользователь.

Для решения другой части проблемы безопасности будем использовать шифрование данных. В качестве алгоритма шифрования возьмем AES (Advanced Encryption Standard) — симметричный алгоритм блочного шифрования (размер блока 128 бит, ключ 128/192/256 бит). На сегодняшний день взломать лобовой атакой защищенную с помощью данного алгоритма информацию практически нереально. Даже суперкомпьютеру потребовалось бы огромное количество времени для того, чтобы получить доступ к информации, защищенной с помощью AES.

Алгоритм шифрования достаточно сложный. Он состоит из нескольких этапов (вычисление всех раундовых ключей, подстановка байтов с помощью таблицы «S-Box», сдвиг в форме с использованием различающихся величин, смешивание данных внутри каждого столбца матрицы, сложение формы и раундового ключа).

Дешифровка производится в обратном порядке, за исключением того, что вместо таблицы «S-Box» используется таблица обратных подстановок.

Схема алгоритма шифрования представлена на рис. 2 и 3.

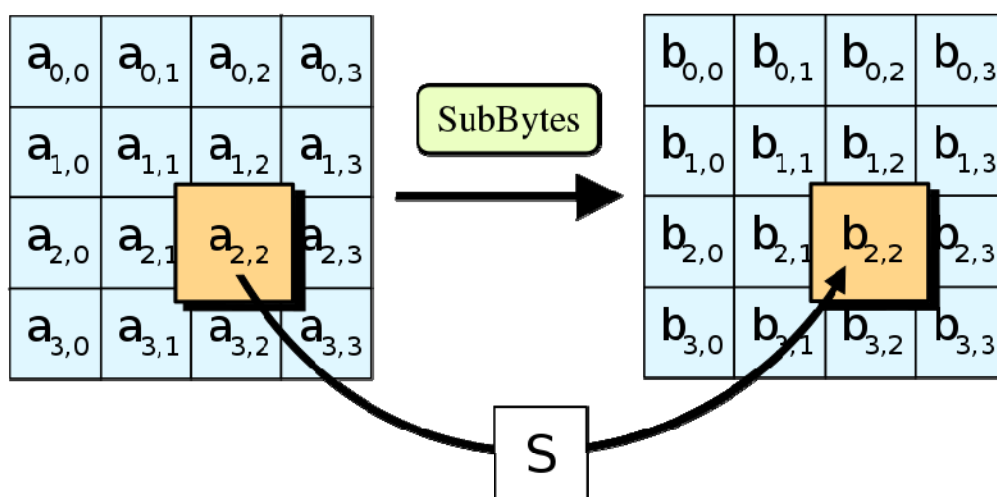


Рис. 2

После шифрования данных осталась проблема потери данных из-за природных катастроф или сбоев работы сервера. Для её решения выпол-

няется автоматическое дублирование БД (в случае утери данных в основной БД переключаемся на резервную БД без потерь). Дополнительно воспользуемся «зеркалированием», которое позволяет непрерывно передавать содержимое журнала транзакций исходного сервера на другой целевой сервер. В случае сбоя основной системы приложения могут немедленно соединиться с базой на вспомогательном сервере. Следовательно, уменьшается вероятность утраты данных, а также предотвращаются сбои работы приложения из-за возможных проблем с базой данных. Таким образом, построено облачное хранилище, которое позволяет успешно взаимодействовать с клиентами и соблюдать нормы безопасности.

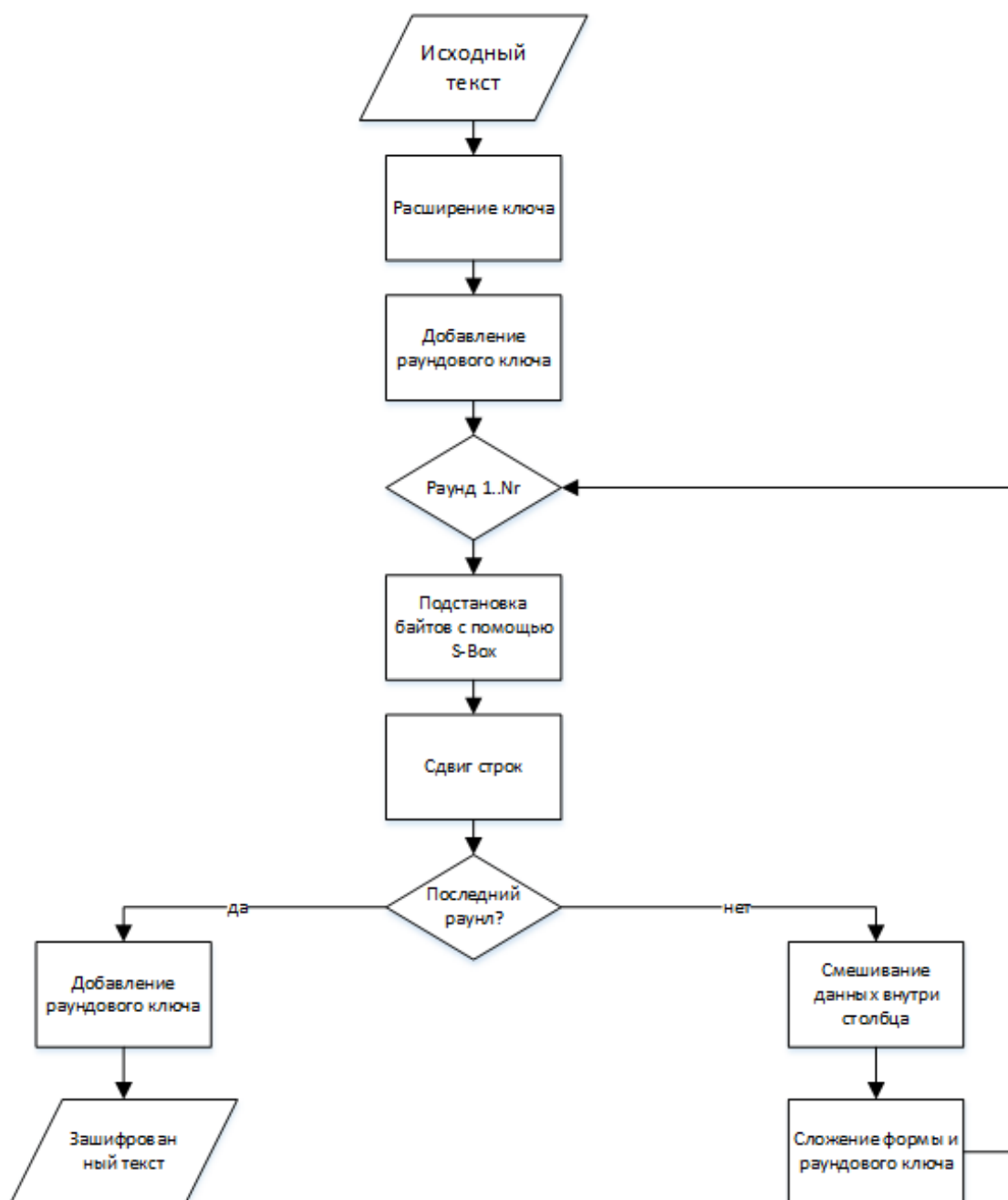


Рис. 3

В заключение можно сказать, что облачные вычисления предлагают огромные преимущества в виде безграничных хранилищ, возможностей легкого обмена информацией и ее обработки. Многие ученые утверждают, что существует ряд инструментов и возможностей, которые позволят использовать на полную мощь облачные технологии, несмотря на их недостатки. Это касается не только разработчиков. Концепция облачных технологий действительно важна, так как она непременно станет переломным моментом в ведении бизнеса и сможет вывести его на совершенно новый уровень, а вместе с этим позволит увеличить доход не только руководству IT-компаний, но и государству.

Библиографический список

1. Клементьев, И. П. Введение в Облачные вычисления / И. П. Клементьев, В. А. Устинов. – Ульяновск : Изд-во УГУ, 2009. – 233с.
2. Широкова, Е. А. Облачные технологии / Е. А. Широкова // Современные тенденции технических наук : материалы Междунар. науч. конф. (г. Уфа, октябрь 2011 г.). – Уфа : Лето, 2011. – С. 30–33. – URL : <https://moluch.ru/conf/tech/archive/5/1123>
3. Институт ЮНЕСКО по информационным технологиям в образовании «Облачные вычисления в образовании». – М., 2010.
4. Фокин, Н. Б. Обоснование эффективности использования Облачных технологий / Н. Б. Фокин. – URL: <http://journal.itmane.ru/node/649>

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕСИ НОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МИГРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ¹

Ю. А. Дубнов

Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук,
г. Москва, Россия
E-mail: yury.dubnov@phystech.edu

Согласно современным обзорам, приведенным в работах [1] и [2], подходы к анализу и прогнозированию миграционных потоков можно разделить на 3 группы: исторически сложившиеся сценарные модели, основанные на описании тех или иных аспектов феномена миграции, модели оптимального управления миграционными процессами и, наконец, различные статистические модели, устанавливающие взаимосвязь между исследуемыми величинами на основе анализа ретроспективных данных.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00551) и программы Президиума РАН № 0063-2018-0009.

Наибольший интерес с точки зрения математического моделирования представляют последние две группы моделей. С одной стороны, модели оптимального управления являются более универсальными и нацелены на исследование качественного влияния различных факторов и механизмов управления на протекание процессов миграции, в том числе в перспективе прогнозирования. С другой стороны, именно статистические модели позволяют установить подтверждающиеся количественными данными закономерности между параметрами, влияющими на миграционные потоки.

Наиболее распространенным инструментом восстановления статистических закономерностей является метод наименьших квадратов (МНК). Однако согласно теореме Гаусса-Маркова метод МНК позволяет получить наиболее эффективные точечные оценки параметров лишь в случае нормально-распределенных остатков модели, что в реальных условиях оказывается редким и трудно проверяемым условием.

В настоящей работе предлагается использовать параметрическую модель смеси нормальных распределений [3] для анализа миграционных показателей. Основным преимуществом смеси распределений по сравнению с традиционным подходом является возможность анализа влияния множества скрытых факторов, соответствующих центрам компонент смеси. Традиционным методом оценивания параметров смеси является применение алгоритма максимизации правдоподобия (ЕМ-алгоритм), представляющего итеративную процедуру подбора параметров и максимизации функции правдоподобия [4]. Но несмотря на свою распространенность, ЕМ-алгоритм обладает рядом существенных недостатков, таких как сходимость к локальному экстремуму и неустойчивость по начальным данным [5]. Поэтому, в данной работе приводится альтернативный подход, детально описанный в работе [6], базирующийся на байесовском оценивании и семплировании для восстановления максимума апостериорной вероятности.

Традиционно задача разделения смеси формулируется следующим образом: пусть имеется выборка X значений d -мерной случайной величины x^d , плотность распределения которой описывается следующим законом:

$$x^d \propto \sum_{i=1}^k w_i \mathcal{N}(x^d, \mu_i, \Sigma_i), \quad (1)$$

где $\mu_i = \{\mu_i^1, \mu_i^2, \dots, \mu_i^d\}$ – вектор средних значений i -й компоненты смеси, Σ_i – его ковариационная матрица, k – количество компонент в смеси, а

w_i – коэффициенты этих компонент, причем $\sum_{i=1}^k w_i = 1$.

При фиксированном векторе параметров

$$\theta = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\} \quad (2)$$

выражение (1) представляет собой функцию правдоподобия наблюдения случайной величины x^d . Предполагая независимость наблюдений в выборке объемом N , имеем:

$$\mathcal{L}(X | \theta) = \prod_{s=1}^N p(x_s^d | \theta) = \prod_{s=1}^N \sum_{i=1}^k w_i \mathcal{N}(x_s^d | \mu_i, \Sigma_i) \quad (3)$$

Основная цель задачи параметрической идентификации смеси заключается в оценке параметров θ в уравнении (3) по имеющейся выборке наблюдений, а традиционным методом решения является максимизация правдоподобия. Общее количество искомых параметров зависит от размерности задачи d и количества k компонент в смеси:

$$N_\theta = kd + kd^2 + (k - 1) = k(d + d^2 + 1) - 1. \quad (4)$$

Так, для одномерной смеси двух нормальных компонент, количество искомых параметров составит $N_\theta = 5$. Таким образом, одномерная задача разделения смеси трансформируется в 5-тимерную задачу поиска оценок параметров этой смеси. Такой быстрый рост числа искомых оценок непременно сказывается на вычислительной сложности применяемых алгоритмов.

Для многомерных задач ($d \geq 2$) можно сократить общее число искомых параметров, наложив некоторые ограничения на модель, уменьшив тем самым ее универсальность. Например, в практическом смысле, удобно предполагать диагональный вид матрицы ковариации, что существенно сокращает вектор параметров:

$$N_\theta = kd + kd + (k - 1) = k(2d + 1) - 1. \quad (5)$$

Так, например, для двумерной смеси с тремя нормальными компонентами длина вектора параметров составит $N_\theta = 14$ вместо 20.

Рассмотрим задачу поиска оценок параметров θ с точки зрения теоремы Байеса [7], согласно которой для восстановления апостериорной плотности параметров $p(\theta | X)$ используется функция правдоподобия (3) и некоторая априорная плотность $\pi(\theta)$:

$$p(\theta | X) \propto \mathcal{L}(X | \theta)\pi(\theta). \quad (6)$$

Различают два типа априорных распределений: информативные и неинформативные [8]. Информативные распределения имеют определенную структуру, выбираемую исходя из имеющихся знаний об объекте исследований. Байесовское оценивание в этом случае, фактически, уточ-

няет на основе наблюдений знания, заложенные в априорных распределениях. Другая ситуация с неинформативными априорными распределениями, являющимися, как правило, равномерными или неопределенными в общем виде, но являющимися решением некоторой задачи оптимизации, например, задачи максимизации энтропии.

Выражение (6) определяют вид апостериорного распределения параметров модели $p(\theta | X)$, причем размерность этого распределения совпадает с длиной вектора параметров θ . Оценкой искомых параметров по методу максимума апостериорного распределения (МАР) является точка, в которой достигается глобальный максимум функции апостериорной плотности $p(\theta | X)$.

Идея поиска оценок МАР посредством сэмплирования заключается в предварительной генерации набора случайных точек с заданным апостериорным распределением и выборе в качестве искомых оценок именно той точки, в которой реализуется наибольшее значение плотности:

$$\hat{\theta} = \arg \max_j p(\theta | X), \quad j = \overline{1, T},$$

где T – объем сгенерированной выборки семплов.

Учитывая нетривиальный вид функции апостериорного распределения и высокую его размерность, традиционные методы генерации случайных величин, такие как метод обратной функции и метод исключений, оказываются неприменимы. Альтернативой является применение алгоритма сэмплирования Метрополиса-Гастингса (МГ), не подверженного «проклятию размерности» [9].

Основным препятствием для успешного применения алгоритма Метрополиса-Гастингса с целью поиска оценок МАР является отсутствие подходов, как теоретических, так и экспериментальных, для надежного обеспечения полного покрытия исследуемой области в пространстве параметров θ . Поэтому применение алгоритма МГ требует тонкой индивидуальной настройки не только гиперпараметров самого алгоритма, но и использующегося вспомогательного распределения.

Одним из эмпирических подходов к настройке алгоритма МГ является итеративное повторение процедуры сэмплирования с адаптивной подстройкой параметров предложенного распределения. После каждой следующей итерации в качестве матожидания предложенного распределения выбирается среднее значения полученных семплов, а в качестве матрицы ковариаций – их ковариация, умноженная на некоторый коэффициент, больший 1, что обеспечивает неумещающуюся зону покрытия при сэмплировании.

Как показывают эксперименты (см. табл. 1), уже однократное применения описанной подстройки параметров позволяет существенно

улучшить оценки МАР, что, в свою очередь, приводит к меньшей относительной ошибке параметров смеси.

Для экспериментов были сгенерированы выборки из смесей нормальных распределений при числе компонент смеси $k=2$ и размерности компонент $d=1,2,3,5,10$, матрицы ковариацией компонент смеси являются диагональными. Объем выборки наблюдений составляет не менее чем $6 * N_{\theta}$, где N_{θ} – размерность искомого вектора параметров. Результаты байесовской оценки параметров по методу МАР, полученные с помощью семплирования алгоритмом МГ (МН), сравниваются с алгоритмом ЕМ по средней относительной погрешности.

Результаты представлены в таблице 1, в колонках которой приведены:

- размерность компонент смеси;
- размерность искомого вектора параметров;
- объем выборки имеющихся наблюдений;
- средняя относительная ошибка оценок алгоритмами ЕМ и МН.

Таблица 1

Результаты сравнения алгоритмов ЕМ и МН
для разделения двухкомпонентной смеси ($k=2$)

Размерность компонент	Размерность вектора параметров	Объем выборки наблюдений	ЕМ	МН	
				step 1	step 2
$d = 1$	5	30	0.1409	0.1781	0.0912
$d = 2$	9	54	0.1027	0.1136	0.0819
$d = 3$	13	78	0.0941	0.1083	0.0783
$d = 5$	21	126	0.0819	0.1228	0.0933
$d = 10$	41	246	0.0403	0.0709	0.0364

Как видно из результатов экспериментов с модельными данными, ЕМ алгоритм в большинстве примеров выполняется стабильно с приемлемой точностью, что объясняет его всеобщую распространенность. С другой стороны, оценка с помощью семплирования позволяет получить более точный результат и может быть использована в тех приложениях, где время выполнения не является ограничивающим фактором.

Итак, в работе рассмотрена задача разделения смеси нормальных распределений, заключающаяся в определении их параметров по имеющейся выборке наблюдений. Предложен алгоритм ее решения, базирующийся на применении байесовского оценивания и вычислении максимума апостериорной вероятности с помощью семплирования.

В качестве наиболее подходящего алгоритма семплирования предлагается использовать алгоритм Метрополиса-Гастингса, основанный на итеративном построении марковской цепи по заданному вспомога-

ному распределению. Параметры предложенного распределения выбираются на основе имеющейся выборки, что обеспечивает универсальность предложенного подхода для различных практических задач.

Библиографический список

1. Дмитриев, М. Г. Миграционные процессы: модели анализа и прогнозирования (обзор) / М. Г. Дмитриев, Т. Н. Юдина // Труды Института системного анализа РАН. – 2017. – Т. 67, № 2. – С. 3–14.
2. Лукина, А. А. Математическое моделирование международной трудовой миграции : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / Лукина А. А. – СПб. : Санкт-Петербургский гос. ун-т, 2016. – 124 с.
3. McLachlan, G. Finite Mixture Models / G. McLachlan, D. Peel // Hoboken. – NJ : John Wiley & Sons. Inc., 2000.
4. Xu, L. On Convergence Properties of the EM Algorithm for Gaussian Mixtures / L. Xu, M. I. Jordan // Neural Computation. – 1996. – Vol. 8 (1). – P. 129–151.
5. Dempster, A. P. Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm / A. P. Dempster, N. M. Laird, D. B. Rubin // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 1977. – Vol. 39 (1). – P. 1–38.
6. Дубнов, Ю. А. Байесовская идентификация параметров смеси нормальных распределений / Ю. А. Дубнов, А. В. Булычев // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2017. – Вып. 1. – С. 101–111.
7. Rolph, J. E. Bayesian Estimation of Mixing Distributions / John E. Rolph. // The Annals of Mathematical Statistics. – 1968. – Vol. 39, № 4. – P. 1289–1302.
8. Gelman, A. Bayes, Jeffreys, Prior Distributions and the Philosophy of Statistics / Andrew Gelman // Statistical Science. – 2009. – Vol. 24, № 2. – P. 176–178.
9. Chib, S. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm / Siddhartha Chib, Edward Greenberg // The American Statistician. – 1995. – Vol. 49. – № 4. – P. 327–335.

РОЛЬ ЦЕНТРА ЗАПИСИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ

А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов, Р. К. Галимова

Казанский национальный исследовательский
технический университет имени А. Н. Туполева,
г. Казань, Россия

E-mail: nastya.98.ru.2014@yandex.ru , lutin.roma@mail.ru , zymat@bk.ru

Рассмотрим полиномиальную формулу[1-6]:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n =$$

$$= \sum_{\substack{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) \\ n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \cdot a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}, \quad (1)$$

где $n, k \in \mathbb{N}$; $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq k$.

Введём обозначение: $a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 x^{l_1} + b_2 x^{l_2} + b_3 x^{l_3} \dots + b_k x^{l_k}$, где $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ – это коэффициенты при степенях x , а l_k – это максимальная степень x ($l_i = l_{i-1} + 1$, где $2 \leq i \leq k$). При этом степени переменной x расположены по возрастанию. Понятие «центра записи» многочлена уточняется в работах [1–3].

В статье [1] отмечено, что если количество элементов в исходном многочлене нечетное и выполняется условие

$$\frac{b_k}{b_1} = \frac{b_{k-1}}{b_2} = \frac{b_{k-2}}{b_3} = \dots = z = \pm 1,$$

то тогда закономерность в виде симметрии относительно центра полученного многочлена отсутствует. Здесь допущена ошибка. Условие должно быть таковым: $\frac{b_k}{b_1} = \frac{b_{k-1}}{b_2} = \frac{b_{k-2}}{b_3} = \dots = z = -1$.

Также в [1] отмечается, что если в исходном полиноме есть отрицательные коэффициенты при переменных, и они стоят под нечетными номерами относительно центра записи (нумерация – от центра к краям) так, что на другой стороне от центра под этими же номерами стоят противоположные по знаку коэффициенты, то есть положительные, то тогда наблюдается симметрия относительно центра полученного многочлена. Сделаем небольшой комментарий к этому утверждению: этот вывод работает только в случае нечётного количества элементов (k) исходного многочлена.

В статье [2] упоминается, что если исходный многочлен состоит из трех элементов, степени которых чётные, а $l_k = 4$, то коэффициенты полученного многочлена слева от центра можно получить через коэффициенты справа, умноженные на определённые числа. Этими числами являются h^c , где h – это отношение коэффициентов x^{l_k} к x^{l_1} в изначальном многочлене, c – номер места от центра. Введём поправку в данный вывод.

Зададим полином общего вида, который состоит из трёх элементов, где обязательно есть один свободный член $(a_1 + a_2 x^{l_i} + a_3 x^{l_k})^n$. Тогда при $\frac{l_k}{l_i} = 2$, где l_k – чётное число, можно заметить закономерность, о которой говорится выше.

В результате внесённой поправки можно сделать общий вывод: если исходный многочлен состоит из трех элементов, где обязательно есть один свободный член $(a_1 + a_2x^{l_i} + a_3x^{l_k})^n$ и выполняется условие $\frac{l_k}{l_i} = 2$,

где l_k – чётное число, то коэффициенты полученного многочлена слева от центра можно получить через коэффициенты справа, умноженные на h^c , где h – это отношение коэффициентов x^{l_k} к x^{l_i} в исходном многочлене, c – номер места от центра.

Рассмотрим более подробно полиномы, в исходных многочленах которых коэффициенты при нескольких степенях x равны нулю.

Начнём с полиномов, которые имеют чётную максимальную степень l_k . Для начала запишем полный исходный многочлен (со всеми степенями x) с симметрией коэффициентов относительно центра записи.

Пример 1:

$$\begin{aligned} (2 + 3x + 9x^2 + 5x^3 + x^4 + 7x^5 + x^6 + 5x^7 + 9x^8 + 3x^9 + 2x^{10})^3 = & 8x^{30} + \\ & + 36x^{29} + 162x^{28} + 411x^{27} + 921x^{26} + 1524x^{25} + 2088x^{24} + 2703x^{23} + \\ & + 2991x^{22} + 4076x^{21} + 5214x^{20} + 5931x^{19} + 7696x^{18} + 7335x^{17} + 6876x^{16} + \\ & + 7879x^{15} + 6876x^{14} + 7335x^{13} + 7696x^{12} + 5931x^{11} + 5214x^{10} + 4076x^9 + \\ & + 2991x^8 + 2703x^7 + 2088x^6 + 1524x^5 + 921x^4 + 411x^3 + 162x^2 + 36x + 8. \end{aligned}$$

Уберём два соседних элемента исходного полинома слева от центра симметрии соответствующие им справа от центра.

При проведении данной операции необходимо помнить, что убирать первый и последний элементы полинома, а также сам центр записи (в случае, когда число элементов k в исходном полиноме нечётное) нельзя, так как они являются важными компонентами исходного многочлена.

Пример 2:

$$\begin{aligned} (2 + 3x + x^4 + 7x^5 + x^6 + 3x^9 + 2x^{10})^3 = & 8x^{30} + 36x^{29} + 54x^{28} + 27x^{27} + 12x^{26} + \\ & + 120x^{25} + 291x^{24} + 225x^{23} + 33x^{22} + 129x^{21} + 564x^{20} + 696x^{19} + 187x^{18} + \\ & + 66x^{17} + 480x^{16} + 1003x^{15} + 480x^{14} + 66x^{13} + 187x^{12} + 696x^{11} + 564x^{10} + \\ & + 129x^9 + 33x^8 + 225x^7 + 291x^6 + 120x^5 + 12x^4 + 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8. \end{aligned}$$

Здесь мы видим, что симметрия относительно центра записи в полученном полиноме существует.

Теперь удалим три элемента исходного полинома, соседствующие друг с другом слева от центра симметрии, и соответствующие им справа от центра.

Пример 3:

$$\begin{aligned}(2 + 3x + 7x^5 + 3x^9 + 2x^{10})^3 = & 8x^{30} + 36x^{29} + 54x^{28} + 27x^{27} + \\ & + 84x^{25} + 252x^{24} + 189x^{23} + 36x^{21} + 426x^{20} + 594x^{19} + 54x^{18} + \\ & + 252x^{16} + 889x^{15} + 252x^{14} + 54x^{12} + 594x^{11} + 426x^{10} + 36x^9 + \\ & + 189x^7 + 252x^6 + 84x^5 + 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.\end{aligned}$$

В примере 3 продолжает сохраняться симметричность относительно центра записи, как и в примере 2.

Продолжим рассмотрение полиномов, но уже нечётной максимальной степени l_k . Повторяем те же операции, как и в примерах 2-3.

Пример 4:

$$\begin{aligned}(5 + 6x + x^2 + 3x^5 + 3x^6 + x^9 + 6x^{10} + 5x^{11})^2 = & 25x^{22} + 60x^{21} + 46x^{20} + \\ & + 12x^{19} + x^{18} + 30x^{17} + 66x^{16} + 42x^{15} + 6x^{14} + 10x^{13} + 81x^{12} + 142x^{11} + \\ & + 81x^{10} + 10x^9 + 6x^8 + 42x^7 + 66x^6 + 30x^5 + x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25.\end{aligned}$$

Пример 5:

$$\begin{aligned}(5 + 6x + x^2 + x^9 + 6x^{10} + 5x^{11})^2 = & 25x^{22} + 60x^{21} + 46x^{20} + 12x^{19} + x^{18} + \\ & + 10x^{13} + 72x^{12} + 124x^{11} + 72x^{10} + 10x^9 + x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25.\end{aligned}$$

На основе проведения вычислений с множеством подобных полиномов делаем следующий общий вывод.

Вывод 1: если в исходном многочлене коэффициенты элементов симметричны относительно центра записи, и при этом отсутствуют соседние элементы (2 и более, в зависимости от количества элементов в начальном полиноме) слева от центра симметрии и соответствующие им справа от центра, то коэффициенты полученного многочлена будут симметричны относительно центра записи.

Далее рассмотрим случаи, когда в исходном полиноме, при отсутствии двух соседних элементов, встречаются отрицательные коэффициенты.

В примере 6 исследуем полином, в котором отсутствуют элементы x при степенях 2 и 3 слева и при степенях 7 и 8 справа от центра записи, некоторые действующие элементы которого имеют отрицательный коэффициент под нечётными номерами относительно центра записи (нумерация каждого элемента, с учётом нулевых коэффициентов при каком-либо x — от центра к краям).

Пример 6:

$$\begin{aligned} (-2 + 3x - x^4 - 7x^5 + x^6 - 3x^9 + 2x^{10})^3 = & 8x^{30} - 36x^{29} + 54x^{28} - 27x^{27} + \\ & + 12x^{26} - 120x^{25} + 267x^{24} - 153x^{23} - 21x^{22} - 57x^{21} + 276x^{20} - 186x^{19} - \\ & - 173x^{18} + 6x^{17} - 186x^{16} + 245x^{15} - 318x^{14} - 48x^{13} - 79x^{12} + 354x^{11} - \\ & - 24x^{10} - 111x^9 + 21x^8 - 225x^7 + 237x^6 - 48x^5 - 12x^4 + 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8. \end{aligned}$$

В примере 6 нет никакой симметрии относительно центра записи.

Прделаем те же выкладки; при этом действующие элементы, имеющие отрицательный знак, стоят под чётными номерами от начала записи.

Пример 7:

$$\begin{aligned} (5 - 6x + x^2 - 3x^5 + 3x^6 - x^9 + 6x^{10} - 5x^{11})^2 = & 25x^{22} - 60x^{21} + 46x^{20} - \\ & - 12x^{19} + x^{18} - 30x^{17} + 66x^{16} - 42x^{15} + 6x^{14} - 10x^{13} + 81x^{12} - 142x^{11} + \\ & + 81x^{10} - 10x^9 + 6x^8 + 42x^7 + 66x^6 - 30x^5 + x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25. \end{aligned}$$

Как видим, в примере 7 есть симметрия результата относительно центра записи. Исследовав множество аналогичных примеров, приходим к тому, что в исходном полиноме должно выполняться условие

$$\frac{b_k}{b_1} = \frac{b_{k-1}}{b_2} = \frac{b_{k-2}}{b_3} = \dots = z = -1.$$

Далее рассмотрим комбинированный случай, когда отрицательный элемент стоит и под чётным и под нечётным номерами от начала записи.

Пример 8:

$$\begin{aligned} (5 + 6x + x^2 + 3x^5 - 3x^6 + x^9 + 6x^{10} - 5x^{11})^2 = & 25x^{22} - 60x^{21} + 26x^{20} + \\ & + 12x^{19} + x^{18} + 30x^{17} - 66x^{16} + 30x^{15} + 6x^{14} - 10x^{13} - 39x^{12} + 6x^{11} + \\ & + 81x^{10} + 10x^9 - 6x^8 - 30x^7 + 6x^6 + 30x^5 + x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 60x + 25. \end{aligned}$$

В примере 8 в этом случае симметрии нет.

Опираясь на выводы 1 и 2 статьи[1], с учетом поправки в начале данной статьи, можно сделать следующие выводы для рассмотренных примеров.

Вывод 2: если в исходном многочлене коэффициенты элементов удовлетворяют условию $\frac{b_k}{b_1} = \frac{b_{k-1}}{b_2} = \frac{b_{k-2}}{b_3} = \dots = z = -1$, при этом отсут-

ствуют соседние элементы (2 и более, в зависимости от количества элементов в начальном полиноме) слева и соответствующие им справа от центра записи, и, главное, есть отрицательные коэффициенты при пере-

менных, которые стоят под четными номерами относительно центра записи (нумерация каждого элемента, с учётом нулевых коэффициентов при каком-либо x (отсутствующих по условию соседних элементов) – от центра к краям) так, что на другой стороне от центра под этими же номерами стоят противоположные по знаку коэффициенты, то есть положительные, то тогда наблюдается симметрия относительно центра полученного многочлена.

Вывод 3: если в исходном многочлене коэффициенты элементов удовлетворяют условию $\frac{b_k}{b_1} = \frac{b_{k-1}}{b_2} = \frac{b_{k-2}}{b_3} = \dots = z = \pm 1$, и при этом отсут-

ствуют соседние элементы (2 и более, в зависимости от количества элементов в начальном полиноме) слева и соответствующие им справа от центра записи, и, главное, есть отрицательные коэффициенты при переменных, которые стоят под нечетными номерами относительно центра записи (нумерация каждого элемента, с учётом нулевых коэффициентов при каком-либо x (отсутствующих по условию соседних элементов) – от центра к краям) так, что на другой стороне от центра под этими же номерами стоят противоположные по знаку коэффициенты, то есть положительные, то тогда симметрии относительно центра полученного многочлена нет.

В заключение укажем области практического применения многочленов и самой полиномиальной формулы:

- Моделирование астатической системы регулирования положения. Анализ методов синтеза систем управления электроприводами.
- Компьютерное моделирование. Прикладная математика. Задание поверхностей различных фигур.
- Расчёты энтропии некоторой сложной физической системы, когда требуется вычислить количество допустимых характеристик соответствующей физической модели.

Библиографический список

1. Павлова, А. А. Полиномиальная формула: её закономерности для определённых видов многочленов и области практического применения – 2 / А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 4–6 декабря 2017 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 33–39.

2. Павлова, А. А. Закономерности полиномиальной формулы для определённых видов многочленов / А. А. Павлова, Р. В. Иутин, З. Я. Якупов, Р. К. Галимова // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза,

28–31 мая 2018 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 48–53.

3. Павлова, А. А. Полиномиальная формула: её закономерности для определённых видов многочленов и область практического применения / А. А. Павлова, З. Я. Якупов // XXIII Туполевские чтения (школа молодых ученых) : материалы Междунар. молодёж. науч. конф. (8–10 ноября 2017 г.) : в 4 т. – Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т. 2. – С. 537–542.

4. Просветов, Г. И. Дискретная математика: задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г. И. Просветов. – 2-е изд., доп. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 240 с.

5. Якупов, З. Я. Сравнение значений числовых выражений / З. Я. Якупов, А. З. Якупов // Интеграция образования. – 2001. – № 4. – С. 74–79.

6. Якупов, З. Я. Решение одного нелинейного диофантова уравнения / З. Я. Якупов, А. З. Якупов // Интеграция образования. – 2001. – № 4-2. – С. 66–68.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА ЧЕТ-НЕЧЕТНОЙ СОРТИРОВКИ ДАННЫХ

В. А. Засов, М. С. Кондратьев

Самарский государственный университет путей сообщения
г. Самара, Россия

E-mail: vzasov@mail.ru, kodratyev@rotorbeer.ru

Вычислительная сложность алгоритмов сортировки высока и в зависимости от используемых алгоритмов находится в пределах значений величин от $\sim n \log_2 n$ до $\sim n^2$, где n – число сортируемых элементов [1]. Поэтому выполнение сортировки больших объемов данных (Big Data) на основе последовательных алгоритмов затрудняет практическое решение задач мониторинга и управления большими системами например, транспортными, энергетическими, социальными.

Рассматривается параллельный алгоритм чет-нечетной сортировки, являющийся модификацией распространенного алгоритма пузырьковой сортировки, который в классическом виде плохо приспособлен для распараллеливания, т.к. сравнение пар значений упорядочиваемого набора данных происходит последовательно. Поэтому для параллельного варианта этого алгоритма используется его модификация, известная как метод чет-нечетной перестановки [2,3].

Сущность модификации состоит в том, что в алгоритм пузырьковой сортировки вводятся два разных правила выполнения итераций ме-

тогда: в зависимости от четности или нечетности номера итерации сортировки для обработки выбираются элементы с четными или нечетными индексами соответственно, а сравнение выделяемых элементов всегда осуществляется с их правыми соседними элементами.

Таким образом, на всех нечетных итерациях сравниваются пары элементов

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{n-1}, a_n),$$

а на четных итерациях обрабатываются элементы

$$(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{n-2}, a_{n-1}).$$

В результате, после n -кратного повторения итераций, сортировка исходного набора данных завершается.

Параллельный алгоритм, реализующий метод чет-нечетной перестановки (сортировки), базируется на том, что сравнения пар значений на итерациях сортировки являются независимыми, поэтому могут выполняться одновременно.

В случае, когда количество процессоров (ядер) p меньше числа упорядочиваемых элементов n , т.е. $p < n$, для каждого из процессоров в памяти будет храниться не единственный элемент данных, а часть (блок элементов размера n / p) сортируемого набора данных.

В обобщенном на этот случай алгоритме можно выделить следующие шаги:

шаг 1. сортировка элементов для каждого из блоков данных;

шаг 2. начало нечетной итерации: выполнение обмена между парами процессоров P_i и P_{i+1} блоками данных A_i и A_{i+1} (индекс i нечетный);

шаг 3. объединение блоков данных A_i и A_{i+1} на каждом процессоре и сортировка сдвоенных блоков;

шаг 4. разделение полученных сдвоенных блоков на две равные части и передача частей с меньшими значениями процессорному ядру P_i , а с большими значениями процессорному ядру P_{i+1} .

шаг 5. начало четной итерации: выполнение обмена между парами процессоров P_{i+1} и P_{i+2} блоками данных A_{i+1} и A_{i+2} ;

шаг 6. объединение блоков данных A_{i+1} и A_{i+2} на каждом процессоре и сортировка сдвоенных блоков;

шаг 7. разделение полученных сдвоенных блоков на две равные части и передача частей с меньшими значениями процессорному ядру P_{i+1} , а с большими значениями процессорному ядру P_{i+2} .

шаг 8. завершение сортировки, если после двух последовательных итераций состояние упорядочиваемого набора не изменяется, в противном случае переход на шаг 1.

В приведенном алгоритме в качестве базовой подзадачи для случая $p < n$ использована операция «сравнить и разделить» [2,3].

В [2] получена аналитическая оценка времени выполнения параллельного алгоритма, реализующего метод чет-нечетной сортировки, учитывающая латентность памяти, частоту кэш промахов, накладные расходы на организацию параллельности и ряд других параметров, которые сложно получить практически и имеющих большой разброс для различных вычислительных систем. Поэтому эта оценка имеет, в основном, теоретическое значение.

Для прикладных же задач необходимы реальные значения показателей эффективности, которые можно получить только при практической проверке этого алгоритма сортировки с заданными параметрами на конкретной вычислительной системе.

Для выполнения вычислительных экспериментов по определению показателей эффективности параллельных алгоритмов сортировки разработан и реализован программный комплекс [4].

В программном комплексе реализованы последовательные и параллельные варианты программ для распространенных алгоритмов сортировки: пузырьковой, чет-нечетной, быстрой, включением, Шелла, слиянием.

Программный комплекс позволяет определять показатели эффективности параллельных алгоритмов и программ сортировки, выполняемых на многоядерных ВС с общей памятью, использующих технологию многопоточной обработки OpenMP. Для мобильных вычислительных систем многоядерная архитектура наиболее эффективна, т.к. позволяет создавать высокопроизводительные системы, функционирующих в условиях жестких ограничений на энергопотребление, вес, габариты.

В программном комплексе для увеличения масштабируемости параллельных алгоритмов сортировки применяется технология CUDA (Computer Unified Device Architecture) [5], позволяющая создавать высокопроизводительные параллельные вычислительные системы на основе графических процессоров (GPU).

Ниже приведены результаты вычислительных экспериментов, выполненных на программном комплексе на примере алгоритма чет-нечетной сортировки.

На рис. 1 представлены экспериментальные зависимости времени и ускорений для разного количества сортируемых элементов и числа параллельных вычислительных потоков в многоядерных CPU.

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что рассмотренный параллельный алгоритм чет-нечетной сортировки данных позволяет существенно уменьшить время сортировки. С увеличением числа процессорных ядер ускорение решения также увеличивается, хотя достигнутое ускорение заметно меньше числа вычислительных элементов (числа потоков).

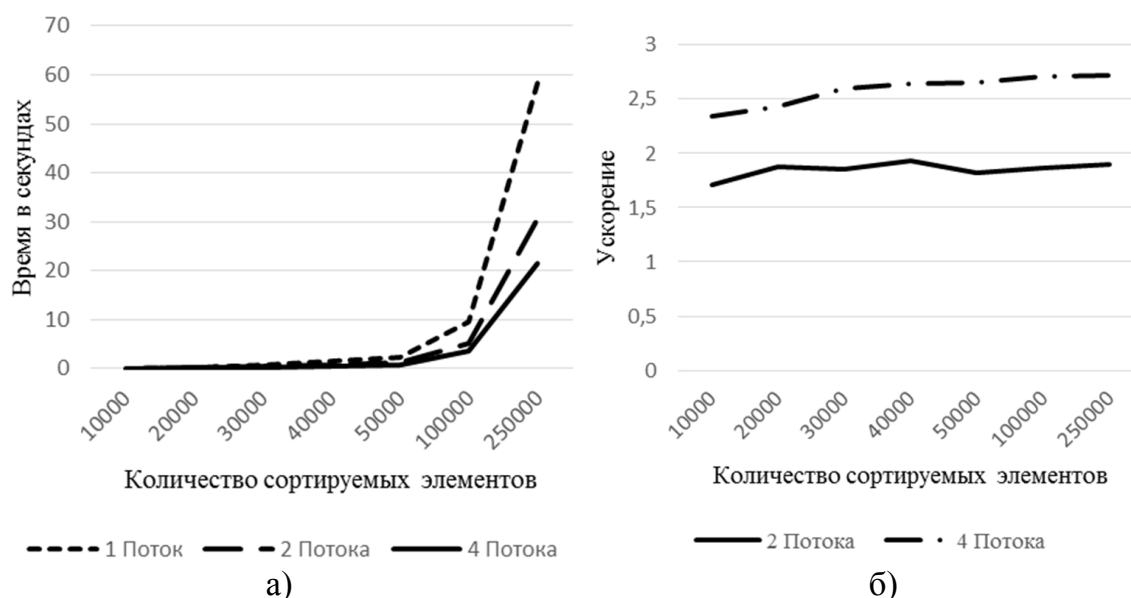


Рис. 1. Экспериментальные зависимости времени (а) и ускорения (б) выполнения чет-нечетной сортировки от количества сортируемых элементов и числа вычислительных потоков

В параллельном алгоритме чет-нечетной сортировки затраты на реализацию межпроцессорной передачи данных столь значительны, что существенно снижают эффект от распараллеливания алгоритма, поэтому зависимость времени сортировки от количества сортируемых элементов существенно нелинейная. Из этого следует, что одним из направлений исследований для достижения большего ускорения алгоритма является увеличение скорости обмена данными между процессорами с соседними номерами или сокращение обменов между вычислительными потоками, т.е. увеличение степени их независимости. Последнее достигается переходом от архитектуры вычислительной системы с общей памятью на более сложную архитектуру MPI (message passing interface) с распределенной памятью [1,2].

Результаты, приведенные на рис.2 иллюстрируют эффективность применения в параллельном алгоритме чет-нечетной сортировки графических процессоров NVIDIA GeForce GTX 760 с использованием команд библиотеки OpenACC [6].

Анализируя результаты вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что чет-нечетная сортировка с использованием GPU более эффективна по сравнению с сортировкой на многоядерных CPU только при большом количестве сортируемых элементов. На рис.2 (б) видно, что величина достигнутого ускорения сортировки с применением GPU превышает ускорение, достигнутое на четырехядерных CPU только при количестве сортируемых элементов, превышающим 33000.

Важным достоинством применения GPU в алгоритме чет-нечетной сортировки является увеличение ускорения при увеличении количества

сортируемых элементов, т.е. эффективность применения GPU растет с увеличением размерности задач.

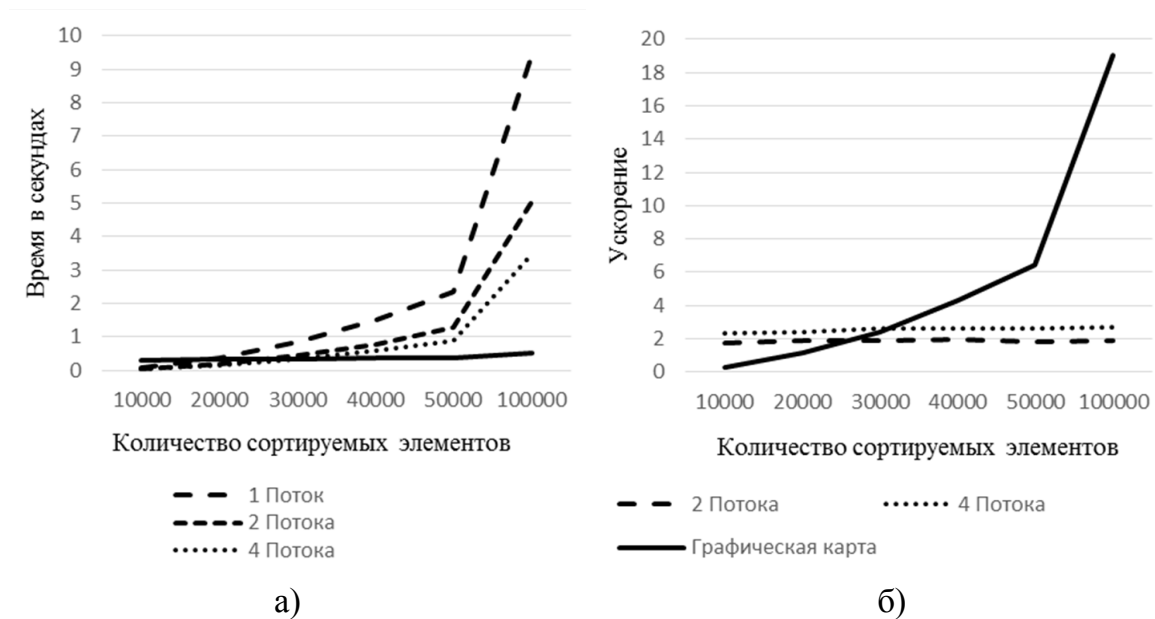


Рис. 2. Экспериментальные зависимости времени (а) и ускорения (б) выполнения чет-нечетной сортировки от количества сортируемых элементов и числа вычислительных потоков (для CPU и GPU)

Общей особенностью алгоритмов сортировки являются существенно большие затраты времени на обмен между процессорными ядрами и памятью по сравнению с временными затратами на собственно вычисления, которые просты и сводятся лишь к операциям сравнения и перестановки. Поэтому перспективным направлением развития параллельных методов сортировки является разработка и применение вычислительных систем, в которых операции сравнения и перестановки интегрированы в память, т.е. происходят непосредственно в памяти. Примером памяти, обладающей такими возможностями, является ассоциативная память, позволяющая осуществлять параллельный поиск. Многократная выборка из ассоциативной памяти слова с максимальным или минимальным значением ассоциативного признака с исключением его из последующего поиска, по существу, представляет собой упорядоченную выборку информации, т.е. сортировку.

Таким образом, применение ассоциативной памяти является перспективным направлением для создания высокопроизводительных систем — ассоциативных решающих полей - для параллельной сортировки данных.

Параллельные алгоритмы сортировки и многоядерные ВС являются важнейшими инструментами, обеспечивающими практическую возможность решения задач оперативного мониторинга объектов транс-

портной инфраструктуры. Для формирования отчетных форм мониторинга (гистограмм отступлений, статистических зависимостей и т.п.) требуется производить сортировку (упорядочение) сотен Гбайт результатов измерений в условиях ограниченного времени и ресурсов вычислительных систем. Важнейшей задачей таких систем мониторинга является идентификация и сортировка параметров сигналов источников измерительной информации в узлах объектов, недоступных для прямых измерений [7]. Для многомерных динамических систем, к числу которых относятся объекты транспортной инфраструктуры, эта задача характеризуется высокой вычислительной сложностью, коммуникационной трудоемкостью, требованиями контроля устойчивости решений [7,8]. Применение параллельных алгоритмов сортировки позволяет создавать эффективные системы мониторинга и контроля на основе высокопроизводительных ВС для бортового применения и мобильных приложений, например, для вагонов-лабораторий[7,8].

Библиографический список

1. Гергель, В. П. Теория и практика параллельных вычислений : учеб. пособие / В. П. Гергель. – М. : ИНТУИТ, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007. – 423 с.
2. Гергель, В. П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем : учеб. пособие / В. П. Гергель. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2010. – 421 с.
3. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск / Д. Кнут. – М. : Мир, 1981. – 800 с.
4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016661760. Программа для моделирования параллельных алгоритмов обработки графов и сортировки / В. Н. Ворожейкин, М. С. Кондратьев, В. А. Засов, К. К. Енковский, В. А. Иванова. – опубли. 20.10.2016.
5. Боресков, А. В. Основы работы с технологией CUDA / А. В. Боресков, А. А. Харламов. – М. : ДМК Пресс, 2011. – 231 с.
6. Farber, R. Parallel Programming with OpenACC / Rob Farber. – Morgan Kaufmann, 2016. – 326 p.
7. Засов, В. А. Алгоритмы разделения и восстановления сигналов на основе многоканальной обратной фильтрации / В. А. Засов, М. А. Тарабардин, Е. Н. Никоноров // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. – 2009. – № 2 (24). – С. 33–38.
8. Засов, В. А. Анализ устойчивости решения задачи разделения источников сигналов / В. А. Засов, Е. Н. Никоноров, М. А. Тарабардин // Вестник транспорта Поволжья. – 2010. – № 1 (21). – С. 27–35.

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ФРАКТАЛАХ¹

И. В. Бойков, П. В. Айкашев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: i.v.boykov@gmail.com, aikashev.pavel@mail.ru

Гиперсингулярные интегралы были введены в 1903 г. Ж. Адамаром при исследовании гиперболических уравнений [1] и в течение долгого времени не привлекали большого внимания. Положение начало меняться с середины прошлого века, когда появились работы, посвященные применению гиперсингулярных интегральных уравнений в аэродинамике и затем в электродинамике.

Гиперсингулярные интегральные уравнения нашли свое широкое применение во многих областях науки, особенно в физике и математике. Их применяют в аэродинамике, теории упругости, электродинамике, радиотехнике, ядерной физики и множестве других областей науки. В связи с этим начали активно развиваться приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на различных многообразиях.

В последнее время большое внимание стало уделяться анализу и синтезу фрактальных антенн. В связи с этим возникла необходимость в развитии численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

Эта работа посвящена исследованию применения сплайн-коллокационных методов (сплайны до n -го порядка) для решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

В работе построена сплайн-коллокационная вычислительная схема для решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах

В качестве области, на которой будем решать гиперсингулярное интегральное уравнение, возьмем фрактал, известный под названием «пыль Кантора». Этот фрактал строится следующим образом. Возьмем отрезок $C_0 = [0, 1]$. Удаляем из него открытый интервал $(1/3, 1/3)$ и получаем множество $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. На следующем и последующих этапах каждый оставшийся сегмент делим на три части и удаляем цен-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

тральный открытый участок, т.е. на втором этапе получаем множество $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Предельное множество C которое представляет собой пересечение множеств C_n , $n = 0, 1, \dots$ и представляет собой пыль Кантора. На рисунке 1 приведена графическая интерпретация процесса построения фрактала Кантора:

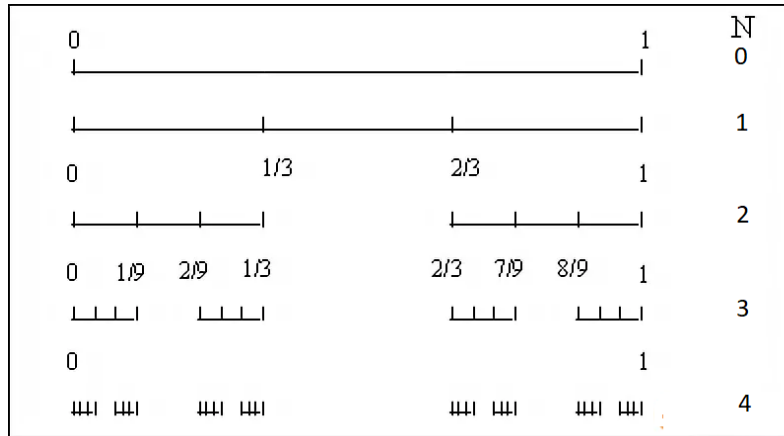


Рис. 1. Процесс построения фрактала Кантора.

Можно видеть, что на каждом n -м шаге построения пыли Кантора, длины сегментов, составляющих множество C_n , равны $(1/3)^n$.

Пусть n достаточно велико. Построим вычислительную схему приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{C_n} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad t \in C_n, \quad p = 2, 3, \dots \quad (1)$$

На каждом участке $\Delta_i = [t_i, t_{i+1}]$ предфрактала n -го порядка (n -ая итерация фрактала) приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде сплайна

$$x_N(t) = \begin{cases} x_{m,1}(t), & t \in \Delta_1, \\ \dots & \\ x_{m,N}(t), & t \in \Delta_N, \end{cases} \quad x_{m,k}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{k,i} \cdot t^i, \quad k = 1..N, \quad (2)$$

где m - порядок сплайна, k номер сегмента фрактала, на котором строится соответствующий сплайн, $N = 2^n$ - количество участков предфрактала Кантора n -го порядка.

В качестве узлов t_i возьмем точку, находящуюся в середине участка Δ_i . Для нахождения коэффициентов $\alpha_{k,i}$, подставим приближенное

решение (2) в уравнение (1). Получим следующую систему линейных уравнений

$$a(t_k) \sum_{i=1}^m \alpha_{k,i} \cdot t_k^i + b(t_k) \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_j} \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_{j,i} \cdot \tau^i d\tau}{(\tau - t_k)^p} = f(t_k), \quad k=1..N. \quad (3)$$

Решив эту систему, получим искомые коэффициенты $\alpha_{k,i}$.

Для проверки эффективности вычислительной схемы рассмотрим следующую модельную задачу

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{C_n} \frac{x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t), \quad t \in C_n,$$

$$a(t) = t, \quad b(t) = t^2, \quad x^*(t) = x + x^2 + x^3 - 1 + x^4 - 2x^5 /$$

Правую часть вычисляем в точках t_i подстановкой точного решения в уравнение.

На рисунках 2,3 приведены графики точного и приближенного решений на 1-м сегменте предфрактала Кантора 4 порядка (на других сегментах ситуация аналогична).

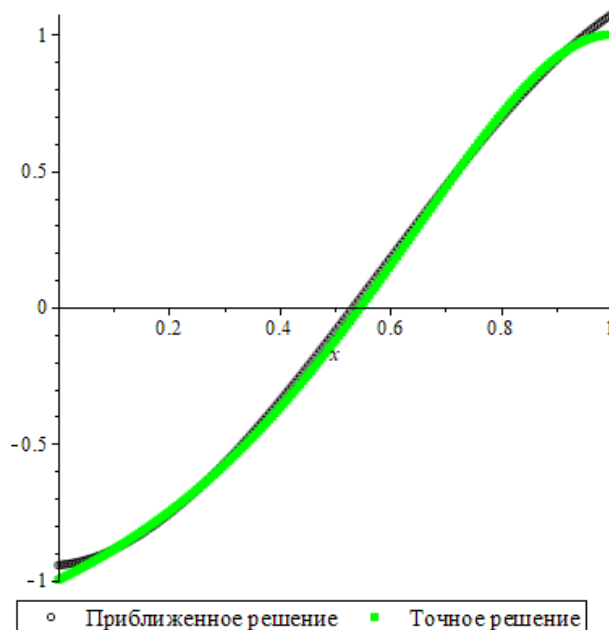


Рис. 2. Сравнение точного и приближенного решения (используется сплайн 2 порядка)

На рисунке 2 показаны результаты вычислений в случае, когда приближенное решение ищется в виде сплайна третьего порядка, на рисунке 3 — в виде пятого. Отметим, что представленные вычислительные

схемы имеют высокую точность – погрешность в 9 знаке при использовании сплайнов пятого порядка и во втором знаке при использовании сплайнов второго порядка.

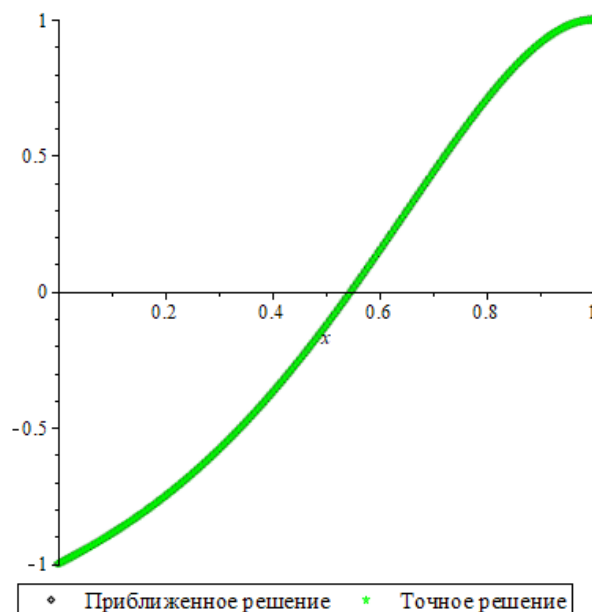


Рис. 3. Сравнение точного и приближенного решения
(используется сплайн 5 порядка)

Заключение

Разработан и протестирован численный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах (фрактал Кантора).

Библиографический список

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
2. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. – М. : Техносфера, 2006. – 488 с.
3. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К, 2001. – 508 с.
4. Бойков, И. В. Проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1. – С. 71–86.
5. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1996. – 188 с.

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ФРАКТАЛАХ¹

И. В. Бойков, П. В. Айкашев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: i.v.boykov@gmail.com, aikashev.pavel@mail.ru

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в аэродинамике, электродинамике, физике и с тем обстоятельством, что аналитические решения гиперсингулярных интегральных уравнений возможны лишь в исключительных случаях.

В последнее десятилетие резко возросла актуальность численного моделирования рассеяния электромагнитных волн с планарными микрополосковыми структурами. Это объясняется необходимостью разработки миниатюрных принимающих и излучающих антенн, функционирующих в широком диапазоне частот.

Одним из способов решения этой задачи является решение уравнения Максвелла с соответствующими граничными условиями. Уравнение Максвелла позволяет свести задачу возбуждения антенны к интегральному уравнению относительно функции распределения тока. Интегральное уравнение получается из уравнения Максвелла с учетом определенных граничных условий и некоторых дополнительных ограничений.

При различных граничных условиях может получиться два различных случая: интегральное уравнение первого рода [1] с особенностью в ядре и без особенности. Эти уравнения получили название уравнений Поклингтона.

Так как интегральные уравнения первого рода с интегрируемым ядром являются некорректными задачами, то для их численного решения необходимо проводить регуляризацию уравнения [2]. Чаще всего для регуляризации используется метод Тихонова [2], который даёт возможность получить хорошее приближение некоторых интегральных характеристик антенны, но при этом остальные характеристики можно найти только с некоторой погрешностью. Учитывая это, для получения характеристик антенн, более близких к характеристикам реальной антенны, лучше использовать интегральное уравнение с особенностью. Однако в

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

этом случае уравнение Поклингтона имеет особенность вида $(x - x_0)^{-2}$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. является гиперсингулярным интегральным уравнением, нахождение решения которого до недавнего времени было либо невозможно, либо достаточно затруднительно. Отметим здесь работу [3], в которой предложено и обосновано приближенное решение уравнения Поклингтона, интерпретируемого как гиперсингулярное интегральное уравнение.

Эта работа посвящена исследованию применения сплайн-коллокационного метода (до n -го порядка сплайна) для решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах.

В работе построена сплайн-коллокационная вычислительная схема для решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах

Приближенное решение двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах

В качестве области, на которой будем решать двумерное гиперсингулярное интегральное уравнение выберем фрактал, известный под названием «ковер Серпинского». Этот фрактал строится следующим образом.

Возьмем на плоскости OXY квадрат $\Omega = [0,1;0,1]$. Квадрат Ω делится на девять равных квадратов (длина стороны каждого равна $1/3$) прямыми, параллельными координатным осям, и затем удаляется центральный квадрат. Полученное множество обозначим через Ω_1 . Полученное множество Ω_1 будет состоять из восьми квадратов. Каждый из этих восьми квадратов делим на девять равных квадратов (с длиной стороны равной $1/9$) и выбросим в каждом квадрате центральную часть. Полученное множество обозначим через Ω_2 . Множество Ω_n при $n \rightarrow \infty$ и будет фракталом Серпинского. На рисунке 1 приведена графическая интерпретация процесса построения фрактала Серпинского:

Можно увидеть, что на каждом n -ом шаге построения ковра Серпинского длины сегментов, составляющих множество Ω_n , равны $(1/3)^n$.

Пусть n достаточно велико. Построим вычислительную схему приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t,s)x(t,s) + b(t,s) \iint_{\Omega_n} \frac{x(\tau_1, \tau_2)}{\left((\tau_1 - t)^2 + (\tau_2 - s)^2\right)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 = f(t,s), \quad (1)$$

где $t, s \in \Omega_n$, $p = 2, 4, \dots$

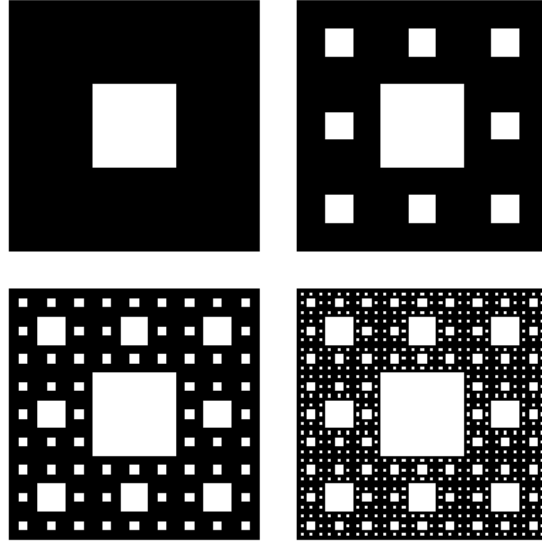


Рис. 1. Процесс построения фрактала Серпинского

Построим вычислительную схему для приближенного решения этого гиперсингулярного интегрального уравнения.

На каждом участке $\Delta_{i,j} = [t_i, t_{i+1}; s_j, s_{j+1}]$ предфрактала Серпинского будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде сплайна n -й степени

$$x_N(t,s) = \begin{cases} x_{m,1}(t,s), & t,s \in \Delta_1, \\ \dots & \\ x_{m,N}(t,s), & t,s \in \Delta_N, \end{cases} \quad x_{m,k}(t,s) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \alpha_{k,i,j} \cdot t^i \cdot s^j, \quad (2)$$

где m - порядок сплайна, k - номер квадрата фрактала, на котором строится соответствующий сплайн, $N = 8^n$ - количество квадратов предфрактала Серпинского n -го порядка.

В качестве узлов $(t_i, s_i), i = 1, \dots, N$, возьмем точку, находящуюся в середине квадрата Δ_i . В соответствии с методом коллокации приходим к системе уравнений

$$a(t_k, s_k) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \alpha_{k,i,j} \cdot t_k^i \cdot s_k^j + b(t_k, s_k) \sum_{l=1}^N \int_{\Delta_l} \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \alpha_{k,i,j} \cdot \tau_1^i \cdot \tau_2^j}{\left((\tau_1 - t_k)^2 + (\tau_2 - s_k)^2 \right)^{p/2}} = f(t_k, s_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

из решения которой находим коэффициенты $\alpha_{k,i,j}$.

Для проверки вычислительной схемы рассмотрим следующую модельную задачу

$$a(x, y)t(y, y) + b(x, y) \iint_{\Omega_n} \frac{t(\tau_1, \tau_2)}{\left((\tau_1 - x)^2 + (\tau_2 - x)^2\right)^2} d\tau_1 d\tau_2 = f(x, y),$$

$$a(x, y) = 1, \quad b(x, y) = 1, \quad t^*(x, y) = 2 + x + y + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3.$$

Правую часть вычисляем в точках t_i подстановкой точного решения в исходное уравнение.

Решение модельного примера показало высокую точность предложенного алгоритма: коэффициенты точного решения восстанавливаются с точностью до пятого знака.

Библиографический список

1. Вычислительные методы в электродинамике : пер. с англ. / под ред. Р. Митры. – М. : Мир, 1977.
2. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974.
3. Бойков, И. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – № 4. – С. 94–106.

МЕТОД ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ АКТОРА ПРИ АНАЛИЗЕ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

У. В. Александрова

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия,
E-mail: ulyanaaleksandrova94@mail.ru

В последнее время задача анализа различных сложных сетей, в частности исследование их структуры и определение ключевых элементов, становится актуальной и занимает особое место наряду с другими исследованиями сетей. В работе рассматривается метод оценки влияния актора при анализе сетей. Топология сетей, отражающих взаимодействие акторов, оказывает влияние на принятие решений, связанных с их анализом. Сетевая топология представляется в виде структуры графа, верши-

нами которого соответствуют конечные узлы сети (компьютеры) и коммуникационное оборудование (маршрутизаторы), а рёбрами — физические или информационные связи между вершинами. Различают несколько видов сетевых топологий: полносвязная (рис. 1а), неполносвязная (может применяться передача данных не напрямую между компьютерами, а через дополнительные узлы, рис. 1б), шина (рис. 1в), звезда (рис. 1г), кольцо (рис. 1д).

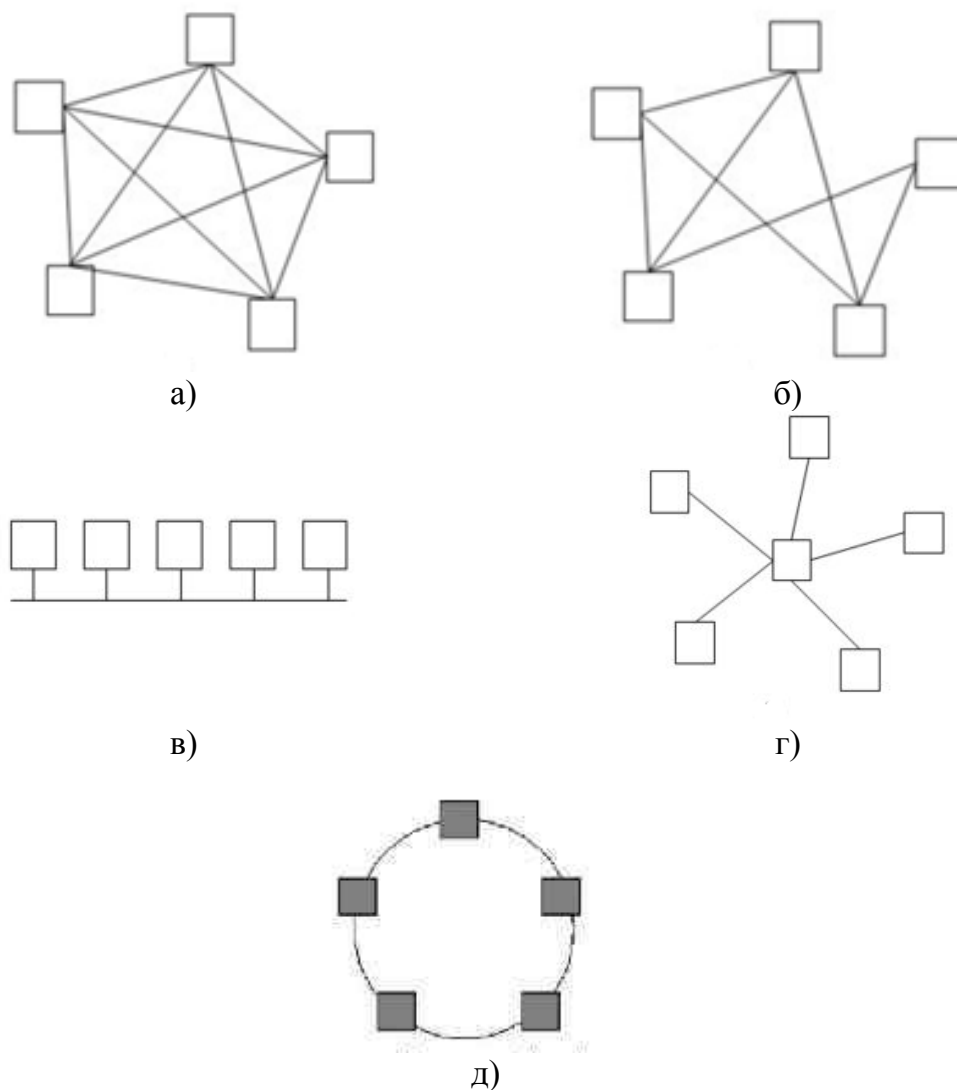


Рис. 1

Важной характеристикой сети является понятие центральности вершины. Множество определений центральности сводится к трем основным концепциям, причем все три достигают максимума для центра сети, имеющей топологию звезды или кольца.

1. Центральность вершины как отражение потенциальной активности. Концепция этого подхода определяет центральность по степени C_D вершины i и определяется как количество смежных с i вершин:

$$C_D(i) = \sum_{j=1}^n a(i, j), \quad (1)$$

где $a(i, j) = 1$ тогда и только тогда, когда вершины соединены ребром (п-количество вершин графа). Для графа без кратных ребер и петель $C_D(i)$ – это степень вершины i . В общем случае $C_D(i)$ можно определить в терминах матрицы смежности $A = (a_{ij})$ графа как сумму по строке. В терминах матриц выражение (1) можно представить в виде $C_D = A1$, где 1 – вектор, все элементы которого равны единице. В ориентированном графе разделяют входящую и исходящую C_D . В работе [1] предложен вариант определения, не зависящий от размеров сети, – это

относительная центральность по степени: $C'_D(i) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n-1}$.

2. Центральность вершины как возможность управления передачей. Данный подход основывается на частоте прохождения через нее кратчайших путей между всеми парами вершин. Предполагается, что соответствующий актер может влиять на группу акторов, поддерживая, придерживая или разрушая процесс передачи информации. Пусть g_{ij} – количество кратчайших путей от вершины графа i до вершины j , а $g_{ij}(k)$ – количество кратчайших путей от i до j , проходящих через k . Тогда мера центральности $C_B(k)$ для вершины k определяется следующим образом:

$$C_B(k) = \sum_i \sum_j \frac{g_{ij}(k)}{g_{ij}} \quad (i \neq j \neq k), \quad (2)$$

где $g_{ij}(k) / g_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда количество кратчайших путей между i и j равно нулю. Эта величина определяет долю кратчайших путей между вершинами i и j , проходящих через k , и ее можно интерпретировать как вероятность того, что случайно выбранный кратчайший путь между i и j пройдет через k . Мера (1) и (2) зависят от размеров сети, поэтому значения распределяются в большом диапазоне, что приводит к необходимости нормализации.

3. Центральность вершины как отражение ее независимости или эффективности. Эта концепция также базируется на идее контроля коммуникаций. Актер считается центральным до той степени, до которой он может избежать контроля со стороны других. На данный момент существует множество работ ([2],[3]), посвященных изучению данного подхо-

да, но будет рассмотрен простой и естественный вариант такой меры, где центральность измеряется путем суммирования кратчайших расстояний от вершины до всех остальных:

$$C_C(k)^{-1} = \sum_i d(i, k). \quad (3)$$

Эту меру можно считать мерой удаленности, так как определение вершины будет иметь максимальную центральность в том случае, если она наиболее удалена от остальных вершин.

Наряду с понятием центральность вершины важной характеристикой сети выступает понятие центральность сети (графа). В идеальном случае индексы центральности графа, независимо от того, на какой мере центральности вершины они основаны, должны обладать следующими свойствами [1]:

1) показывать, до какой степени центральность самой центральной вершины превосходит центральность остальных вершин;

2) выражаться отношением этого превосходства к максимально возможному значению для графа, содержащего рассматриваемое количество вершин. То есть, если $C_G(v_i)$ – центральность вершины v_i графа $G(V, E)$, а $C_G(v^*)$ – максимальное значение центральности вершины, то центральность графа определяется как:

$$C_G = \frac{\sum_{i=1}^n [C_G(v^*) - C_G(v_i)]}{\max \sum_{i=1}^n [C_G(v^*) - C_G(v_i)]}, \quad (4)$$

где $C_G = 0$ тогда и только тогда, когда центральности всех вершин равны; $C_G = 1$ тогда и только тогда, когда v^* полностью доминирует над всеми вершинами.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – множество вершин, а $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – множество ребер.

Предложен способ оценки степени влияния вершины (актора) на топологию графа (сети).

Определение 1. Граф G считается достаточно централизованным, если индекс центральности этого графа меньше заданного порогового значения: $C_G \leq q$, $0 < q < 1$.

Определение 2. Вершина v_i называется ключевой, если после ее удаления граф $G' = G \setminus \{v_i\}$ не является достаточно централизованным, т.е. $C_{G'} > q$.

В качестве показателя оценки влияния вершины-актора на топологию сети можно рассмотреть следующие характеристики: 1) определение достаточно централизованного графа; 2) определение ключевой вершины; 3) применение индекса $\beta(v_i)$, аналогичного по своей структуре индексу, предложенному в [4], и основанному на вычислении доли подграфов графа G , в которых вершина v_i является ключевой:

$$\beta(v_i) = \frac{b_i}{N(b_i)},$$

где b_i – число подграфов графа G , в которых вершина v_i является ключевой, а $N(b_i)$ – общее число подграфов графа G , содержащих вершину v_i .

Разработка алгоритмов определения меры центральности графов-сетей имеет большую вычислительную сложность порядка ($O(n^3)$), что усложняет их использование в больших реальных сетях. Для вычислений в работе рассматривалась центральность вершины по степени, как отражение потенциальной активности актора.

Библиографический список

1. Freeman, L. C. Centrality in social networks. Conceptual clarification / L. C. Freeman // Soc. Networks. – 1978/79. – Vol. 1. – P. 215–239.
2. Leavitt, H. J. Some effects of certain communication patterns on group performance / H. J. Leavitt // J. Abnorm. and Soc. Psychology. – 1951. – Vol. 46. – P. 38–50.
3. Bavelas, A. A mathematical model for group structure / A. Bavelas // Human Organization. – 1948. – Vol. 7. – P. 16–30.
4. Алескеров, Ф. Т. Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. – М. : Физматлит, 2017. – 344 с.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

ОБЗОР МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Р. В. Гарафутдинов

Пермский государственный национальный
исследовательский университет,
г. Пермь, Россия
E-mail: rvgarafutdinov@gmail.com

Финансовые рынки являются важнейшим механизмом современной рыночной экономики, обеспечивающим привлечение и перераспределение капиталов. Игроки рынка работают в условиях постоянного риска потери денежных средств, поэтому необходимость анализа и прогнозирования изменения котировок финансовых инструментов не вызывает сомнений. Существует концепция, выдвинутая Б. Мандельбротом, – гипотеза фрактального рынка (Fractal Markets Hypothesis, FMH) [7], согласно которой процесс ценообразования на рынках глобально детерминирован, зависим от «начальных условий», прошлые значения цен влияют на будущее, а финансовые инструменты обладают фрактальными свойствами. Если выявить эти свойства, становится возможным прогнозировать будущее поведение рынков с достаточно высокой точностью [8].

Процесс предсказания динамики финансовых рядов можно разделить на два этапа: предпрогнозный анализ и собственно построение прогнозов. Предварительный анализ, как правило, заключается в исследовании ряда и выявлении у него фрактальных свойств, оценивании фрактальных показателей. Затем эти показатели тем или иным способом используются в построении предсказывающих моделей.

Классификация наиболее широко применяемых методов фрактального анализа представлена в виде схемы на рис. 1.

Основной характеристикой структуры, оцениваемой в процессе фрактального анализа, является ее размерность. Это же справедливо для временных рядов, в том числе финансовых, о размерности которых говорят применительно к кривой их графика. Размерность тесно связана с персистентностью процесса, из-за чего ее часто вычисляют через показатель Херста H по формуле:

$$D = 2 - H. \quad (1)$$

Стоит отметить, что H в отличие от фрактальной размерности D является показателем, разработанным специально для анализа временных рядов [1].

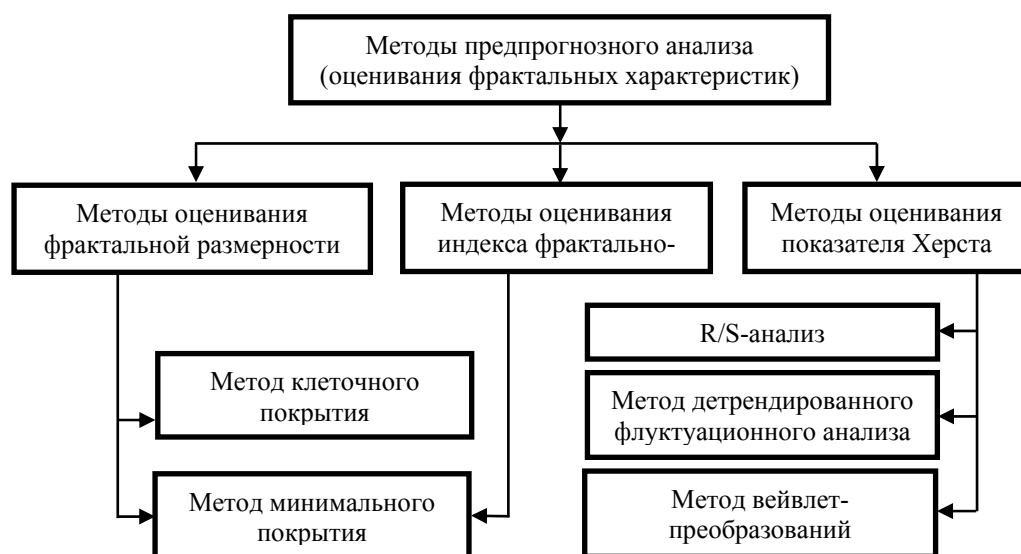


Рис. 1. Основные методы оценивания фрактальных характеристик финансовых временных рядов

Также ряд отечественных авторов среди фрактальных характеристик выделяют так называемый индекс фрактальности [2].

Непосредственное определение фрактальной размерности чаще всего проводят с помощью одного из двух методов – метода клеточного покрытия временного ряда либо метода минимального покрытия [6].

Метод клеточного покрытия

Клеточный метод является наиболее простым и распространенным способом определить размерность множества. Его идея состоит в том, что контуры изображения фигуры покрываются некоторым количеством квадратов стороной δ таким образом, чтобы число этих квадратов $N(\delta)$ оказалось минимально возможным [1]. Если уменьшать величину δ , то $N(\delta)$ будет расти по степенному закону: $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$, где D – размерность. Преобразуя это выражение, можно получить формулу клеточной размерности):

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \quad (2)$$

На практике при вычислении D плоскость с изображением (графиком изменения экономической переменной) покрывают сеткой и считают число квадратов, на которых лежит хотя бы одна точка кривой. Затем поступательно уменьшают δ и считают соответствующие значения $N(\delta)$.

После в двойном логарифмическом масштабе строится график функции $N(\delta)$, который аппроксимируется прямой с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда D определяется как тангенс угла наклона этой прямой или же коэффициент при независимой переменной уравнения линейной регрессии $\ln N(\delta) = D \ln \delta + b$, где b – свободный член.

Метод минимального покрытия и индекс фрактальности

Метод минимального покрытия, детально разработанный в трудах М. Дубовикова и Н. Старченко (например, [2]), позволяет характеризовать локальную динамику процесса. Для этого сужается репрезентативный масштаб до значений, при которых временной ряд не меняет своего поведения, и определяется локальная фрактальная размерность [6].

Алгоритм метода состоит из следующих шагов. Пусть процесс характеризуется некоторой функцией $y = f(t)$ на отрезке $[a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Отрезок $[a, b]$ разбивается на m сегментов равной длины $\delta = (b - a) / m = t_i - t_{i-1}$. Затем график функции покрывается прямоугольниками с основанием δ таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади. Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, равной разности максимального и минимального значения $f(t)$ на данном отрезке. Накопленная амплитуда на

всем отрезке вычисляется как $V_f(\delta) = \sum_{i=1}^m A_i(\delta)$, а площадь минимального

покрытия как $S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta$. Очевидно, что при сокращении длины отрезка δ точность вычисления площади покрытия будет увеличиваться. Имеет место степенная зависимость $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D}$ при $\delta \rightarrow 0$, где D – фрактальная размерность. Отсюда следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

где

$$\mu = D_\mu - 1 \quad (4)$$

Показатель D_μ называется размерностью минимального покрытия, а μ – индексом фрактальности. В работе [2] показано, что клеточное и минимальное покрытия совпадают (и, следовательно, совпадают вычисленные указанными способами размерности), однако для реальных фрактальных процессов они могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму. Показатель μ вычисляют аналогично клеточной размерности как взятый с отрицательным знаком коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln V_f(\delta) = -\mu \ln \delta + b$, где b – свободный член.

Стоит отметить, что при анализе данных котировок авторы метода использовали не одномерный ряд цен, а двумерный, на каждый момент времени (в частности, день) содержащий максимальную и минимальную

цены инструмента [2]. В расчете данная специфика учитывается таким образом, что верхняя граница амплитуды $A_i(\delta)$ определяется по вектору максимальных цен, а нижняя соответственно по вектору минимальных. Причем такой подход позволяет в качестве наименьшей длины отрезка брать единицу, то есть шаг, с которым дискретизирован временной ряд (например, один день), а размахом в этом случае будет разница максимального и минимального внутридневных курсов.

Размерность – величина, которая может быть определена для любой природной или модельной структуры, если ее можно изобразить графически. Для анализа финансовых временных рядов часто используют другую характеристику – показатель Херста. Ниже рассмотрены три наиболее часто используемых метода, позволяющих вычислять показатель Херста H и делать выводы о характере поведения фрактального процесса.

Метод нормированного размаха (R/S-анализ)

R/S-анализ предложен Г. Херстом в 50-х гг. XX в. и до сих пор является одним из наиболее популярных подходов в исследованиях фрактальных рядов самой различной природы. Можно сказать, что для вычисления H он является «родным» (native) методом, и некоторые авторы, говоря о показателе Херста, подразумевают его оценивание именно посредством метода нормированного размаха. Идея R/S-анализа состоит в том, что существует степенная зависимость вида

$$R/S \sim c \cdot \delta^H, \quad (5)$$

где R – размах вариации (под вариацией показателя понимается накопленное отклонение его от среднего значения), S – стандартное отклонение показателя, δ – количество значений показателя в группе, c – некоторая константа. Вычисляемая статистика R/S является размахом, нормированным стандартным отклонением, что и дало название методу. В [3] подробно описан его алгоритм.

Пусть дан временной ряд $x(t)$ длиной $n + 1$. Прежде всего его приводят к так называемым «логарифмическим прибылям» $y(t)$:

$$y(t) = \ln \frac{x_t}{x_{t-1}}. \quad (6)$$

Далее работают с преобразованными данными. Ряд $y(t)$ длиной n делится на m групп значений по δ элементов. Для каждой i -ой группы ($i = 1, 2, \dots, m$) рассчитываются:

– среднее значение $\bar{y}_i$;

– накопленные отклонения от среднего $Y_t = \sum_{t=1}^{\delta} (y_t - \bar{y}_i)$, образуя

m рядов $Y_i(t)$;

– размах $R_i = \max(Y_i(t)) - \min(Y_i(t))$;

– стандартное отклонение $S_i = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=1}^{\delta} (y_t - \bar{y}_i)^2}$;

– R/S -статистика (нормированный размах) по формуле R_i / S_i ;

После полученные m величин R/S усредняются, и получается двойка элементов $\langle R/S(\delta), \delta \rangle$. Такие вычисления проводят для различных значений δ . Показатель Херста H определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln R/S(\delta) = H \ln \delta + c$, где c – свободный член.

Метод детрендированного флуктуационного анализа (ДФА)

Метод ДФА в настоящее время является основным методом определения самоподобия для нестационарных временных рядов [5]. Алгоритм его состоит из следующих шагов.

Пусть имеется временной ряд $x(t)$. Строится кумулятивный ряд $y(t)$, каждый член которого вычисляется по формуле $y_i = \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x})$, где $\bar{x}$ – среднее значение $x(t)$. Далее ряд $y(t)$ разбивается на N сегментов длиной δ . Для каждого сегмента вычисляется флуктуационная функция

$$F(\delta) = \sqrt{\frac{1}{\delta} \sum_{t=1}^{\delta} (y(t) - Y_m(t))^2}, \quad (7)$$

где $Y_m(t)$ – локальный m -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента (то есть значение функции тренда в точке t). Затем N полученных функций $F(\delta)$ усредняются. Такие вычисления повторяются для различных значений δ , результатом является набор двоек $\langle \overline{F(\delta)}, \delta \rangle$. Для самоподобных процессов имеет место степенная зависимость:

$$\overline{F(\delta)} \sim \delta^H. \quad (8)$$

Соответственно H определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln \overline{F(\delta)} = H \ln \delta + b$, где b – свободный член.

Метод вейвлет-преобразований

Вейвлет – это математическая функция, позволяющая анализировать различные частотные компоненты данных. Метод оценивания показателя Херста через вейвлеты является наиболее сложным из рассмотренных. Он подробно описан в работах Л. Кириченко, например, [4]. Данный метод основан на свойствах детализирующих вейвлет-коэффициентов, полученных на разных уровнях декомпозиции исследуемого временного ряда. Пусть случайный процесс $x(t)$ является самопо-

добным, тогда детализирующие коэффициенты на каждом уровне разложения также обладают свойством самоподобия:

$$Law\{\det(j, k)\} = Law\{2^{j(H+1/2)} \det(0, k)\}, \quad (9)$$

где $\det(j, k)$ – k -ый детализирующий коэффициент уровня разложения j , $k = 1, 2, \dots, N_j$, N_j – количество вейвлет-коэффициентов на уровне разложения j .

Это свойство вытекает из свойств вейвлет-базиса, полученного путем масштабирования материнских вейвлетов.

Если для самоподобного процесса $x(t)$ существуют моменты 2-го порядка, то для вейвлет-коэффициентов, полученных в результате декомпозиции данного процесса, выполняется равенство:

$$M |\det(j, k)|^2 = M |\det(0, k)|^2 2^{-j(2H+1)}. \quad (10)$$

Величина вейвлет-энергии $M|\det(j, k)|^2$ на масштабном уровне j вычисляется следующим образом:

$$E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \det^2(j, k), \quad (11)$$

Из (9)–(10) следует, что изменение ее значений подчиняется степенному закону:

$$E_j \sim 2^{(2H+1)j} \quad (12)$$

Традиционно H можно вычислить через коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\log_2 E_j = (2H+1)j + b$, где b – свободный член.

В работе [6] показано, что оба метода оценивания фрактальной размерности графиков финансовых временных рядов (клеточный и минимального покрытия) позволяют вычислять размерность с приемлемой точностью. В то же время преимуществом показателя D_μ является пониженное требование к длине анализируемого ряда, что может быть полезно при недостатке эмпирических данных.

Что касается методов оценивания показателя Херста H , в работе [5] показано, что для стационарных временных рядов пригодны все три из них, однако на рядах небольшой длины наиболее точные результаты дают методы ДФА и вейвлет-преобразований. Для нестационарных рядов (каковыми являются практически все финансовые ряды) R/S-анализ неприменим, однако данное ограничение обходится предварительным преобразованием исходного ряда (например, к логарифмическим доходностям). Два других метода обладают достаточной точностью. В то же время использование аппарата вейвлет-преобразований предъявляет повышенные требования к уровню подготовки пользователя, для него необходим опыт работы и специализированное программное обеспечение.

Библиографический список

1. Балагула, Ю. М. Фрактальные характеристики длинной памяти в ценах на электроэнергию / Ю. М. Балагула // Финансы и бизнес. – 2017. – № 1. – С. 104–113.
2. Дубовиков, М. М. Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов / М. М. Дубовиков, Н. В. Старченко // Успехи физических наук. – 2011. – № 181 (7). – С. 779–786.
3. Зиненко А. В. R/S анализ на фондовом рынке / А. В. Зиненко // Бизнес-информатика. – 2012. – № 3 (21). – С. 24–30.
4. Кириченко, Л. О. Вейвлет-оценивание показателя Херста по временным рядам со значительными циклическими компонентами с применением пакетного вейвлет-преобразования / Л. О. Кириченко // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2012. – № 158. – С. 4–12.
5. Кириченко Л. О. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов / Л. О. Кириченко, Л. Э. Чалая // Information Technologies & Knowledge. International Journal. – 2014. – Vol. 8, № 1. – С. 22–28.
6. Кривоносова, Е. К. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей / Е. К. Кривоносова // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6.
7. Мандельброт, Б. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах / Б. Мандельброт. – М. : Вильямс, 2006. – 408 с.
8. Прудский, М. В. Фрактальный анализ финансовых рынков / М. В. Прудский // Информационные системы и математические методы в экономике : сб. науч. тр. / под общ. ред. М. В. Радионовой ; Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Вып. 5. – Пермь, 2012. – С. 109–120.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИЗИСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ¹

И. В. Коноплева, А. Р. Сибирева*

Ульяновский институт гражданской авиации
имени главного маршала авиации Б. П. Бугаева,
г. Ульяновск, Россия

*Ульяновский государственный педагогический университет
имени И. Н. Ульянова,
г. Ульяновск, Россия

E-mail: irinakonopleva2014@yandex.ru, anna.sibireva@bk.ru

Большой интерес при моделировании социально-экономических процессов представляют системы дифференциальных уравнений. Д. Да-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-06-00150.

леу и Д. Кендаллу принадлежит математическая модель (ДК – модель) процесса распространения слухов, который используется для контроля в социальных сетях, запугивания населения и информационной войны. Она представляет собой систему 3-х ОДУ. В настоящее время разрабатывается и исследуется также ее модификация – модель информационного противоборства, представляющая собой систему 8 обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными функциями в таких задачах являются численности групп, участвующих в противоборстве сторон [1, 2]. В [3] построена синергетическая модель устойчивости средней фирмы, описываемая системой дифференциальных уравнений Шаповалова, аналогичная системе Лоренца [4]. Она описывает эволюцию величин кредита x , капитала y и численности сотрудников z , ее саморегуляция осуществляется управляющими (бифуркационными) параметрами.

Актуальная задача сегодняшнего дня – математическое моделирование педагогических процессов. Это необходимо для анализа и разработки новых подходов в управлении, а также для изучения участвующей в нем личности. Математические модели функционирования педагогических систем (ПС) рассматриваются в работах [5–11]. В [12] изучена модель самоуправления подростка. Представлены последовательные этапы математического моделирования: от согласования терминологии психологии, педагогики с языком математического моделирования, выявления базовых параметров, характеризующих процессы, до построения математической модели, качественного анализа ее поведения, экспериментального нахождения коэффициентов и согласования экспериментальных и теоретических результатов. Структура информационных потоков произвольной педагогической системы в период кризиса описана в [13]. Здесь отмечается сходство эмпирически наблюдаемых свойств системы в кризис со свойствами странного аттрактора Лоренца, что определяет выбор математического аппарата при построении соответствующей нелинейной системы дифференциальных уравнений. Исследование нелинейных моделей позволяет определить области устойчивости, точки бифуркации (предсказать кризисы), описать возможные траектории развития системы.

В кризисный период под влиянием различных факторов происходит становление новой программы стабильного функционирования (гомеостаза) ПС. С точки зрения внутреннего наблюдателя, кризис – это неустойчивый процесс с многочисленными точками бифуркации, результат которого – возможное изменение траектории развития системы. При этом малые воздействия могут серьезно изменить ее поведение.

Поведение ПС определяется воздействием внешних и внутренних сред системы [10, 11], деятельностью системы по построению целей новой программы – $z(t)$, $y(t)$ – деятельностью по созданию организационной структуры новой программы, $x(t)$ – деятельностью по выбору фак-

тического содержания новой программы. Параметры, характеризующие внешнее и внутреннее влияние различных сред на систему, будем считать постоянными, так как они изменяются медленнее, чем создается новая целевая программа функционирования.

Пусть $z(t)$ – целеполагание. Поведение системы в период кризиса опишем системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -kx + ay, \\ \dot{y} = bx + cy - dxz, \\ \dot{z} = -mz + lx \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$.

Скорость проектирования фактического содержания новой программы $\frac{dx}{dt}$ зависит от способности системы к деятельности такого вида $-kx$, от занятости системы деятельностью y , от влияния сред ($k, a = \text{const}$). Скорость формирования новой организационной структуры $\frac{dy}{dt}$ зависит от способности системы к соответствующей деятельности y , от влияния сред ($b, c, d = \text{const}$), от занятости системы планово-прогностической деятельностью x , от взаимодействия деятельности по созданию новой управленческой структуры y с процессом целеполагания z . Скорость построения «дерева целей» $\frac{dz}{dt}$ определяется способностью системы к целеполаганию z , влиянием сред $m, l = \text{const}$, взаимодействием планово-прогностической деятельности x и деятельности по созданию управленческой структуры y . Устойчивому функционированию педагогической системы соответствует выход фазовой траектории системы (1) на устойчивое предельное множество – неподвижную точку или предельный цикл.

Для оценки параметров системы a, b, k, d, m, l и начальных данных x_0, y_0, z_0 проводились эксперименты в соответствии с методикой «Оценки самоорганизации деятельности (ОСД)» Мандриковой Е. Ю, описанной в [14]. ОСД позволяет описывать личностную характеристику – структурирование времени при самоорганизации личности. Соотнесем параметры системы уравнений (1) с параметрами, измеряемыми с помощью методики ОСД: планомерность a , целеустремленность m , настойчивость c , фиксацию на структурировании деятельности b , самоорганизацию при помощи внешних средств d , ориентацию на настоящее k, l . Для измерения этих величин в [15] предложены тесты, результат тестирования оценивается в баллах.

Особые точки системы (1) определяются из условий $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$. При любых $a, b, c, k, d, m, l > 0$ существуют три особые точки

$$O_0(0, 0, 0), O_{1,2} \left(\pm \sqrt{\frac{m(ab + ck)}{dlk}}, \pm \sqrt{\frac{mk(ab + ck)}{a^2 dl}}, \frac{ab + ck}{ad} \right).$$

Точке O_0 соответствует матрица линеаризации

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k & a & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Соответствующее характеристическое уравнение $\det(A_0 - \lambda E) = 0$ имеет три корня, два из которых отрицательны, один положителен при любых положительных значениях параметров:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -m < 0, \lambda_1 = \frac{c-k}{2} - \sqrt{\frac{(c-k)^2}{4} + (ck + ab)} < 0, \\ \lambda_2 &= \frac{c-k}{2} + \sqrt{\frac{(c-k)^2}{4} + (ck + ab)} > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Это означает, что точка O_0 – седло-узел с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями. Существование у системы (1) точки «седло-узел» означает, что есть возможность образования в ней хаотического аттрактора (аттрактора Лоренца).

Используя методы [16–19], определим две гомоклинические траектории седло-узел, разрушение которых является бифуркацией гомоклинического каскада. Преобразование $w = -kx + ay$ приводит (1) к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{y} = (c-k)w + ((ab + ck) - adz)x, \\ \dot{z} = \frac{kl}{a}x^2 + \frac{l}{a}wx - mz. \end{cases}$$

После подстановок $w = ux$ и $v = x^2$ получаем систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 2uv, \\ \frac{du}{dt} = -(u - u_1)(u - u_2) - adz, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{lv(k + u)}{a} - mz. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет две особые точки $M_1(u_1, 0, 0)$ и $M_2(u_2, 0, 0)$, где корни u_1 и u_2 уравнения $u^2 + (k - c)u - (ab + ck) = 0$ совпадают с корнями λ_1 и λ_2 характеристического уравнения линеаризации $\det(A_0 - \lambda E) = 0$ (2). Исключая в (3) время t , переходим к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = \frac{2uv}{-(u - u_1)(u - u_2) - adz}, \\ \frac{dz}{du} = \frac{lv(k + u) / a - mz}{-(u - u_1)(u - u_2) - adz}. \end{cases} \quad (4)$$

Раскладывая числители и знаменатели соответствующих дробей, стоящих в правой части уравнений (4) в ряд Тейлора по степеням сначала $(u - u_1)$, затем $(u - u_2)$, и переходя к пределу при $u \rightarrow u_1$ ($u \rightarrow u_2$), получаем выражения для $v'(u_1)$, $v'(u_2)$, $z'(u_1)$, $z'(u_2)$. Ввиду громоздкости мы не приводим здесь подробно эти расчеты.

Для дальнейших вычислений использовались значения управляющих параметров (коэффициентов системы), полученные как средневзвешенные значения методики [15]:

$$a = 18,2; \quad b = 18,8; \quad c = 20,88; \quad k = 8,4; \quad d = 9,75; \quad m = 32,7; \quad l = 8,4.$$

При заданных значениях параметров и достаточно малого $\varepsilon = 10^{-6}$ интегрируем систему (4) методом Рунге-Кутты 7-8 порядка на отрезках $[0, u_2 - \varepsilon]$ и $[u_1 + \varepsilon, 0]$ с начальными условиями на правом и левом концах отрезков $v(u_2 - \varepsilon) = -v'(u_2)\varepsilon$, $z(u_2 - \varepsilon) = -z'(u_2)\varepsilon$ и $v(u_1 + \varepsilon) = (\gamma\varepsilon)^{-2u_1/m}$, $\gamma \in (0, 1)$, $z(u_1 + \varepsilon) = -z'(u_1)\varepsilon$. Для расчетов использовались значения $\gamma = 0,6; 0,65, 0,69$.

Рисунок 1 согласуется с результатами экспериментов по изучению системы «поиск решения задачи», «внедрение инноваций в общеобразовательных учреждениях, которые исследуются как кризисные системы. Различные экспериментальные кривые, полученные в [14], имеют по 6 четко выраженных максимумов, отвечающих 6-ти горизонтальным информационным потокам в период кризиса: по два информационных потока на стратегическом, тактическом, операционном уровнях деятельности. Первый поток в каждой паре отвечает за деятельность по выбору фактического содержания новой целевой программы, второй – за становление организационной структуры инновации [13]. Подобные «всплески» наблюдаются и на рисунке 1. Крупный «всплеск» образован 5-6 более мелкими колебаниями, что соответствует делению каждого горизонтального потока на 6 шагов, на каждом из которых в период кризиса система совершает определенный выбор траектории своего дальнейшего развития.

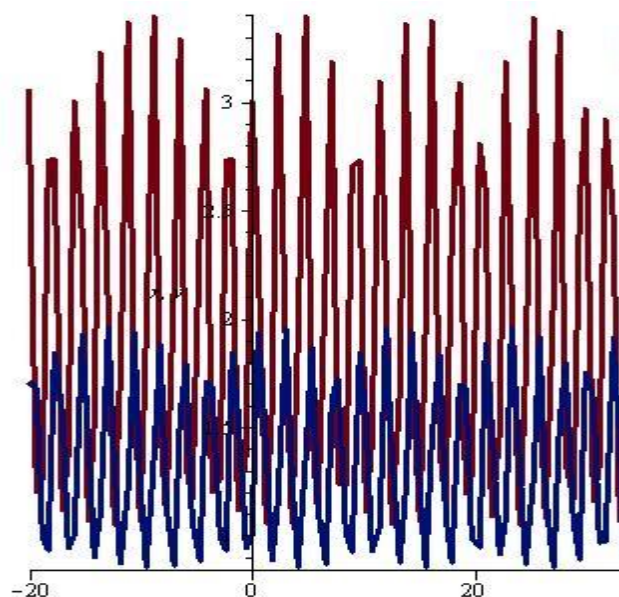


Рис. 1. Графики $v(u)$ и $z(u)$

По условиям стыковки $v(0+)$ и $z(0+)$ должны отличаться от значений $v(0-)$ и $z(0-)$ на величины порядка $O(\epsilon)$. Для полученных решений условия $v(0+) = v(0-)$ и $z(0+) = z(0-)$ выполняются при малом ϵ и экспериментально подобранных значениях константы $\gamma \in (0,1)$. Таким образом, существование гетероклинической кривой точек $M_1(u_1, 0, 0)$ и $M_2(u_2, 0, 0)$ системы (4), и гомоклинической траектории седло-узел $O_0(0, 0, 0)$ исходной системы (1) установлено численными экспериментами. Существует вторая, симметричная траектория точки O_0 , что означает наличие гомоклинической бабочки (аттрактора Лоренца).

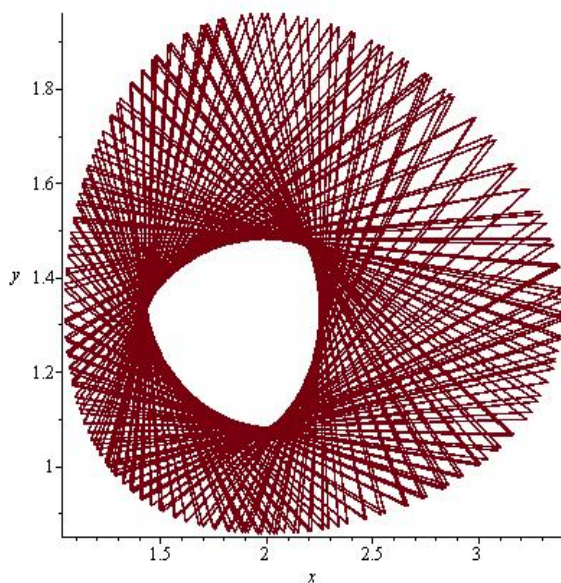


Рис. 2. Фазовые траектории $v(u)$ и $z(u)$.

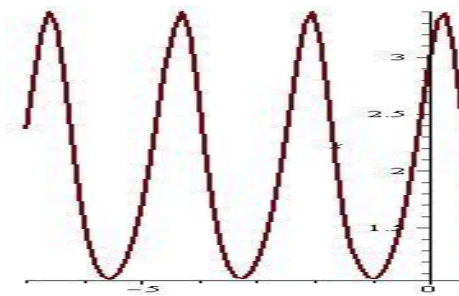


Рис. 3. График $v(u)$ на отрезке $[u_1 + \varepsilon, 0]$

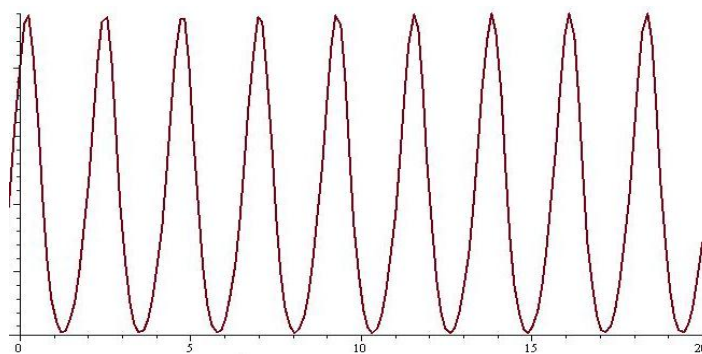


Рис. 4. График $v(u)$ на отрезке $[0, u_2 - \varepsilon]$

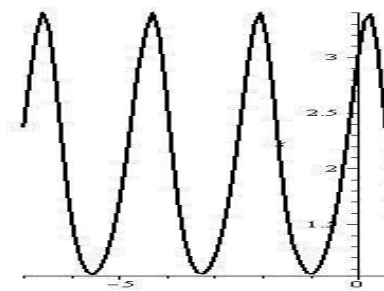


Рис. 5. График $z(u)$ на отрезке $[u_1 + \varepsilon, 0]$

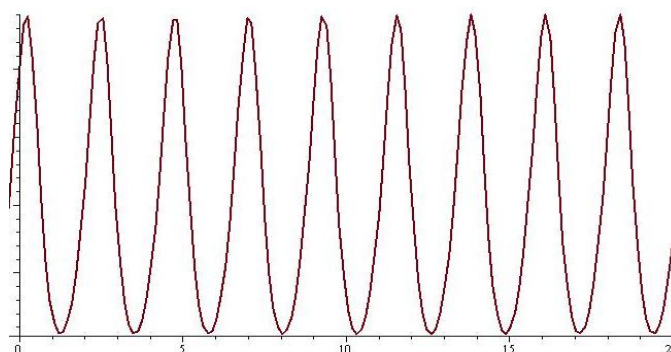


Рис. 6. График $z(u)$ на отрезке $[0, u_2 - \varepsilon]$

При расчетных значениях параметров след матрицы Якоби (дивергенция векторного поля) отрицательна:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-kx + ay) + \frac{\partial}{\partial y}(bx + cy - dxz) + \frac{\partial}{\partial z}(-mz + lxy) = -k + c - m = -20,22 < 0.$$

При изменении значений управляющих параметров, характеризующих норму для респондентов, так, что $-k + c - m \geq 0$, а также при нарушении условий стыковки возникают бифуркации гомоклинического контура.

Возможен другой подход к исследованию задачи, описанный в [20]. При заданных начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ метод последовательных приближений с использованием обобщенной схемы Горнера позволяет построить приближенное решение в виде функции, зависящей от x_0, y_0, z_0 и t , с любой степенью точности. В дальнейшем предполагается применить этот метод системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = -k(x_r - x) + ay, \\ \dot{y} = bx + cy - dxz + ey^2, \\ \dot{z} = -mz + l(x_r - x)y, \end{cases}$$

в которой рассматривается зависимость от остроты противоречий $x_r - x$ ($x_r = const$ характеризует реальную картину) и консерватизма (сопротивления) управленческих структур ey^2 . Чем больше разность $x_r - x$ между реальной и идеальной картиной, тем сильнее противоречия в системе. Очевидно, что $x_r - x$ не должно превышать некоторой пороговой величины. Результаты вычислений следует сопровождать исследованием вопроса о существовании множества седловых предельных циклов.

Библиографический список

1. Михайлов, А. П. О свойствах простейшей математической модели распространения информационной угрозы / А. П. Михайлов, Н. В. Ключов // Математическое моделирование социальных процессов. – М. : МАКС Пресс, 2002. – С. 115–123.
2. Михайлов, А. П. Развитие модели распространения информации / А. П. Михайлов, А. П. Петров, Н. А. Маревцева, И. В. Третьякова // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 3. – С. 65–74.
3. Шаповалов, В. И. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы. Синергетика и проблемы теории управления / В. И. Шаповалов, В. Ф. Каблов, В. А. Башмаков, В. Е. Авакумов. – М. : Физматлит, 2004. – С. 454–464.
4. Магницкий, Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. – М. : УРСС, 2004. – 320 с.
5. Милованов, В. П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация / В. П. Милованов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 263 с.
6. Жегалов, В. И. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Жегалов, С. Н. Киясов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2007. – 179 с.
7. Буданов, В. Г. Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании / В. Г. Буданов. – М. : УРСС: Изд-во ЛКИ, 2008. – 230 с.
8. Гуц, А. К. Математические методы в социологии / А. К. Гуц, Ю. В. Фролова. – М. : Либриком, 2012. – 210 с.
9. Шикин, Е. В. Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М. : Дело, 2002. – 440 с.
10. Сибирев, В. В. Влияние сред на информационные потоки инновации в педагогических системах / В. В. Сибирев, А. Р. Сибирева // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – 2013. – № 4. – С. 197–209.
11. Сибирева, А. Р. Математические модели, описывающие влияние сред на процесс внедрения инновации в педагогических системах / А. Р. Сибирева // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : сб. науч. тр. Междунар. техн. конф. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – С. 272–277.
12. Сибирева, А. Р. Диагностика и прогноз самоуправления подростка / А. Р. Сибирева, В. П. Гумирова // Поволжский педагогический сборник. – 2018. – № 3 (25). – С. 88–95.

13. Сибирев, В. В. Структурная организация кризиса в педагогических системах / В. В. Сибирев, А. Р. Сибирева // Казанский педагогический журнал. – 2016. – Т. 2, № 2. – С. 1–7.
14. Сибирев, В. В. Исследование причин прерывания поиска решения задачи / В. В. Сибирев // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. – 2018. – № 1. – С. 157–167.
15. Мандрикова, Е. Ю. Разработка опросника самоорганизации деятельности / Е. Ю. Мандрикова // Психологическая диагностика. – 2010. – № 2. – С. 59–83.
16. Калошин, Д. А. О построении бифуркационной поверхности существования гетероклинических контуров седло-фокусов в системе Лоренца / Д. А. Калошин // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 12. – С. 1705–1707.
17. Калошин, Д. А. О некоторых особенностях перехода к хаосу в системе уравнений Лоренца / Д. А. Калошин, Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров // Нелинейная динамика и управление / под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина. – Вып. 4. – М., 2003. – С. 99–106.
18. Магницкий, Н. А. О нахождении гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1511–1520.
19. Гурина, Т. А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы / Т. А. Гурина, И. А. Дорофеев // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 63–68.
20. Афанасьев, А. П. Схема Горнера для исследования решений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью / А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба // Бизнес-информатика. – 2017. – № 2 (40). – С. 33–39.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОЦЕДУРЫ БАЛЛОННОЙ ДИЛАТАЦИИ ИЗВЛЕЧЕННЫХ СОСУДОВ

А. В. Рудин, А. С. Руськин, А. В. Задера, А. С. Евдокимов, О. К. Зенин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: physics@pnzgu.ru

В современной медицине успешно развиваются технологии проведения операций по сохранению органов. Такие операции позволяют восстанавливать пораженный стенозом участок. Одним из таких эффективных малоинвазивных методов лечения является метод баллонной дила-

тации извлеченных кровеносных сосудов [1]. При баллонной дилатации происходит расширение сосуда, которое сопровождается возникновением эффекта акустической эмиссии в процессе создания в сосуде механических напряжений. Регистрация сигналов акустической эмиссии в процессе баллонной дилатации сосуда и выявление некоторых характерных особенностей этих сигналов позволит осуществлять объективный контроль проводимой процедуры.

Биомеханические испытания сосудов, в условиях имитирующих баллонную дилатацию (опыты проводились на извлеченном материале) выявили возникновение сигналов акустической эмиссии, рисунок 1, возникающей в режиме баллонной дилатации сосуда, от времени [2]. На графике четко виден сигнал акустической эмиссии. Существенно, что этот сигнал предшествует моменту разрыва сосуда. Данная закономерность свидетельствует о возможности, разработки метода контроля проводимой процедуры на основе акустико-эмиссионных методов.

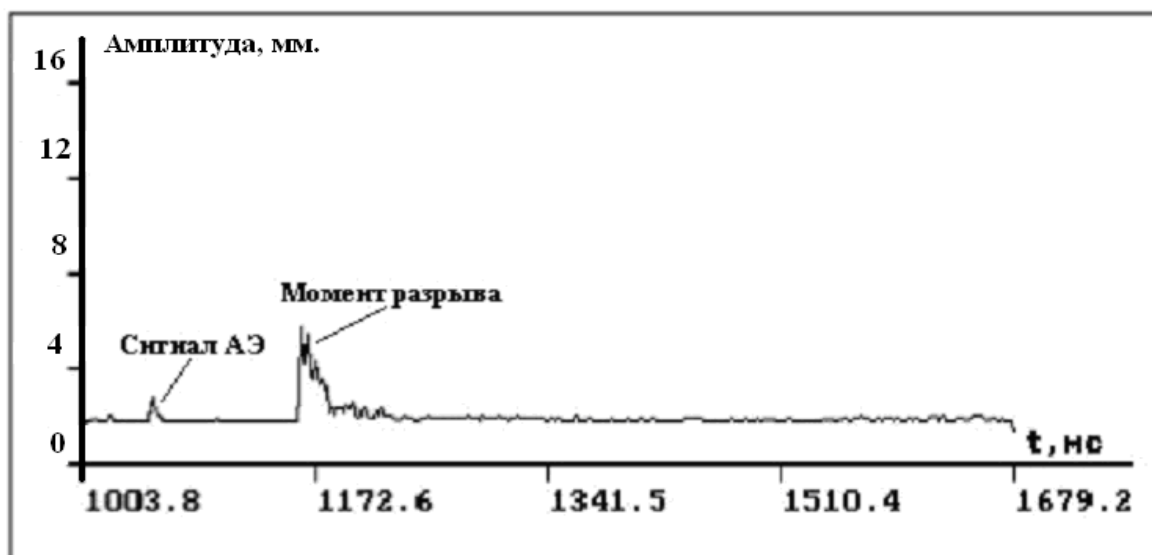


Рис. 1. График зависимости амплитуды акустических сигналов

Метод акустико-эмиссионного контроля основан, как правило, на регистрации и последующей обработке параметров акустических сигналов ультразвукового диапазона, сопровождающих локальную перестройку структуры материала, зарождение и развитие микро- и макродефектов [3, 4].

Наиболее часто используемыми параметрами акустической эмиссии, применяемыми для изучения процессов пластической деформации и разрушения материалов [5], являются:

- суммарный счет акустической эмиссии N , т.е. число зарегистрированных

- превышений сигналами акустической эмиссии установленного порогового уровня за интервал времени наблюдения;

– скорость счета суммарной акустической эмиссии $\dot{N}$, т.е. число импульсов, в сигнале акустической эмиссии превышающих пороговый уровень, регистрируемых в единицу времени;

– амплитуда акустической эмиссии A – максимальное значение уровня сигнала акустической эмиссии в течение выбранного интервала времени.

На рисунке 2 представлены типичные зависимости суммарного числа импульсов N и скорости счета $\dot{N}$ импульсов акустической эмиссии от величины относительной деформации исследуемого образца в режиме одноосной деформации [5].

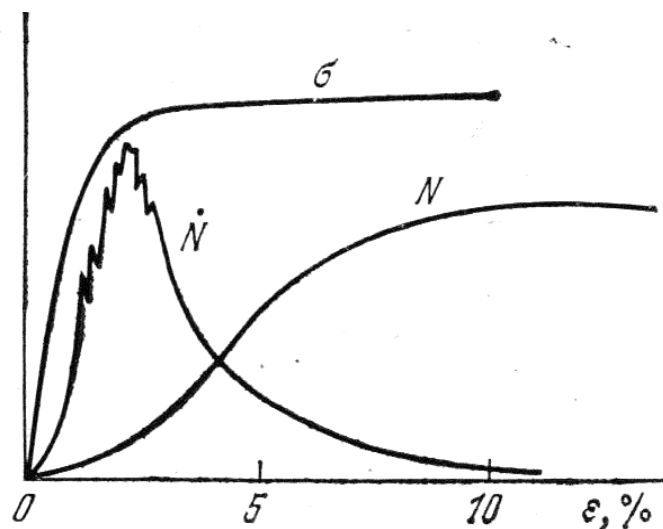


Рис. 2. Закономерности акустической эмиссии при пластической деформации образца (σ – механическое напряжение в образце; ϵ – относительная деформация образца)

Из приведенных зависимостей следует, что наибольшая интенсивность сигнала акустической эмиссии наблюдается на стадии упругой деформации испытываемого образца, при переходе от упругой к пластической деформации (этому моменту соответствует максимальная скорость счета суммарной акустической эмиссии $\dot{N}$). Этот факт, очевидно, может быть использован при создании методик, диагностирующих критическое состояние образца предшествующее его разрушению. Такие методики могут быть применены и в медицине.

Для успешного использования метода акустической эмиссии для контроля режима баллонной дилатации необходимо выявить зависимости между характеристиками напряженно-деформированного состояния исследуемых кровеносных сосудов и параметрами излучаемых ими упругих волн [5].

Выявленные закономерности представляют определенный интерес, так как могут служить основой алгоритмов обработки и анализа регистрируемых сигналов акустической эмиссии, возникающих при баллонной дилатации. Поставленная задача была решена с помощью специально разработанной экспериментальной установки (стенда), представленной на рисунке 3.

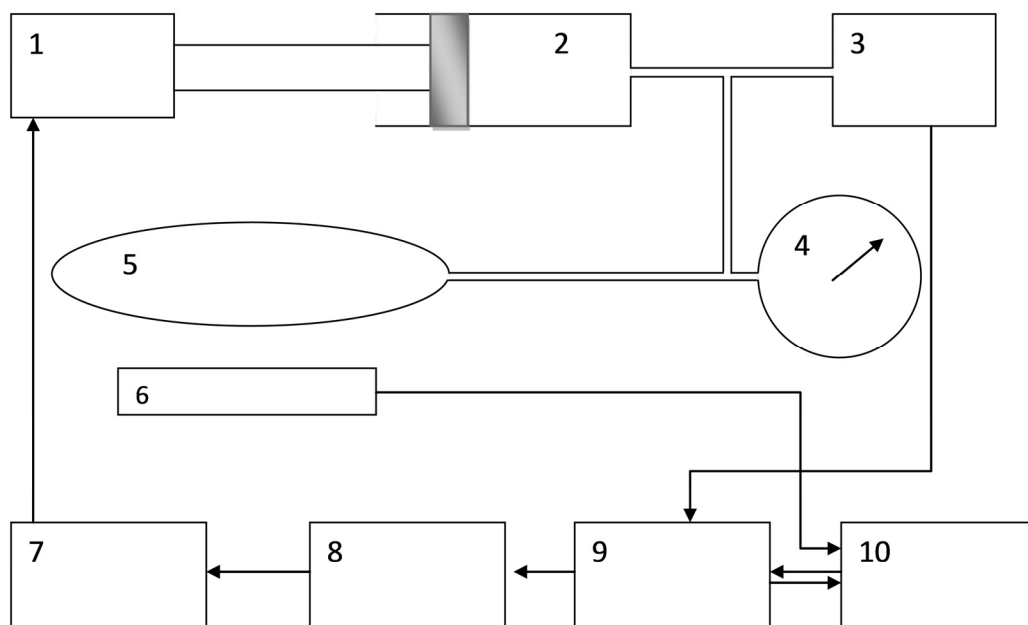


Рис. 3. Блок-схема стенда: 1– шаговый двигатель привода насоса; 2 – насос; 3 – электрический датчик давления; 4 – манометрический датчик давления установленный на ручном насосе для стандартной процедуры баллонной дилатации; 5 – баллон катетера; 6 – датчик акустической эмиссии; 7 – электронный блок управления шаговым двигателем; 8 – блок оптронной развязки электронного блока управления и персонального компьютера; 9 – микроконтроллер; 10 – персональный компьютер

Датчик акустической эмиссии 6 является важнейшим элементом экспериментального стенда. Перспективным представляется способ, при котором миниатюрный датчик вместе с катетером вводится внутрь сосуда. В качестве датчика 6 был применен цилиндрический пьезоэлектрический преобразователь, длина чувствительной части которого 5 мм, а диаметр 3,5 мм.

Чувствительность датчика составляет 44 дБ (0,006 В/Па). Уровень собственных шумов, приведенный к входу не превышает 30 мкВ.

Для сопряжения электромеханического блока с персональным компьютером на основе микропроцессорного комплекта Arduino создан порт, эмулирующий СОМ-порт компьютера, – виртуальный СОМ-порт. Для приема аналогового сигнала от датчика давления был использован аналого-цифровой преобразователь микропроцессорного комплекта. Ра-

бота СОМ-порта и канала ввода аналоговой информации под управлением персонального компьютера организована с помощью стандартных программ сопряжения из библиотеки программ микропроцессорного комплекта для работы с инструментами LabWIEV. Для управления шаговым двигателем используются две линии виртуального СОМ-порта, которые выводятся на линии цифровой шины ввода-вывода микропроцессорного модуля.

Работа стенда происходит следующим образом. Катетер, снабженный баллоном, вводится внутрь сосуда. С помощью ручного насоса производится начальное нагнетание жидкости, заполняющей систему катетера, в баллон катетера, в результате чего происходит расширение баллона и он заполняет просвет сосуда. На этой стадии допустимо создание некоторого начального давления в системе не приводящего к возникновению в сосуде значительных напряжений. Затем поршень ручного насоса фиксируется штатным образом, после чего в действие вводится механический насос установки. В этом режиме с помощью персонального компьютера, управляющего шаговым двигателем механического насоса, производится пошаговая подача фиксированных объемов жидкости в баллон. Одновременно, компьютерная программа производит измерение давления в систему катетера, и фиксирует зависимость давления от объема поданной в баллон жидкости с помощью эмулируемого компьютерной программой двух-координатного самопишущего прибора (виртуального прибора "двух-координатный самописец" в терминологии системы Lab View).

Процесс нагнетания жидкости сопровождается записью сигнала акустической эмиссии, поступающего от датчика, расположенного рядом с исследуемым сосудом. Регистрация сигналов производится таким образом, что возможно сопоставление графика изменения давления и записи акустической эмиссии. Это позволяет оператору, анализирующему акустический сигнал, в любой момент остановить процесс нагнетания жидкости, либо если оператор не вмешивается, остановка произойдет автоматически при достижении заранее установленного предельного давления. Режим работы установки допускает, по усмотрению оператора, остановку подачи жидкости в баллон в любой момент цикла, выдержку сосуда при зафиксированном объеме, поданной жидкости, в течение необходимого времени, и реверсирование процесса нагнетания. При этом полученные результаты в виде графиков фиксируются в памяти компьютера и могут быть в последствие воспроизведены и подробно проанализированы.

На рисунке 4 приведена типичная временная зависимость сигналов акустической эмиссии, возникающих в режиме нагнетания жидкости в баллон катетера, в результате чего происходит расширение баллона, которое приводит к деформации извлеченного сосуда.

Как видно из приведенного рисунка 4 созданная экспериментальная установка позволяет осуществлять запись слабых акустических сигналов, полученных при баллонной дилатации извлеченных сосудов и своевременно определить пороговое предельное механическое напряжение стенок сосуда. Анализ полученной временной записи акустических сигналов позволяет следить за ходом процесса баллонной дилатации и в автоматическом режиме управлять процессом расширения сосудов.

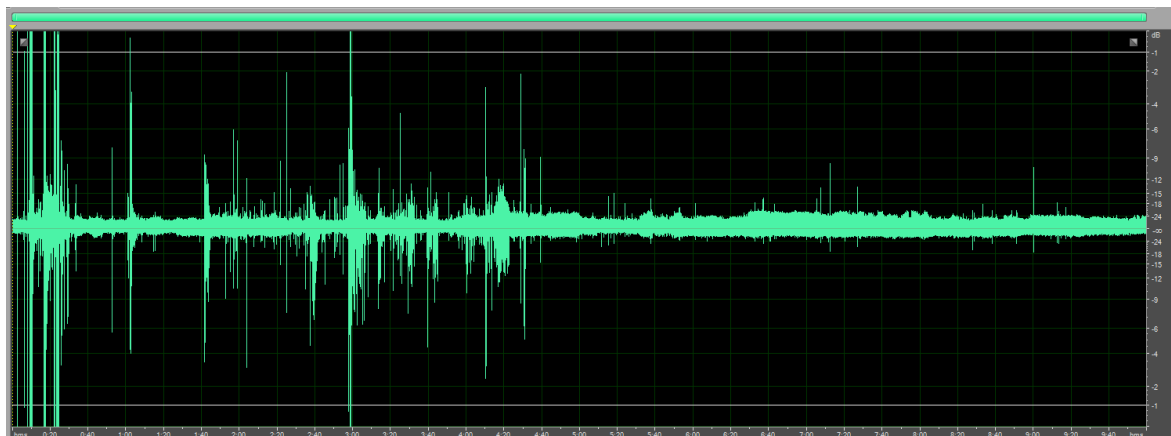


Рис. 4. Временная запись акустического сигнала, полученная при баллонной дилатации извлеченного сосуда

Библиографический список

1. Яриков, А. В. Хирургические методы лечения стеноза сонных артерий (обзор) / А.В. Яриков, А. В. Балябин, К. С. Яшин, А. С. Мухин // Современные технологии в медицине. – 2015. – № 4. – С. 189–200.
2. ОТЧЕТ о выполнении НИР «Разработка автоматизированной системы управления процессом лечения стенозов методом баллонной дилатации» (договор № 11334ГУ/2017 от 21 апреля 2017 г. о предоставлении гранта на выполнение научно-исследовательских работ).
3. Методы неразрушающих испытаний / под ред. Р. Шарпа. – М. : Мир, 1972. – 472 с.
4. Lupascu, D. C. The Dynamics of Domain Walls Determined from Acoustic Emission Measurements / D. C. Lupascu, T. Utschig, V. Ya. Shur // Ferroelectrics. – 2003. – № 290. – P. 207–215.
5. Бигус, Г. А. Исследование акустико-эмиссионных сигналов при деформировании и разрушении образцов из стали 22К/Г / Г. А. Бигус, П. Б. Стрелков // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2005. – № 1. – С. 10–15.
6. Неразрушающий контроль и диагностика : справочник / под ред. чл.-кор. РАН проф. В. В. Клюева. – 2-е изд., перераб и доп. – М. : Машиностроение, 2003. – С. 209, 213.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

ПОТЕНЦИАЛЫ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ¹

Х. Х. Имомназаров, Р. Х. Бахромов*

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия,

*Национальный университет
Узбекистана имени М. Улугбека,
г. Ташкент, Узбекистан,

E-mail: baxramov88_r@mail.ru, imom@omzg.sccc.ru

Многофазные многокомпонентные среды широко представлены в различных природных процессах и областях человеческой деятельности. Можно уверенно сказать, что с неоднородными смесями приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Всё это делает задачу описания и изучения таких сред одной из актуальнейших и важнейших проблем механики вообще и механики сплошных сред в частности [1-3]. Гетерогенные среды характеризует невероятное многообразие, взаимовлияние и сложность эффектов, возникающих благодаря неоднородности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические реакции, капиллярные эффекты, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

Потенциалы двойного слоя для стационарной системы двухскоростной гидродинамики

В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ рассматривается линеаризованная стационарная неоднородная задача двухскоростной гидродинамики [4]

$$v_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1)$$

$$v_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad u_{2n} = a_2, \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-51-41002).

Здесь $u_{2n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к $\partial\Omega$, v_1 и v_2 - соответствующие сдвиговые вязкости фаз. Здесь и далее векторные величины выделяются жирным шрифтом. Необходимым условием разрешимости системы (1)-(3) служат равенства

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n} d\omega = \int_{\partial\Omega} a_2 d\omega = 0.$$

Компоненты матриц $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $i, j = 1, 2, 3$ и вектора $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ фундаментального решения системы (1)-(3) находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$v_1 \Delta G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \partial_s G_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad (4)$$

$$v_2 \Delta \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \partial_s \tilde{G}_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, δ_{ij} - символ Кронекера, $\delta(\mathbf{r})$ - δ -функция Дирака, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. По повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

Следуя методу работы [5] решение системы (4)-(5) находится с помощью преобразования Фурье и имеет следующий вид:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi v_1} \left[\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \quad (6)$$

$$\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi v_2} \left[\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \quad (7)$$

$$P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{x_i - x'_i}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (8)$$

откуда следует равенство

$$v_1 G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = v_2 \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Отсюда и из системы уравнений (4)-(5) видно, что по аргументу $\mathbf{r}'$ функции $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, и $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\frac{\partial G_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_s} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{G}_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_s} = 0, \quad (9)$$

$$v_1 \Delta_{\mathbf{r}} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10)$$

$$v_2 \Delta_{\mathbf{r}} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (11)$$

Функции $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, и $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ позволяют построить объемные потенциалы

$$u_{1i}(\mathbf{r}) = -\rho \int G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad u_{2i}(\mathbf{r}) = -\rho \int \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

которые в силу равенств (4) и (5) удовлетворяют стационарной неоднородной системе (1)-(2) во всем пространстве. Введем тензоры напряжений в случае двухскоростной гидродинамики с одним давлением:

$$T_{ik}(\mathbf{u}_1) = -p \delta_{ik} + v_1 (\partial_i u_{1k} + \partial_k u_{1i}), \quad \tilde{T}_{ik}(\mathbf{u}_2) = -p \delta_{ik} + v_2 (\partial_i u_{2k} + \partial_k u_{2i}),$$

для соответствующих $(\mathbf{u}_1, p)$ и $(\mathbf{u}_2, p)$. Тензоры напряжений для сопряженной задачи имеют следующий вид:

$$T'_{ik}(\mathbf{v}_1) = q \delta_{ik} + v_1 (\partial_i v_{1k} + \partial_k v_{1i}), \quad \tilde{T}'_{ik}(\mathbf{v}_2) = q \delta_{ik} + v_2 (\partial_i v_{2k} + \partial_k v_{2i}),$$

для соответствующих $(\mathbf{v}_1, q)$ и $(\mathbf{v}_2, q)$.

С помощью фундаментальных решений $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ можно получить интегральное представление любого решения $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, p)$ неоднородной системы (1), (2) через массовую силу $\rho \mathbf{f}$ и значения $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и $T_{ik}(\mathbf{u}_1)$, $\tilde{T}_{ik}(\mathbf{u}_2)$ на $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} u_{1k}(\mathbf{r}) = & -\rho \int_{\Omega} G_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ & + \int_{\partial\Omega} T'_{ij}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) u_{1j} n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - \int_{\partial\Omega} G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') T_{ij}(\mathbf{u}_1) n_j d\omega_{\mathbf{r}'}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{2k}(\mathbf{r}) = & -\rho \int_{\Omega} \tilde{G}_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ & + \int_{\partial\Omega} \tilde{T}'_{ij}(\tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) u_{2j} n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - \int_{\partial\Omega} \tilde{G}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{T}_{ij}(\mathbf{u}_2) n_j d\omega_{\mathbf{r}'}, \end{aligned} \quad (15)$$

В формулах (14), (15)

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')),$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\tilde{G}_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tilde{G}_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tilde{G}_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right).$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int_{\Omega} P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \\ - \int_{\partial\Omega} P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') T_{ij}(\mathbf{u}_1) n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - 2\nu_1 \int_{\partial\Omega} \partial_j P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{1i} n_j d\omega_{\mathbf{r}'} . \quad (16)$$

Интегралы по поверхности в (14), (15) и (16) дают выражения потенциалов простого и двойного слоев. Ввиду отличия задач (1) и (2) только коэффициентами ν_1 и ν_2 (без учета краевых условий), будем рассматривать здесь только задачу Стокса для $\mathbf{u}_1$ и p . Определим потенциал двойного слоя с плотностью $\varphi(\eta)$ для задачи (1) как поверхностные интегралы

$$W_k(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} T'_{ij}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \varphi_i(\eta) n_j(\eta) d\omega_{\eta}, \\ \Pi(\mathbf{r}, \varphi) = -2\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial\Omega} P_k(\mathbf{r}, \eta) \varphi_k(\eta) n_j(\eta) d\omega_{\eta}.$$

Подставляя в эти формулы явные выражения для $\mathbf{G}_k$ и P_k из (6) и (8), получим

$$W_k(\mathbf{r}, \varphi) = -\frac{3}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)}{|\mathbf{r} - \eta|^5} \varphi_i(\eta) n_j(\eta) d\omega_{\eta}, \\ \Pi(\mathbf{r}, \varphi) = \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial\Omega} \frac{x_k - \eta_k}{|\mathbf{r} - \eta|^3} \varphi_k(\eta) n_j(\eta) d\omega_{\eta}.$$

Положим

$$K_{ij}(\mathbf{r}, \eta) = \frac{3}{4\pi} \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)}{|\mathbf{r} - \eta|^5} n_k(\eta), \\ K_j(\mathbf{r}, \eta) = \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{r} - \eta|^3} n_k(\eta).$$

Теперь потенциалы двойного слоя $\mathbf{W}$ и Π могут быть записаны более кратко

$$W_i(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} K_{ij}(\mathbf{r}, \eta) \varphi_j(\eta) d\omega_{\eta}, \\ \Pi(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} K_j(\mathbf{r}, \eta) \varphi_j(\eta) d\omega_{\eta}.$$

Заключение

Рассмотрена краевая задача для переопределенной стационарной системы двухскоростной гидродинамики. Получены формулы для решения рассмотренных краевых задач. Показано влияние кинетических и физических параметров на решение стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

Библиографический список

1. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
2. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. – Ч. 1. – М. : Наука, 1987. – 464 с.
3. Соу, С. Гидродинамика многофазных систем / С. Соу. – М. : Мир, 1975. – 536 с.
4. Урев, М. В. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике / М. В. Урев, Х. Х. Имомназаров, Тан Жиан-Ган // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 425–437.
5. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1970. – 288 с.

ОБОБЩЕННАЯ АРХИТЕКТУРА АДАПТИВНОЙ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ ПРИКЛАДНОГО НАЗНАЧЕНИЯ¹

А. М. Бершадский, А. С. Бождай, Ю. И. Евсеева, А. А. Гудков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: bam@pnzgu.ru, bozhday@yandex.ru,
shymoda@mail.ru, alexei-ag@yandex.ru

Одной из проблем современного программного обеспечения является проблема недостаточности знаний во многих предметных областях. Их динамика и сложность зачастую таковы, что невозможно учесть все связанные с ними обстоятельства на этапе разработки информационных моделей и компиляции исходного кода. Это заставляет создателей таких систем проявлять повышенное внимание к процессу сопровождения, регулярно выпускать обновления, не содержащие кардинально новой

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00408.

функциональности, но отнимающие внимание, время и материальные средства конечного пользователя.

Решением данной проблемы может стать внесение в функционал программной системы интеллектуальных свойств самоадаптации. В таком случае, разработчику достаточно формализовать лишь базовые модели анализа и поиска закономерностей (тем самым делая предположение, что какие-то моменты на этапе разработки остались неучтенными), а выявлением недостающих знаний система будет заниматься самостоятельно на протяжении своего жизненного цикла. Такой подход не только позволит снизить затраты на сопровождение системы, но и выявить те сведения о ее предметной области, которые могут быть неизвестны даже экспертам.

Условимся называть данный тип адаптации рефлексивной самоадаптацией или рефлексией программной системы. Можно выделить 3 базовых уровня программной рефлексии (рис. 1): уровень самонаблюдения, самооптимизации и самоадаптации.



Рис. 1. Уровни рефлексии программной системы

Уровень самонаблюдения является базовым и наиболее примитивно организованным уровнем. Он не описывается какой-либо сложной математической моделью. Основная задача механизмов адаптации, функционирующих на этом уровне - составление поведенческих протоколов программной системы.

Уровень самооптимизации затрагивает организацию приложения на уровне его программного кода и интерфейса. Механизмы адаптации, работающие на этом уровне, используют поведенческую информацию уровня самонаблюдения для оптимизации указанных составляющих программной системы. В данном случае программа адаптируется не под конкретного пользователя или устройство, а устраняет в себе свойства,

которые являются объективно нежелательными. Объективно нежелательными свойствами являются те, которые признаны таковыми для любых пользователей и при любых условиях. К числу таких свойств относится, например, избыточность пользовательского интерфейса.

Уровень самоадаптации является наиболее сложноорганизованным уровнем. Именно на этом уровне для формализация адаптивного поведения используются дополнительные модели - модели изменчивости. Модель изменчивости представляет собой своеобразное морфологическое множество адаптивной программной системы, т.е. множество его потенциальных конфигураций [1-4]. Если уровень самооптимизации определяет то, насколько оптимально написан код или организован интерфейс, то уровень самоадаптации отвечает именно за поведенческую реорганизацию приложения в процессе выполнения. Именно на этом уровне формируются новые обратные связи системы.

Обобщая существующий опыт разработки систем с модульной архитектурой, можно сформулировать несколько важных принципов построения программных систем с рефлексивной самоадаптацией функционала:

- Минимальными компонентами программной системы, подверженными адаптации, являются блоки изменчивости. Каждый блок изменчивости, входящий в состав системы, отвечает за возможную реализацию какого-либо атомарного компонента программы (функции, класса, модели объекта предметной области и т.п.).
- Совокупность логически связанных блоков изменчивости, относящихся к одной предметной области и предназначенной для решения одной задачи, называется рефлексивным компонентом.
- Рефлексивная программная система может состоять из одного или нескольких рефлексивных компонентов. Их количество будет определять адаптивное разнообразие и рефлексивную сложность программы.
- Рефлексивный компонент включает в себя 2 базовых архитектурных уровня: уровень самооптимизации и уровень самоадаптации. Уровень самооптимизации имеет также четкое разделение на уровень представления (уровень интерфейса, не является обязательным) и уровень программного кода. В свою очередь, уровень самооптимизации построен на основе моделей изменчивости.
- Рефлексивные компоненты объединены в единую систему посредством общего интерфейса и изначально могут не иметь данных друг о друге. Однако в процессе рефлексивного анализа будет происходить выявление степени и характера влияния одних компонентов на другие. Для этого необходимо предусмотреть каналы информационного обмена между компонентами.

Обобщенная архитектура самоадаптивной программной системы представлена на рисунке 2.

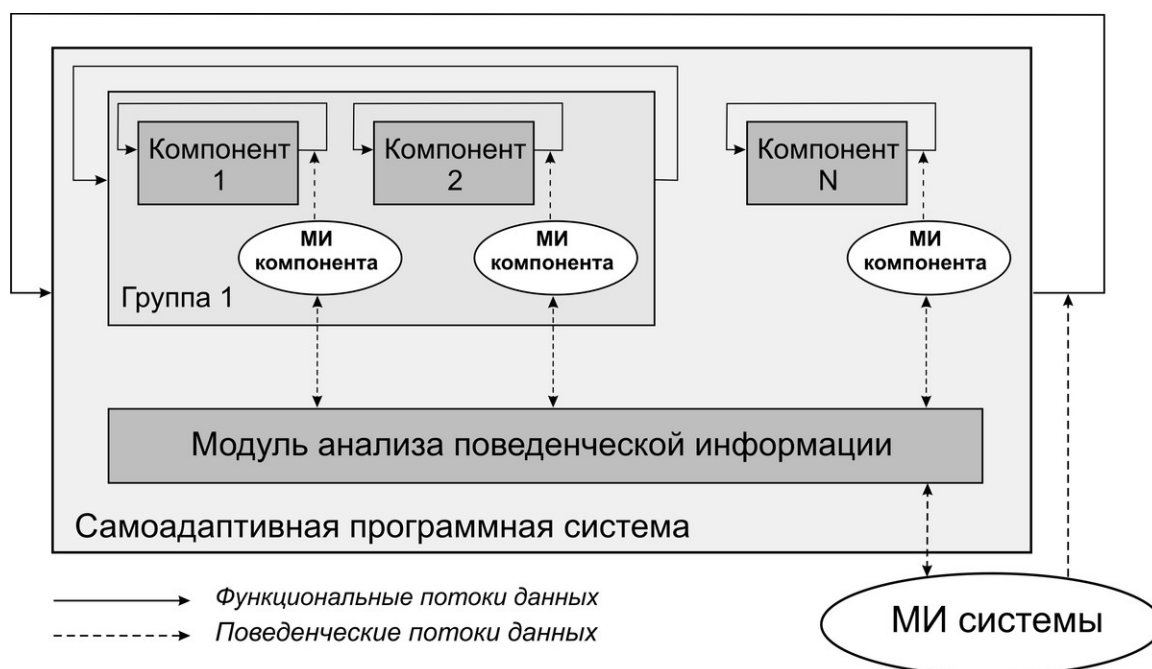


Рис. 2. Обобщенная архитектура самоадаптивной программной системы

Самоадаптивная программная система охватывается тремя уровнями рефлексивной обратной связи: уровнем отдельных компонентов, уровнем групп компонентов и общесистемным уровнем. Каждый контур рефлексии обеспечивается своей моделью изменчивости (МИ), отвечающей за выбор текущих конфигураций компонентного и системного уровней. Общая координация разноуровневой совокупности МИ и потоков поведенческих данных осуществляется модулем анализа поведенческой информации. Этот модуль не всегда является подсистемой системного уровня (как изображено на рисунке). Возможны и более гибкие архитектурные вариации, когда каждый отдельный компонент имеет свою собственную подсистему поведенческого анализа.

Библиографический список

1. Control-based approach to balance services performance and security for adaptive service based systems (ASBS) / C. Liu, C. Jiang, H. Hu, K. Y. Cai, D. Huang, S. S. Yau // 33rd Annual IEEE International Computer Software and Applications Conference (COMPSAC'09). – Washington : IEEE Computer Society, 2009. – P. 473–478.
2. Berger, T. Variability modeling in the real: an empirical journey from software product lines to software ecosystems / T. Berger. – Leipzig : University of Leipzig, 2012. – 225 p.
3. Younis, O. Systems variability modeling: a textual model mixing class and feature concepts / O. Younis, S. Ghoul, M. H. Alomari // International Journal of Computer Science & Information Technology. – 2013. – № 5. – P. 127–139.
4. Webber, D. L. Modeling variability in software product lines with the variation point model / D. L. Webber, H. Gomaa // Science of Computer Programming. – 2004. – № 3. – P. 305–331.

АЛГОРИТМ ДЛЯ АНАЛИЗА АДГЕЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ СЛОИСТОГО ВИБРОДЕМПФИРУЮЩЕГО ПОКРЫТИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А. Н. Литвинов

Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия
E-mail: fzopgu@mail.ru

Многослойные вибродемпфирующие покрытия широко применяются для защиты изделий различного назначения от внешних эксплуатационных воздействий в широком частотном диапазоне [1]. Наиболее эффективными являются многослойные покрытия с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Как правило, покрытия располагают на тонкостенных элементах конструкций, которые представляет собой пластины (платы), панели и оболочки различной конфигурации (обшивки летательных аппаратов, панели блоков автоматики и т.д.) [2].

При исследовании эффективности применения покрытия не рассматриваются условия его нормального функционирования в процессе эксплуатации и возможные причины нарушения нормальной работы покрытия: разрушение его слоев, отслоение покрытия от несущей поверхности, развитие латентных дефектов в слоях и т.д. Для анализа возможности возникновения этих дефектов необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) гетерогенной слоистой структуры, которая представляет собой несущую конструкцию (или её часть) с многослойным покрытием [3].

Пусть несущая конструкция – оболочка с характерной толщиной H_0 и характерным радиусом кривизны R_0 . Покрытие имеет суммарную толщину H . Элемент несущей конструкции в виде оболочки с вибродемпфирующим покрытием показан на рис. 1 (ось x_3 направлена по нормали к поверхности оболочки). Типичное распределение виброперемещений на поверхности несущей оболочки в направлении осей x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{aligned}u_0(x_1, x_2) &= U_0 \sin k_1(x_1 - \xi_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2), \\v_0(x_1, x_2) &= V_0 \sin k_1(x_1 - \eta_1) \sin k_2(x_2 - \eta_2), \\w_0(x_1, x_2) &= W_0 \sin k_1(x_1 - \zeta_1) \sin k_2(x_2 - \zeta_2)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $U_0, V_0, W_0, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ – величины, характеризующие рассматриваемую форму колебаний; волновые числа k_1, k_2 связаны с масштабами форм колебаний λ_1, λ_2 в направлении осей x_1, x_2 соотношениями $k_1 = 2\pi/\lambda_1, k_2 = 2\pi/\lambda_2$. Параметры с нулевым индексом относятся к несущей конструкции.

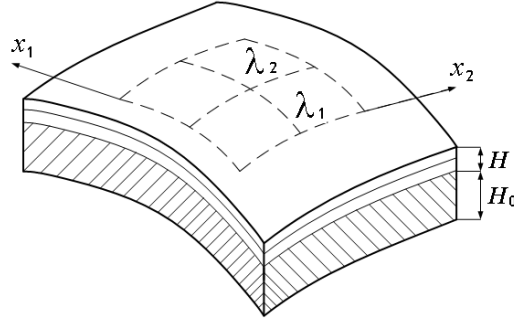


Рис. 1. Элемент конструкции с покрытием.

Рассмотрим случай, когда жесткие слои подчиняются гипотезам Кирхгофа–Лява, а мягкие слои работают на сдвиг. Считаем, что парциальные собственные частоты покрытия существенно превышают частоту внешнего динамического воздействия ω .

Масштабы форм колебаний λ_1, λ_2 и соотношение H_0/R_2 в области расположения покрытия таковы, что в пределах части конструкции $\lambda_1 \times \lambda_2$ (см. рис.1) кривизной покрытия можно пренебречь. В этом случае поле перемещений в слоях гетерогенной системы определяется из уравнений, составленных для прямоугольной пластины размером $\lambda_1 \times \lambda_2$ с многослойным покрытием, которые при $k = 1, 2, \dots, n$ принимают вид [2]:

$$\begin{aligned}
 A_k L_{1k}(u_k, v_k) + B_k \left(u_{k+1} - u_k + c_k \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) \eta_{kn} - B_{k-1} \left(u_k - u_{k-1} + c_{k-1} \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) &= 0, \\
 A_k L_{2k}(u_k, v_k) + B_k \left(v_{k+1} - v_k + c_k \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) \eta_{kn} - \\
 - B_{k-1} \left(v_k - v_{k-1} + c_{k-1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$D_c \Delta \Delta w_0 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k c_k \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (u_{k+1} - u_k) + \frac{\partial}{\partial x_2} (v_{k+1} - v_k) + c_k \Delta w_0 \right] = q. \quad (3)$$

Здесь w_0 – нормальное перемещение жестких слоев, покрытия которое одинаково для всех слоев; u_k, v_k – тангенциальные перемещения срединных поверхностей k -го жесткого слоя покрытия ($k = 1, 2, \dots, n$); n – число жестких слоев в покрытии; q – интенсивность нормальной нагрузки; L_{1k}, L_{2k} – линейные дифференциальные операторы над полем тангенциальных перемещений жестких слоев:

$$L_{1k}(u_k, v_k) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + \frac{1-\mu_k}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_2^2} + \frac{1+\mu_k}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$L_{2k}(u_k, v_k) = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_2^2} + \frac{1-\mu_k}{2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_1^2} + \frac{1+\mu_k}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Кроме того введены обозначения:

$$A_k = \frac{E_k h_k}{1-\mu_k^2}; \quad B_k = \frac{G_k}{s_k}; \quad D_c = \sum_{k=0}^n \frac{E_k h_k^3}{12(1-\mu_k^2)}; \quad c_k = s_k + 0,5(h_k + h_{k+1}).$$

Здесь E_k, μ_k – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала жестких слоев; G_k – модуль сдвига для материала мягких слоев ($k=0, 1, 2, \dots, n$); h_k и s_k – толщина жестких и мягких слоев соответственно; $\eta_{kn} = 1 - \delta_{kn}$, где δ_{kn} – символ Кронеккера; Δ – оператор Лапласа на плоскости.

В самом общем случае материал несущей конструкции и покрытия считаем вязкоупругим, т.е. E_k, μ_k, G_k следует трактовать либо как вязкоупругие операторы, либо как соответствующие комплексные характеристики, если под перемещениями u_k, v_k и w_0 понимать их амплитуды Фурье при заданной частоте ω [3]. Основная задача состоит в том, чтобы на основании уравнений (2) и (3) найти поле деформаций в слоях вибродемпфирующего покрытия. При определении поля перемещений в покрытии E_k, μ_k, G_k будем рассматривать как упругие характеристики.

Несущая конструкция в уравнениях (2), (3) учитывается как нулевой слой гетерогенной вязкоупругой структуры. Так как в уравнениях все перемещения отнесены к срединным поверхностям жестких слоев, а перемещения несущей конструкции заданы на ее поверхности (1), то в уравнениях (2), (3) следует положить $c_k = s_k + h_k$ ($k=1, 2, \dots, n$); $c_0 = s_0 + 0,5h_1$. Подставляя в уравнения (2) вместо u_k, v_k и w_0 выражения (1), получим систему $2n$ дифференциально-разностных уравнений относительно тангенциальных перемещений жестких слоев.

Типичными граничными условиями для уравнений (2) будут условия периодичности:

$$\begin{aligned} u_k(x_1 + \lambda_1, x_2) &= u_k(x_1, x_2 + \lambda_2) = u_k(x_1, x_2), \\ v_k(x_1 + \lambda_1, x_2) &= v_k(x_1, x_2 + \lambda_2) = v_k(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Вместо (4) могут быть поставлены и другие граничные условия, например, условия конструктивного закрепления покрытия по некоторым линиям или границе прямоугольника $0 \leq x_1 \leq \lambda_1; \quad 0 \leq x_2 \leq \lambda_2$.

Решение задачи по определению поля для перемещений в жестких слоях покрытия существенно упрощается, если покрытие является регулярным, т.е. выполняются условия $h_k = h; \quad s_k = s; \quad c_k = s + h; \quad E_k = E; \quad G_k = G; \quad \mu_k = \mu$ при $k=1, 2, \dots, n$. В этом случае система уравнений (2) сводится к виду:

$$\begin{aligned}
&\text{при } k=1: \quad \chi^{-1}L_{11}(u_1, v_1) + u_2 - 2u_1 = -\frac{1}{2}h \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - u_0, \\
&\quad \chi^{-1}L_{21}(u_1, v_1) + v_2 - 2v_1 = -\frac{1}{2}h \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - v_0; \\
&\text{при } k=2, 3 \dots, n-1: \quad \chi^{-1}L_{1k}(u_k, v_k) + u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = 0, \\
&\quad \chi^{-1}L_{2k}(u_k, v_k) + v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0; \\
&\text{при } k=n: \quad \chi^{-1}L_{1n}(u_n, v_n) - (u_n - u_{n-1}) = c \frac{\partial w_0}{\partial x_1}, \\
&\quad \chi^{-1}L_{2n}(u_n, v_n) - (v_n - v_{n-1}) = c \frac{\partial w_0}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введен безразмерный комплексный параметр, характеризующий относительную жесткость мягких слоев покрытия $\chi = \frac{G(1-\mu^2)n^2}{E(1-\alpha)\alpha\bar{H}^2}$, где $\alpha = h/(h+s)$ – коэффициент армирования покрытия; $\bar{H} = H/H_0$ – безразмерная суммарная толщина покрытия.

Уравнения (5) являются дифференциальными по x_1, x_2 и разностными по номеру k . Уравнения для крайних слоев при $k=1, n$ играют роль разностных граничных условий. При граничных условиях на контуре типа условий периодичности (1) удастся отделить непрерывные переменные x_1, x_2 от разностного аргумента k и получить аналитическое решение, явно зависящее от числа жестких слоев в покрытии. Процедура построения такого решения изложена в [2].

Для тонких покрытий распределение перемещений по поверхности несущей конструкции (1), где расположено покрытие, определяется из решения соответствующей динамической задачи для несущей конструкции без покрытия. Движение покрытия будем рассматривать как вынужденное квазистатическое деформирование, вызванное заданным движением несущей конструкции. Таким образом, основная задача сводится к определению полей перемещений в слоях покрытия при заданном характере движения поверхности несущей конструкции, на которой расположено покрытие.

При воздействии вибрации с частотой ω в мягком слое по поверхности его контакта с поверхностью несущей конструкции возникают нормальные напряжения отрыва σ , совпадающее с нормальной нагрузкой q , которая определится из уравнения (3), путем подстановки выражения (1) и тангенциальных перемещений жестких слоев покрытия u_k и v_k полученных из решения системы уравнений (5):

$$u_k = U_k \sin k_1(x_1 - \xi_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2),$$

$$v_k = V_k \sin k_1(x_1 - \eta_1) \sin k_2(x_2 - \eta_2). \quad (6)$$

Здесь амплитуды перемещений для жестких слоев покрытия определяются выражениями

$$\begin{aligned} U_k &= C_1 sh(\beta k) + C_2 ch(\beta k) + C_3 sh(\beta_1 k) + C_4 ch(\beta_1 k); \\ V_k &= \frac{k_2}{k_1} [C_1 sh(\beta k) + C_2 ch(\beta k)] - \frac{k_1}{k_2} [C_3 sh(\beta_1 k) + C_4 ch(\beta_1 k)] \end{aligned} \quad (7)$$

Параметры, входящие в выражения (7), определяются соотношениями

$$\begin{aligned} ch\beta &= 1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{2\chi}; \quad ch\beta_1 = 1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{4\chi}(1 - \mu). \\ C_1 &= -\frac{a_1 [ch\beta(n+1) - ch\beta n] + W_0 c}{sh\beta(n+1) - sh\beta n} k_1, \\ C_2 &= a_1 k_1, \quad C_3 = a_3 - \frac{ch\beta_1(n+1) - ch\beta_1 n}{sh\beta_1(n+1) - sh\beta_1 n}, \quad C_4 = -a_3, \\ a_1 &= \frac{1}{2} h W_0 + \frac{k_1 U_0 + k_2 V_0}{k_1^2 + k_2^2}, \quad a_3 = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \left(V_0 - \frac{k_2}{k_1} U_0 \right). \end{aligned}$$

Определив из уравнения (3) поле напряжений отрыва $\sigma(x_1, x_2) = q(x_1, x_2)$, необходимо вычислить максимальные напряжения отрыва $\max \sigma$ на поверхности контакта покрытия с несущей конструкцией и проверить выполнение условия обеспечивающего жесткую связь покрытия с несущей конструкцией:

$$\max \sigma < \sigma_A. \quad (8)$$

Здесь σ_A – предел адгезионной прочности для материала мягкого слоя покрытия в зоне его контакта с поверхностью несущей конструкции.

Если условие (8) не выполняется, то имеет место локальный отрыв покрытия с последующим ростом размеров зоны отрыва. Кроме того возможно развитие латентных дефектов, связанных с наличием микротрещин и непрочных связей в зонах расположения покрытий на несущей конструкции.

Анализ НДС, проведенный для слоев покрытия, показал, что наиболее напряженные зоны, в которых может иметь место отрыв покрытия и развитие латентных дефектов расположены в зоне контакта мягких слоев с поверхностью несущей конструкции в угловых точках и средних точках на краях по внешнему контуру покрытия.

Моделирование НДС в слоях покрытия при динамическом нагружении позволяет на стадии проектирования слоистых вибродемпфирующих покрытий принимать конструкторско-технологические решения, обеспечивающие жесткую связь покрытия с несущей конструкцией и повышение виброустойчивости конструкций в заданных условиях эксплуатационных динамических воздействий.

Библиографический список

1. Литвинов, А. Н. Эффективность демпфирования оболочек при помощи многослойных покрытий / А. Н. Литвинов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Технические науки. – 2005. – № 5. – С. 178–191.
2. Литвинов, А. Н. Моделирование динамических процессов в изделиях приборостроения : монография / А. Н. Литвинов – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – 196 с.
3. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин. Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 374 с.

ОБОБЩЕННАЯ ПОВЕДЕНЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АДАПТИВНОЙ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ: ВИЗУАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ¹

А. С. Бождай, Ю. И. Евсеева, А. А. Гудков

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: bozhday@yandex.ru, shymoda@mail.ru, alexei-ag@yandex.ru

В наши дни, когда программное обеспечение становится все более сложным, особую актуальность приобретают вопросы, связанные со снижением стоимости его разработки и сопровождения. Создание даже относительно несложных по своей функциональности информационных систем (например, информационных систем компаний) зачастую становится процессом, длящимся несколько месяцев (а иногда и лет), требующим постоянной модификации отдельных компонентов программного продукта и серьезных денежных затрат.

Решением проблемы может стать наделение программных систем способностью к хотя бы частичной самомодификации собственной функциональности. Данная самомодификация должна осуществляться не толь-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00408.

ко "по указанию" непосредственно разработчиков системы, но и на основе наблюдений и выводов, которые программа сделает самостоятельно.

Центральной идеей предлагаемого авторами подхода является перенос принципов, применяемых в морфологическом анализе и синтезе технических систем, на программные системы. Процедура синтеза технической системы предполагает изначальное построение специального множества всех возможных ее вариантов - морфологического множества. Существуют различные способы построения морфологического множества, наиболее распространенный из которых - И/ИЛИ-деревья. После того, как множество построено, осуществляется процедура морфологического синтеза, которая сводится к поиску такого поддерева исходного И/ИЛИ-дерева, которое описывает наиболее оптимальную для заданных условий конфигурацию системы [1, 2].

В случае с программной системой предлагается представлять в форме морфологического множества множество всех возможных ее состояний. То, какое именно состояние примет система, зависит от заранее определенной разработчиком или экспертом совокупности факторов. В ряде случаев сам ход работы программы разбивается на этапы, и для каждого этапа по морфологическому множеству синтезируется собственное состояние.

Назовем системы множество всех возможных состояний программной системы обобщенной поведенческой структурой. Для представления структуры будем использовать диаграммы характеристик - модифицированные И/ИЛИ-деревья. Отличие диаграммы характеристик от обычного И/ИЛИ-дерева заключается в наличии у нее большего числа типов отношений между родительскими и дочерними вершинами (например, отношения множественного и взаимоисключающего ИЛИ) [3-5]. Пример диаграммы характеристик представлен на рисунке 1.

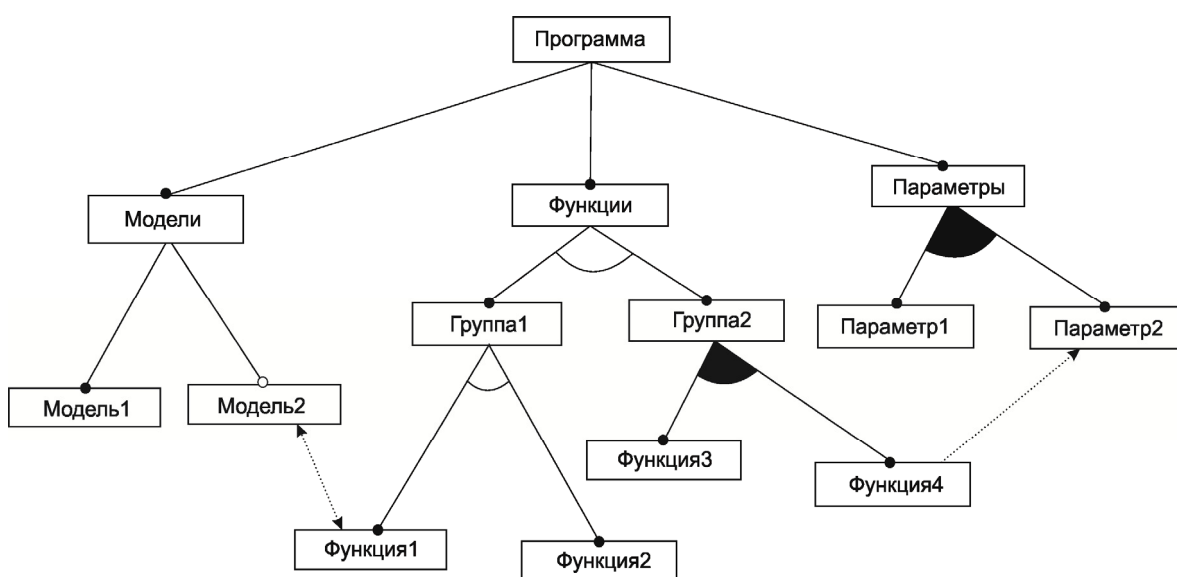


Рис. 1. Пример диаграммы характеристик

Диаграмму характеристик удобно использовать для визуального представления обобщенной поведенческой структуры программной системы (например, в специализированных CASE-средствах). Однако для возможности дальнейшей работы с разработанной структурой необходимо представить ее в соответствующей математической форме. В качестве такой формы авторами работы был выбран ориентированный гиперграф. Основное преимущество гиперграфового представления диаграммы заключается в том, что с его помощью все возможные типы отношений в диаграмме характеристик (всего их насчитывается 6) можно представить в единой форме - форме ориентированного гиперребра.

Формально модель характеристик представляет собой ориентированный гиперграф

$$F = (N, E, \Delta, \Psi),$$

где $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ — конечное множество вершин, каждая из которых представляет собой характеристику диаграммы; $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ — конечное множество ребер графа (взаимоотношений исходной модели); $\Delta \in N$ — вершина, представляющая корневую характеристику диаграммы; $\Psi: E \rightarrow M, M \subset N \times N$ — функция маркировки, которая присваивает значение мощности $mv(E_i) = (min, max) \in M$, где M — конечное множество значений мощности модели характеристик, N — конечное множество вершин гиперграфа, каждому ориентированному гиперребру E_i , так что $min, max \in Z \wedge min \geq 0, max > 0, min \leq max \wedge max \leq q_i$, где Z — множество целых чисел. Значение мощности — это пара из минимального и максимального количества вершин головного множества гиперребра, которые могут быть включены в конфигурацию диаграммы характеристик, которой соответствует гиперграф.

Корневая вершина $\Delta \in N$ является единственной вершиной гиперграфа, которая не принадлежит ни одному головному множеству ни одного гиперребра. По отношению к корневой вершине и множеству R , содержащему данную вершину, также справедливы следующие правила:

- 1) $R \subseteq N \wedge R = \{\Delta\}$;
- 2) $BS(\Delta) = 0$;
- 3) $BS(n) = 0 / \forall n \in (N - R)$.

На рисунке 2 представлен гиперграф, соответствующий диаграмме характеристик, изображенной на рисунке 1.

Преобразование обобщенной поведенческой структуры самоадаптивной программной системы в гиперграфовую форму позволит провести ее дальнейший теоретико-множественный анализ, верификацию созданных на ее основе системных состояний, представленных подграфами исходного гиперграфа, и алгоритмизировать процесс адаптивного поведения приложения.

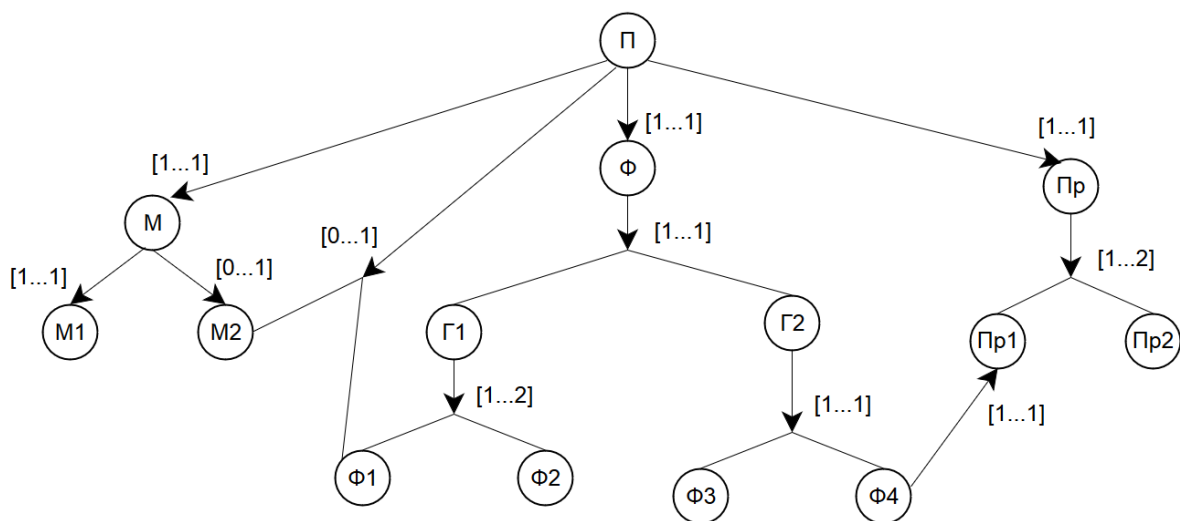


Рис. 2. Гиперграфовое представление диаграммы характеристик

Библиографический список

1. Никифоров, Н. И Основы инженерного творчества : учеб. пособие / Н. И. Никифоров. – Волгоград : ВолгГу, 2008. – 96 с.
2. Уемов, А. И. Системный подход и общая теория систем / А. И. Уемов. – М. : Мысль, 1982. – 246 с.
3. Towards feature-oriented variability reconfiguration in dynamic software product lines / L. Shen et al. // Top productivity through software reuse / ed. by K. Schmid. – Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. – P. 52–68.
4. Schobbens, P. E. Feature diagrams: a survey and formal semantics / P. E. Schobbens, P. Heymans, J.C. Trigaux // In 14th IEEE International Requirements Engineering Conference (RE'06). – Washington : IEEE Computer Society, 2011. – P. 139–148.
5. Kang, K. C. Feature-oriented domain analysis (FODA): feasibility study / K.C. Kang et al. – Pittsburgh : Software Engineering Institute, 1990. – 161 p.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

П. С. Барабанова

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: lady.barabanovapolina@list.ru

Надежность компьютерной системы определяется аппаратной и программной надежностью. Для оценки надежности аппаратуры есть ряд математических методов, которые позволяют предсказать надежность его продукта. Данные математические методы применяются во многих

инженерных областях с различными целями. Также эти методы применяются и в области надежности программного обеспечения, потому что теория надежности аппаратуры развита довольно хорошо. Некоторые модели надежности следуют из теории надежности аппаратуры, другие не связаны с ней, но дают схожие результаты [1-2].

Под надежностью программного обеспечения (software reliability) будем понимать свойство программы выполнять заданные функции, сохранять свои характеристики в установленных пределах при определенных условиях эксплуатации [2-3].

Надежность ПО определяется в частности его безотказностью и восстанавливаемостью. Безотказность (failure-free operation) программы или программного обеспечения есть его (ее) свойство сохранять работоспособность при использовании в процессе обработки информации на компьютере [3-4].

При этом предполагается, что аппаратура компьютера находится полностью в работоспособном состоянии. С точки зрения надежности принципиальное отличие ПО от аппаратуры состоит в том, что программы не “изнашиваются” и, следовательно, не выходят из строя из-за поломки [3-5].

Безотказность ПО определяется его корректностью (правильностью) и, следовательно, целиком зависит от наличия в нем ошибок, внесенных на этапах его создания [1-3].

Для того, чтобы исследовать закономерности появления ошибок в программе или спрогнозировать надежность при разработке и эксплуатации используют аналитические модели надежности.

Данные модели опираются на такое предположение: проявление ошибки является случайным событием, поэтому имеет вероятностный характер. Такие модели созданы для оценки показателей надежности программ и программных комплексов в процессе тестирования. Они дают возможность принять обоснованное решение о времени проектирования отладочных работ [1-3].

Основные характеристики, которые использовались при создании моделей надежности программ: надежность, ненадежность, интенсивность отказов.

Функция надежности $P(t)$ определяется как вероятность того, что ошибки программы не появляются на интервале времени от 0 до t , т. е. времени ее безотказной работы будет больше [1-3].

Вероятность того, что в течение времени t произойдет отказ программы, как результат проявления действия ошибки в программе – функция ненадежности $Q(t)$ [3]. Таким образом:

$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (1)$$

Условная плотность вероятности времени от возникновения отказа программы при условии, что до момента t отказа не было - интенсивность отказов $\lambda(t)$ [2-3].

$$\lambda(t) = -\frac{dP(t)}{dt} / P(t) = \left| \frac{dQ(t)}{dt} \right| / P(t). \quad (2)$$

Рассмотрим некоторые математические модели надежности, которые можно использовать для оценки надежности программ.

В модели надежности с дискретно-понижающейся интенсивностью проявления ошибок предполагается, что интенсивность обнаружения ошибок описывается кусочно-постоянной функцией, пропорциональной числу неустраняемых ошибок и интенсивность отказов $\lambda(t)$ постоянна до обнаружения и исправления ошибки, после чего она снова становится константой, но с другим, меньшим значением. Также считается, что между $\lambda(t)$ и числом оставшихся в программе ошибок существует прямая зависимость [2-3]:

$$\lambda(t) = K(M - i) = \lambda_i, \quad (3)$$

где M – неизвестное первоначальное число ошибок; i – число обнаруженных ошибок, зависящих от времени t ; K – некоторая константа [2-3].

Плотность распределения времени обнаружения i -й ошибки задается формулой [3]:

$$f(t_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i t_i}. \quad (4)$$

Значение неизвестных параметров K и M можно оценить на основании последовательности наблюдения интервалов между моментами обнаружения ошибок по методу максимального правдоподобия.

Также данная модель построена так, что устранение ошибки в программе приводит к увеличению времени наработки на одну и ту же случайную величину. Недостатком модели является то, что все ошибки одинаково серьезны (например, отказ системы и орфографическая ошибка в сообщении одинаково важны) [3].

Модель Джелинского-Моранды основана на следующих предположениях: время до следующего отказа распределено экспоненциально; интенсивность отказов программы пропорциональна количеству оставшихся в программе ошибок [1-3].

Согласно допущениям функция времени t_i равна:

$$P(t_i) = e^{-\lambda_i t_i}, \quad (5)$$

$$\lambda_i = C_D(N - (i - 1)), \quad (6)$$

где i – число обнаруженных ошибок; C_D – коэффициент пропорциональности, (определяется по методу максимума правдоподобия); N – перво-

начальное число ошибок программы. В выражении отсчет времени начинается от момента последнего $(i-1)$ -го отказа программы [1-5].

Недостатком модели является то, что: любая ошибка одинаково серьезна; ошибка должна исправляться немедленно (или программа не используется до тех пор, пока найденная ошибка не будет исправлена); программа не изменяется (за исключением исправления ошибок); при всех исправленных ошибках новые не вносятся [3].

Экспоненциальная модель построена на предположении об экспоненциальном характере изменения во времени числа ошибок в программе.

Считается, что все ошибки в программе независимы и проявляются в случайные моменты времени с постоянной средней интенсивностью в течении всего времени выполнения программы. Пусть M – число ошибок, имеющих в программе перед тестированием (M рассматривается как некоторая константа); $m(\tau)$ – конечное число исправленных ошибок. Также считаем, что в процессе корректировки новые ошибки не порождаются [2-3].

Тогда перед началом работы компьютера ($t = 0$) ни одна ошибка исправлена не была ($\tau = 0$), поэтому решением управления является:

$$m = M \cdot [1 - \exp(-C \cdot \tau)], \quad (7)$$

где m – число исправленных ошибок в течении времени τ , C – коэффициент пропорциональности учитывающий реальное быстроедействие компьютера и число команд в программе

Среднее время наработки на отказ в течении времени τ после тестирования характеризуют надежность программы:

$$t_{cp} = (1 / C \cdot M) \cdot \exp(C \cdot \tau). \quad (8)$$

Среднее время наработки на отказ увеличивается по мере выявления и исправления ошибок.

Данную модель могут применять для определения времени испытаний программ для того, чтобы достигнуть заданного уровня надежности и для оценки числа оставшихся в программе ошибок [2-3].

Статистическая модель Миллса позволяет оценить не только количество ошибок до начала тестирования, но и степень отлаженности программ. Использование этой модели предполагает необходимость перед началом тестирования искусственно «засорять» программу, т.е. вносить в нее некоторое количество известных ошибок. Предполагается, что все ошибки (как естественные, так и искусственные внесены) имеют равную вероятность быть найденными в процессе тестирования [3].

Первая часть модели показывает первоначальное число ошибок в программе:

$$N = \frac{S \cdot n}{V}, \quad (9)$$

где S – количество искусственно внесенных ошибок; n – число найденных собственных ошибок; V – число обнаруженных к моменту оценки искусственных ошибок.

Вторая часть модели связана с проверкой гипотезы от N . Предположим, что в программе имеется K собственных ошибок, и внесем в нее еще S ошибок. В процессе тестирования были обнаружены все S внесенных ошибок и n собственных ошибок.

Тогда по формуле Миллса мы предполагаем, что первоначально в программе было $N = n$ ошибок. Вероятность, с которой можно высказать такое предположение, возможно рассчитать по следующему соотношению [2-3]:

$$C = \begin{cases} 1, \text{если } n > K \\ \frac{S}{S + K + 1}, \text{если } n \leq K \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, величина C является мерой доверия к модели и показывает вероятность того, насколько правильно найдено значение N .

Формулы (10) и (9) образуют полезную модель ошибок: первая предсказывает их количество; вторая позволяет определить достоверность прогноза [1-3].

Недостатки модели Миллса: собственные и внесенные ошибки обнаруживаются с одинаковой вероятностью; количество внесенных ошибок должно быть в 10 раз больше, чем собственных; неизвестно, какой должна быть типичная ошибка, если тестирование проводит не тот, кто писал программу [3-5].

Модели, основанные на предположении о дискретном изменении характеристик надежности программ, и модели с экспоненциальным характером изменения числа ошибок в зависимости от времени тестирования и функционирования программы являются основными типами применяемых моделей надежности программ [3-5].

Согласно проведенному анализу каждая из моделей является специализированной и ограниченной. Для полноценной оценки ПО целесообразно использовать указанные модели в едином комплексе и интегрировать полученные результаты. Кроме того, рассмотренные модели не учитывают особенности многопоточных программ, а именно: возникновение гонок, взаимоблокировок и выполнение в срок, что во многом определяет их надежность [6-7].

Таким образом, целесообразно вышерассмотренные виды моделей дополнить методами, которые позволяют оценивать многопоточное ПО. Указанные виды моделей целесообразно объединить в виде специального комплекса для тестирования ПО [6-7].

Рассмотренные выше модели могут применяться в прикладных задачах, например, при решении задач разделения сигналов в условиях априорной неопределенности возмущений [8].

Библиографический список

1. Липаев, В. В. Надежность и функциональная безопасность комплексов программ реального времени : монография / В. В. Липаев. – М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. – 281 с.
2. Липаев, В. В. Надежность программных средств / В. В. Липаев. – М. : Синтез, 1998. – 232 с.
3. Майерс, Г. Надежность программного обеспечения / Г. Майерс. – М. : Мир, 1980. – 360 с.
4. Таненбаум, Э. Современные операционные системы / Э. Таненбаум. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2002. – 1040 с.
5. Системное программирование в среде Windows / Джонсон Харт. – 3-е издание. – М. : Вильямс, 2005. – 592 с.
6. Барабанова, П. С. Программный комплекс для изучения синхронизации вычислительных процессов в мультипрограммных системах / П. С. Барабанова // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Самара : Изд-во Самар. науч. центра РАН, 2018. – С. 1235–1239.
7. Воронухин, М. Е. Программный комплекс для изучения планирования вычислительных процессов в операционных системах / М. Е. Воронухин, В. А. Засов // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Самара : Изд-во Самар. науч. центра РАН, 2018. – С. 1239–1243.
8. Засов, В. А. Анализ устойчивости решения задачи разделения сигналов в условиях априорной неопределенности возмущений / В. А. Засов, М. В. Ромкин // Проблемы управления и моделирования в сложных системах : тр. XV Междунар. конф. – Самара : Самарский научн. центр РАН, 2013. – С. 682–688.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЯ НАИБОЛЬШЕГО ОТКЛОНЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВЫПУКЛЫЕ СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ МОДУЛЯ ВРЕМЕНИ

Б. Г. Майоров

АО «Научно-производственное предприятие «Рубин»
г. Пенза, Россия
E-mail: b.g.m.1947@rambler.ru

Введение

Областью практического применения результатов настоящей статьи является преимущественное использование полученных выражений при проектировании систем управления реального времени (СРВ). Особенностями такого режима функционирования являются:

- а) Постоянный шаг дискретизации сигнала (функции) по времени.
- б) Обработка информации и выдача сигналов управления на исполнительные органы СРВ за $(1 \div 2)$ шага дискретизации времени.
- в) Значения сигнала (функции) в точках осуществления выборок при аппроксимации сигнала (функции) не искажают.
- г) Используют аппроксимацию ступеньками или отрезками прямых [1].

Постоянный шаг дискретизации времени T зависит от закона аппроксимации и максимально допустимой погрешности аппроксимации Δ , от максимальных параметров аппроксимируемого сигнала (функции) $p(t)$: наибольшей скорости изменения $\max p^{(1)}(t) = V$, наибольшего ускорения изменения $\max p^{(2)}(t) = a$, наибольшей резкости изменения $\max p^{(3)}(t) = R$ и так далее.

При проектировании СРВ используют два основных метода определения частоты дискретизации $f = 1/T$ или постоянного по величине интервала дискретизации времени T с соответствующими недостатками:

1. Теорема Найквиста, Котельникова, Шеннона (теорема НКШ) [2] имеет недостатки:

а) Восстановление сигнала происходит в течение большого времени существования T_ϕ этой функции (в теореме НКШ – функции звукового сигнала) с последовательным или параллельным суммированием всех мгновенных значений (выборок), которые были сделаны из сигнала. При этом заранее известно, что справедливо неравенство $T_\phi \gg T$. В СРВ большие задержки при обработке сигналов от датчиков во времени не допустимы.

б) Применяемые в практике разработки СРВ методы ступенчатой и линейной аппроксимации вообще не используются и не упоминаются при доказательстве теоремы НКШ [2].

в) На практике и в теории создания современных сигнальных процессоров при условии применения ступенчатой и линейной аппроксимации сигналов обычно используют эмпирическое соотношение $T = (1/2f) / (8 \div 10)$ [3, 4], которое является приблизительным, не имеет строгого теоретического обоснования и уменьшает интервал Найквиста $(8 \div 10)$ раз.

2. Критерий наибольшего отклонения (КНО) В.Н. Хлистунова [5] основан на максимальном значении остаточного члена формулы Лагранжа.

Для полинома нулевой степени функция $p(t)$ аппроксимируется по выборкам ступеньками, для полинома первой степени отрезками прямых линий. Величина шага равномерной дискретизации функции (сигнала)

$p(t)$ по времени (КНО) для двух степеней полиномов записывается, соответственно:

$$T_{p1} = \frac{\Delta}{V} \text{ и } T_{p2} = \sqrt{\frac{8\Delta}{a}} \quad (1)$$

Имеются два существенных недостатка КНО, которые не отмечены в [5]:

а) Совместное рассмотрение выражений (1) показывает, что T_{p1} зависит только от максимальной скорости V , а T_{p2} зависит только от максимального ускорения a . Зависимость T_{p2} одновременно от скорости и ускорения В.Н. Хлистуновым не получена.

б) Отсутствует возможность определения величины T_{pn} (если $n \geq 3$) при условии восстановления функции (сигнала) при помощи ступенчатой или линейной аппроксимации, так как остаточный член формулы Лагранжа при $n=3$ содержит максимальную величину третьей производной от функции (сигнала) $\max p^{(3)}(t) = R$, а аппроксимация осуществляется квадратичными параболой по трём точкам, но не ступеньками или отрезками прямых.

Недостаток а) КНО устранен автором в статье [6], где получено выражение в виде обобщенного критерия наибольшего отклонения (ОКНО) для линейной аппроксимации функции (сигнала) $p(t)$ отрезком прямой линии по двум точкам (поиск на сайте [www.mathnet.ru /rus/ person 62970](http://www.mathnet.ru/rus/person62970)): $T_p = \frac{2\Delta}{V} + \frac{V}{a}$. При условиях $T_{p1} = 0,5T_p$ и $a \rightarrow \infty$ это выраже-

ние преобразуется в первую часть (1) или в T_{p1} . При условии $V = \sqrt{2\Delta a}$ выражение обобщенного критерия равно T_{p2} (1).

Получим выражения критерия ОКНО для нахождения величины T_{pn} , если величина $n \geq 1$ и не имеет ограничений по величине и нечётности.

Определения и основные формулы

Пример физической модели. При условии $n=2$ физическая модель – траектория наибольшего отклонения в виде степенной функции второго порядка (ТНОр2) строится на предположении, что величина (функции) сигнала $p(t)$ между двумя измеренными значениями (соседними выборками) может уйти от первого измеренного значения на максимальной, положительной скорости по квадратичной параболической траектории. Величина (функции) сигнала $p(t)$ должна достичь верхней границы коридора погрешностей Δ и под действием отрицательного ускорения возвратиться на отрицательной, максимальной скорости во второе измеренное значение [6, 7].

Ограничения: На математическую модель траектории ТНОрп наложим ограничения: функция ТНОрп должна быть выпуклой, симметричной относительно оси $t = 0,5T_{pn}$, ее начало и конец должны совпадать с двумя соседними выборками или интервалом дискретизации T_{pn} сигнала (функции) $p(t)$, амплитуда должна быть равна $p(t = 0,5T_{pn}) = \Delta$.

Математические модели ТНОрп и производных от неё по времени

Ограничениям ТНОрп соответствует выпуклая, степенная функция модуля времени [8]:

$$p(t) = \Delta - \frac{\max p^{(n)}(t)}{n!} |t - 0,5T_{pn}|^n, \quad (2)$$

где $0 \leq t \leq T_{pn}$ – интервал времени между двумя соседними выборками из сигнала $p(t)$; (n) – максимальный порядок известной производной от сигнала $p(t)$; $n = 1, 2, 3, \dots$ – максимальный порядок степени согласованной траектории ТНОрп.

Общее выражение для определения i -ой производной от ТНОрп [9]:

$$p^{(i)}(t) = -\frac{\max p^{(n)}(t)}{(n-i)!} |t - 0,5T_{pn}|^{n-i} \times [\operatorname{sgn}(t - 0,5T_{pn})]^i, \quad (3)$$

где (i) – порядок i -ой производной от выражения для ТНОрп (2), $(1 \leq i \leq n)$.

В качестве примера, на рис. 1 изображена траектория ТНОрп3.

Зададим в (2) $n = 3$, $\max p^{(3)}(t) = R$, $p(t = 0) = 0$ и $p(t = T_{p3}) = 0$, получим два одинаковых выражения КНО

$$T_{p3} = 2 \sqrt[3]{\frac{6\Delta}{R}}. \quad (4)$$

Зададим в (3) $n = 3$, $i = 1$, $\max p^{(1)}(t = 0) = V$ и $\max p^{(1)}(t = T_3) = -V$, получим два выражения КНО, которые равны выражению (4)

$$T_{p3} = 2 \sqrt{\frac{2V}{R}}. \quad (5)$$

Зададим в (3) $n = 3$, $i = 2$, $\max p^{(2)}(t = 0) = -a$ и $\max p^{(2)}(t = T_3) = -a$, получим два одинаковых выражения, которые равны выражениям (4) и (5)

$$T_{p3} = 2 \frac{a}{R}. \quad (6)$$

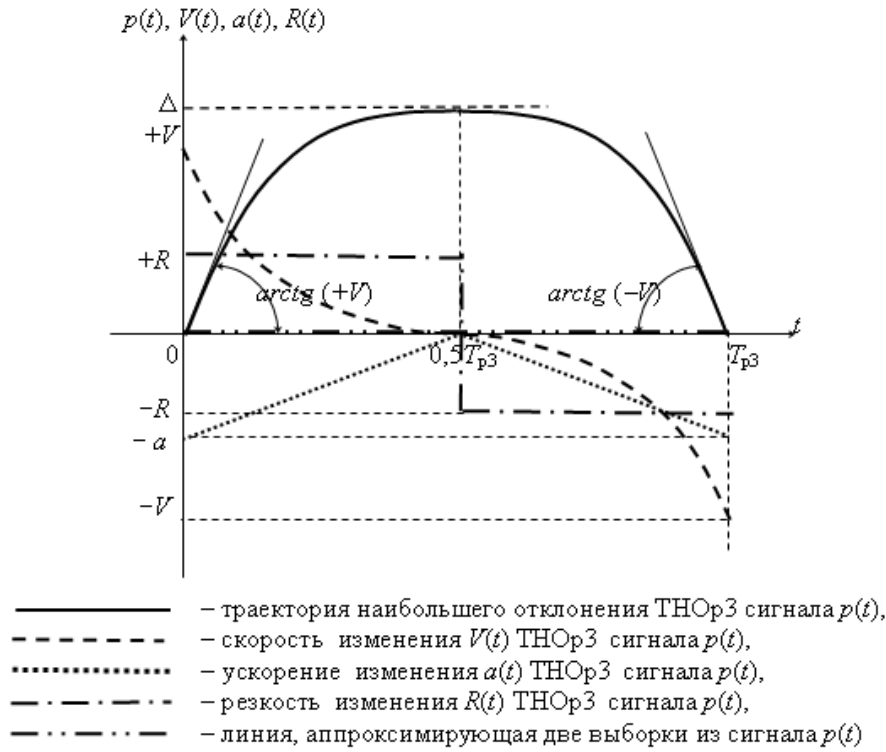


Рис. 1

Используем метод математической индукции, по выражениям (4)-(6) запишем общее выражение для определения T_{pni} в виде цепочки равенств

$$T_{pni} = 2 \left[\frac{(n+1-i)! \max p^{(i-1)}(t)}{\max p^{(n)}(t)} \right]^{\frac{1}{n+1-i}}, \quad (7)$$

где $1 \leq i \leq n$.

Выражение (7) преобразуем, получим:

$$T_{pni} = 2(n+1-i) \frac{\max p^{(i-1)}(t)}{\max p^{(i)}(t)}, \quad (8)$$

где $1 \leq i \leq n$.

Пример 1. По общему выражению (8) запишем его частные случаи.

Для $n=1, i=1$ имеем: $T_{p11} = 2 \frac{\Delta}{V}$. Для $n=2, i=1, 2$ имеем:

$$T_{p21} = 2 \frac{2\Delta}{V} = T_{p22} = 2 \frac{V}{a}.$$

Для $n=3, i=1, 2, 3$ имеем: $T_{p31} = 2 \frac{3\Delta}{V} = T_{p32} = 2 \frac{2V}{a} = T_{p33} = 2 \frac{a}{R}$.

Из примера 1 следует:

Свойство 1. *Отношение члена T_{pn1} цепочки равенств (8), записанного при $(n = n, i = 1)$, к члену T_{p11} цепочки равенств (8), записанного при $(n = 1, i = 1)$, равно $T_{pn1} / T_{p11} = n$.*

Свойство 1 указывает на рост величины T_{pn} , при увеличении n .

Теорема 1. *Максимально допустимая величина интервала равномерной дискретизации функции (сигнала) $p(t)$ по времени T_{pn} определяется:*

$$T_{pn} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (n+1-i) \frac{\max p^{(i-1)}(t)}{\max p^{(i)}(t)}, \quad (9)$$

где $1 \leq i \leq n$, $\max p^{(0)}(t = 0, 5T_{p3}) = \Delta$.

Доказательство. Для диапазона $1 \leq i \leq n$ запишем сумму n членов левой части выражения (8): $\sum_{i=1}^n T_{pni} = nT_{pn}$, где индекс « i » заменим на « n », так как в цепочках равенств выражений (7) и (8), каждый их член $T_{pni} = T_{pn}$. Найдем сумму n членов правой части выражения (8):

$$2 \sum_{i=1}^n (n+1-i) \frac{\max p^{(i-1)}(t)}{\max p^{(i)}(t)}.$$

Имеем равенство сумм левой и правой частей выражения (9).

Свойство 2. *Выражение (9) является средним арифметическим членов T_{pni} цепочки равенств (8), что приводит к усреднению ошибок измерения параметров функции (сигнала) и устранению возникающих по этой причине различий величин T_{pni} .*

Пример 2. По общему выражению (9) запишем его частные случаи.

Для $n = 1, i = 1$ имеем: $T_{p1} = 2 \frac{\Delta}{V}$.

Для $n = 2, i = 1, 2$ имеем: $T_{p2} = \frac{2\Delta}{V} + \frac{V}{a}$. (10)

Для $n = 3, i = 1, 2, 3$ имеем: $T_{p3} = \frac{2}{3} \left[\frac{3\Delta}{V} + \frac{2V}{a} + \frac{a}{R} \right]$. (11)

Из теоремы 1 и примера 2, для $n = 2, i = 1, 2$, имеем выражение (10), которое полностью совпадает с выражением ОКНО в [6]. Этот факт свидетельствует о преимуществах моделей настоящей статьи с моделями КНО [5] и ОКНО [6].

Теорема 2. Максимально допустимая величина интервала равномерной дискретизации функции (сигнала) $p(t)$ по времени T_{p3} (ОКНО) определяется:

$$T_{p3} = 2 \sqrt{\frac{3\Delta a}{VR}}. \quad (12)$$

Доказательство. Для диапазона $1 \leq i \leq 3$ запишем произведение двух членов левой части выражения (8) из примера 1: $T_{p31} \times T_{p33} = T_{p3}^2$, где в результате опустим индексы $i = 1, i = 3$, так как в цепочке равенств выражения (8), каждый член $T_{p3i} = T_{p3}$. Запишем произведение двух членов правой части выражения из примера 1 $T_{p31} = 2\frac{3\Delta}{V}$ и $T_{p33} = 2\frac{a}{R}$:

$$T_{p31} \times T_{p33} = 4\frac{3\Delta}{V} \times \frac{a}{R}.$$

Имеем равенство произведений левой и правой частей выражения (12).

Заключение

Получен обобщенный критерий наибольшего отклонения функции (сигнала), определяющий постоянный интервал времени между выборками из функции через произвольную величину максимального порядка производной от функции, при восстановлении функции ступеньками или отрезками прямых линий.

Из полученных выражений (пример 1, свойство 1) следует, что интервал между выборками существенно возрастает (при $n \geq 3$), что позволяет обосновать количество обрабатываемых физических величин, функций (сигналов) в СРВ при ограничениях на габариты и производительность процессора.

Библиографический список

1. Втюрин, В. А. Основы АСУТП / В. А. Втюрин. – СПб. : ГЛТА, 2006. – С. 87.
2. Шеннон, К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – М. : ИИЛ, 1963.
3. Guan, K. M. Adaptive reference levels in a level-crossing analog-to-digital converter / K. M. Guan, S. S. Koza, A. C. Singer // Eurasip Journal on Advances in Signal Processing. – 2008. – Vol. 2008, iss. 3.
4. A Sequential Sampling Algorithm that Adapts to the Uncertain Sparsity in Signal Environment / K. M. Guan, J. P. Krauss, E. Sovero, G. Tseng, M. Tan // The 2011 Communications Conference. Track 1. Waveforms and Signal Processing. – Redondo Beach. CA., 2011.

5. Хлистунов, В. Н. О погрешности аппроксимации дискретных методов измерения / В. Н. Хлистунов // Приборостроение. – 1960. – № 5. – С. 3–5.
6. Майоров, Б. Г. Обобщенный критерий наибольшего отклонения входных сигналов систем управления / Б. Г. Майоров // Автоматика и Телемеханика. – 2005. – № 10. – С. 148–155.
7. Майоров, Б. Г. Исследование теоремы Котельникова и применение результатов для определения величины дискретизации по времени входных сигналов систем управления / Б. Г. Майоров // Высокопроизводительные вычислительные системы и микропроцессоры : сб. науч. трудов ИМВС РАН. – Вып. 7. – М., 2004. – С. 76–82.
8. Майоров, Б. Г. Модель траектории наибольшего отклонения сигнала (процесса) в виде степенной функции / Б. Г. Майоров // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: СОИУ. – 2015. – № 12, вып. 2. – С. 52–61.
9. Майоров, Б. Г. Модель производной от траектории наибольшего отклонения сигнала (процесса) в виде степенной функции / Б. Г. Майоров // Вопросы радиоэлектроники. Сер.: СОИУ. – 2016. – № 12, вып. 1. – С. 38–43.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РОЯ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

М. Е. Воронухин

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: wape123@list.ru

Многие прикладные задачи управления решаются на основе анализа математических моделей процессов и систем представленных в виде задачи оптимизации. Одним из наиболее распространенных методов для решения задач оптимизации является метод PSO (метод роя частиц – Particle Swarm Optimization) [1,2]. Вычислительная сложность алгоритмов оптимизации велика и для некоторых из алгоритмов может достигать кубической зависимости от n параметров целевой функции. Таким образом, в условиях активного развития технологий Big data, при использовании больших объемов данных, время работы алгоритмов оптимизации будет значительным, что затрудняет использование алгоритмов в системах реального времени, а также в областях промышленности (адаптивная фильтрация, идентификация, компенсация помех и т.д.), науке, управлении, техническими, социальными и экономическими системами.

Одним из перспективных направлений повышения производительности алгоритмов является использование параллельных вычислительных

систем (ВС) и параллельных алгоритмов. При ограничениях в ресурсах вычислительных систем для параллельных вычислений эффективно применение программно-аппаратной архитектуры CUDA [3], которая позволяет существенно увеличить вычислительную производительность благодаря использованию графических процессоров фирмы Nvidia.

Оценка эффективности применяемых параллельных алгоритмов производится на основе вычисления следующих показателей эффективности: ускорения (speedup) $Sp(n)$, получаемого при использовании параллельного алгоритма для p процессоров и сложности задачи n ; эффективности (efficiency) $Ep(n)$ использования параллельным алгоритмом p процессоров (ядер) при решении задачи; стоимость (cost) $Cp(n)$ вычислений, определяемой как произведение времени параллельного решения задачи и числа используемых процессоров и др. [4]. Обычно сложность задачи n определяется ее размерностью - числом входных данных (числом параметров целевой функции).

Следует заметить, что показатели эффективности параллельных алгоритмов являются противоречивыми и действия по повышению значений одного из показателей могут привести к ухудшению значения другого показателя. Например, повышение ускорения $Sp(n)$ обычно может быть обеспечено за счет увеличения числа p процессоров, что приводит, как правило, при фиксированной сложности задачи к уменьшению эффективности $Ep(n)$.

Поэтому важно определить минимальную сложность задачи (размер сетки), при которой для заданного числа процессоров (ядер) и ускорения обеспечиваются требуемые значения показателей эффективности.

Кроме того, эффективность параллелизма в значительной мере зависит от того, в какой мере параллельный алгоритм учитывает архитектуру конкретной параллельной ВС [5]. Параллельные программы сложнее последовательных и затраты на организацию информационного взаимодействия потоков существенно возрастают при увеличении степени распараллеливания, что негативно влияет на рост ускорения вычислений при увеличении числа потоков.

Таким образом, разработка и реализация систем для решения задачи оптимизации в условиях заданных ограничений на время решения задачи и ресурсы вычислительных систем (производительности, объема памяти, стоимости, сложности, энергопотребления) сложная задача. Аналитические оценки показателей эффективности таких систем весьма приблизительны, поэтому для практических приложений более надежными являются показатели, полученные в результате вычислительных экспериментов.

Из вышесказанного следует актуальность проведения экспериментальных исследований эффективности параллельных алгоритмов оптимизации, выполняемых на параллельных вычислительных системах.

Целью работы является исследование эффективности графических ускорителей (ГПУ) с архитектурой CUDA для задачи оптимизации с помощью метода роя частиц. Для достижения цели работы требуется выполнить следующие задачи:

1. Разработать параллельный алгоритм и программу оптимизации методом роя частиц;
2. Провести серию экспериментов и найти такие оценки эффективности, как время выполнения и ускорение.

Метод роя частиц является стохастическим методом численной оптимизации, который подходит для решения задач как одноэкстремальной оптимизации, так и многоэкстремальной [1,2].

Разработанный параллельный алгоритм, реализующий метод роя частиц представлен на рис.1. Алгоритм моделирует многоагентную систему, где агенты-частицы двигаются к оптимальным решениям, обмениваясь при этом информацией с соседями. Текущее состояние частицы характеризуется координатами в пространстве решений, а также вектором скорости перемещения. Оба этих параметра выбираются случайным образом на этапе инициализации. Кроме того, каждая частица хранит координаты лучшего из найденных ей решений, а также лучшее из пройденных всеми частицами решений – этим имитируется мгновенный обмен информацией между частицами.

На каждой итерации алгоритма направление и длина вектора скорости каждой из частиц изменяются в соответствии со сведениями о найденных оптимумах по формуле

$$v_i = v_i + a_1 \cdot rnd() \cdot (pbest_i - x_i) + a_2 \cdot rnd() \cdot (gbest_i - x_i),$$

где v - вектор скорости частицы, a_1 , a_2 - постоянные ускорения, $pbest$ - лучшая найденная частицей точка, $gbest$ - лучшая точка из пройденных всеми частицами, x - текущее положение частицы, а функция $rnd()$ возвращает случайное число от 0 до 1 включительно.

После вычисления направления вектора скорости, частица перемещается в новую точку. В случае необходимости, обновляются значения лучших точек для каждой частицы и для всех частиц в целом. После этого цикл повторяется, пока не выполнится условие остановки. Условие остановки в текущем случае является количество выполненных итераций.

Для применения алгоритма с технологией CUDA распараллелим шаги инициализации частиц, нахождения лучшего значения частиц, коррекции скорости и перемещение частиц.

В качестве целевой функции была взята функция Растригина вида

$$f(x) = An + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - A \cos(2\pi x_i)],$$

где $A=10$. Глобальный минимум функции находится в точке $f(0, \dots, 0) = 0$ при $-5.12 \leq x_i \leq 5.12$.

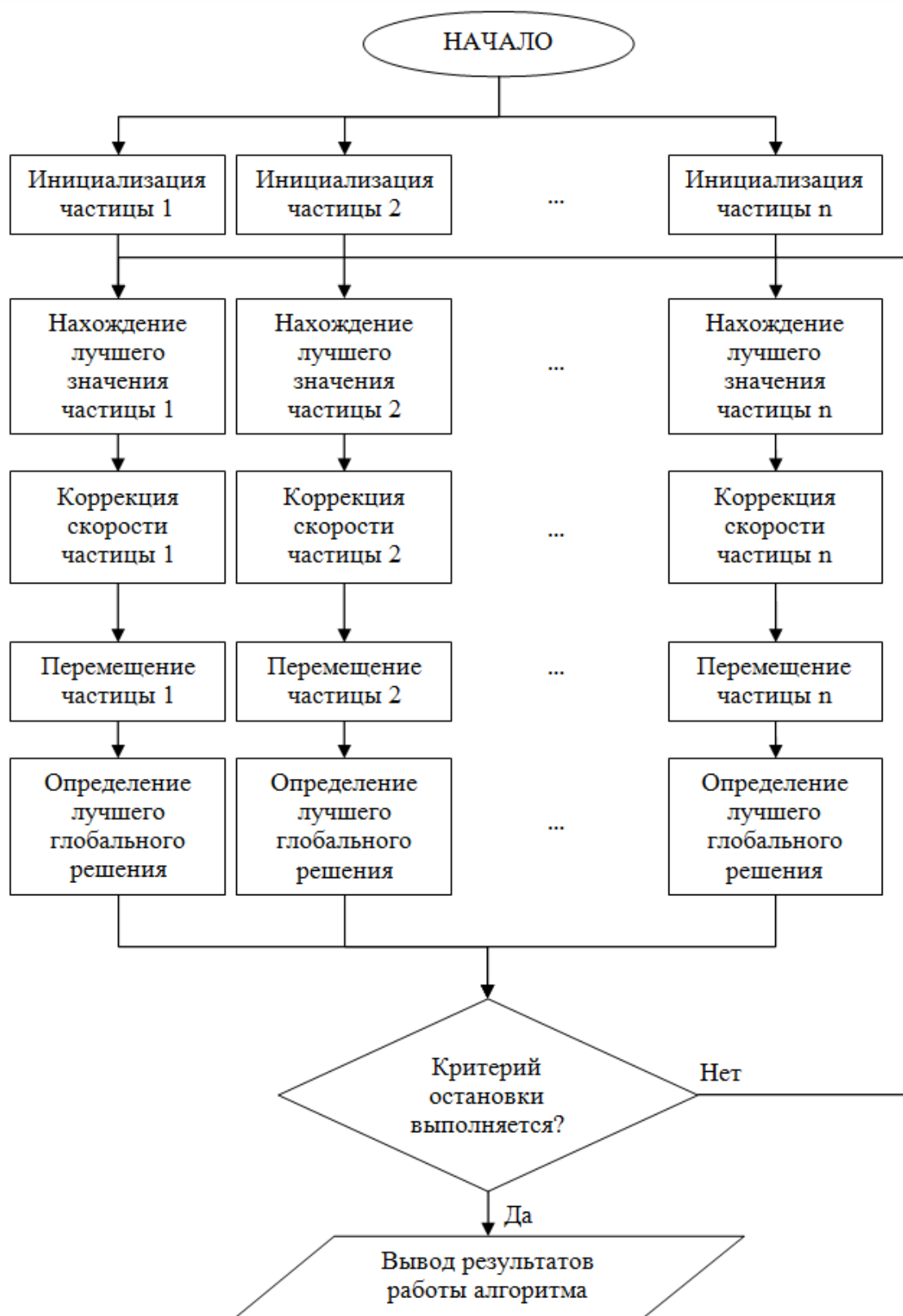


Рис. 1. Параллельный алгоритм роя частиц

В ходе работы были получены результаты, представленные на рис. 2 и 3. Эксперименты выполнены при варьировании следующих параметров: 1) количество частиц P ; 2) разрядность целевой функции N

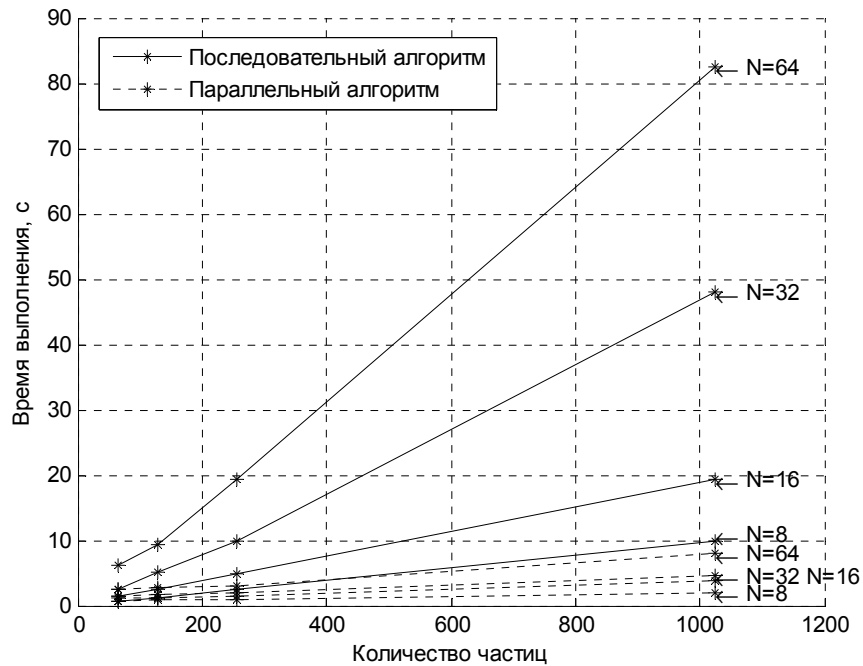


Рис. 2. Время выполнения последовательного и параллельного алгоритмов в зависимости от количества частиц

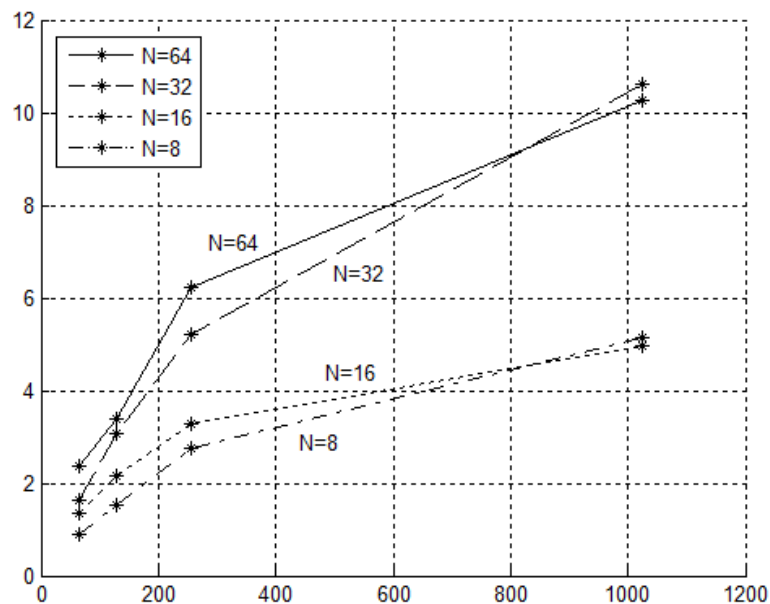


Рис. 3. Ускорение вычислений в функции от числа частиц

График результатов показывает, что при малых значениях параметров распараллеливание может быть неэффективно, поскольку коммуникационные расходы превышают выигрыш при распараллеливании.

Коммуникационные взаимодействия при больших количествах частиц начинают доминировать над преимуществами распараллеливания вычислений, в следствие этого ускорение параллельных вычислений начинает достигать предела.

Таким образом, по результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что применение графических процессоров GPU и программно-аппаратной архитектуры CUDA при решении задач оптимизации параллельным алгоритмом роя частиц практически на порядок уменьшает время решения задач оптимизации с использованием метода роя частиц. Предложенный алгоритм использовался при разработке адаптивного компенсатора помех в сигналах автоматической локомотивной сигнализации, передаваемых по рельсовым каналам и обеспечивающих безопасность движения поездов [6].

Библиографический список

1. Trelea, I. C. The Particle Swarm Optimization Algorithm: convergence analysis and parameter selection / I. C. Trelea // Information Processing Letters. – 2003. – № 85. – P. 317–325.
2. Алгоритм роя частиц. – URL:<http://habrahabr.ru/post/105639/>
3. Курс лекций по CUDA. – URL:https://www.nvidia.ru/object/cuda_state_university_courses_new_ru.html
4. Гергель, В. П. Теория и практика параллельных вычислений : учеб. Пособие / В. П. Гергель. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 423 с.
5. Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация / Ю. К. Демьянович и др. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 344 с.
6. Пат. № 100865 Российская Федерация. Адаптивный компенсатор помех / Засов В. А., Никоноров Е. Н., Тарабардин М. А. – опубл. 27.12.2010, БИ № 36.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ДИВИЗИМНЫМ МЕТОДОМ

П. П. Макарычев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: makpp@yandex.ru

Кластерный анализ данных является одним из распространенных методов теории принятия решений. В настоящее время принято все ме-

тоды кластерного анализа разделять на два класса: иерархические и не-иерархические. Иерархические методы разделяют на два подкласса: дивизимные и агломеративные методы [1, 2]. Отличительная особенность иерархических дивизимных методов – представление исходного множества объектов в виде одного кластера C_0 и разбиение на два кластера C_1, C_2 . Определение кластера с наибольшим размером и применение к этому кластеру процедуры разбиения. В дивизимных методах, как правило, перед реализацией кластерного анализа принимают $C_1 = C_0$ и $C_2 = \emptyset$. Одним из условий завершения процесса разбиения может служить нахождение заданного числа кластеров [3].

Решение задачи кластерного анализа иерархическим дивизимным методом можно разбить на несколько подзадач [4, 5]:

- формирование матрицы расстояний $R = [r_{j,i}]$, $j, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ между объектами кластера C_1 в соответствии с выбранной метрикой для исследуемого предметного пространства;
- оценка среднего расстояния x_j между выбранным объектом q_j кластера C_1 и остальными объектами $C_1 = C_1 \setminus q_j$;
- оценка среднего расстояния y_j между выделенным объектом q_j из кластера C_1 и подмножеством объектов, размещенных в кластере C_2 ;
- размещение объекта q_j в кластере C_2 , если выполняется условие $x_j + \varepsilon > y_j$, где ε - константа, значение которой определяется аналитиком.
- принятие решения по остановке процесса размещения объектов в кластерах C_1 и C_2 , если $x_j + \varepsilon \leq y_j$.
- если количество кластеров меньше заданного, то из двух кластеров определяется кластер наибольшего размера и процедура разбиения объектов повторяется.
- интерпретация результатов разбиения на основе «профилей» кластеров, которые представляются средними значениями, дисперсией и среднеквадратичными отклонениями показателей объектов.

Решение задачи начинается с формирования матрицы расстояний для кластера $C_1 = \{q_0, \dots, q_j, \dots, q_n\}$, в котором каждый объект характеризуется набором числовых показателей

$$q_j = (x_0, \dots, x_i, \dots, x_m).$$

На основе выбранной метрики исследуемого предметного пространства формируется матрица расстояний R между объектами класте-

ра C_1 . Естественно, размерность матрицы расстояний $(n+1) \times (n+1)$ и все элементы главной диагонали равны 0, т.е. $r_{j,j} = 0, j = 0, 1, \dots, n$.

Оценка среднего расстояния x_j . Задаются начальные значения переменных $d = n$, $g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$, где d - количество объектов в кластере C_1 , g - вектор размерности $n+1$, значения элементов которого указывают на присутствие или отсутствие объектов в кластере $g_i \in \{0, 1\}$. Если элемент размещен в кластере C_1 , то $g_i = 1$. Условимся, что среднее расстояние удаленности x_j записывается в диагональный элемент матрицы $r_{j,j}$. Оценка среднего расстояния может быть выполнена за два последовательно реализуемых цикла *for* $j = 0, 1, \dots, n$.

В первом цикле вычисляются значения переменной d и элементов вектора g размерности $n+1$, которые характеризуют текущее состояние кластера C_1 : d - количество оставшихся объектов в кластере, g - размещение строк и столбцов в матрице, соответствующих удаленным объектам из кластера C_1 :

$$\text{если } R_{j,j} > 0, \text{ то } d = d - 1 \text{ и } g_j = 0.$$

Во втором цикле с использованием текущих значений показателей d, g вычисляется среднее расстояние каждого объекта кластера C_1 до остальных объектов по формуле:

$$\text{если } R_{j,j} = 0, \text{ то } x_j = (1 \setminus d) \sum_{i=0}^n R_{j,i} (g_i = 1).$$

По завершению второго цикла определяется среднее расстояние для максимально удаленного объекта от кластера C_1 :

$$s = \max(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \quad (1)$$

где $\max()$ – встроенная функция математического пакета.

На основе значения s определяется значение индекса удаляемого объекта в векторе X (индексы объекта q_k в матрице R)

$$k = \text{match}(s, X), k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

где $\text{match}(s, X)$ – встроенная функция математического пакета.

Оценка среднего расстояния объекта y_k . Задается начальное значение вектора расстояний объектов кластера C_2 : $y_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$. Затем в цикле *for* $j = 0, 1, \dots, n$ вычисляется расстояние выделенного объекта q_k до кластера C_2

$$\text{если } j = k, \text{ то } y_j = (1 \setminus (n - d)) \sum_{i=0}^n r_{j,i} (x_i = 0).$$

Определение кластера для размещения объекта. Если выполняется условие $x_k + \varepsilon > y_k$, то производится корректировка содержимых кластеров.

Поиск максимального значения элемента в векторе X и индекса k объекта с максимальным значением среднего расстояния:

$$s = \max(X); k = \text{match}(s, X).$$

Удаление объекта q_k из кластера C_1 и регистрация в кластере C_2 :

$$Q_{k,k} = s.$$

При невыполнении условия $x_k + \varepsilon > y_k$ объект q_k из кластера C_1 не удаляется и процесс разбиения кластера C_0 на кластеры C_1, C_2 прекращается.

Пример кластерного анализа. Предположим $\varepsilon = 0.01$ и

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 & 11 & 6 & 8 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 6 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 8 & 7 & 9 \\ 11 & 6 & 7 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 7 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате решения задачи кластерного анализа дивизимным методом диагональные элементы матрицы принимают значения:

$$[q_{j,j}] = [6.833 \quad 6.25 \quad 7.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad j = 0, 1, \dots, 6.$$

Из последнего выражения следует, что объекты q_0, q_1, q_2 размещены в кластере C_1 , а объекты q_3, q_4, q_5, q_6 в кластере C_2 .

Выводы. Предварительный расчет расстояний удаленности между объектами кластера C_1 обеспечивает представление кластера в виде матрицы неориентированного графа и для проведения кластерного анализа возможно использование положений теории графов. Предложенный подход к реализации кластерного анализа может быть использован в различных пакетах научных и инженерных расчетов, в том числе Mathcad, Maple, Matlab (Scilab).

Библиографический список

1. Гитис, Л. К. Кластерный анализ в задачах классификации, оптимизации и прогнозирования / Л. К. Гитис . – М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 2001. – 104 с.
2. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction / T. Hastie, R Tibshirani, J. Friedman. – Springer-Verlag, 2009. – 763 p.
3. Мандель, И. Д. Кластерный анализ / И. Д. Мандель. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 176 с.
4. Паклин, Н. Б. Бизнес-аналитика: от данных к знаниям / Н. Б. Паклин, В. И. Орешков. – СПб. : Питер, 2009. – 706 с.
5. Макарычев, П. П. Оперативный и интеллектуальный анализ данных : учеб. пособие / П. П. Макарычев, В. Б. Механов, А. Ю. Афонин. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. – 154 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ INTERNET OF THING В СИСТЕМАХ МОНИТОРИНГА ОБЪЕКТОВ ТРАНСПОРТНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

В. Д. Иванов

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия
E-mail: vl3028127@yandex.ru

Растущая конкуренция на мировых рынках вынуждает транспортную отрасль искать пути повышения эффективности. В ближайшем будущем ключевым направлением развития будет внедрение решений и технологий, связанных с Internet of Things (IoT). Одна из основных целей для транспортной отрасли на ближайшее будущее – сократить затраты и задержки грузов в пути, повысив прозрачность операций и минимизировав участие человека в процессах.

Применения IoT на транспорте является актуальным в настоящее время. Решения и технологии для подключения транспорта к сети уже широко доступны в России. Отслеживание геопозиции и состояния перевозимых грузов, мониторинг транспортной инфраструктуры – перспективные направления развития, имеющие значительный потенциал роста.

В работе рассматривается изучение эффективных способов передачи и сбора данных в системах мониторинга и применение этих способов к программно-аппаратным комплексам с большим объемом поступающей информации, на основе современных интернет технологий. Основное внимание уделено современной технологии IoT.

Интернет Вещей (IoT) – система объединенных компьютерных сетей и подключенных физических объектов со встроенными датчиками и ПО для сбора и обмена данными, с возможностью удаленного контроля и управления в автоматизированном режиме, без участия человека.

Индустриальный (Промышленный) Интернет Вещей (IIoT) – интернет вещей для корпоративного/отраслевого применения - система объединенных компьютерных сетей и подключенных промышленных объектов со встроенными датчиками и ПО для сбора и обмена данными, с возможностью удаленного контроля и управления в автоматизированном режиме, без участия человека. В промышленном применении используется термин «Промышленный интернет». Далее по тексту для упрощения восприятия вместо написания «индустриальный интернет вещей» используется термин «IIoT» в данном контексте.

Принцип работы технологии заключается в следующем: первоначально устанавливаются датчики, исполнительные механизмы, контроллеры и человеко-машинные интерфейсы на ключевые части оборудования, после чего осуществляется сбор информации, которая впоследствии позволяет приобрести объективные и точные данные о состоянии объекта. Обработанные данные доставляются по всей системе. Помимо этого, можно заменить быстро устаревающую бумажную документацию, а также аккумулировать полученные знания. [1]

Полученная информация может быть использована для предотвращения внеплановых простоев, поломок оборудования, сокращения внепланового техобслуживания и сбоев в управлении цепочками поставок, тем самым позволяя предприятию функционировать более эффективно. При обработке огромного массива неструктурированных данных их фильтрация и адекватная интерпретация является приоритетной задачей для мониторинга. Во избежание простоев и для сохранения безопасности необходимо внедрение технологий, позволяющих обнаруживать и прогнозировать риски. Непрерывный активный мониторинг ключевых показателей дает возможность определить проблему и принять необходимые меры для ее решения. Для удобства операторов современные системы позволяют визуализировать условия протекания технологических процессов и выявлять факторы, оказывающие на них влияние, посредством любого веб-браузера. Оперативный анализ помогает пользователям быстрее находить причины неполадок.

Благодаря таким решениям производственные данные превращаются в полезную информацию, которая необходима для безопасного и рационального управления предприятием. Применение датчиков контроля работы оборудования с выходом в сеть позволяет удаленно контролировать его работу, своевременно проводить регламентные работы, предсказывать аварии и проводить планово-предупредительный ремонт или заранее подготовить необходимые детали на замену. Знание о фак-

тической и планируемой загрузке оборудования, соединенного с сетью, позволяет организовать автоматическую сеть между различными частями системы и адекватно реагировать на поступающую информацию. Это достигается путем подключения всех производственных площадок к единой программной платформе. Применение концепции IoT позволяет максимально оптимизировать кооперационные связи для всей сети с целью достижения наиболее эффективного результата для задачи мониторинга объектов.

Управление с использованием IoT основано на информационном и сетевом моделировании, а также на различных информационных моделях. В настоящее время появились новые понятия в области распределенного управления. Это: информационные единицы, информационные отношения, информационные конструкции и информационные ситуации. Информационные единицы являются базисом построения информационных моделей, информационных конструкций и информационных процессов. Информационная конструкция является обобщением специализации.

Можно выделить следующие аспекты, которые необходимо учитывать при применении IoT: системный, проектный, информационный, управленческий, интеллектуальный. Системный аспект позволяет рассматривать систему, технологию или процесс с системных позиций. Проектный аспект позволяет рассматривать схему IoT как информационную конструкцию. Информационный аспект позволяет рассматривать IoT как межсетевое взаимодействие физических устройств, транспортных средств зданий и других предметов, встроенных в электронику, программное обеспечение, датчики, исполнительные механизмы и сеть, которые позволяют этим объектам собирать и обмениваться данными. Управленческий аспект требует рассматривать IoT как систему с сетевым или с субсидиарным управлением. Интеллектуальные системы и технологии используют знание для поиска новых решений и получения новых знаний на этой основе.

В промышленном IoT основными разновидностями «вещей», которые надо подключать к сети, являются различные типы датчиков и приводов. Эти устройства с одной стороны имеют интерфейс с коммуникационной сетью, а с другой — интерфейс, обеспечивающий физическое взаимодействие с процессом, который требуется отслеживать. Задача датчиков и сенсоров — сбор информации. Они могут фиксировать различные физические характеристики, присутствие различных веществ, а также физические события. Сенсоры все чаще интегрируются непосредственно в микросхемы.

Помимо сенсоров, в микросхемы могут встраиваться и приводы, назначение которых — контроль за физическими объектами и управление ими. Такие интегрированные решения называют микроэлектромеха-

ническими системами. Примерами подобных устройств, объединяющих в себе микроэлектронные и микромеханические компоненты, являются акселерометры и гироскопы. Классические же примеры приводов — это моторы, перемещающие различные объекты; клапаны, открывающие и закрывающие каналы поступления жидкости или газа; электрические переключатели. Приводы обычно имеют механический, гидравлический, пневматический или электрический компонент для выполнения необходимых функций, а также электронный блок управления.

Коммуникационный интерфейс — совершенно необходимый компонент устройства IoT. Это может быть проводной или беспроводной интерфейс. Основным кандидатом на универсальную технологию проводной связи является Ethernet. В случае беспроводного подключения это может быть Wi-Fi, а также множество других технологий. Но, независимо от того, какая технология используется на канальном и физическом уровнях, устройство должно непосредственно поддерживать протокол IP, чтобы интегрироваться в инфраструктуру IoT. Кроме того, важнейшим условием использования устройства IoT является наличие средств безопасности. IP — это открытый протокол, поэтому такие средства должны быть интегрированы в устройство изначально.

Современные системы мониторинга можно разделить на несколько уровней (Рис. 1). Непосредственно «в поле», располагаются различные сенсоры, датчики и приводы. Далее следует уровень контроля — например, программируемые логические контроллеры (PLC), которые, собственно, собирают информацию с датчиков и управляют приводами. Уровень управления процессами формируют системы класса SCADA и MES. Наконец, на вершине пирамиды — системы планирования ресурсов предприятия (ERP), которые, как правило, работают на серверах, расположенных в корпоративных центрах обработки данных (ЦОДы).

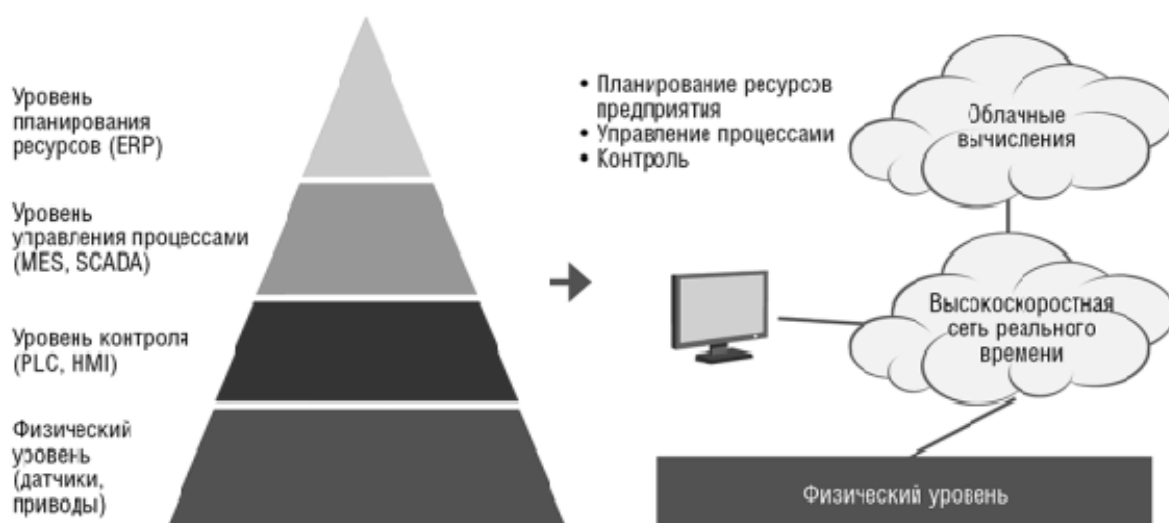


Рис. 1. Переход от классических АСУ ТП к Промышленному интернету вещей

Реализация концепции IoT приведёт к следующим изменениям. Нижний уровень сохранится, однако число устройств на этом уровне экспоненциально вырастет. Кроме того, что даже более важно, устройства этого уровня будут наделяться все большим интеллектом. Они станут частью киберфизических систем и будут способны автономно выполнять многие функции. Большинство же функций, которые в современных системах реализуются устройствами вышестоящих уровней, будут переноситься на высокопроизводительные серверы, которые будут располагаться в серверных кластерах, ЦОДах или облаках.

Хранения данных в данной схеме происходит по средствам технологии BigDataх.[2] В качестве основной технологии реализации вычислений и структурирования данных собранных системой мониторинга применяется DataMining. В качестве основного метода используется метод статистического (слепого) разделения сигналов.[3]

Используя технологию IoT возможно осуществлять сбор и передачу информацию в тех случаях, когда количество источников данных распределенно в большой области и кол-ве. IoT содержит интеллектуальные узлы, которые позволяют реализовывать распределенное управление. IoT содержит собственные вычислительные ресурсы, которые позволяют решать задачи оптимизации не прибегая к мощным центральным компьютерам. Интеллектуальные ресурсы IoT позволяют накапливать управленческий опыт и применять его в новых ситуациях. Для алгоритмов статистического разделения сигналов базирующегося на знании характеристик сигналов источников IoT является основой для сбора информации.

Проведено моделирование принципов технологии IoT и статистического (слепого) разделения сигналов для системы мониторинга объектов транспортной инфраструктуры на разработанном автором программно-аппаратном комплексе использующем технологии Industrial Ethernet. [4-5]

В данный момент технология IoT применяется в локальных масштабах, для решения конкретной задачи. Как пример можно привести, задачу измерения нагрузки ж/д моста. Так же возможно использовать для базы, в исследовательских проектах [6].

Однако массово данная технология не применяется. В связи с этим дальнейшим направлением развития исследований является, разработка системы мониторинга объектов транспортной инфраструктуры на основе комплексного использования современных интернет технологий Big Data, Internet of Things и Data Mining.

Библиографический список

1. Bhatt, C. Internet of Things and Big Data Technologies for Next Generation Healthcare / C. Bhatt, N. Dey, A. S. Ashour. – Studies in Big Data, 2017. – 386 с.

2. Барсегян, А. А. Технологии анализа данных: Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP / А. А. Барсегян, М. С. Купрянов, В. В. Степаненко, И. И. Холод. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 384 с.
3. Засов, В. А. Алгоритмы и вычислительные устройства разделения и восстановления сигналов в многомерных динамических системах : монография / В. А. Засов. – Самара : СамГУПС, 2012. – 210 с.
4. Иванов, В. Д. Программно-аппаратный комплекс для изучения устройств сопряжения с объектами в мехатронике с использованием технологии Ethernet на базе модулей серии ADAM-6000 / В. Д. Иванов, А. Д. Мусиенко // Перспективы развития информационных технологий. – Новосибирск : Изд-во ЦРНС, 2017. – С. 137–143.
5. Иванов, В. Д. Программное обеспечение для изучения распределённых систем сбора данных / В. Д. Иванов // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018) : тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Самара : Самар. науч. центр РАН, 2018. – С. 1257–1261.
6. Засов, В. А. Обеспечение робастности разделения сигналов в условиях априорной неопределённости / В. А. Засов, Е. Н. Никоноров // Математическое моделирование, численные методы и информационные системы : материалы 2-й Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. – Самара : САГМУ, 2010. – С. 101–109.

ПРИМЕНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО СИНХРОКОЛЬЦА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ СВЕТОВЫХ ВОЛН В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

А. В. Рудин, В. В. Волков, Д. В. Овчинников, Е. И. Тулякова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия
E-mail: physics@pnzgu.ru

В современной технике физических измерений широко используются оптические световоды, находящиеся в трех различных агрегатных состояниях, параметры которых рассчитываются по скорости света в данных средах. Для измерения фазовой скорости световых волн в жидких и газообразных средах наиболее точным является метод оптического интерферометра, при использовании которого измеряется длина волны. Для последующего расчета скорости света необходимо знать точное значение периода или частоты световых волн, которое представляет собой сложную техническую задачу, а в некоторых случаях не представляется возможным [1].

В данной работе предлагается оригинальная методика, позволяющая с высокой точностью проводить измерения групповой скорости световых волн видимого диапазона в газовой среде, например в воздухе. Предлагаемый метод основан на измерении частоты следования запускающих синхроимпульсов оптико-акустического синхрокольца, которое образовано из последовательно соединенных в кольцо оптического и акустического каналов. Работа синхрокольца обеспечивается за счет повторного запуска задающего генератора прямоугольных импульсов, являющийся источником импульсного тока полупроводникового излучателя света, например лазера, который излучает в исследуемую среду короткие оптические импульсы с прямоугольной огибающей.

Короткий оптический импульс распространяясь в исследуемой среде (например, в воздухе или иной среде) достигает фотоприемника и после предварительного усиления подается на вход ультразвуковой линии задержки (УЛЗ), необходимой для развязки переднего и заднего фронтов оптического импульса, обусловленного ограниченной длиной оптической базы ℓ . На выходе ультразвуковой линии задержки акустический импульс преобразуется в электрический прямоугольный импульс с крутым передним фронтом, время распространения τ которого в исследуемой среде от оптического излучателя до фотоприемника и в звукопроводе УЛЗ задает частоту синхронизации f , равную $1/\tau$, которая и обеспечивает периодически повторяющиеся импульсы в данном оптико-акустическом синхрокольце.

Блок-схема лабораторной установки, реализующей метод оптико-акустического синхрокольца кольца приведена на рис. 1.

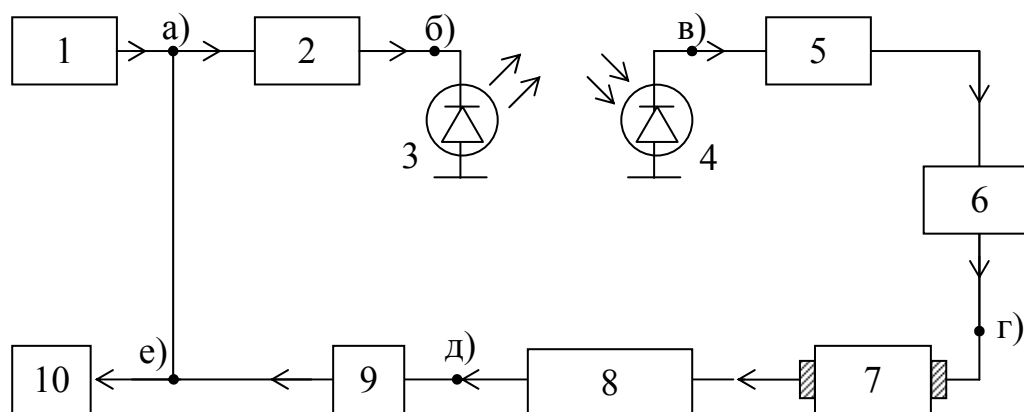


Рис. 1. Блок-схема лабораторной установки: 1 – пусковое устройство; 2 – генератор прямоугольных импульсов; 3 – излучающий светодиод; 4 – фотоприемник; 5 – импульсный усилитель; 6 – генератор импульсов высокой частоты; 7 – ультразвуковая линия задержки (УЛЗ-7); 8 – резонансный усилитель высокой частоты (УВЧР-8); 9 – детектор; 10 – электронный частотомер

Принцип работы электронно-измерительной схемы следующий. С выхода пускового устройства 1 подается одиночный пилообразный короткий импульс на вход генератора прямоугольных импульсов 2, работающий в ждущем режиме. Прямоугольный электрический импульс заданной длительности и амплитуды подается непосредственно на светоизлучающий светодиод, который преобразует его в световой импульс. Короткий световой импульс распространяясь в исследуемой среде достигает фотоприемника 4, который преобразует его в электрический импульс прямоугольной формы.

С выхода фотоприемника 4 электрический импульс поступает после предварительного усиления в импульсном усилителе 5 на вход импульсного генератора высокой частоты 6, настроенного на резонансную гармонику излучающего пьезоэлектрических преобразователей ультразвуковой линии задержки УЛЗ-7. Ультразвуковая линия задержки 7 представляет собой камеру, заполненную жидкостью, например дистиллированной водой, на торцах которой компланарно закреплены излучающий и приемный пьезоэлектрические преобразователи с одинаковой резонансной частотой [2]. После задержки в УЛЗ 7 электрический импульс усиливается резонансным ВЧ-усилителем 8 и после детектирования в блоке 9, совмещенного с дифференцирующей RC - цепочкой, поступает на вход электронного частотомера 10 и одновременно на вход генератора прямоугольных импульсов 2, который и обеспечивает повторный запуск оптического и акустического импульсов, в оптико-акустическом синхрокольце, соответственно.

Длина акустической базы УЛЗ 7 выбирается из условия [3], чтобы выполнялось неравенство:

$$\ell \geq \frac{1}{2} \cdot v_z \cdot \tau, \quad (1)$$

где v_z – скорость распространения ультразвуковых волн в жидкости; τ – длительность акустического импульса, которая рассчитывается из выполнения следующего условия.

Спектр последовательности радиоимпульсов располагается вокруг несущей частоты f_o . В результате ослабления отдельных спектральных составляющих спектр прошедших через акустическую среду высокочастотных радиоимпульсов видоизменяется, и чтобы можно было отнести его с допустимой точностью

$$\frac{\Delta f}{f_o} \leq 0,005, \quad (2)$$

к несущей частоте зондирующего радиоимпульса, необходимо соблюдать выполнение неравенства [3]:

$$\tau_{\min} \geq 15 / f_o. \quad (3)$$

Неравенство (3) ограничивает длительность радиоимпульса снизу. Выполнение неравенства (1) необходимо для предотвращения наложения заднего и переднего фронтов акустического импульса, возникающих в результате отражений проходящего акустического импульса от противоположных торцов излучающего и приемного пьезоэлектрических преобразователей непосредственно помещенных в звукопроводящей жидкости ультразвуковой линии задержки УЛЗ - 7.

На рисунке 2 приведены эпюры напряжений электрических и оптико-акустических сигналов на входах или выходах электронных блоков.

Чтобы наблюдать устойчивую работу синхрокольца прямоугольный оптико-акустический импульс необходимо преобразовать в короткий синхроимпульс с крутым передним фронтом, которое обеспечивается специально введенным в блок детектора 9 дифференцирующей RC-цепочки, которая и формирует короткий запускающий синхроимпульс пилообразной формы.

Частота следования повторных синхроимпульсов f оптико-акустического синхрокольца измеряется с высокой точностью с помощью электронного частотомера, типа ЧЗ-33. Главным преимуществом оптико-акустического синхрокольца, для измерения скорости ультразвука в исследуемой газовой среде является то, что она обеспечивает практически автоматические измерения, так как дополнительные регулировочные процедуры для измерения скорости световых волн не требуются.

Частота следования повторных синхроимпульсов синхрокольца связана с временем распространения импульсов в звукопроводе и исследуемой среде обратной зависимостью:

$$f = \frac{1}{\tau},$$

где

$$\tau = \tau_C + \tau_3, \quad \tau_C = \frac{\ell}{v}, \quad \tau_3 = \frac{\ell_3}{v_3}. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{1}{f} = \frac{\ell}{v} + \frac{\ell_3}{v_3}, \quad \frac{1}{f_1} = \frac{\ell_1}{v} + \frac{\ell_3}{v_3}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{\ell_2}{v} + \frac{\ell_3}{v_3}, \quad \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{\ell_1}{v} - \frac{\ell_2}{v}, \quad (5)$$

где τ_C, τ_3 – время распространения оптического и акустического импульсов, v, v_3 – скорость света в исследуемой среде и звука в жидкости УЛЗ, ℓ, ℓ_3 – длина оптической и акустической базы, соответственно.

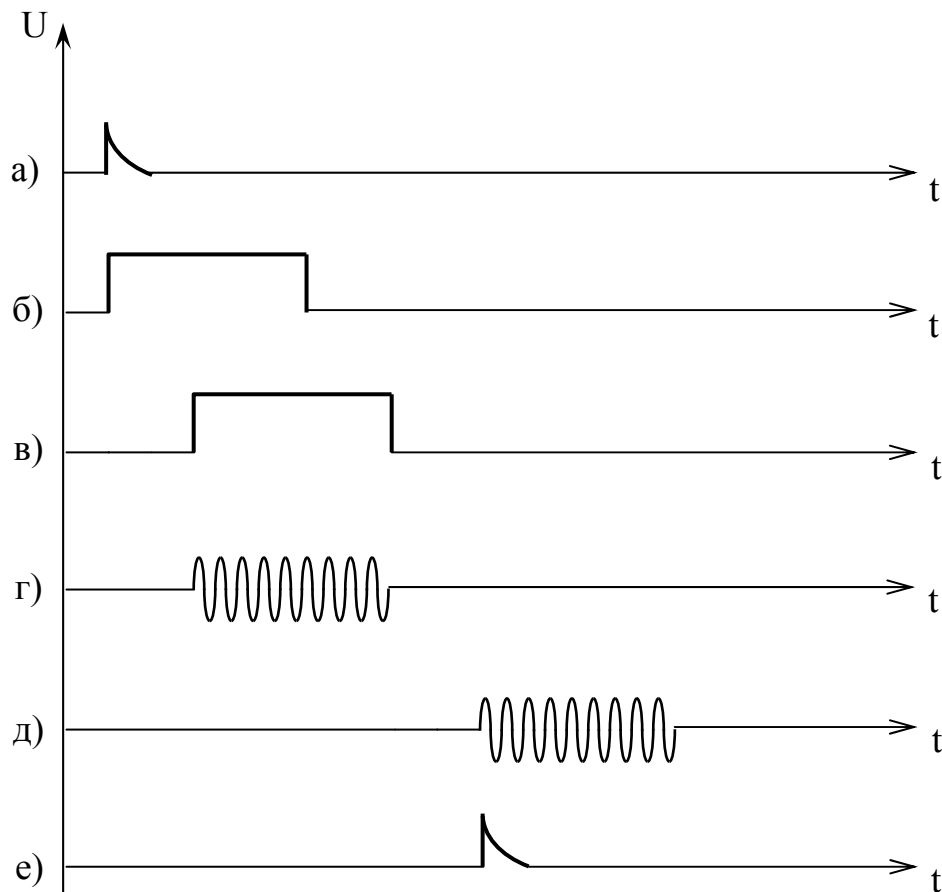


Рис. 2. Временная зависимость электрических и оптико-акустических импульсов в синхрокольце: а) запускающий одиночный пилообразный электрический импульс на выходе пускового устройства 1 (см. рис. 1); б) прямоугольный импульс на выходе генератора прямоугольных импульсов 2 и на входе излучающего светодиода 3; в) прямоугольный импульс на выходе фотоприемника 4, после преобразования светового импульса, прошедшего через оптическую среду; г) высокочастотный радиоимпульс на выходе генератор импульсов высокой частоты 6, сформированного прямоугольным оптическим импульсом после усиления импульсным усилителем 5; д) высокочастотный радиоимпульс на выходе резонансного усилителя высокой частоты 8, предварительно прошедшего через акустический тракт ультразвуковой линии задержки 7; е) вторичный запускающий пилообразный электрический импульс на выходе детектора 9 и одновременно на входе генератора прямоугольных импульсов 2 и на входе электронного частотомера 10

После преобразования выражения (5) величину измеряемой скорости световых волн в исследуемой среде можно рассчитать по формуле:

$$v = \frac{(\ell_2 - \ell_1) \cdot f_1 \cdot f_2}{f_1 - f_2}, \quad (6)$$

где f_1, f_2 – частоты повторения вторичных синхроимпульсов для двух различных оптических длин исследуемой среды ℓ_1, ℓ_2 , соответственно.

Выше описанная методика импульсного оптико-акустического синхрокольца позволяет непосредственно измерять групповую скорость распространения светового импульса v в исследуемой среде, например в воздухе при изменении оптической базы на величину $(\ell_2 - \ell_1)$, не превышающей 6 метров, что вполне приемлемо для проведения экспериментальных исследований в лабораторных условиях.

Относительную погрешность с помощью выше описанной методики можно рассчитать по формуле:

$$\varepsilon_v = \sqrt{\left(\frac{2\Delta\ell}{\ell_2 - \ell_1}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta f}{f_1 - f_2}\right)^2}. \quad (7)$$

Измерение частоты следования электрических синхроимпульсов импульсов измеряется электронным частотомером с относительной погрешностью:

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f} = 10^{-6}, \text{ где } f \approx \frac{v_3}{\ell_3} = \frac{1500}{0,1} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Гц}.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f} = 10^{-6}, \text{ где } \Delta f = \varepsilon_f \cdot f = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Гц}.$$

При $\ell_2 - \ell_1 = 6 \text{ м}$, для соответствующих частот получим:

$$f_1 = 15008 \text{ Гц}; f_2 = 15000 \text{ Гц}.$$

Относительная погрешность для скорости v окончательно определится:

$$\varepsilon_v = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0,01}{6}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,015}{8}\right)^2} = \sqrt{1,11 \cdot 10^{-5} + 1,4 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^{-3},$$

или в процентах: $\varepsilon_v = 0,5 \%$.

Выше описанная установка обеспечивает высокую точность измерений скорости света и может быть успешно использована в университетских лабораториях оптики.

Библиографический список

1. Федосов, И. В. Геометрическая оптика / И. В. Федосов. – Саратов : Сателлит, 2008. – 92 с.
2. Неразрушающий контроль : справочник : в 7 т. / под общ. ред. В. В. Клюева. Т. 3. Ультразвуковой контроль / И. Н. Ермолов, Ю. В. Ланге. – М. : Машиностроение, 2004. – 864 с.
3. Электронная аппаратура ультразвуковых установок для исследования твердого тела / М. А. Криштал, Б. Е. Пестов и др. – М. : Энергия, 1974. – 224 с.

О ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РОДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ ПО ЗАПИСЯМ ГОЛОСОВ

Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева, И. В. Алексеев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: Gef44@yandex.ru, tank1100@yandex.ru, idalexixxx@gmail.com

Способность людей к распознаванию людей по голосам является уникальной как по своей точности, так и по адаптивности: идентификация может выполняться в различных условиях, в том числе и при наличии посторонних шумов, а также наличия возрастного и контекстно-независимого факторов.

В настоящее время существуют различные оценки степени родства по признакам внешности. Предпринимаются попытки создания моделей, позволяющих идентифицировать голоса на наличие генетических родственных связей.

При разработке методов распознавания речи важную роль играет выбор системы признаков и методов идентификации, использующих эти признаки. Весь процесс обработки речевого сигнала можно разбить на несколько этапов:

- предобработка сигнала;
- выделение критериев;
- распознавание диктора.

Каждый этап представляет алгоритм или некоторую совокупность алгоритмов, что в итоге дает требуемый результат. На каждом этапе результат работы будет представлять собой входные параметры для следующего. В цифровой обработке сигналов под сигналом понимают его математическое описание, т.е. некоторую вещественную функцию, содержащую информацию о состоянии или поведении физической системы при каком-нибудь событии, которая может быть определена на непрерывном или дискретном пространстве изменения времени или пространственных координат.

В широком смысле под системами ЦОС понимают комплекс алгоритмических, аппаратных и программных средств. Как правило, системы содержат специализированные технические средства предварительной (или первичной) обработки сигналов и специальные технические средства для вторичной обработки сигналов. Средства предварительной обработки предназначены для обработки исходных сигналов, наблюдаемых в общем случае на фоне случайных шумов и помех различной физической природы и представленных в виде дискретных цифровых отсчетов. Полученная в результате предварительной обработки полезная информа-

ция поступает в систему вторичной обработки для классификации, архивирования, структурного анализа.

Основными процедурами предварительной обработки сигналов являются процедуры быстрых дискретных ортогональных преобразований (Z – преобразование, БПФ), реализуемых в различных функциональных базисах, процедуры линейной алгебры, линейной и нелинейной фильтрации.

В задачах ЦОС выделяют этапы предварительной (первичной) и вторичной обработки сигналов. Это связано с тем, что в общем случае на входе системы ЦОС наблюдается смесь $V(t)$ полезного сигнала $x(t)$, некоторого шума $n(t)$ и различных помех разной природы $p(t)$:

$$V(t) = x(t) + n(t) + p(t),$$

где $n(t)$ является характеристикой самого технического устройства, а $p(t)$ – некоторое искажающее воздействие самой физической среды, в которой распространяется сигнал (например, затухание). Важнейшей задачей предварительной обработки сигнала является подавление $n(t)$ и $p(t)$ (шума и помехи).

Вследствие того, что на вход приемного устройства системы поступает сумма полезного сигнала и помехи, вероятность правильного приема будет определяться отношением полезного сигнала к помехе. Для повышения вероятности правильного приема сигнала должна быть произведена предварительная обработка принятого сигнала, обеспечивающая увеличение отношения сигнал/помеха.

Таким образом, средства предварительной обработки при приеме должны содержать два основных элемента (рисунок 1): фильтр Φ , обеспечивающий улучшение отношения сигнал/помеха, и решающее устройство РУ, выполняющее главные функции приема (обнаружения, различения и восстановления сигналов).

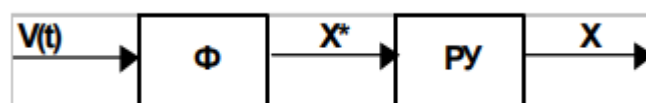


Рис. 1. Структура оптимального приемного устройства

Известны следующие методы фильтрации, обеспечивающие улучшение соотношения сигнал/помеха:

- метод накопления;
- частотная фильтрация;
- корреляционный метод;
- согласованная фильтрация;
- нелинейная фильтрация.

Все эти методы основаны на использовании различий свойств полезного сигнала и помехи. На этапе предварительной обработки в ряде случаев формируются также некоторые количественные оценки сигнала (амплитуда, частота, фаза).

Система вторичной обработки речевого сигнала предназначена для идентификации обнаруженного сигнала, его классификации и обработки, например, выделения основного тона и обертонов.

В статье “Выделение признаков речевых сигналов, различающихся в мужской и женской речи” предложен метод для идентификации мужских и женских голосов. По итогам исследования решено обратиться к поиску наиболее оптимального метода фильтрации исходных речевых сигналов, т.к. результатом предварительной обработки речевых сигналов является получение множества спектральных векторов, характеризующих этот сигнал и использующихся для дальнейшего распознавания.

Для идентификации диктора по речевому сигналу известно достаточно много методов. Встает задача определить по речевому сигналу наличие родственных связей в зависимых голосах, т.е. выделить признаки, общие для людей, находящихся в близком родстве.

Как известно, анатомическое строение гортани (и не только) передается по наследству. Следовательно, можно предположить, что близкие родственники одного пола могут иметь похожие голоса. К признакам можно отнести: тембр, высоту звука, интонацию, тон, особенности передачи семантической информации. Поэтому для выделения признаков сходства необходимо брать основные тоны и обертоны так, чтобы они отличались на октавы. Заметим, что высокие мужские и низкие женские тоже могут иметь общие характеристики.

В ходе исследования, проведенного в статье [3], использовались методы спектрального анализа, в основе которого лежит аппарат дискретного преобразования Фурье. К сожалению, при практическом применении приходится ограничиваться конечным количеством отсчетов. Здесь использовались фильтры, относящиеся к типу линейной фильтрации сигналов, т.е. для которых выполняется принцип суперпозиции

$$F(x + y) = F(x) + F(y),$$

где F - фильтр, применяемый к некоторому процессу, x и y - сигнал и помеха.

Все фильтры, для которых не выполняется данное условие, относятся к классу нелинейных фильтров.

Применение линейных фильтров не всегда является оптимальным. Иногда возникает необходимость обращения к методам нелинейной фильтрации. Однако стоит отметить, что для алгоритмов цифровой нелинейной фильтрации в целом характерно более низкое быстродействие, чем для цифровых линейных фильтров. Однако и главное преимущество

их использования состоит в том, что на практике существует большое количество ситуаций, когда их применение является более целесообразным, нежели применение линейных фильтров.

Например, медианный фильтр является самым известным из нелинейных фильтров и представляет собой оконный фильтр, последовательно скользящий по массиву сигнала, и возвращающий на каждом шаге один из элементов, попавших в окно (апертуру) фильтра. Выходной сигнал y_k скользящего медианного фильтра шириной $2n+1$ для текущего отсчета k формируется из входного временного ряда $\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots$ в соответствии с формулой:

$$y_k = \text{med}(x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+n-1}, x_{k+n}),$$

где $\text{med}(x_1, \dots, x_m, \dots, x_{2n+1}) = x_{n+1}$, x_m - элементы вариационного ряда, т.е. ранжированные в порядке возрастания значений x_m :

$$x_1 = \min(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{2n+1} = \max(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}).$$

Таким образом, представляет интерес задача по поиску оптимального фильтра, позволяющего подавить помехи и выделить характеристики, определяющие наличие родственных связей между говорящими.

Будущее исследование посвящено обнаружению акустических характеристик, которые передают информацию, относящуюся к личности говорящего и его родственных связей. В дальнейшем предусмотрена экспериментальная разработка модели идентификации говорящего и его родственных связей.

Библиографический список

1. Рабинер, Л. Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л. Р. Рабинер, Р. В. Шафер. – М. : Радио и связь, 1981.
2. Fant, G. G. M. Acoustic theory of speech production. Mouton & Co. / G. G. M. Fant // The Hague. – Paris, 1970. – 328 p.
3. Сипягина, Е. Е. Выделение признаков речевых сигналов, различающихся в мужской и женской речи / Е. Е. Сипягина, Т. В. Черушева // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 255–259.
4. Черушева, Т. В. Акценты в речи людей / Т. В. Черушева, Ю. С. Андрешкина // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 20–22 мая 2015 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015.
5. Тропченко, А. Ю. Цифровая обработка сигналов. Методы предварительной обработки : учеб. пособие по дисциплине «Теоретическая информатика» / А. Ю. Тропченко, А. А. Тропченко. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. – 100 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗВИТОЙ СЕМАНТИКИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИМОРФИЗМА ПОДТИПОВ

Д. Е. Яблоков

Самарский национальный исследовательский университет,
г. Самара, Россия
E-mail: dyablokov@gmail.com

Под обобщенным программированием [1] понимается разработка алгоритмов и структур данных с использованием механизмов универсализации за счет применения определенного уровня абстракции для решения множества задач, возникающих в процессе конструирования программного обеспечения. Данное направление хорошо зарекомендовало себя при реализации обобщенных алгоритмов, когда алгоритм проектируется не в терминах специфической структуры данных, а с точки зрения обобщенной стратегии, которая предполагает использование многих структур данных, удовлетворяющих некоторому набору абстрактных требований. Представленная в [2] стратегия проектирования, реализации и применения алгоритмов и адаптеров структур данных, с использованием обобщенных концепций на базе параметрического полиморфизма подтипов, формирует идейно-смысловой контур такого подхода. За счет разделения базовых типов данных, абстрактных структур и алгоритмов, она позволяет производить взаимодополняющее комбинирование встроенных типов, разрабатываемых компонентов и пользовательского кода.

Для решения многих задач связанных с вычислениями и обработкой данных от алгоритмов требуется поддержка развитой семантики. Степень развитости семантики для встроенного или пользовательского типа можно выразить в терминах некоторой абстрактной характеристики, определяющей возможность его применения в алгоритме в качестве входного, выходного или внутреннего объекта. Такой характеристикой может быть: способность доступа к любой позиции обрабатываемых данных за константное амортизированное время; поддержка всех или одного из режимов чтения или записи; возможность обхода с постоянным шагом в прямом или обратном направлении; сохранение текущего состояния с помощью создания глубокой (deep) копии; применимость в выражениях, требующих поддержки функциональности, выраженной в терминах нулевой, унарной или бинарной операции.

К сожалению, до настоящего момента, в составе Microsoft .NET Framework[®] нет устоявшейся реализации и четко сформированных кон-

цептуальных границ для средств, представления и обработки данных в виде линейных диапазонов, обладающих всеми из приведенных выше характеристик. Технологии, используемые в обобщенных методах расширения Linq[®] [3], хотя и предполагают создание структурированных запросов к любым наборам данных реализующим интерфейс IEnumerable<T>, но именно они иногда является причиной низкой эффективности определенных классов алгоритмов. Семантика перебора элементов для всех компонентов, наследующих интерфейсу IEnumerator<T>, всегда будет рудиментарной т.к. основывается на самой слабой нотации обхода диапазонов [2] и предоставляет доступ к значению текущего элемента в режиме только для чтения. Единственным способом ускорить работу алгоритма может быть только смена способа представления данных на абстракцию, поддерживающую более развитую семантику.

В статье исследуется возможность увеличения эффективности одного из алгоритмов, принадлежащего к классу сравнения с образцом. Применение обобщенных концепций итераторов с более развитой семантикой обработки данных, позволило повысить производительность относительно реализаций с использованием средств того же уровня (без непосредственного доступа к структуре хранения) из состава инструментария Linq[®]. При исследовании не использовались технологии регулярных выражений, а также не ставилась задача проведения полного асимптотического анализа. Представленные результаты тестов не содержат сведений о работе алгоритма на разных аппаратных или программных платформах. Показана зависимость времени выполнения от главного критерия оценки эффективности N , который в данном случае соответствует количеству элементов в обрабатываемом наборе данных.

Постановка задачи. Необходимо найти в произвольном наборе данных, вне зависимости от типа значений элементов, позицию первого вхождения, идентичного некоторой последовательности, за минимально возможное время. Рассматриваются наилучший, средний и наихудший случай с положением искомого образца вначале, в середине и в конце исходного набора, соответственно (рис. 1).

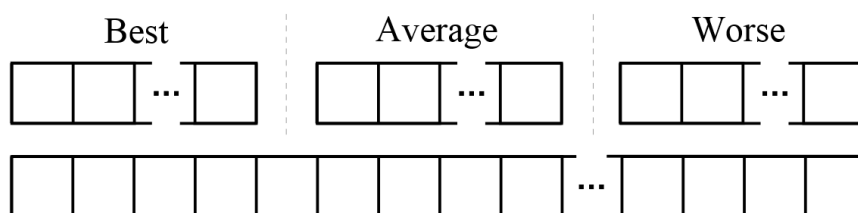


Рис. 1. Расположение искомого образца вначале (наилучший случай – Best), в середине (Average) и в конце (наихудший случай – Worse) исходного набора данных.

В наихудшем случае сложность должна линейно зависеть от длин основного и искомого диапазонов, а в наилучшем случае – только от длины образца, который нужно отыскать. В качестве тестовых наборов данных использовались случайным образом заполненные диапазоны целых чисел размером от 100 до 1000000 элементов и шагом, увеличивающим длину исследуемого интервала на порядок.

Первая тестовая реализация использует стандартные операторы запросов из технологии Linq[®] (рис. 2), где на каждой итерации по набору данных (source) происходит фильтрация (Where) со смещением относительно начальной позиции (Skip), выборкой количества элементов равного длине поддиапазона (Take) и последующим поэлементным сравнением с образцом (SequenceEqual).

```
source
    .Select((item, i) => new{item, i})
    .Where((item, i) =>
source.Skip(i).Take(subseq.Length).SequenceEqual(subseq))
    .Select(data => data.i)
    .DefaultIfEmpty(-1)
    .First();
```

Рис. 2. Пример кода алгоритма при использовании Linq[®].

Как видно из результатов тестов (табл. 1) скорость выполнения в среднем и наихудшем случаях незначительно ниже, но с увеличением N очень существенно падает из-за, синтаксических и семантических особенностей интерфейса IEnumerable<T>.

Таблица 1
Результаты тестов для алгоритма при использовании Linq[®]

N	Best, sec.	Average, sec.	Worse, sec.
100	0,0097277	0.0102721	0.0110064
1000	0.0101214	0.0104688	0.0114302
10000	0.0123270	0.0467868	0.1104186
100000	0.0112699	3.2286318	9.9280447
1000000	0.0127912	322.3804491	993.2032947

Метод GetEnumerator() из сигнатуры IEnumerable<T>, создавая экземпляр объекта, реализующего интерфейс IEnumerator<T>, передает его в цикл обработки данных. Проблема кроется в организации механизма итерирования, где старт каждого очередного прохода происходит не с позиции с единичным смещением относительно нижней границы предыдущего интервала поэлементного сравнения, а с самого начала исходного набора данных (рис. 3).

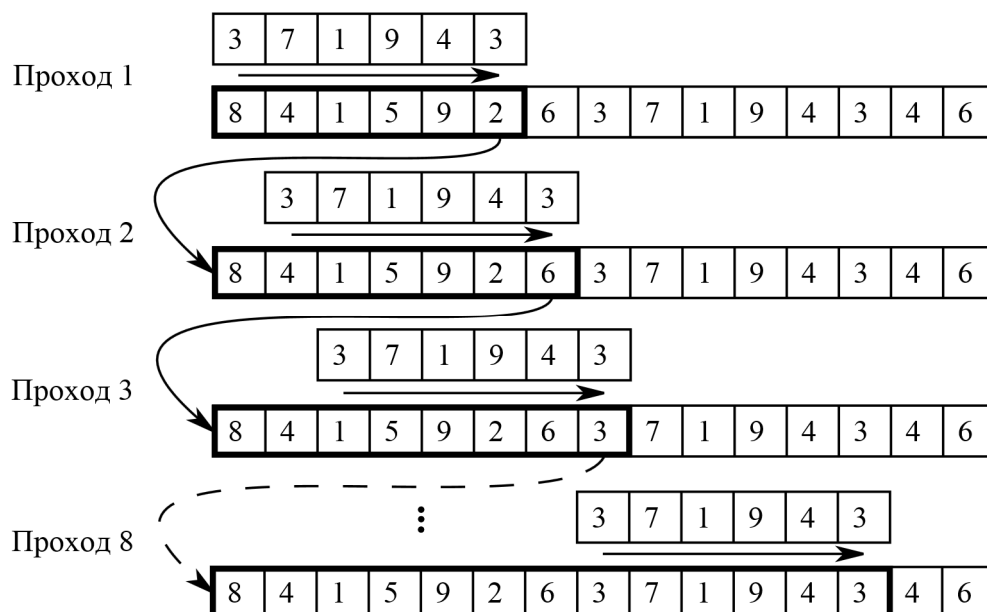


Рис. 3. Принцип работы механизма итерирования при использовании Linq®

Все это сильно замедляет процесс обхода и как следствие негативно сказывается на производительности алгоритма в целом.

Следующая реализация основывается на распараллеливании работы алгоритма с использованием оператора `AsParallel` по технологии P.Linq®. Источник данных разбивается на сегменты, каждый из которых обрабатывается в отдельном потоке, что согласно документации Microsoft® [4] позволяет существенно повысить производительность и сократить время выполнения для некоторых видов запросов.

```
source
    .AsParallel()
    .Select((item, idx) => new{item, idx})
    .Where((item, idx) =>
source.Skip(idx).Take(subseq.Length).SequenceEqual(subseq))
    .Select(data => data.idx)
    .DefaultIfEmpty(-1)
    .First();
```

Рис. 4. Пример кода алгоритма при использовании P.Linq®.

Результаты тестов (табл. 2) показывают, что параллелизм может вызывать и свои собственные сложности, связанные с механизмами синхронизации, поэтому не все операторы запросов могут выполняться быстрее, а некоторые даже замедляются.

При увеличении количества элементов N , суммарное время работы параллельной версии для всех случаев получилось больше чем для последовательной реализации, хотя для наихудшего случая и наблюдался некоторый прирост производительности. В официальной документации [4] говорится, что существуют формы запросов, которые даже в парал-

тельном режиме будут выполняться последовательно. К ним относятся конструкции, которые содержат, изменяющие исходные данные инструкции *Select*, индексированные версии *Where*, операторы смещения или выборки *Skip* и *Take*, соответственно, а также операции сравнения по критерию эквивалентности *SequenceEqual*. Утверждается, что для увеличения скорости обработки при параллельном исполнении, необходимо провести дополнительный анализ включающий: оценку вычислительной стоимости общей работы, степени параллелизма, числа и категорий используемых операций, формы выполнения запросов, вида параметров слияния и вида секционирования. Но это выходит за рамки данной статьи и более относится к теме о технологиях ускорения выполнения запросов в параллельном режиме с многоядерными процессорами.

Таблица 2

Результаты тестов для алгоритма при использовании PLinq[®].

N	Best, sec.	Average, sec.	Worse, sec.
100	0.0372235	0.0460121	0.0454556
1000	0.0382092	0.0575471	0.0439445
10000	0.1021852	0.0984983	0.1241778
100000	5.6463027	5.6591972	4.2793791
1000000	580.5355397	574.8284640	415.3097110

В заключительной реализации (рис. 5) применяется подход, основанный на синтаксических и семантических ограничениях для параметров типов [1], задаваемых обобщенными концепциями итераторов с использованием параметрического полиморфизма подтипов [2].

Из приведенного кода видно, что развитая семантика итераторов, предполагающая получение размера диапазона с помощью операции частичного вычитания *last(1,2) - first(1,2)*, а также создание копии итераторов *first(1,2).New()* с сохранением текущей позиции для последующей обработки, позволяет оптимизировать итерационный механизм и положительно влияет на эффективность алгоритма в целом (табл. 3).

Таблица 3

Результаты тестов для алгоритма
при использовании обобщенных концепций

N	Best, sec.	Average, sec.	Worse, sec.
100	0.0061402	0.0062816	0.0061517
1000	0.0062722	0.0064043	0.0085189
10000	0.0062443	0.0079207	0.0090832
100000	0.0088144	0.0247249	0.0392595
1000000	0.0219304	0.1937239	0.2952790

```

IRAI1 Search<IRAI1, IRAI2>(IRAI1 first1, IRAI1 last1, IRAI2
first2, IRAI2 last2,
    Func<T1, T2, bool> predicate)
    where IRAI1 :
RandomAccessIterator<IRAI1, int>,
IInputValue<T1>
    where IRAI2 :
RandomAccessIterator<IRAI2, int>,
IInputValue<T2>
{
    var _count1 = last1 - first1;
    var _count2 = last2 - first2;
    var _first1 = first1.New();
    for(; _count2 < _count1; ++_first1, --_count1)
    {
        var _first11 = _first1.New();
        for(var _first2 = first2.New(); ; ++_first11, ++_first2)
        {
            if(_first2 == last2)
                return _first1.Model;
            else if(!predicate(_first11.Value, _first2.Value))
                break;
        }
    }
    return last1;
}

```

Рис. 5. Пример кода алгоритма с использованием обобщенных концепций

Библиографический список

1. Stepanov, A. From mathematics to generic programming / A. Stepanov, E. Rose. – Boston : Addison–Wesley, 2015. – 293 p.
2. Яблоков, Д. Е. Влияние способа представления данных с помощью линейных диапазонов на эффективность алгоритмов / Д. Е. Яблоков // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 141–147.
3. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/standard/using-linq> (дата обращения: 10.11.2018).
4. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/standard/parallel-programming/parallel-linq-plinq> (дата обращения: 17.11.2018).

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В НАНОТЕХНОЛОГИЯХ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА¹

А. Э. Рассадин

Нижегородское математическое общество,
г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: brat_ras@list.ru

Ключевой проблемой современной нанотехнологии является обеспечение качества поверхности твёрдого тела в различных устройствах [1], поэтому интерес к моделям, описывающим её эволюцию, со временем только возрастает (см. [2-4] и ссылки там). Одной из популярных моделей роста поверхности твёрдого тела стала модель Кардара-Паризи-Цванга (КПЦ), предложенная в статье [5], и различные её модернизации [6].

В данной работе рассмотрено следующее обобщение уравнения КПЦ:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -c \cdot \sqrt{1 + (\nabla H)^2} + v \cdot \nabla^2 H - \alpha \cdot H + Q(\vec{x}), \quad (1)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2)$ — двумерный радиус-вектор и ∇ — оператор двумерного градиента.

Уравнение (1) описывает конкуренцию четырёх процессов: эмиссии вещества с поверхности твёрдого тела высотой $H(\vec{x}, t)$ вдоль её локальной нормали с постоянной скоростью c , поверхностной диффузии вещества вдоль поверхности с коэффициентом поверхностной диффузии v , уменьшения высоты поверхности за счёт распада вещества поверхности по закону, подобному закону радиоактивного распада, с коэффициентом распада $\alpha > 0$ и роста поверхности за счёт внешнего источника вещества $Q(\vec{x}) \geq 0$.

Уравнение (1) сильно нелинейно, поэтому будем рассматривать только ситуацию, когда $|\nabla H| \ll 1$, т. е. в малоугловом приближении. В этом случае исходное уравнение можно существенно упростить, разложив квадратный корень в (1) в ряд Тейлора и сохранив только два первых члена:

¹ Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 18-08-01356-а.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -c - \frac{c}{2} \cdot (\nabla H)^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla^2 H - \alpha \cdot H + Q(\vec{x}). \quad (2)$$

Далее, введём новую неизвестную функцию $h(\vec{x}, t)$ следующим образом:

$$H(\vec{x}, t) = -c \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha \cdot t)}{\alpha} + h(\vec{x}, t), \quad (3)$$

тогда уравнение (2) перепишется как:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c}{2} \cdot (\nabla h)^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla^2 h - \alpha \cdot h + Q(\vec{x}). \quad (4)$$

Однако и уравнение (4) остаётся слишком сложным для исследования, так как в отличие от уравнения КПЦ для него подстановка Коула-Хопфа уже не приводит к его линеаризации, поэтому далее мы будем пренебрегать в нём диффузионным членом, т. е. будем рассматривать уравнение вида:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c}{2} \cdot (\nabla h)^2 - \alpha \cdot h + Q(\vec{x}). \quad (5)$$

Как было отмечено в статье [7], уравнение КПЦ без источника обладает свойством специфического разделения переменных.

Пусть $Q(\vec{x}) = Q_1(x_1) + Q_2(x_2)$, тогда если начальный профиль поверхности есть $h(\vec{x}, 0) = h_{01}(x_1) + h_{02}(x_2)$, то решение уравнения (5) выражается через решения $h_{1,2}(x_{1,2}, t)$ двух одномерных задач Коши вида:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \alpha \cdot h + Q(x), \quad h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in R \quad (6)$$

следующим образом:

$$h(\vec{x}, t) = h_1(x_1, t) + h_2(x_2, t). \quad (7)$$

Поэтому далее будет рассматриваться только одномерная задача (6) для неизвестной функции $h(x, t)$ с известным начальным профилем $h_0(x)$.

Действуя согласно общим правилам построения решения задачи Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка [8], введём новые переменные $p_t \equiv \partial h / \partial t$ и $p_x \equiv \partial h / \partial x$ и запишем для уравнения (6) систему уравнений для его характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot p_x, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\alpha \cdot p_x + Q'(x), \quad \frac{dp_t}{dt} = -\alpha \cdot p_t, \quad \frac{dh}{dt} = p_t + c \cdot p_x^2. \quad (8)$$

Характеристическая система (8) должна быть дополнена начальными условиями, заданными через лагранжеву координату y [8]:

$$x|_{t=0} = y, \quad h|_{t=0} = h_0(y), \quad p_x|_{t=0} = h'_0(y),$$

$$p_t|_{t=0} \equiv p_0(y) = Q(y) - \alpha \cdot h_0(y) - \frac{c}{2} \cdot [h'_0(y)]^2. \quad (9)$$

Наиболее просто находится зависимость от времени переменной p_t :

$$p_t(y, t) = p_0(y) \cdot \exp(-\alpha \cdot t). \quad (10)$$

Далее, из системы (8) следует, что зависимость от времени эйлеровой переменной $x(y, t)$ определяется следующим однопараметрическим семейством задач Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \cdot \frac{dx}{dt} - c \cdot Q'(x) = 0, \quad x|_{t=0} = y, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = c \cdot h'_0(y). \quad (11)$$

Поскольку выражение $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c \cdot Q(x)$ является функцией Ляпунова для уравнения (11), то легко видеть, что:

$$\int_0^t \left[\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} \right]^2 \cdot dt = - \frac{E(y, t) - E_0(y)}{\alpha}, \quad (12)$$

где

$$E(y, t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial x(y, t)}{\partial t} \right]^2 - c \cdot Q(x(y, t)) \quad (13)$$

и

$$E_0(y) \equiv E(y, 0) = \frac{c^2}{2} \cdot [h'_0(y)]^2 - c \cdot Q(y). \quad (13)$$

Комбинируя формулы (10) и (12)-(14), получим следующую формулу для высоты поверхности, выражающейся через лагранжеву координату:

$$h(y, t) = h_0(y) + p_0(y) \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha \cdot t)}{\alpha} - \frac{E(y, t) - E_0(y)}{\alpha \cdot c}. \quad (14)$$

Для определения функции $h(x, t)$ в эйлеровой координате выражение (14) надо дополнить известным выражением для эйлеровой переменной $x(y, t)$, которое является решением задачи Коши (11). С точки зрения классической механики уравнение (11) есть не что иное, как уравнение одномерного движения материальной точки единичной массы в по-

тенциале $U(x) \equiv -c \cdot Q(x)$ с учётом линейного трения. К сожалению, такое уравнение решается точно только для случая гармонического осциллятора. Тем не менее, если внешний источник вещества $Q(x)$ соответствует потенциалу $U(x)$, для которого при $\alpha = 0$ уравнение (11) имеет замкнутые фазовые траектории, то в этом случае, следуя алгоритму, предложенному в работе [9], для эйлеровой координаты можно построить асимптотическое решение, обладающее хорошей точностью.

Пусть $X(I, \theta)$ есть точное решение уравнения (11) при $\alpha = 0$, записанное в переменных действие-угол для невозмущённой системы, и пусть при всех $y \in R$ справедливо неравенство:

$$\alpha \cdot T(y) \ll 1, \quad (15)$$

где $T(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \oint \frac{dx}{\sqrt{E_0(y) + c \cdot Q(x)}}$ – период невозмущённого движения в

точке с лагранжевой координатой y , тогда асимптотическое решение уравнения (11) имеет вид [9]:

$$x_{as}(y, t) = X(I_{as}(y, t), \theta_{as}(y, t)), \quad (16)$$

где асимптотическое поведение переменных действие-угол даётся формулами:

$$I_{as}(y, t) = I_0(y) \cdot \exp(-\alpha \cdot t), \quad \theta_{as}(y, t) = \theta_0(y) + \int_0^t \frac{dH(I_{as}(y, t))}{dI} \cdot dt. \quad (17)$$

В формуле (17) $H(I)$ – гамильтониан невозмущённой системы, который используется также для определения зависимости от лагранжевой переменной невозмущённого действия согласно $H(I_0(y)) = E_0(y)$.

Эффективность этого варианта теории возмущений для уравнения (11) была проверена в работе [10] на примере модифицированной потенциальной ямы Пёшля-Теллера, соответствующей источнику вида $Q(x) = Q_0 / ch^2(\beta \cdot x)$.

Точность этого метода может быть оценена по формуле:

$$|x(y, t) - x_{as}(y, t)| \leq |x(y, t) - x_{num}(y, t)| + |x_{num}(y, t) - x_{as}(y, t)|, \quad (18)$$

где первый член в правой части неравенства (18) можно связать с глобальной погрешностью численного метода решения уравнения (11), например, метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности, а невязка $\zeta(y, t) = |x_{num}(y, t) - x_{as}(y, t)|$ численного $x_{num}(y, t)$ и асимптотического решения $x_{as}(y, t)$ при заданном начальном условии $h_0(x)$ к уравнению (6) и заданном значении параметра затухания α во всём диапазоне изме-

нения лагранжевой переменной может быть определена эмпирически, при сравнении результатов численных расчётов и расчётов по асимптотической формуле (16).

Подставляя функцию (16) в формулу (14), получим асимптотическое выражение для высоты поверхности $h_{as}(y, t)$ в зависимости от лагранжевой координаты, а выражения $x_{as}(y, t)$ и $h_{as}(y, t)$ совместно дают параметрическое представление высоты исследуемой поверхности в зависимости от эйлеровой координаты в каждый момент времени. Вопрос о наступлении градиентной катастрофы в таком решении для каждого начального условия $h_0(x)$ должен рассматриваться отдельно.

«Двумеризовав» асимптотическое решение по формуле (7), в рамках наших предположений получим асимптотическое решение $h_{as}(x_1, x_2, t)$ уравнения (5). Оно может быть сравнено с экспериментом с помощью атомной силовой микроскопии поверхности на основе методики, описанной в [11].

При $\alpha = 0$ система характеристических уравнений имеет точное решение, а именно, функция $x(y, t)$ находится в рамках решения известной задачи [12] об одномерном движении материальной точки обращением следующего интеграла:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_y^x \frac{d\xi}{\sqrt{E_0(y) + c \cdot Q(\xi)}}, \quad (19)$$

а высота поверхности равна:

$$h(y, t) = h_0(y) + \frac{E_0(y)}{c} \cdot t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_y^{x(y, t)} \frac{Q(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{E_0(y) + c \cdot Q(\xi)}}. \quad (20)$$

Формулы (19)-(20) особенно интересны благодаря тому обстоятельству, что с их помощью в каждой конкретной физической ситуации можно понять, насколько существенно в уравнении КПЦ вида:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c}{2} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + v \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Q(x)$$

влияние на свойства его решения линейного диффузионного члена по сравнению с влиянием на них квадратичного члена.

Библиографический список

1. Rassadin, A. E. Some notes about scanning probe microscopy, nanoengineering and methods of quantum mechanics / A. E. Rassadin, T. S. Sazanova, A. V. Stepanov // Fomin IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 443, № 1. – P. 012027–012040.

2. Еленин, Г. Г. Затухание автоколебаний в гетерогенной каталитической реакции $\text{NO}+\text{CO}$ на платиновом катализаторе, вызванное дефектами поверхности / Г. Г. Еленин, А. Г. Макеев // Математическое моделирование. – 1996. – Т. 8, № 12. – С. 62–76.

3. Мажорова, О. С. Диффузионные модели кристаллизации многокомпонентных растворов / О. С. Мажорова, Ю. П. Попов, О. В. Щерица // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2003. – № 024. – 29 с.

2. Аверина, Т. А. Решение уравнений стохастического аналога неравновесной стадии фазового перехода и пористость карбида кремния / Т. А. Аверина, Г. И. Змиевская, А. Л. Бондарева, С. А. Хилков // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 021. – 37 с.

3. Kardar, M. C. Dynamical scaling of growing interfaces / M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang // Phys. Rev. Lett. – 1986. – Vol. 56. – P. 889–892.

4. Горай, Л. И. Нелинейная континуальная модель роста разномасштабных рельефов применительно к строгому анализу интенсивности рентгеновского рассеяния многослойных зеркал и решёток / Л. И. Горай, М. Н. Лубов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2014. – № 5. – С. 39–51.

5. Рассадин, А. Э. Новое явное решение уравнения Кардара – Паризи – Цванга и его применения / А. Э. Рассадин, А. В. Степанов, Л. А. Фомин // Advanced science. – 2018. – № 1. – С. 28–33.

6. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. – М. : Наука, 1986. – 272 с.

7. Alekseeva, E. S. Asymptotic description of one-dimensional classical motion of mass point in potential wells with small damping / E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin // Путь в науку. Математика : материалы V Междунар. молодеж. науч.-практ. конф. / гл. ред. Д. А. Куликов. – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – С. 19–20.

8. Alekseeva, E. S. On damped classical oscillations in the modified Pöschl-Teller potential well / E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin // Интегрируемые системы и нелинейная динамика : тезисы докладов Междунар. науч. конф. (Ярославль, 1–5 октября 2018 г.). – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – С. 11–13.

9. Верификация модели Кардара – Паризи – Цванга на примере роста эпитаксиальных плёнок сплава Гейслера Fe_2CoAl / И. В. Воротынцев, А. А. Потапов, А. Э. Рассадин, А. В. Степанов, Л. А. Фомин, Г. М. Михайлов, И. В. Маликов // Нанозифика и нанозлектроника : тр. XXII Междунар. симпозиума (Нижний Новгород, 12–15 марта 2018 г.) : в 2 т. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2018. – Т. 1. – С. 297–298.

10. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.

7. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

ОБУЧЕНИЕ МЕТОДОМ ЛЕВЕНБЕРГА – МАРКВАРДА СЕТЕЙ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М. М. Алкезуини, В. И. Горбаченко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия,
E-mail: gorvi@mail.ru

Решение краевых задач на сетях радиальных базисных функций (РБФ-сетях) [1] является бессеточным проекционным методом. Использование парадигмы нейронных сетей позволяет настраивать веса и параметры базисных функций в процессе обучения нейронной сети. Решение краевых задач возможно на нейронных сетях различных архитектур. Но наибольшее распространение получили РБФ-сети, поскольку обучение таких сетей при решении краевых задач проще, так как аппроксимация решения носит локальный характер, а РБФ-сеть содержит всего два слоя, из них один линейный.

РБФ-сеть – сеть, состоящая из двух слоев [2]. Первый слой с помощью радиальных базисных функций (РБ-функций) осуществляет нелинейное преобразование входного вектора в пространство бóльшей размерности. Второй слой производит взвешенное линейное суммирование выходов РБ-функций. Выход сети описывается выражением

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n_{\text{RBF}}} w_k \varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (1)$$

где n_{RBF} – количество РБ-функций, w_k – вес k -й РБ-функции, $\mathbf{x}$ – входной вектор, $\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ – значение k -й РБ-функции в точке $\mathbf{x}$ при значении вектора параметров $\mathbf{p}$.

В качестве РБ-функций используют функции Гаусса, мультиквадрики, обратные мультиквадрики и др. [2]. В данной работе применяется функция Гаусса

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2}{2a^2}\right), \quad (2)$$

где $\mathbf{c}$ – вектор координат центра РБ-функции, a – ширина (параметр формы), $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ – евклидова норма, $\mathbf{p} = [\mathbf{c}, a]$ – параметры РБ-функции.

Рассмотрим решение на РБФ-сети стационарной краевой задачи

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, Bu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

где u – искомое решение; L – дифференциальный оператор, например,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; B – оператор граничных условий; \Omega – область решения;$$

$\partial\Omega$ – граница области; f и p – известные функции.

Обучение РБФ-сети основано на минимизации функционала ошибки – суммы квадратов невязок в пробных точках [3]

$$I(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N [Lu_{\text{RBF}}(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}, \mathbf{p}) - f(\mathbf{x}_i)]^2 + \\ + \lambda \sum_{i=N+1}^{N+K} [Bu_{\text{RBF}}(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}, \mathbf{p}) - p(\mathbf{x}_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N \in \Omega$, $\mathbf{x}_{N+1}, \mathbf{x}_{N+2}, \dots, \mathbf{x}_{N+K} \in \partial\Omega$ – пробные точки; λ – подбираемый штрафной множитель, учитывающий вклад невязок в граничных пробных точках, u_{RBF} – приближение к решению, полученное РБФ-сетью, N, K – количество пробных точек внутри и на границе области решения, соответственно.

Для обучения РБФ-сетей применяются, как правило, градиентные алгоритмы. Известны применения генетических алгоритмов для обучения РБФ-сетей при решении задач классификации [4], которые значительно проще решения ДУЧП. Градиентные методы оптимизации [5] разделяются на методы нулевого порядка, использующие только информацию о значении минимизируемой функции, методы первого порядка, использующие первые производные минимизируемой функции, то есть градиент функции, и методы второго порядка, использующие вторые производные – матрицу Гессе. В известных работах [1] для обучения РБФ-сетей при решении краевых задач используется метод первого порядка – метод градиентного спуска. В [6] для обучения РБФ-сетей предложен эффективный метод первого порядка – метод Нестерова, позволивший существенно сократить время обучения сети. Наличие только одного слоя с нелинейными функциями и дифференцируемость большинства РБ-функций обеспечивают возможность применения методов оптимизации второго порядка. Однако известны только единичные примеры применения методов второго порядка для обучения РБФ-сетей. В [7] предложен алгоритм метода сопряженных градиентов настройки весов РБФ-сети, отличающийся от известных учетом специфики реше-

ния краевых задач. Наиболее быстрым методом второго порядка считается метод доверительных областей. Этот метод для обучения РБФ-сетей при решении краевых задач впервые предложен в [8], развит и исследован в [3, 9–10]. Но метод сложен в реализации, так как на каждом шаге обучения требует решения задачи условной оптимизации.

Для обучения РБФ-сетей перспективным является метод Левенберга-Марквардта [5]. Метод эквивалентен методу доверительных областей [11], но не требует решения задач условной оптимизации. В случае РБФ-сетей матрица Якоби, используемая в методе, может быть вычислена аналитически. Как показано в [12], метод Левенберга-Марквардта показал высокую эффективность при решении задач аппроксимации функций на РБФ-сети. Метод Левенберга-Марквардта ранее не применялся для обучения РБФ-сетей при решении краевых задач. Известны отдельные примеры применения метода Левенберга-Марквардта для обучения РБФ-сетей [13–15], не связанные с решением краевых задач.

Применение метода Левенберга-Марквардта рассмотрим на примере краевой задачи, описываемой уравнением Лапласа с граничными условиями Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega; \quad u = p(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \quad (4)$$

где $\partial\Omega$ – граница области; f и p – известные функции (x, y) .

Тогда функционал ошибки (3) запишется в виде

$$I = \left[\sum_{i=1}^N (\Delta u_i - f_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^K (u_j - p_j)^2 \right],$$

где Δu_i – Лапласиан в точке i .

Введем вектор параметров сети

$$\boldsymbol{\theta} = [w_1, w_2, \dots, w_M, c_{11}, c_{21}, \dots, c_{M,1}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{M,2}, a_1, a_2, \dots, a_M]^T,$$

где w_j – вес, c_{j1} и c_{j2} – координаты центра, a_j – ширина являются параметрами j -й РБ-функции ($j = 1, 2, 3, \dots, M$).

На k -м шаге обучения поправка $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ находится из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{J}_{k-1} + \mu_k \mathbf{E}) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} = -\mathbf{g}_{k-1}, \quad (5)$$

где $\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{J}_{k-1} + \mu_k \mathbf{E}$ – аппроксимация матрицы Гессе, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, μ_k – параметр регуляризации, изменяющийся на каждом шаге

обучения, $\mathbf{g} = \mathbf{J}^T \mathbf{e}$ – вектор градиента функционала (3) по вектору параметров $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$ – вектор невязок во внутренних и граничных пробных точках, $n = N + K$, $\mathbf{J}_{k-1}$ – матрица Якоби, вычисленная по значениям параметров сети в $(k-1)$ -ом шаге обучения.

Представим матрицу Якоби в блочном виде $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_w \mid \mathbf{J}_{c_1} \mid \mathbf{J}_{c_2} \mid \mathbf{J}_a]$. Исходя из (1)–(3) элементы матрицы Якоби не сложно вычислить аналитически. Элементы матрицы $\mathbf{J}_w$ для внутренних пробных точек вычисляются по формуле

$$\frac{\partial e_i}{\partial w_p} = e^{-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2 - 2a_p^2}{a_p^4}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad p = 1, 2, \dots, n_{\text{RBF}}.$$

Для граничных пробных точек вычисления производятся по формуле

$$\frac{\partial e_j}{\partial w_p} = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}\right), \quad i = N + 1, N + 2, \dots, N + K, \quad p = 1, 2, \dots, n_{\text{RBF}}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{J}_{c_1}$ для внутренних пробных имеют вид

$$\frac{\partial e_i}{\partial c_{p1}} = w_p e^{-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}} \cdot (x_{i1} - c_{p1}) \cdot \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2 - 4a_p^2}{a_p^6}.$$

Для граничных точек элементы матрицы записываются в виде

$$\frac{\partial e_j}{\partial c_{p1}} = w_p \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}} \cdot \frac{(x_{j1} - c_{p1})}{a_p^2}.$$

Аналогично вычисляются элементы матрицы $\mathbf{J}_{c_2}$.

Элементы матрицы $\mathbf{J}_a$ для внутренних пробных точек вычисляются по формуле

$$\frac{\partial e_i}{\partial a_p} = \frac{w_p}{a_p^5} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}} \cdot \left[\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2}{a_p^2} \cdot \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2 - 2a_p^2 \right) - 4 \left(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2 - a_p^2 \right) \right].$$

Для граничных точек элементы матрицы записываются в виде

$$\frac{\partial e_j}{\partial a_p} = w_p \cdot e \cdot \frac{\frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_p\|^2}{2a_p^2}}{\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p\|^2}{a_p^3}}.$$

Процесс обучения сети малом значении средней квадратической погрешности

$$I_{MSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta u_i - f_i)^2}}{N} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^K (u_j - p_j)^2}}{K}. \quad (6)$$

Параметр регуляризации μ изменяется в процессе обучения сети. Обучение начинается при относительно большом значении параметра μ . То есть в начале обучения аппроксимация Гессiana в (5) близка к $\mathbf{H} \approx \mu \mathbf{E}$, а вектор поправки определяется методом градиентного спуска с малым шагом $\Delta \theta^{(k)} = -\frac{1}{\mu_k} \mathbf{g}_{k-1}$. По мере уменьшения значения функционала ошибки параметр μ уменьшается и метод приближается к методу Ньютона с аппроксимацией Гессiana $\mathbf{H} \approx \mathbf{J}^T \mathbf{J}$. Это обеспечивает высокую скорость сходимости, так как метод Ньютона вблизи минимума функционала ошибки имеет хорошую сходимость.

В [11] показано, что метод Левенберга-Марквардта эквивалентен методу доверительных областей, а радиус доверительной области регулируется параметром μ . Но в отличие от известных реализаций метода доверительных областей метод Левенберга-Марквардта не требует решения на каждом шаге обучения достаточно сложной задачи условной оптимизации. То есть метод Левенберга-Марквардта сохраняя положительные свойства метода доверительных областей, является более простым.

Численный эксперимент проводился на примере решения задачи (4) при $f(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2)$, $p(x_1, x_2) = 0$. Задача решалась в единичном квадрате. Количество внутренних пробных точек равно $N = 100$. Количество граничных пробных точек равно $K = 40$. Штрафной коэффициент функционала ошибки по границе равен $\lambda = 10$. Первоначально центры РБ-функций располагались регулярно на квадратной сетке с количеством центров по каждой координате, равным 8. Как показали эксперименты, целесообразно расположить центры и на расстоянии одного шага сетки за пределами области решения. Пробные точки располагались случайным образом в области решения и на границе области. Веса иницировались нулевыми значениями. Начальная ширина всех

РБ-функций была равной 0,2. Итерационный процесс обучения продолжался до достижения заданного значения средней квадратической ошибки (6). Зависимость среднеквадратической ошибки различных методов от номера итерации показана на рисунке. Результаты экспериментов с методами первого порядка взяты из [6].

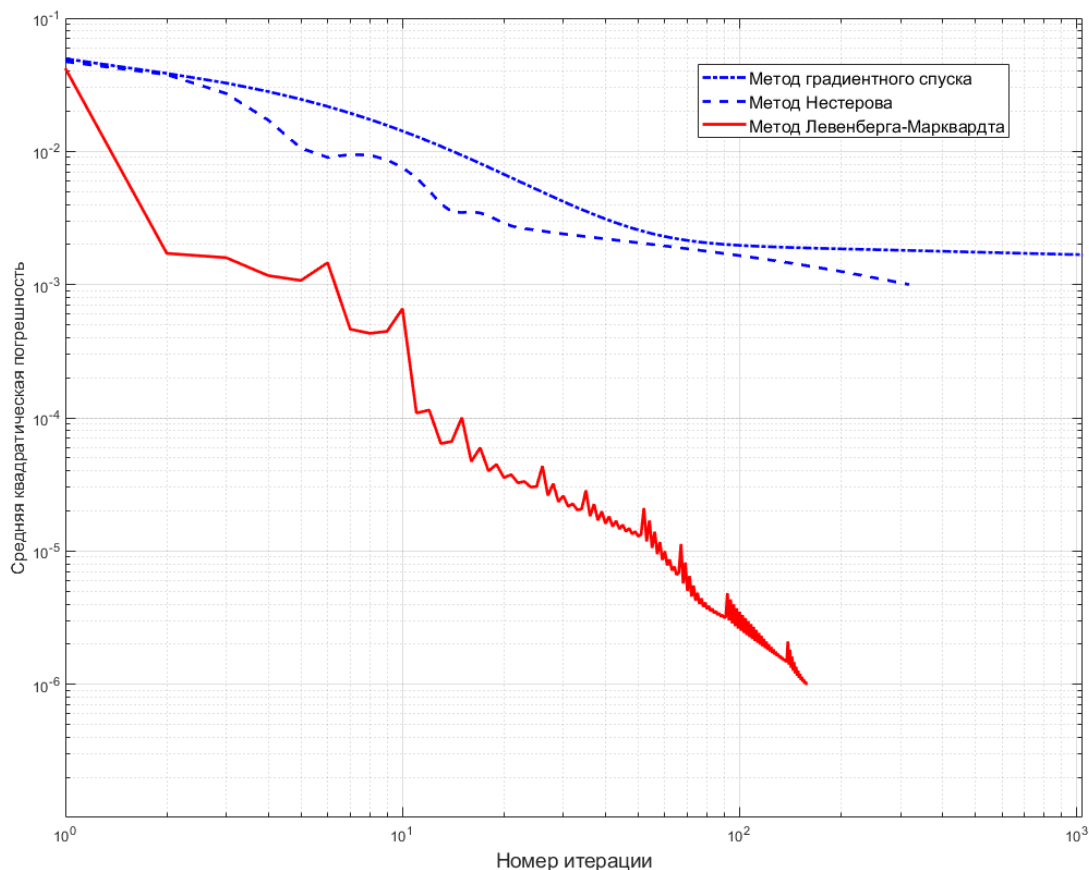


Рис. 1. Зависимость среднеквадратической ошибки от номера итерации

Эксперименты показали принципиальное преимущество метода Левенберга-Марквардта перед методами первого порядка. Метод градиентного спуска позволил решить модельную задачу с небольшой точностью. Для решения с большой точностью метод практически неприменим. Несколько бо́льшую точность обеспечивает метод Нестерова. Только метод Левенберга-Марквардта позволил решить задачу с высокой точностью за приемлемое время. Метод Левенберга-Марквардта показал соизмеримые результаты по сравнению с методом доверительных областей [3], но реализация метода Левенберга-Марквардта проще.

Библиографический список

1. Yadav, N. An Introduction to Neural Network Methods for Differential Equations / N. Yadav, M. Yadav, M. Kumar. – Springer, 2015. – 115 p.
2. Aggarwal, C. C. Neural Networks and Deep Learning: A Textbook / C. C. Aggarwal. – Springer, 2018. – 497 p.

3. Горбаченко, В. И. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций / В. И. Горбаченко, М. В. Жуков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 1. – С. 133–143.
4. A New Optimized GA-RBF Neural Network Algorithm / Weikuan Jia, Dean Zhao, Tian Shen, Chunyang Su, Chanli Hu, and Yuyan Zhao // Computational Intelligence and Neuroscience, 2014, Article ID 982045.
5. Гилл, Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М. : Мир, 1985. – 509 с.
6. Алкезуини, М. М. Обучение сетей радиальных базисных функций методом Нестерова при решении краевых задач математической физики / М. М. Алкезуини, В. И. Горбаченко // Аналитические и численные методы моделирования естественно научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 4–6 декабря 2017 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 171–175.
7. Горбаченко, В. И. Бессеточные методы и их реализация на радиально-базисных нейронных сетях / В. И. Горбаченко, Е. В. Артюхина // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. – 2010. – № 11. – С. 4–10.
8. Горбаченко, В. И. Обучение сетей радиальных базисных функций методом доверительных областей для решения уравнения Пуассона / В. И. Горбаченко, М. В. Жуков // Информационные технологии. – 2013. – № 9. – С. 65–70.
9. Efficient Solving of Boundary Value Problems Using Radial Basis Function Networks Learned by Trust Region Method / M. M. Algezweeni, V. I. Gorbachenko, M. V. Zhukov, M. S. Jaafar // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 2018, Article ID 9457578, 4 pages.
10. Елисов, Л. Н. Обучение методом доверительных областей сетей радиальных базисных функций при решении краевых задач / Л. Н. Елисов, В. И. Горбаченко, М. В. Жуков // Автоматика и телемеханика. – 2018. – № 9. – С. 95–105.
11. Marquardt, D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters / D. W. Marquardt // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1963. Vol. 11, № 2. – P. 431–441.
12. Алкезуини, М. М. Совершенствование алгоритмов обучения сетей радиальных базисных функций для решения задач аппроксимации / М. М. Алкезуини, В. И. Горбаченко // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2017. – № 3 (23). – С. 123–138.
13. Zhang, L. A New Discrete-Continuous Algorithm for Radial Basis Function Networks Construction / L. Zhang, K. Li, H. He, G. W. Irwin // IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems. – 2013. – Vol. 24, № 11. – P. 1785–1798.
14. Fast and Efficient Second-Order Method for Training Radial Basis Function Networks / T. Xie, H. Yu, J. Hewlett, P. Rozycki, B. Wilamowski // IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems. – 2012. – Vol. 23, № 4. – P. 609–619.
15. An improved Levenberg-Marquardt algorithm with adaptive learning rate for RBF neural network / R. An, W. J. Li, H. G. Han, J. F. Qiao // Proceedings 2016 of the 35th Chinese Control Conference, 2016. – P. 3630–3635.

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ГЛУБОКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

И. В. Алексеев, М. М. Куданова, М. А. Митрохин

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

E-mail: idalexixxx@gmail.com, kudanovamarina@gmail.com,

mmax83@mail.ru

Современные успехи в разработке датчиковой аппаратуры, микроэлектроники, средств накопления информации позволяют оснащать средствами сбора и обработки сигналов практически любые объекты реального мира. В технике такие средства с успехом используются для мониторинга технического состояния машин и механизмов, в экономике и социологии для наблюдения за поведением различных индикативных показателей, в медицине для оценки состояния пациентов.

Однако рост объёмов регистрируемых сигналов приводит к существенному росту затрат на их обработку, что в некоторых случаях не позволяет использовать весь информационный потенциал собираемых данных.

Большинство последних существенных успехов в обработке информации вообще, и сигналов в частности, связаны с применением концепции глубокого обучения [1]. Привлекательность применения нейронных сетей в задачах обработки сигналов обусловлена несколькими факторами. Во-первых, вычисления на нейронных сетях хорошо распараллеливаются, что в сочетании с технологиями многоядерных процессоров даёт хороший прирост производительности. Во-вторых, нейронные сети являются гибким инструментом, позволяющим решать разнообразные задачи представления и обработки данных. В-третьих, нейронные сети позволяют получать высокое качество решения задач.

В рамках концепции глубокого обучения предполагается построение нейронных сетей с несколькими скрытыми слоями. Такая архитектура позволяет нейронной сети автоматически генерировать признаки, необходимые для решения задачи мониторинга или принятия решения. Существенным достоинством является то, что при наличии достаточного количества обучающих примеров найденные признаки обладают устойчивостью и хорошей обобщающей способностью [2].

Глубокая архитектура предполагает наличие нескольких слоёв нейронов, которые предназначены для выделения признаков, и нескольких слоёв, обеспечивающих непосредственно решение задачи. Изначально, в качестве элементов выделяющих признаки, использовались ограниченные машины Больцмана (*RBM*). Однако процедура обучения **RBM** довольно сложна [3], поэтому для выделения признаков в глубоких сетях

большее распространение получили автокодировщики (АЕ). Автокодировщик – это простая сеть прямого распространения, содержащая три слоя без обратных связей (рис. 1), но в отличие от многослойного перцептрона, количество нейронов в выходном и входном слоях у автокодировщика одинаково.

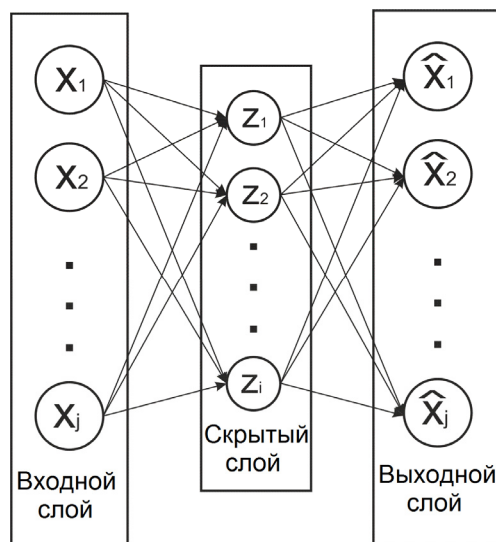


Рис. 1. Схема автоэнкодера

В процессе обучения в качестве ответов автокодировщику предъявляется сам входной сигнал, который он и пытается восстановить на выходе. Меньшее количество нейронов скрытого слоя приводит к тому, что автокодировщик вынужден проводить обобщение, выделяя наиболее характерные признаки входных данных.

Каскадное применение автоэнкодеров позволяет на каждом новом слое увеличивать уровень обобщения признаков. При этом обучение производится послойно, с использованием алгоритма обратного распространения ошибки. Выделенные ассоциативными слоями признаки используются для обучения слоя-классификатора. После обучения всех слоёв, производится дообучение всей сети.

Рассмотрим, для примера решение задачи обнаружения сигнала известной формы на фоне помех. Такая задача решается во многих отраслях, – медицине (выделение QRS комплекса электрокардиосигнала), радиолокации (выделение зондирующего импульса), сейсмологии (выделение сигналов сейсмических событий) и других.

Так как обрабатываемые сигналы относятся к потоковым данным, то для обучения нейронной сети и последующего функционирования необходимо использовать оконную обработку сигнала. Длительность окна необходимо выбирать, основываясь на длительности выделяемого сигнала. Но в процессе обучения и работы нейронной сети длительность окна должна оставаться постоянной. Схема обработки сигнала выглядит следующим образом (рис. 2).

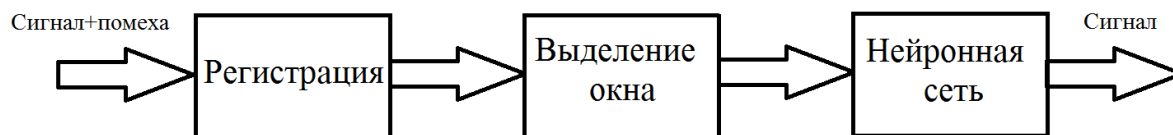


Рис. 2. Схема обработки сигнала

Регистрируемый сигнал накапливается в FIFO очереди размером, равным ширине окна. Хранящиеся в очереди отсчёты подаются на нейронную сеть на выходе которой формируется решение о наличии или отсутствии полезного сигнала в обрабатываемом окне.

В рамках исследования рассматривался вариант построения нейронной сети, показанный на рис. 3. Количество нейронов скрытых слоёв (L2-L4) уменьшалось по мере увеличения номера слоя. В качестве слоя-классификатора в обоих вариантах использовался Softmax-слой.

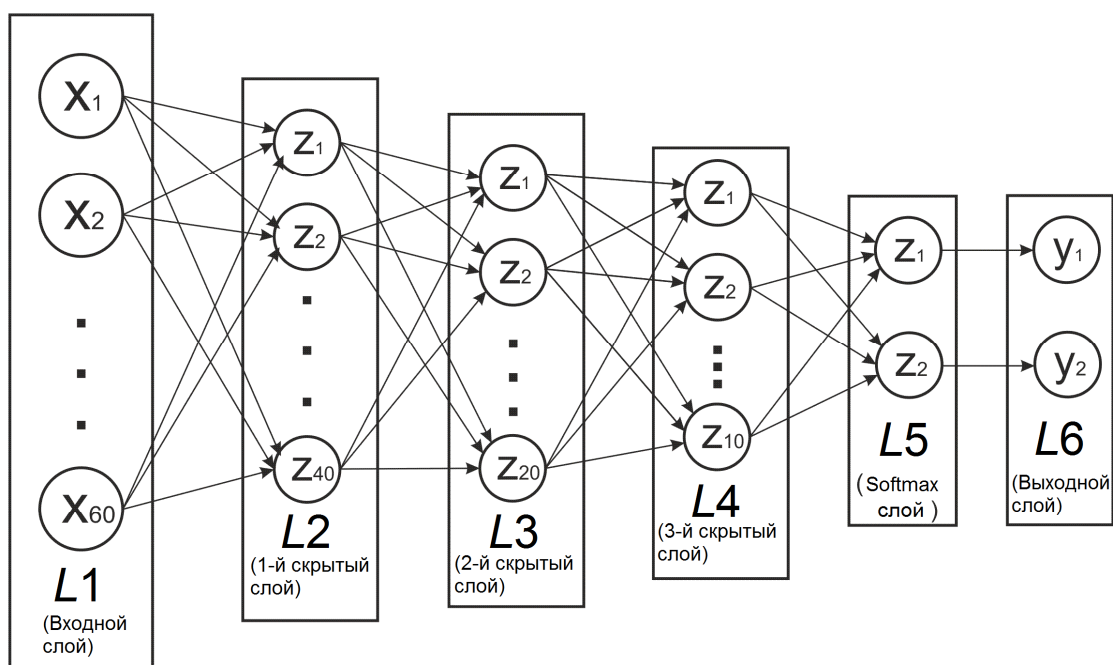


Рис. 3. Архитектура исследуемой нейронной сети

Предобучение сети осуществлялось послойно. При обучении автокодировщиков использовалась функция потерь:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (x_{kn} - \hat{x}_{kn})^2 + \lambda \cdot \Lambda,$$

где N – количество примеров обучающей выборки (длина сигнала, деленная на длину окна в отсчётах), K – длина окна, x – входная переменная, $\hat{x}$ – выходная переменная λ – коэффициент составляющей Λ L_2 -регуляризации.

Регуляризующий член вычислялся по формуле:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_j^n \sum_i^k (w_{ji})^2,$$

где w_{ji} – вектор весов i -го нейрона j -го окна обработки.

После послойного обучения нейросеть подвергалась точной настройке на обучающих данных.

Для проведения экспериментов была поставлена задача выделения *QRS*-комплекса в электрокардиосигнале. В обучающую выборку вошли записи электрокардиосигналов различных людей, из которых выделено 1237 кардиоциклов длительностью в 60 отсчётов и 1308 примеров записи различных помех длительностью также в 60 отсчётов. Тестовая выборка включала 238 примеров кардиоциклов и 197 примеров помех. Записи ЭКГ получены с сайта physionet.org.

Обучение нейронной сети производилось с использованием технологии *CUDA* на графическом ускорителе *GeForce GTX 750* имеющем 512 ядер *CUDA*. Для сравнения производительности были проведены эксперименты по обучению нейронной сети на одном ядре процессора *Intel Core i5-3330* с тактовой частотой 3.2 ГГц.

Результаты исследования показали, что суммарная вероятность ошибок определения наличия *QRS* комплекса в зашумлённом сигнале составила 0.044 на тренировочном наборе данных и 0.083 на тестовом.

Время обучения сети составило около 80 секунд при использовании графического ускорителя и более 6 минут при использовании одного ядра процессора.

По результатам исследования можно сделать вывод, что нейронная сеть исследуемой архитектуры обладает приемлемой обобщающей способностью и позволяет решать задачу обнаружения сигнала известной формы на фоне помех. Также исследования позволили установить, что существенное увеличение скорости обучения нейронной сети возможно при использовании графических ускорителей.

Библиографический список

1. Deep Learning: Methods and Applications / Li Deng and Dong Yu // Foundations and Trends® in Signal Processing. – 2014. – Vol. 7, № 3–4. – P. 197–387.
2. Vincent, P. Extracting and composing robust features with denoising auto-encoders / P. Vincent, H. Larochelle, Y. Bengio, and P.A. Manzagol // Proceedings of the Twenty-fifth International Conference on Machine Learning (ICML'08), 2008. – P. 1096–1103.
3. A Learning Algorithm for Boltzmann Machines / David H. Ackley, Geoffrey E. Hinton, Terrence J. Sejnowski // Cognitive Science. – 1985. – № 9 (1). – С. 147–169.

8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

ОСОБЕННОСТИ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ КАЗАНСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ А. Н. ТУПОЛЕВА

С. В. Никифорова, С. И. Дорофеева

Казанский национальный исследовательский технический
университет имени А. Н. Туполева,
г. Казань, Россия

E-mail: svetlana1605@yandex.ru, drf-svetlana@yandex.ru

Начиная с 2012 года, в Казанском национальном исследовательском техническом университете им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ) практикуется создание и применение дистанционных электронных курсов в учебном процессе. Это связано, с одной стороны с требованиями современности, а с другой стороны, с уменьшением количества часов, отводимых на аудиторные занятия, и увеличением количества часов на самостоятельную работу студентов.

В КНИТУ-КАИ существуют общие правила разработки и создания электронных курсов. Во-первых, материалы курса должны соответствовать рабочей программе учебной дисциплины (РПУД). При этом желательно поделить материал курса по семестрам или для каждого семестра создать свой курс. Во-вторых, необходимо составить метаданные курса (название, индекс по учебному плану ФГОС ВО, направление и профиль подготовки, курс, семестр, количество часов аудиторных занятий и самоподготовки, вид и форма текущего и промежуточного контроля, краткая аннотация, содержание дисциплины, информация об авторах курса) [1]. В-третьих, для удобства изучения курса разделить материалы на теоретическую и практическую части. В качестве заключительного этапа в КНИТУ-КАИ необходимо пройти экспертизу электронного курса в соответствии с "Положением об экспертизе электронных курсов КНИТУ-КАИ" [2] и составить экспертное заключение.

Что же касается создания электронных курсов по дисциплине «Математика» для студентов инженерных специальностей, то тут существуют свои характерные особенности, на которых остановимся подроб-

нее. Отметим, что согласно РПУД математика изучается 4 семестра (см. табл. 1).

Таблица 1

Объем дисциплины «Математика»

Виды учебной работы	Общая трудоемкость, ч	Семестр			
		1	2	3	4
Общая трудоемкость дисциплины	648	216	216	108	108
Аудиторные занятия	396	144	144	54	54
Лекции	180	72	72	18	18
Практические занятия	216	72	72	36	36
Самостоятельная работа студентов	252	72	72	54	54
Проработка учебного материала	144	36	36	18	54
Подготовка к промежут. аттестации	108	36	36	36	-
Вид промежуточной аттестации		зачет экза-мен	зачет экза-мен	экза-мен	зачет

При этом в первом семестре изучаются разделы «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»; во втором семестре – «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции нескольких переменных», «Ряды», «Ряд Фурье и интеграл Фурье», «Обыкновенные дифференциальные уравнения»; в третьем семестре – «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление», «Уравнения в частных производных»; в четвертом семестре – «Теория вероятностей», «Математическая статистика». Количество часов, отведенных на изучение каждого раздела, приведено в табл. 2.

Из таблиц 1 и 2 видно, что на самостоятельную работу студентов (СРС) при изучении дисциплины «Математика» приходится около 40% всего времени, отведенного на изучение всей дисциплины.

Кроме того, для студентов, обучающихся на специальностях 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы», 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» (с присвоением квалификации «Инженер») и направлении подготовки 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» (с присвоением квалификации «Бакалавр»), дополнительно в третьем учебном семестре читается курс «Специальные разделы математики», включающий в себя разделы «Уравнения матема-

тической физики» и «Вариационное исчисление». Количество часов, отведенных на углубленное изучение этих разделов, приведено в табл. 3.

Таблица 2

Распределение фонда времени по видам занятий

Наименование раздела	Всего часов	Виды учебной деятельности, ч		
		лекции	практ. зан.	сам. раб.
Раздел 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра	80	32	32	16
Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	70	28	28	14
Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	30	12	12	6
Экзамен	36			36
ИТОГО(за 1-й семестр)	216	72	72	72
Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной	40	16	16	8
Раздел 5. Интегральное исчисление функций нескольких переменных	45	18	18	9
Раздел 6. Ряды	35	14	14	7
Раздел 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	20	8	8	4
Раздел 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	40	16	16	8
Экзамен	36			36
ИТОГО (за 2-й семестр)	216	72	72	72
Раздел 9. ТФКП	32	8	16	8
Раздел 10. Операционное исчисление	16	4	8	4
Раздел 11. Уравнения в частных производных	24	6	12	6
Экзамен	36			36
ИТОГО (за 3-й семестр)	108	18	36	54
Раздел 12. Теория вероятностей	60	10	20	30
Раздел 13. Математическая статистика	48	8	16	24
ИТОГО (за 4-й семестр)	108	18	36	54

Из таблицы 3 видно, что на СРС при изучении курса «Специальные разделы математики» приходится ровно 50% всего времени, отведенного на изучение всей дисциплины. В связи с этим и возникла необходимость создания дистанционных электронных курсов по математике. Структура электронного курса включает в себя: методические рекомендации, теоретическую и практическую части, варианты типовых контрольных и индивидуальных заданий, фонд оценочных средств промежуточной аттестации (ФОС), необходимый справочный материал, глоссарий (словарь

терминов), список основной и дополнительной литературы, а также ссылки на открытые интернет-источники [3]. Большим спросом у студентов пользуются справочные пособия, разработанные сотрудниками кафедры специальной математики и выпущенные издательством КНИТУ-КАИ [4-6]. Отметим, что все эти справочники имеют гриф регионального отделения (Республики Татарстан) научно-методического совета (НМС) по математике Министерства образования и науки (МОиН) РФ. В настоящее время авторами данной статьи готовится «Справочное пособие по математике» для студентов инженерных специальностей и обучающихся в колледжах КНИТУ-КАИ.

Таблица 3

Объем курса «Специальные разделы математики»

Виды учебной работы	Общая трудоемкость, ч	Семестр
		3
Общая трудоемкость дисциплины	108	108
Аудиторные занятия	54	54
Лекции	36	36
Практические занятия	18	18
Самостоятельная работа студентов	54	54
Проработка учебного материала	54	54
Подготовка к промежуточной аттестации	-	-
Вид промежуточной аттестации		зачет

Несмотря на то, что курс «Математика» един для всех инженерных специальностей Института автоматики и электронного приборостроения – ИАЭП, Института радиоэлектроники и телекоммуникаций – ИРЭТ, Колледжа информационных технологий – КИТ, тем не менее для каждого направления подготовки следует сделать акцент на разных разделах курса, учитывая применение их в дальнейшей профессиональной деятельности. Поэтому при создании электронного курса необходимо особо учитывать этот нюанс. Электронные курсы по дисциплине «Математика» и «Специальные разделы математики» в КНИТУ-КАИ создаются на платформе BlackBoard Learn и выложены на сайте ВУЗа по адресу: www.bb.kai.ru. При этом преподаватель, ведущий дисциплину, сам выбирает, какие педагогические приемы и методы обучения использовать в рамках принятой в КНИТУ-КАИ технологии обучения, исходя при этом из психолого-педагогического портрета студенческой аудитории и скорости восприятия ими излагаемого материала [7]. Особо отметим, что создание электронного курса - достаточно трудоемкая работа, как во временном, так и в ресурсном отношении. Она требует от преподавателей-разработчиков, во-первых, подготовки всех методических материалов (лекции, практические занятия, задания для СРС, типовые контрольные работы, задания для индивидуальной работы, вопросы для самопроверки, тесты, справоч-

ные материалы), во-вторых, для внедрения электронного курса в учебный процесс (проработка, адаптация, «шлифовка» под определенные группы студентов) необходимо современное оборудование.

Преподаватели кафедры специальной математики всегда уделяли большое внимание методической составляющей своей работы, отдавали ей много времени и сил. В связи с открытием в Казанском авиационном институте (КАИ) факультета радиоэлектронных технологий (ныне - ИР-ЭТ), возникла необходимость в учебниках по математике, адаптированных для технических ВУЗов. Первыми такими пособиями являются: Григорьев В.Е., Крылов Б.Л., Петров А.З. «Основы теории функций комплексного переменного. Пособие для студентов ВТУЗов» (Казань: Изд-во КАИ, 1945); Григорьев В.Е. «Основы теории поля и простейшие дифференциальные уравнения математической физики» (Казань: Изд-во КАИ, 1963). И сегодня уделяется достаточное количество времени и педагогического мастерства для разработки методических пособий, чтобы согласно РПУД в ограниченное для освоения математики время (см. табл. 1-3) учесть профессиональные интересы обучающихся и удовлетворить всем формируемым общекультурным и профессиональным компетенциям [8-11]. При разработке электронных курсов для дистанционного обучения особое внимание необходимо уделить интерактивной составляющей, позволяющей слушателю адаптировать курс под свои требования и возможности, индивидуально менять его настройки, манипулируя экранными объектами, используя интерактивные справочные материалы, а так же выбирая оптимальный для себя темп и продолжительность изучения разделов курса [12].

Действующая в КНИТУ-КАИ система разработки электронных курсов имеет и свои недостатки: в связи с поправками, вносимыми в Федеральный общеобразовательный государственный стандарт (ФГОС), приходится изменять метаданные курса, контрольно-измерительные материалы (КИМ), количество часов в семестре. При этом содержание курса в целом, акценты на использование разделов математики в профессиональной деятельности остаются неизменными. Поэтому считаем, что удобнее создавать весь комплект (теоретическая и практическая части, индивидуальные задания, КИМы) по разделам (модулям). В этом случае при изменении ФГОСов можно будет создавать разные наборы модулей или в случае необходимости дополнять новыми модулями, например, «Элементы теории графов», «Математическая физика и вариационное исчисление», «Теория групп» и т.д.

Электронные курсы оказывают неоценимую помощь студентами в изучении математики, однако, ведущая роль остается за преподавателем!

Библиографический список

1. Никифорова, С. В. Особенности создания электронных курсов на платформе BlackBoard / С. В. Никифорова // Ученые записки ИСГЗ. – 2017. – Т. 15, № 2. – С. 254–265.

2. Методология создания и использования электронных курсов // Программа повышения квалификации для ППС КНИТУ-КАИ. – URL: <https://moodle.kai.ru/course/view.php?id=60>.
3. Никифорова, С. В. Дистанционное электронное обучение: плюсы и минусы / С. В. Никифорова, З. Я. Якупов // Электронная Казань – 2016 : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. – Вып. № 1 (14). – Казань : Юниверсум, 2016. – С. 631–635.
2. Дорофеева, С. И. Краткий справочник по высшей математике / С. И. Дорофеева, Э. М. Исхаков, Е. В. Насырова ; под ред. К. Г. Гараева и Э. М. Исхакова. – Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2009. – 208 с.
3. Краткий справочник по специальным разделам математики / К. Г. Гараев, П. Г. Данилаев, С. И. Дорофеева, Э. М. Исхаков, С. Б. Шабалина ; под ред. К. Г. Гараева, П. Г. Данилаева. – Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2009. – 144 с.
4. Гараев, К. Г. Простейшие понятия элементарной математики : учеб. пособие / К. Г. Гараев, Э. М. Исхаков. – Изд. 5-е, доп. – Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2016. – 100 с.
5. Никифорова, С. В. Электронные курсы: сегодня и завтра / С. В. Никифорова // Наука и образование: сохраняя прошлое, создаем будущее : сб. ст. XI Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза, 2017. – С. 13–15.
6. Дорофеева, С. И. Курс «Дифференциальные уравнения» в технических университетах как основа математических моделей / С. И. Дорофеева, З. Я. Якупов // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : сб. науч. тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Ульяновск, 2016. – С. 229–235.
7. Анфиногентов, В. И. Роль прикладных задач и математического моделирования при обучении математике в техническом университете / В. И. Анфиногентов, М. А. Дараган, С. И. Дорофеева // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : сб. науч. тр. Междунар. науч.-техн. конф. – Ульяновск, 2016.
8. Анфиногентов, В. И. Значение прикладных задач математики и математического моделирования в технических университетах / В. И. Анфиногентов, М. А. Дараган, С. И. Дорофеева // Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство : тр. Междунар. науч. конф. – Астхик Гарун, Армения, 2015. – С. 211–214.
9. Данилаев, П. Г. Профилизация преподавания математики в технических университетах / П. Г. Данилаев, С. И. Дорофеева // Математика в образовании : сб. ст. / под ред. И. С. Емельяновой. – Вып. 11. – Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2015. – С. 73–83.
10. Никифорова, С. В. Современные инфокоммуникационные технологии: дистанционное обучение / С. В. Никифорова // Инновационное развитие современной науки : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. – Уфа : Аэтерна, 2015. – Ч. 2. – С. 10–11.

ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ MAPLE ПРИ РАБОТЕ С МНОГОЧЛЕНАМИ

А. Е. Акулова, Н. В. Мойко

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

E-mail: alenenok1999@yandex.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru

Введение

Maple – система компьютерной математики, которая разработана подразделением Maplesoft канадской компании Waterloo Maple Inc. Данная программа предназначена для решения различных математических, экономических, инженерных, технических задач. Одним из плюсов данной системы является легкость работы. Пользователь вводит команду, нажимает кнопку «Enter» и в рабочем окне под введенной командой появляется результат.

С помощью пакета Maple намного проще выполнять различные задачи, проводить математические исследования. Система использует более 3000 разных команд, некоторые из них являются базовыми, а некоторые доступны только при подключении специальных пакетов. Также Maple имеет широкие возможности при изучении различных разделов математического анализа. Например, умеет производить сложные алгебраические преобразования; работать с комплексными числами; находить бесконечные суммы, произведения, пределы, интегралы, производные; находить корни многочленов и т.д. В Maple содержатся пакеты для решения задач линейной алгебры, комбинаторики, теории вероятности, евклидовой геометрии и т.п. Одним из важнейших инструментов при решении задач математического анализа как в одномерном, так и в многомерных случаях, являются многочлены. Для всех пакетов аналитических вычислений операции с многочленами являются базовыми. Они часто используются для образования формул. В Maple под многочленами понимается сумма выражений одной или нескольких переменных с неотрицательными степенями.

Работа с многочленами

В системе Maple для работы с многочленами используются следующие функции:

1. $\text{coeff}(p, x)$

Данная функция возвращает коэффициент при x полинома p .

Например, в системе Maple введем полином

$$p := 10x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 13x + 2.$$

Применим функцию $\text{coeff}(p, x)$. Получим:

13 .

Введя $\text{coeff}(p, x^4)$ —

10 .

Возвращать коэффициент для члена со степенью n полинома p можно и другим способом, введя $\text{coeff}(p, x, n)$. Если введем $\text{coeff}(p, x, 4)$ также получим

10 .

2. $\text{coeffs}(p, x, t)$

Данная функция возвращает коэффициенты полинома нескольких переменных, относящихся к переменной x с опцией t , задающей имя переменной. Если в системе Maple для того же полинома p введем $\text{coeffs}(p, x, y)$, то получим

2, 13, 10, 5, 16 .

После, вводя переменную y в рабочее окно, получим

1, x, x^4, x^3, x^2 ,

то есть переменные, которым соответствуют эти коэффициенты.

Функции, приведенные выше, позволяют выделить коэффициенты полиномов, но бывают случаи, когда полином может не содержать члены со степенями ниже некоторой. Тогда можно применить следующие функции:

3. $\text{lcoeff}(p, x)$

Возвращает старший коэффициент полинома p относительно переменной x или ряда переменных. Введем полином

$$p := \frac{1}{10x^4} + 5x^3 + 13x + 2.$$

Применим функцию $\text{lcoeff}(p, x)$, получим-

5 .

4. $\text{tcoeff}(p, x)$

Возвращает младший коэффициент полинома p относительно переменной x . Введя $\text{tcoeff}(p, x)$ для того же полинома p , получим —

$\frac{1}{10}$.

Также можно применять $\text{lcoeff}(p, x, t)$ и $\text{tcoeff}(p, x, t)$, в первой функции имя назначается старшему члену полинома, а во второй — младшему.

Существуют функции для оценки степеней полинома. К таким относятся:

5. *degree*(*p*, *x*)

Возвращает высшую степень полинома *p* от неизвестного *x*. Введя полином $p := -\frac{1}{10x^3} + 9x^{10} - 66 + \frac{13}{x^2}$ и применив функцию *degree*(*p*, *x*), получим —

10 .

6. *ldegree*(*p*, *x*)

Возвращает низшую степень полинома *p* от неизвестного *x*. Если введем *ldegree*(*p*, *x*) для того же полинома, получим

-4 .

Данные функции могут возвращать как отрицательные, так и положительные целые числа. Если же выражение не является полиномом от *x*, то возвращается *FAIL*. Чтобы функции возвращали точный результат, полином должен быть сгруппирован по степеням *x*. Перед вызовом этих функций нужно применить другие функции, например, *collect*, *expand*.

Функция *irreduc*(*p*) позволяет контролировать имеет ли полином *p* несокращаемые множители. Имеем полином $p := 2x^3 - 6x + 12$, применяя функцию *irreduc*(*p*), получаем

true .

Для разложения полинома по степеням существует функция *AFactor*(*p*) и *AFactors*(*p*). Первая функция выполняет полное разложение полинома *p* от нескольких переменных с коэффициентами в виде алгебраических чисел над полем комплексных чисел. Если полином является одномерным, то полное разложение на множители является разложением на линейные множители. Вторая функция аналогична первой, но она создает структуру данных формы $[u, [[f[1], e[1]], \dots, [f[n], e[n]]]]$ так, что $p = uf[1]^{e[1]} \dots f[n]^{e[n]}$, где каждый $f[i]$ — неприводимый полином. Функции используются вместе с *evala*. Если имеем полином

$p := -6x^4 - 23x^3 + 8x^2 + 17x + 4$, то, используя функцию *evala*(*AFactor*(*p*)), получим

$$-6 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 1) \left(x + \frac{1}{3} \right) (x + 4) .$$

Применяя, *evala*(*AFactors*(*p*)),

$$\left[-6, \left[\left[x + \frac{1}{3}, 1 \right], [x + 4, 1], \left[x + \frac{1}{2}, 1 \right], [x - 1, 1] \right] \right] .$$

Для вычисления корней полиномов, кроме функции $solve(p, x)$, которая возвращает список корней полинома p одной переменной, имеются следующие функции: $roots(p)$, $roots(p, K)$, $roots(p, X)$ и $roots(p, X, K)$. Эти функции вычисляют точные корни в рациональной или алгебраической области чисел. Корни возвращаются в виде $[[r[1], m[1]], \dots, [r[n], m[n]]]$, где $r[i]$ - корень многочлена p с кратностью $m[i]$. В системе Maple введем следующий полином $p := x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$. Применив функцию $solve(p, x)$, получим

$$1, -2, -1 - I\sqrt{2}, -1 + I\sqrt{2},$$

а введя функцию $roots(p, x)$, получим

$$[[1, 1], [-2, 1]],$$

то есть только корни в рациональной области чисел. Если же полином не имеет корней в рациональной области, то возвращается пустой список.

С полиномами могут выполняться различные операции. Прежде всего отметим некоторые функции, которые относятся к одному полиному:

7. $psqrt(p)$

Возвращает квадрат полинома

Введем полином $p := x^4 + y^4 - 2x^2y^2$. С помощью функции $psqrt(p)$, получим

$$-x^2 + y^2.$$

8. $proot(p, n)$

Возвращает n -ую степень полинома

Введя $proot(p, 5)$, получим

$$x - y.$$

9. $realroot(p)$

Возвращает интервал, в котором находятся действительные корни полинома

Для полинома $p := x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$, вызывая функцию $realroot(p)$, получаем

$$[[0, 4], [-2, -2]].$$

10. $randpoly(vars, opts)$

Возвращает случайный полином по переменным $vars$ (список). Первый аргумент $vars$ указывает переменные, в которых должен генерироваться многочлен. Если $vars$ - единственная переменная, то будет генерироваться одномерный многочлен, а если список или набор переменных, то будет создан многомерный многочлен. Во втором аргументе возможны следующие варианты:

1. *coeffs* – сгенерировать коэффициенты (по умолчанию от -99 до 99)
2. *expons* – сгенерировать экспоненты
3. *terms* – количество сгенерированных терминов (по умолчанию 6)
4. *degree* – высшая степень многочлена (по умолчанию 5)
5. *dense* – многочлен должен быть плотным
6. *homogeneous* – многочлен должен быть однородным

Если в системе Maple ввести *randpoly(x)*, то получим случайный полином

$$-56 - 7x^5 + 22x^4 - 55x^3 - 94x^2 + 87x.$$

Введя *randpoly(x, degree = 10)*, получим ,

$$-56x^{10} - 62x^7 + 97x^6 - 73x^3 - 4x^2$$

то есть полином с высшей степенью равной 10.

Действия с многочленами в Maple хорошо развиты, с ними можно выполнять различные операции. Также можно вычислять производные от полиномов и интегралы.

Библиографический список

1. Tinlib.ru. – URL: <http://www.tinlib.ru> (дата обращения: 05.11.2018).
2. Exponenta.ru. – URL: <http://old.exponenta.ru> (дата обращения: 10.11.2018).
3. Maplesoft.ru. – URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 29.10.2018).

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИАЛОГОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ

Е. Ю. Бельдягина, А. А. Дмитриева, Л. А. Купряшина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия;

E-mail: belkapnzpgy@mail.ru, almlen@mail.ru, liliya_sl@mail.ru

Анализ ФГОС ВО (3+) подготовки бакалавров по направлению «Экономика» и профилю программ специалистов экономических специальностей показал, что бакалавр экономики должен быть способен к расчетно-экономической, аналитической, научно-исследовательской, организационно-управленческой деятельности любого уровня (финансовой, производственной, инвестиционной) в различных областях экономики, что обуславливается фундаментальностью его подготовки.

Исходя из вышеизложенного, на первый план выдвигается задача отбора содержания фундаментального образования бакалавров экономики, обеспечивающего их системой профессиональных компетенций, способствующих их конкурентоспособности на рынке труда.

Общепринятой основой фундаментальной подготовки специалистов, практически во всех сферах человеческой деятельности, являются математические знания и навыки.

Математическая компетентность бакалавра формируется в процессе изучения математики, базируясь на начальном уровне математической подготовки, сформированном в средних учебных заведениях и являющимся индивидуальным у каждого студента.

Понятие функции и ее исследование занимают центральное место и в курсе математического анализа и в профессиональной деятельности экономистов. Умение строить графики функций и читать их, определять промежутки монотонности, экстремальные значения и другие характеристики функций, описывающие их поведение – важный элемент математической культуры будущего экономиста. В то же время исследование функций вызывает сложности у студентов по причине специфики учебного материала, сокращения времени аудиторной работы и увеличения часов, отведенных для самостоятельной работы, больших временных затрат для решения заданий по рассматриваемой тематике. Дифференциальное исчисление изучается на первом курсе. Как показывает практика, большая часть студентов первокурсников умеют строить графики лишь по точкам, некоторые – с помощью преобразований. Основная сложность в исследовании функций заключается в неумении использовать результаты исследования при непосредственном построении графика, связывать аналитические выводы, полученные с помощью применения производной, с графическим изображением. Особенно для сложных функций.

Для устранения этих проблем и отучения строить график по точкам необходимо уделить внимание построению графиков сложных функций на основе свойства монотонности в качестве пропедевтики исследования функций и построения их графиков с помощью производной.

При изучении понятия функций студентам из школьного курса математики известны понятия функциональной зависимости, монотонности функций, экстремумов. Они умеют находить область определения, множество значений функции, интервалы монотонности, наибольшие и наименьшие значения функции, строить графики элементарных функций и графики функций, полученных с помощью преобразований элементарных. В вузовском курсе студентам приходится работать со сложными функциями. На первых занятиях до исследования с помощью производ-

ной можно предложить построить график сложной функции $y = \arctg 2^x$, используя лишь школьные знания о свойстве монотонности функций.

При организации обучения в рамках рассматриваемой темы немаловажным условием для актуализации и углубления знаний, формирования у студентов потребности усвоения материала и стимулирования познавательного процесса является активизация диалогового взаимодействия. Аудиторная работа должна максимально развивать познавательные способности студентов. Вводную часть необходимо строить так, чтобы актуализировать имеющиеся сведения у аудитории, ввести нужную новую информацию, пробудить интерес к возникшей проблеме. В создании познавательных математических ситуаций основную роль выполняют определённым образом сформулированные вопросы, гипотезы, которые заставляют студентов задуматься, увидеть противоречие, установить новую взаимосвязь или незнание, непонимание. Стремление же увидеть смысл, значимость рассматриваемого вопроса побуждает их задавать всё новые и новые вопросы, которые гарантированно подведут студентов к нужным выводам.

Диалоговое взаимодействие, способствующее росту активности студентов с помощью развития позитивной мотивационной структуры учебно-познавательной работы, помогает студентам активно самореализовываться (добывать новые знания, анализировать и выдвигать гипотезы).

Рассмотрим построение графика сложной функции $y = \arctg 2^x$

Деятельность педагога	Деятельность студента
Композицией каких двух элементарных функций является $y = \arctg 2^x$?	Данная функций является композицией двух функций: $u = 2^x$ и $y = \arctg u$
Можно ли определить внутреннюю $u = u(x)$ и внешнюю $y = y(u)$ функции?	Да, $u = u(x)$ – внутренняя функция, $y = y(u)$ – внешняя функция
Графики этих функций определены на каких интервалах?	Области определения обеих функций $(-\infty; +\infty)$
Построим графики внутренней и внешней функции	Построение графиков $u = 2^x$ и $y = \arctg u$ (рис. 1)
Показательная функция $u = 2^x$ является возрастающей или убывающей? Почему?	Возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$, т.к. основание показательной функции $a > 1$
На каком промежутке внутренняя функция $u = u(x)$ монотонно возрастает?	Внутренняя функция строго возрастает на интервале $(0; +\infty)$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

На каждом промежутке можно ли определить границы изменения $u = u(x)$ и выбрать те значения $u(x)$, которые попадают в область определения функции $y = y(x)$? По графику внешней функции $y = y(x)$ определить характер изменения функции y.	По графику внешней функции определим, что такому изменению u соответствует возрастание y на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
Следовательно, можно построить график $y = y(x)$?	Да. График такой функции легко построить (рис. 2). Построение графика

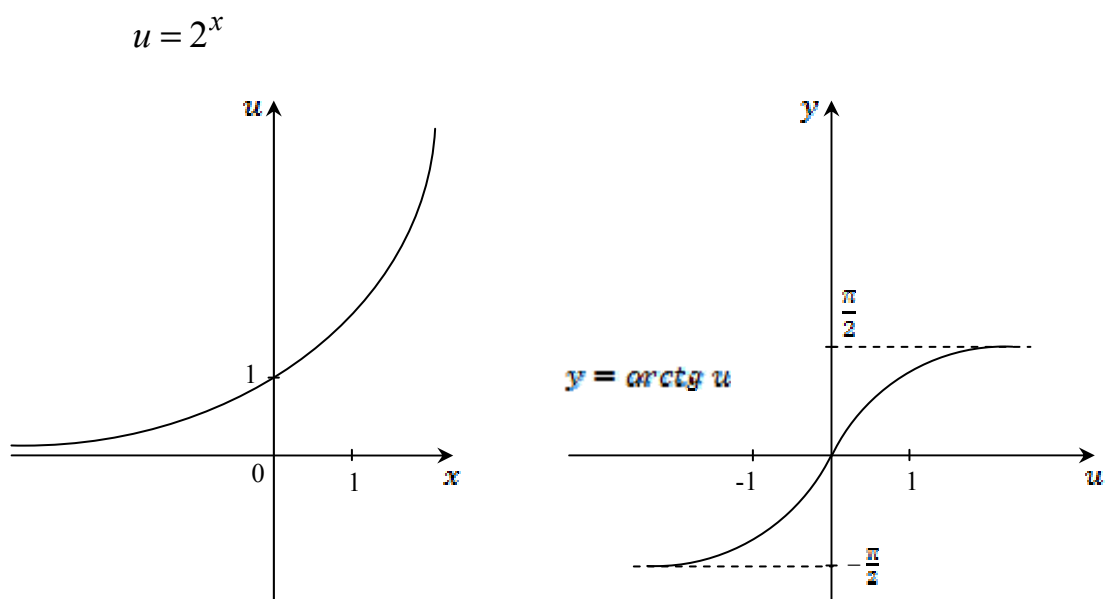


Рис. 1

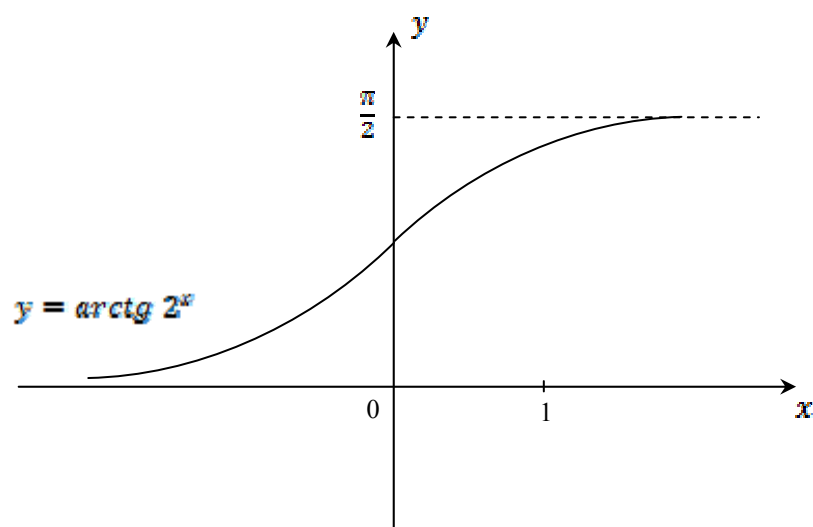


Рис. 2

Важно отметить, что поскольку студенты стремятся принять сильное участие в разрешении возникающих в ходе диалогового взаимодействия проблемных ситуаций, у многих из них проявляется «ощущение собственной нужности». Это позволяет создать интуитивное «предзнание» о вводимом материале, дающее исходный импульс мыслительному процессу и первоначальную его ориентацию [1,2].

Для самостоятельного решения можно предложить построить графики функций

$$y = 2^{\frac{1}{x}}; y = \frac{1}{1+x^2}; y = \ln(x^2 - 3x + 2); y = 2^{\frac{1}{x^2-4x+3}}; y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sin x}.$$

В дальнейшем, при овладении навыками исследования функций с помощью производной, полезно вернуться к рассмотренной сложной функции и исследовать ее с помощью производной.

Работая по предложенной схеме, студенты постоянно обращаются к графикам и свойствам элементарных функций, учатся по графику следить за изменением функции при изменении аргумента и, наоборот, по заданному изменению функции строить ее график. При этом график воспринимается не как статичный образ, а как отражение движения. Такая работа хорошо иллюстрирует свойство непрерывности, различные виды разрывов, односторонние пределы, асимптоты функций и т.п., способствует развитию умения представлять сложную функцию в виде композиции двух функций. Таким образом, является эффективным пропедевтическим средством исследования функций с помощью производной и построения их графиков.

Приоритетное использование диалогового взаимодействия при обучении математике как особой формы обучения, предполагает развернутое общение между субъектами групповой учебной деятельности, вовлечение их в активное обсуждение спорных вопросов, стимулирование познавательного интереса, формирование новых знаний и способов действий.

Данный подход позволяет студентам переосмысливать изучаемый материал и овладевать им на более глубоком смысловом уровне, который характеризуется умением устанавливать связи в изучаемом математическом материале, открывать новые факты.

Естественное вовлечение в учебный процесс с помощью диалогового взаимодействия приучает думать, рассуждать, искать правильные ответы, помогает преодолеть коммуникативные барьеры и трудности в обучении математике. При этом более полно раскрывается личностный потенциал студента, повышается его самооценка [1, 2 и др.].

Как показывает наш опыт преподавания, регулярная организация диалогового взаимодействия на занятиях в качестве ведущего метода обучения, существенным образом повышает результаты обучения мате-

матике, влияет на формирование учебной мотивации студентов, уровень их успеваемости увеличивается, отмечается достаточно четкая тенденция к росту качества знаний. Эффективная реализация соответствующих методических приемов позволяет обеспечить для студентов возможность «личностного уподобления», заключающуюся в их целенаправленном привлечении к выполнению роли ведущего субъекта учебного процесса, который, как известно, играет существенную роль в усилении субъективной мотивационной ценности этого процесса.

Апробация разработанных нами учебных материалов, предусматривающих целенаправленную организацию учебного процесса с помощью диалогового взаимодействия на занятиях по математике, осуществлялась в практике преподавания математики бакалаврам экономического направления Пензенского государственного университета в течение многих лет. Результаты апробации свидетельствуют о доступности и эффективности предлагаемых педагогических решений в рамках заявленного функционала.

Библиографический список

1. Каминская, М. В. Педагогический диалог в деятельности современного учителя / М. В. Каминская. – М. : Смысл, 2003. – 284 с.
2. Родионов, М. А. Формирование поисковой мотивации в процессе обучения математике : учеб. пособие для учителей и студентов / М. А. Родионов. – Пенза : ПГПУ, 2001. – 58 с.
3. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер и др. ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с. – (Золотой фонд российских учебников).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ MAPLE ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА «АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

А. А. Исаева, Ю. В. Остудина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

E-mail: ms.nastya.esaeva@mail.ru, yulya.ostudina@yandex.ru

Введение

Одной из самых популярных систем компьютерной математики является система Maple. Это первый продукт компании Waterloo Maple Software (в настоящее время Waterloo Maple Inc.), которая в 1988 году

была создана Кейтом Геддесом и Гастоном Гоннетом. Данная программа является универсальным помощником в современной жизни, так как она совмещает в себе вычислительную силу, которую можно применять на разных уровнях, включая уровень серьезных научных исследований, и простоту использования. Maple охватывает достаточно широкий круг задач: вычисление пределов, дифференцирование, интегрирование, разложение функций в степенные ряды, графическое представление функций и их приближений, построение диаграмм и объемных фигур. Эта система объединила в себе все то, что требуется для решения поставленных задач, от простейших уравнений до математического моделирования. Поэтому Maple активно используется во многих учебных заведениях, исследовательских лабораториях и различных компаниях.

Применение в асимптотическом анализе

В данной статье мы подробнее рассмотрим, как систему Maple можно применить в одном из важных направлений – асимптотическом исследовании функций.

Очень часто при исследовании функции необходимо получить ее асимптотическое разложение. Для решения этой задачи в пакете Maple существует команда *asympt* (*f*, *x*). Для примера разложим функцию $\Gamma(x)$:

$$\begin{aligned} & \text{asympt}(\text{GAMMA}(x), x); \\ & \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x e^x} \left(\sqrt{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} \right. \\ & \quad + \frac{1}{288} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{5/2} - \frac{139}{51840} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{7/2} \\ & \quad - \frac{571}{2488320} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{9/2} \\ & \quad \left. + \frac{163879}{209018880} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{11/2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{13/2}\right) \right) \end{aligned}$$

Если важно количество слагаемых в разложении, то в функции третьим параметром можно указать нужное число.

$$\begin{aligned} & \text{asympt}(\text{GAMMA}(x), x, 3); \\ & \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x e^x} \left(\sqrt{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{288} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{x}\right)^{5/2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{7/2}\right) \right) \end{aligned}$$

Таким образом, мы всего лишь ввели саму функцию, а получили асимптотическое разложение, на которое мы потратили бы немало времени.

Так же для исследования функции находят сингулярные точки, и их тоже можно найти с помощью пакета Maple. Для это существует команда *singular(f, vars)*:

singular(*Psi*(*x*),*x*);

$\{x = \infty\}, \{x = -\sqrt{2} + 1\}$

Если не прописывать второй параметр, то, в случае функции с несколькими аргументами, будут выведены сингулярные точки по всем аргументам.

singular $\left(\frac{\tan x}{x - y * x^2 + 18}\right)$
 $\left\{x = x, y = \frac{x + 18}{x^2}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2} \pi + \sqrt{2} \pi, y = y\right\}$

С помощью команды *iscont(f, x = a .. b)* можно быстро определить, является ли функция непрерывной или нет. Команда возвращает *true*, если выражение непрерывно на заданном интервале, и *false*, если оно таким не является.

iscont(*erf*(*x*), *x* = 0..1)

true

iscont $\left(\frac{\sin 4 * x * e^{-\frac{2}{x+1}} * \arctan \frac{1}{x-1}}{x * (x^2 - 5 * x + 6)}, x = 0..2\right)$

false

Если команда не может определить результат, то она возвращает FAIL.

iscont $\left(\frac{1}{x + a}, x = 0..1\right)$

FAIL

Однако очень часто необходимо узнать, в каких именно точках происходит разрыв функции. Чтобы узнать набор этих значений, нужно воспользоваться командой *discont(f, vars)*.

discont $\left(\frac{\sin 4 * x * e^{-\frac{2}{x+1}} * \arctan \frac{1}{x-1}}{x * (x^2 - 5 * x + 6)}, x = 0..2\right)$

$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

discont $\left(\frac{\cos \frac{\tan 2 * x}{2}}{x^2 - 1}, x\right)$

$$\left\{-1, 1, \frac{1}{2} \pi_{-Z2} + \frac{1}{4} \pi\right\}$$

Иногда необходимо получить ответ в численном виде, в таком случае можно воспользоваться функцией *fdiscont(f, vars)*.

$$fdiscont\left(\frac{\cos \frac{\tan 2 * x}{2}}{x^2 - 1}, x = 0..2\right)$$

$$[0.776414682891895..0.777061505208343, 0.779234497991101 \\ ..0.791500628667542, 0.999603077318568..1.00058539550613]$$

Так же, в асимптотическом анализе часто встречаются трансцендентные уравнения. При решении таких уравнений для получения ответа в явном виде перед командой *solve* следует ввести дополнительную команду *_EnvExplicit:=true*.

$$eq := \{x^2 - y^2 = 1, x^2 + x * y = 2\};$$

$$_EnvExplicit := true;$$

$$s := solve(eq, \{x, y\});$$

$$s := \left\{x = \frac{2}{3} \sqrt{3}, y = \frac{1}{3} \sqrt{3}\right\}, \left\{x = -\frac{2}{3} \sqrt{3}, y = -\frac{1}{3} \sqrt{3}\right\}$$

Иногда при решении задач требуется сравнить, насколько близки разложение в ряд и асимптотическое разложение функции. Для этого сначала нужно построить сам ряд с помощью команды *series(f, x)*.

$$series(erf(x), x)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} x^5 + O(x^6)$$

А саму погрешность можно показать визуально, так как в Maple построение графиков также возможно. На рис. 1 представлены два графика: график гамма-функции $\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [1; 5]$ и ее асимптотического разложения до 10 порядка.

Таким образом, при помощи пакета Maple пользователи могут легко и быстро получить ответы на те задачи, на решение которых они потратили бы много времени.

Конечно, это не все команды из пакета Maple, которыми можно воспользоваться при асимптотическом анализе функций, в этой статье описаны только самые востребованные из них.

Maplet-приложение

Помимо выполнения множества математических операций, в Maple предусмотрено создание различных приложений. Данное решение служит для того, чтобы облегчить ввод и редактирование данных, обеспечить их вывод в удобном для пользователя представлении. С помощью

подобных объектов можно вычислять значения выражений, строить графики и т. д. Так, одним из модулей для создания приложений является Maplelet. Данное приложение может помочь в решении разнообразных задач каждому пользователю, даже если он не знаком с данной средой.

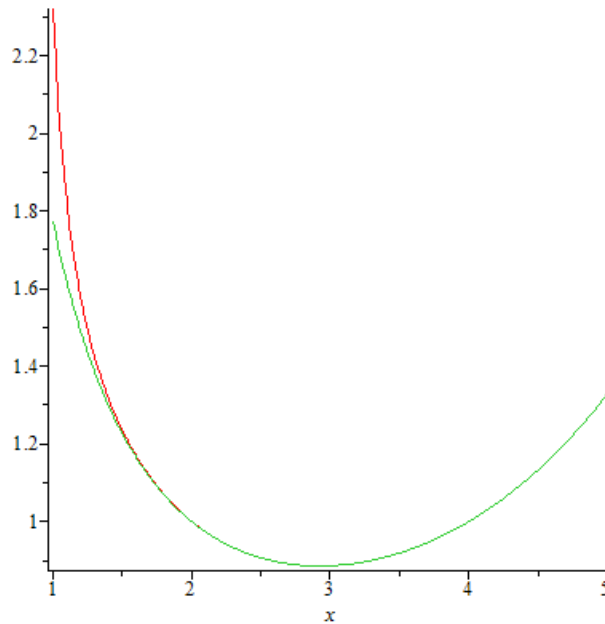


Рис. 1

Допустим, для решения конкретной математической задачи асимптотического анализа, можно разработать Maplelet, который позволит исследовать функцию на непрерывность, определять точки нарушения непрерывности, находить сингулярные точки функции, вычислять асимптотические и иные разложения и строить графики. Рассмотрим несколько примеров использования данного Maplelet.

На рис. 2 представлен асимптотический анализ гамма-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} * t^{z-1} dt, \quad x \in [1; 5].$$

Исследование пси-функции $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\frac{d}{dx} \Gamma(x)}{\Gamma(x)}, \quad x \in [1; 5]$

представлено на рис. 3.

На рис. 4 анализируется дзета-функция Римана $\zeta(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^z}$, $x \in [2; 5]$

Написав небольшой программный код, мы получаем удобный пользовательский интерфейс. Теперь любой пользователь, не зная основ

Maple, может найти решение поставленной задачи. Для этого ему всего лишь достаточно ввести в поля ввода функцию, которую необходимо исследовать, интервал изменения переменной, саму переменную и порядок разложения. После чего, для обработки информации и выполнения необходимой последовательности действий ему нужно нажать на соответствующую кнопку.

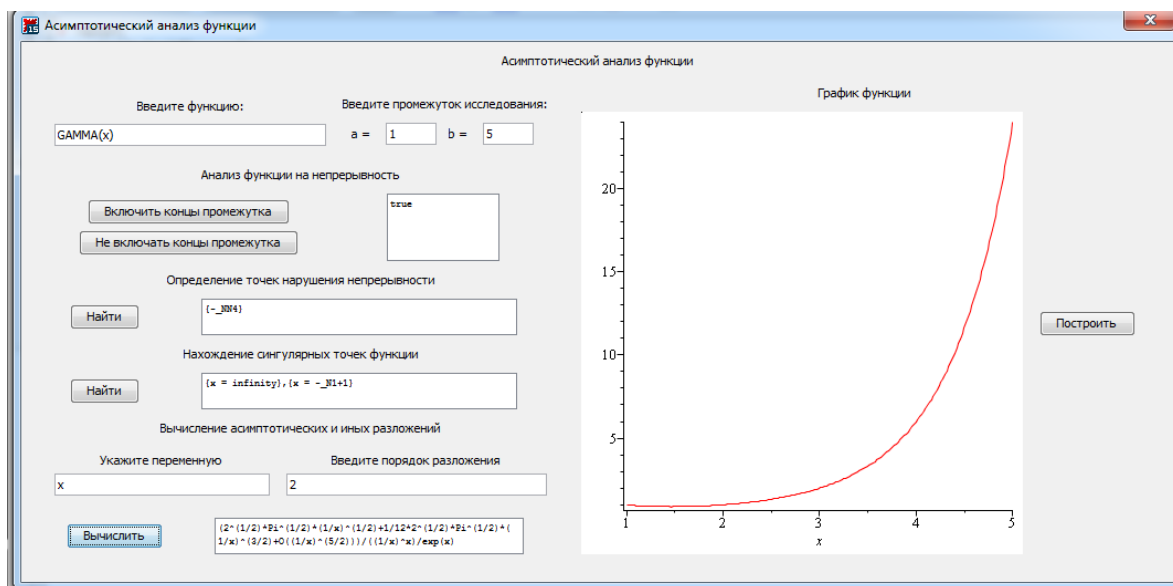


Рис. 2

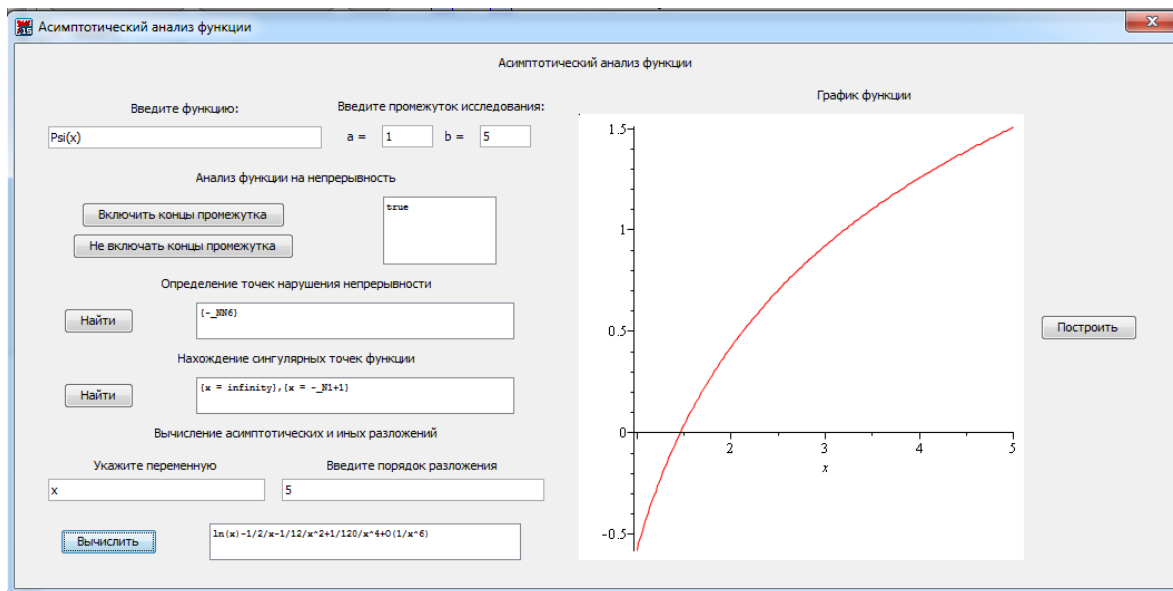


Рис. 3

В Maplet «Асимптотический анализ» используется не только текстовый вывод, а так же вывод графика функции. При нажатии на кнопку «Построить», графическая область будет содержать 2D-модель функции, что позволяет визуализировать решение.

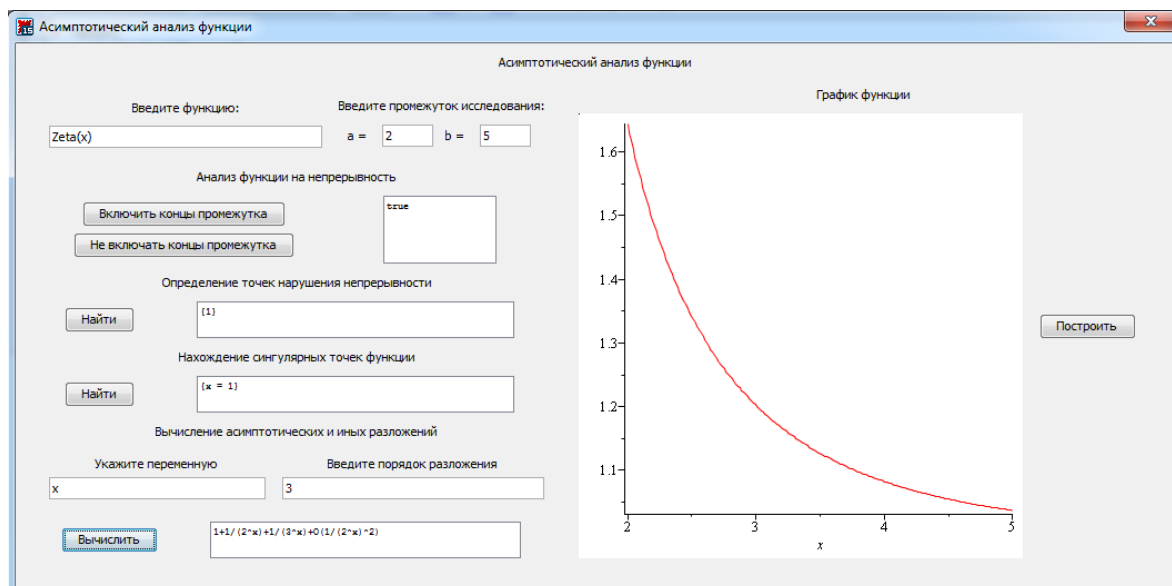


Рис. 4

Таким образом, мы выяснили, что Maplelet выступает в качестве интерфейса между пользователем и Maple. Создав графический интерфейс под свои конкретные нужды, пользователи могут выполнять вычисления и другие операции, включая работу с графическими объектами. Каждый элемент формы имеет свои уникальные свойства, которые определяют его внешний вид. Более подробную информацию для создания приложения можно получить в справочной системе Maple.

Библиографический список

1. Дьяконов, В. П. Maple 9.5 10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2006. – 720 с.
2. Maplesoft. – URL: [http:// www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com) (дата обращения : 04.11.2018).
3. Exponenta.ru. – URL: <http://old.exponenta.ru/educat/news/manzon/article1.asp> (дата обращения: 04.11.2018).
4. Maple : краткое пособие для первоначального знакомства. – URL: <http://mif.vspu.ru/books/mapletut/page4.html> (дата обращения: 04.11.2018).
5. Tinlib.ru. – URL: http://www.tinlib.ru/kompyutery_i_internet/maple_9_5_10_v_matematike_fizike_i_obrazovanii/p11.php#metkadoc41 (дата обращения: 05.11.2018).
6. Система компьютерной алгебры Maple. – URL: <http://bourabai.kz/cm/maple.htm> (дата обращения: 05.11.2018).
7. Электронный курс по MAPLE V. – URL: <http://detc.ls.urfu.ru/assets/amath0011/soder.htm> (дата обращения: 05.11.2018).

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. Г. Пичугина, О. В. Болотникова

Пензенский государственный университет,

г. Пенза, Россия

E-mail: polinapichugina@yandex.ru, olgavs3011@yandex.ru*

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к базовой части блока Б1 федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлениям 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04 и др. В результате изучения данной дисциплины обучающийся должен знать основные методы доказательства и алгоритмы теории вероятностей, выявляя связи случайного и детерминированного; уметь применять аппарат теории вероятностей для исследования и анализа различных моделей; владеть различными приемами использования идеологии курса теории вероятностей и математической статистики к доказательству теорем и решению задач программного обеспечения и построения информационных систем и баз данных; техникой применения теории вероятностей к решению профессиональных задач.

Таким образом, при обучении теории вероятностей студентов различных инженерных специальностей большое внимание должно отводиться реализации внутри- и межпредметных связей. И здесь огромную роль играют математические задачи. При отборе информации, профессионально значимой для будущих специалистов и, в тоже время, вполне применимой в качестве сюжетного материала при составлении математических задач, целесообразно руководствоваться следующими *установками*:

1) информация, зафиксированная в условиях задачи, должна содержать описание некоторого явления или процесса, представляющего познавательный интерес с точки зрения инженера;

2) задачный материал должен быть доступен для восприятия студентов и, по возможности, соотноситься с изучаемым материалом других дисциплин;

3) ситуация, описываемая в задаче, должна быть сопоставима по объему с обычным (средним) объемом сюжета математической задачи, а ее элементы должны предполагать возможность задания стандартных математических характеристик.

Разберемся с каждой установкой в отдельности.

1) Рассмотрим в качестве примера задачу на нахождение вероятности, связанную с оптимизацией производственного процесса: «На заводе

имеется 300 одинаковых станков. Если в среднем 70% станков работает, а 30% находятся в ремонте, то нужно обеспечить энергией в среднем 210 станков. Однако иногда могут работать все 300 станков. Каким количеством энергии надо обеспечить завод, чтобы с вероятностью 99,9% все исправные станки могли работать? (предполагается, что станки выходят из строя независимо друг от друга)».

Эта задача затрагивает проблему планирования расхода энергии, так называемое «энергосберегающее производство», демонстрируя связь теории вероятностей с производством. Решение задачи основывается на предельной теореме Муавра-Лапласа $\lim_{n \rightarrow \infty} p(H_0 \leq np + x\sqrt{np(1-p)}) = \Phi(x)$,

которая рассматривается при изучении темы «Предельные теоремы теории вероятностей». Применяя теорему для наших данных ($n = 300$, $p = 0,7$, $\Phi(x) \approx 0,999$, откуда $x = 3$), получаем $np + x\sqrt{np(1-p)} = 210 + 3\sqrt{63} \approx 234$. Получается, достаточно обеспечить энергией 234 станка, тогда как на практике учитывают почти все 300 станков, «перестраховываясь» и, тем самым, не экономят, расходуя деньги на лишнюю энергию.

Кроме того, предельная теорема Муавра-Лапласа – демонстрирует внутрипредметные связи, являясь «математическим мостом» между законом больших чисел Бернулли и локальной формулой Муавра-Лапласа. Так называемый «парадокс Муавра»: вероятность того, что число гербов приближенно равно числу решек, стремится к 1, в то время как вероятность того, что число гербов в точности совпадает с числом решек, стремится к 0.

Отметим так же, что эта задача не только представляет познавательный интерес с точки зрения инженера, но и перекликается с курсом «Методы оптимизации», который студенты изучают параллельно с «Теорией вероятностей и математической статистикой».

2) Не надо забывать, что использование сюжетных профессионально ориентированных задач при усвоении курса теории вероятностей может быть чревато временными издержками, связанными с необходимостью разбираться в особенностях сюжета, значениях специальных терминов, еще не рассмотренных в спецкурсах. Поэтому в целях экономии учебного времени и усиления межпредметных связей при обучении математике целесообразно рассмотрение математических задач, сюжеты которых кроме того, что соотносятся с изучаемым материалом других дисциплин, на данном этапе были бы понятны для студентов.

Так, например, с теорией игр студенты-инженеры знакомятся позже в курсе «Теория принятия решений». И, когда в курсе «Теории вероятностей и математической статистики» мы предлагаем задачи, связанные с выбором стратегии той или иной игры, студенты еще не особо подготовленные в данном вопросе, могут испытывать трудности при по-

строении математической модели. Поэтому мы рассматриваем целую серию таких задач, каждый раз возвращаясь к этому вопросу на новом уровне.

Задача 1. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков двух партий подряд (ничья исключается). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0,5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найти вероятность того, что для окончания игры потребуется не более пяти партий.

Задача 2. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определите вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Задача 3. В жюри из трех человек 2 члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p , а третий для принятия решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). С другой стороны, некий независимый эксперт принимает правильное решение с вероятностью p . Кто с большей вероятностью принимает правильное решение: жюри или эксперт?

Эти задачи рассматриваются в теме «Правила сложения и умножения вероятностей». В первой задаче ограничение «не более пяти партий» с одной стороны и «не менее двух партий» с другой позволяет быстро найти вероятность окончания игры ($p=0,9375$). Зная время, затрачиваемое на каждую партию, можно спрогнозировать время окончания игры в целом.

Во второй задаче рассматривается игра, в которой стратегия первого игрока всегда (независимо от самого игрока – его ума и ловкости) выигрышная. Это пример, который учит студентов не просто находить вероятности суммы и произведения событий, но и позволяет анализировать игровую ситуацию и принимать соответствующее решение (если ты – третий игрок, то ты скорее проиграешь, чем выиграешь, поэтому даже не стоит ввязываться).

Третья задача показывает, каким образом принятие правильного решения для жюри в целом зависит от принятия правильного решения каждого члена жюри. При чем оказывается, что вероятности правильных решений для жюри и для судьи одинаковые (при заданных данных). Можно предположить, что при таком раскладе нет смысла звать «большое» жюри, достаточно позвать одного судью.

Такая демонстрация применения математических методов и иллюстрация некоторых математических моделей в избранной области профессиональной деятельности должны обеспечить развитие профессионально значимых качеств и приемов умственной деятельности, а так же освоение студентами математического аппарата, позволяющего моделировать, анализировать и решать элементарные математические профессионально значимые задачи.

Библиографический список

1. Пичугина, П. Г. Проблема структурирования математической подготовки будущих инженеров / П. Г. Пичугина, М. А. Родионов // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : сб. ст. XXXII Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 2017). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 327–328.

2. Пичугина, П. Г. Особенности применения математико-статистических методов обработки экономических исследований и их учет при подготовке будущего экономиста / П. Г. Пичугина, О. В. Болотникова // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : Материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 30 мая – 1 июня 2017). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 287–290.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

- Шалдаева А. А., Кудряшова Н. Ю.* Уравнение разветвления для нелинейного интегрального уравнения первого рода 3
- Евстигнеев Р. О.* Решение двумерной обратной задачи на неоднородном теле по результатам измерения вне тела 8
- Снегур М. О., Курсеева В. Ю.* Об одной задаче распространения гибридных нелинейных азимутально-симметричных волн в экранированном волноводе с нелинейным неоднородным заполнением 11

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

- Бойков И. В., Рязанцев В. А.* О построении оптимальных разностных аппроксимаций физических полей 17
- Бойкова А. И., Елпатова В. С.* Применение методов Монте-Карло к вычислению интегралов на фракталах 27
- Абдуллина Л. Р., Ганеев Р. М., Яблокова Л. В.* Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций 32

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Головашкин Д. Л., Морунов Н. Д.* Построение двухслойных явных разностных схем и блочных алгоритмов для них 39
- Морунов Н. Д.* Реализация блочного алгоритма FDTD-метода на языке Matlab с использованием графического процессора 44
- Засов В. А., Никоноров Е. Н., Ромкин М. В.* Контроль устойчивости разделения сигналов статистическими методами 50
- Никонова Т. В., Горьковская В. Н.* Построение математической модели для расчета напряженно-деформируемого состояния тонкостенных сопряженных конструкций 55

Цуцаев А. О., Хубежты Ш. С. Численное решение сингулярных интегральных уравнений методом квадратур на классе функций неограниченных на концах отрезка интегрирования.....	60
Новиков Р. И., Черушева Т. В. О построении модели облачных вычислений.....	64
Дубнов Ю. А. Параметрическая модель смеси нормальных распределений для прогнозирования миграционных потоков	68
Павлова А. А., Иутин Р. В., Якунов З. Я., Галимова Р. К. Роль центра записи полиномиальной формулы	73
Засов В. А., Кондратьев М. С. Исследование эффективности параллельного алгоритма чет-нечетной сортировки данных	79
Бойков И. В., Айкашев П. В. Сплайн-коллокационный метод решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах	85
Бойков И. В., Айкашев П. В. Сплайн-коллокационный метод решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений на фракталах	89
Александрова У. В. Метод оценки влияния актора при анализе топологии сети	92

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК

Гарафутдинов Р. В. Обзор методов оценивания фрактальных характеристик финансовых временных рядов	97
Коноплева И. В., Сибирева А. Р. Математическое моделирование кризисных явлений в педагогических системах	103
Рудин А. В., Руськин А. С., Задера А. В., Евдокимов А. С., Зенин О. К. Применение метода акустической эмиссии для проведения процедуры баллонной дилатации извлеченных сосудов.....	111

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Имомназаров Х. Х., Бахромов Р. Х. Потенциалы двойного слоя для уравнения двухжидкостной среды	117
---	-----

Бершадский А. М., Бождай А. С., Евсеева Ю. И., Гудков А. А. Обобщенная архитектура адаптивной программной системы прикладного назначения	121
Литвинов А. Н. Алгоритм для анализа адгезионной прочности слоистого вибродемпфирующего покрытия при динамическом нагружении	125
Бождай А. С., Евсеева Ю. И., Гудков А. А. Обобщенная поведенческая структура адаптивной программной системы: визуальное представление и формализация	130
Барabanова П. С. Сравнительный анализ моделей надежности программного обеспечения.....	133
Майоров Б. Г. Определение критерия наибольшего отклонения через выпуклые степенные функции модуля времени	138
Воронухин М. Е. Исследование эффективности параллельного алгоритма Роя частиц для задач оптимизации	145
Макарычев П. П. Постановка и решение задачи кластерного анализа данных дивизимным методом.....	150
Иванов В. Д. Применение технологии Internet of Thing в системах мониторинга объектов транспортной инфраструктуры.....	154
Рудин А. В., Волков В. В., Овчинников Д. В., Тулякова Е. И. Применение ультразвукового синхрокольца для измерения групповой скорости световых волн в газовой среде	159
Сипягина Е. Е., Черушева Т. В., Алексеев И. В. О возможности создания метода определения родственных связей по записям голосов	165
Яблоков Д. Е. Исследование возможности увеличения производительности обобщенных алгоритмов за счет использования развитой семантики обработки данных на основе параметрического полиморфизма подтипов.....	169

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В НАНОТЕХНОЛОГИЯХ

Рассадин А. Э. Об одной модели эволюции поверхности твердого тела.....	175
--	-----

7. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

Алкезуини М. М., Горбаченко В. И. Обучение методом
Левенберга – Марквардта сетей радиальных базисных функций
при решении краевых задач 181

Алексеев И. В., Куданова М. М., Митрохин М. А.
Возможности применения технологий глубоких
нейронных сетей для задач обработки сигналов 188

8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Никифорова С. В., Дорофеева С. И. Особенности
создания электронных курсов по математике
для студентов инженерных специальностей Казанского
национального исследовательского технического
университета имени А. Н. Туполева..... 192

Акулова А. Е., Мойко Н. В. Возможности
системы Maple при работе с многочленами 198

Бельдягина Е. Ю., Дмитриева А. А., Купряшина Л. А.
Возможности применения диалогового взаимодействия
при исследовании функций и построении графиков 202

Исаева А. А., Остудина Ю. В. Использование
системы Maple при изучении курса «Асимптотический анализ» 207

Пичугина П. Г., Болотникова О. В. Методические
подходы в профессиональной подготовке будущих инженеров
на занятиях по теории вероятностей 214

Научное издание

Аналитические и численные методы моделирования
естественно-научных и социальных проблем

*Материалы
XIII Международной научно-технической конференции
г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2018 г.*

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Analytical and Numerical Methods of Modelling
of Natural Science and Social Problems
(ANM-2018)

*Proceedings of the Thirteenth International
Conference ANM-2018*

Penza, Russian Federation, 4–6 December, 2018

E d i t e d b y
Ilya V. **Boikov**

Все материалы представлены в авторской редакции

Компьютерная верстка Д. В. Тарасова

Подписано в печать 03.12.2018. Формат 60×84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 12,90.

Заказ № 692. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru