

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

М. Ю. Медведик, Э. А. Хорошева

**СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие

ПЕНЗА 2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

М. Ю. Медведик, Э. А. Хорошева

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2023

УДК 519.642
М42

Р е ц е н з е н т

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математики и физики
Пензенского государственного технологического университета
А. В. Моисеев

Медведик, Михаил Юрьевич.

М42 Субиерархический метод для численного решения интегральных уравнений : учеб.-метод. пособие / М. Ю. Медведик, Э. А. Хорошева. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – 36 с.

Исследуются акустические и электромагнитные задачи дифракции на экранах и телах сложной геометрической формы. Применяется метод поверхностных или объемных интегральных уравнений для сведения краевой задачи к интегродифференциальному уравнению. Используется субиерархический метод для решения задач на фигурах сложной геометрической формы.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.04 «Прикладная математика» и по специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика», а также может быть полезно аспирантам, изучающим численные методы, математический анализ и интегральные уравнения.

УДК 519.642

© Пензенский государственный
университет, 2023

ВВЕДЕНИЕ

Издание посвящено исследованию акустических и электромагнитных задач дифракции на экранах и телах сложной геометрической формы. В настоящее время существует два основных подхода для решения задач дифракции. Первый связан с использованием методов конечных элементов для решения краевой задачи, второй – это сведение краевой задачи к поверхностным или объемным интегральным уравнениям. Общим моментом в этих подходах является построение расчетной сетки.

В методе конечных элементов расчетной сеткой покрывается область, значительно превышающая размер неоднородностей, из-за необходимости смоделировать поведение поля на бесконечности. Далее дифференциальный оператор заменяется его разностным аналогом, связывающим значения искомой функции в узлах сетки. Благодаря такой замене задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Использование метода конечных элементов приводит к разреженным матрицам очень больших размеров, порядка $10^7 - 10^8$. Элементы матрицы составляются очень просто, благодаря чему метод используется в большинстве математических пакетов прикладных программ. Однако если задача будет решаться на фигуре другой геометрии, то необходимо насчитывать новую матрицу и решать СЛАУ.

Метод поверхностных или объемных интегральных уравнений значительно более сложен в реализации. Однако расчетная сетка строится только на экране или теле, что на несколько порядков уменьшает размер матриц, используемых в СЛАУ. Матрица получается плотной и имеет размер порядка $10^5 - 10^6$. За счет сведения краевой задачи к поверхностным или объемным интегральным уравнениям можно построить решения задачи для тела или экранов сложной геометрической формы, используя матрицу, рассчитанную для фигуры канонической формы. При этом фигура сложной формы должна описываться элементами расчетной сетки, построенной для фигуры канонической формы. Компенсировать сложность расчета матричных элементов позволяет использование суперкомпьютерных технологий.

Наряду с перечисленными методами иногда используются гибридные методы. Гибридные методы стали в последнее время все чаще использоваться для решения внешних электромагнитных задач дифракции на системе диэлектрических и идеально проводящих тел. Суть гибридного метода решения задачи дифракции заключается в следующем. Выбирается фиктивная замкнутая поверхность, содержащая систему диэлектрических и идеально проводящих тел. Вне этой поверхности решение задачи выписывается в явном виде с помощью поверхностных потенциалов. Внутри поверхности задача решается каким-либо методом, а затем решения вне и внутри поверхности «сшиваются» с помощью условий сопряжения. В ре-

зультате, кроме уравнений внутри фиктивной поверхности (в объеме), возникают дополнительные поверхностные уравнения на фиктивной поверхности, что и обусловило название метода как гибридного. Метод позволяет перейти от решения внешней задачи дифракции к решению внутренней задачи с некоторыми дополнительными поверхностными уравнениями. Основным преимуществом данного метода является его универсальность для решения задач дифракции на системе ограниченных тел. Одним из главных недостатков метода является неэллиптичность оператора задачи при решении дифракции электромагнитной волны.

Существует два класса методов, позволяющих численно решать задачи математической физики. Первый класс – это иерархические методы. Основная идея этого подхода заключается в добавлении дополнительных базисных функций к уже существующим базисным функциям на некотором этапе решения задачи. В результате получается уточнение приближенного решения за счет совместного использования «старых» базисных функций, для которых элементы матрицы СЛАУ уже вычислены, и «новых» базисных функций. Таким образом, можно говорить об уровнях, или иерархиях, вычислительного алгоритма. При использовании результатов вычислений на предыдущем уровне достигается экономия вычислительных ресурсов для получения уравнения приближенного решения. Второй класс – это адаптивные методы. Для них выбор базисных функций на каждом уровне определяют за счет сравнения погрешности счета между различными, чаще всего соседними уровнями.

В данном пособии предлагается другой подход, названный субиерархическим. В нем уже на первом шаге (уровне) один раз наиболее точно решается задача дифракции на фигуре простейшей канонической формы. Далее, используя результаты решения задачи на первом шаге, «выделяем» из него другую фигуру произвольной формы и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, определяем решение на новой фигуре. Таким образом, можно решить серию задач дифракции на экранах и телах различной формы и, по существу, создать базу данных для их решения. Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом этапе. Наиболее удобно рассчитывать подобные задачи на кластере. Предложенный метод позволяет решать задачи дифракции для фигур произвольной формы, используя результаты решения только одной задачи. Это возможно в том случае, если «новая» фигура произвольной формы целиком помещается в «старой» канонической фигуре. Значительный эффект от использования субиерархического метода будет проявляться при решении большой серии задач дифракции. Таким образом, предлагается альтернативный подход к решению задач дифракции электромагнитных волн на экранах и телах сложной формы, который оказывается более эффективным при решении ряда задач, чем известные конечно-разностные и конечно-элементные методы.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СУБИЕРАРХИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В данной главе излагается метод, позволяющий решать интегральные уравнения на однородных или неоднородных фигурах сложной геометрической формы. Предлагается метод, названный субиерархическим [1, 2], позволяющий получать решение интегрального уравнения на геометрически сложных фигурах и поверхностях, используя решение этого интегрального уравнения на телах и поверхностях более простой конфигурации.

1. Интегральное уравнение

Рассмотрим класс задач электродинамики, электростатики и акустики, берущих начало из уравнений математической физики. Описанные выше задачи сводятся к интегральным уравнениям вида (1.1), имеющим геометрическую интерпретацию

$$Au = f. \quad (1.1)$$

Здесь $A:V \rightarrow V'$ – интегральный оператор следующего вида:

$$Au = D_1 \iint_{\Omega} G(x, y) \sigma(y) D_2 u(y) dy + \hat{\alpha}(x) u, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

где D_1, D_2 – дифференциальные матричные операторы, $\hat{\alpha}(x)$ – тензор, $G(x, y)$ – ядро интегрального уравнения, $\sigma(y)$ – функция, выражающая неоднородность фигуры.

Правая часть f уравнения (1.1) описывает поведение падающей волны (рис. 1.1).

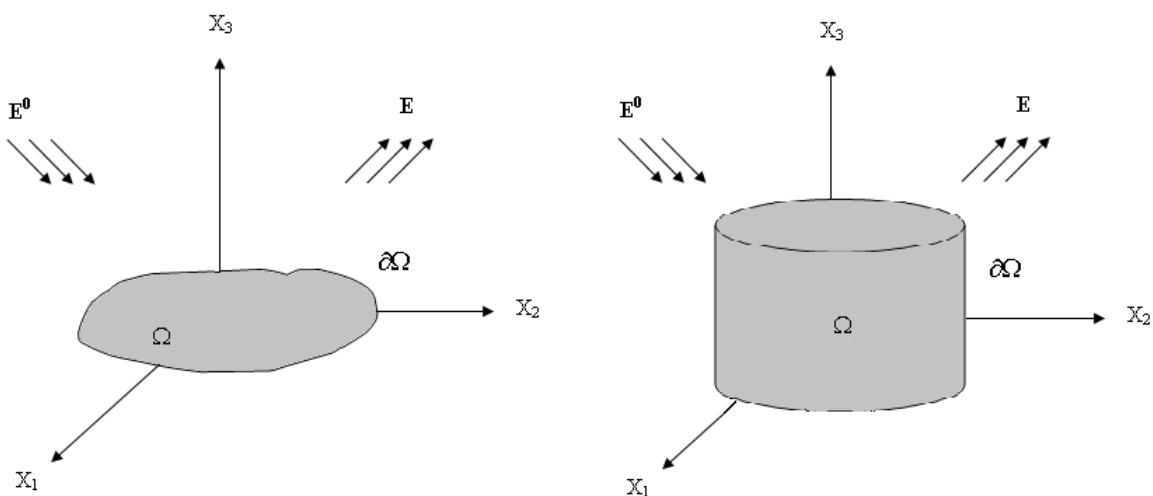


Рис. 1.1. Дифракция электромагнитной волны на экране и теле Ω

Сведение решаемых задач к многомерным интегральным уравнениям на поверхностях и телах от классической постановки производится методом поверхностных или объемных сингулярных интегральных уравнений [3, 4]. Полученные интегральные уравнения решаются численными методами. Среди численных методов может использоваться один из проекционных методов, например, метод коллокации или метод Галеркина. Полученная после применения проекционного метода СЛАУ решается *подходящим итерационным методом*.

Предложенный выше подход хорошо работает для однородных тел или экранов, имеющих каноническую конфигурацию. Под телом или экраном канонической формы будем понимать такие фигуры, для которых расчетная сетка строится просто. В случае тела это может быть куб или прямоугольный параллелепипед, в случае плоского экрана это может быть квадрат или прямоугольник [5]. Для произвольной (неплоской) поверхности это куб или параллелепипед, разбитый внутри на маленькие кубики или параллелепипеды, полые внутри. Фигуры подобной формы легко описываются граничными условиями краевой задачи.

Для решения задачи на телах и экранах сложной формы можно использовать подход, называемый субиерархическим. В нем уже на первом шаге (уровне) один раз наиболее точно решается задача дифракции на однородном теле или экране канонической формы. Далее, используя результаты решения задачи на первом шаге, мы «выделяем» из него другой экран произвольной формы и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, находим решение интегрального уравнения на новом теле или экране сложной формы. Таким образом, можно решить серию задач дифракции на телах и экранах различной формы и, по существу, создать базу данных для их решения.

Решение для задачи на неоднородном теле или поверхности можно аналогично получить используя матрицу, рассчитанную для однородной задачи, и вектор неоднородности фигуры.

Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом этапе. Наиболее удобно рассчитывать подобные задачи на вычислительном кластере. Предложенный метод позволяет решать задачи дифракции для тел и экранов произвольной формы, используя результаты решения только одной задачи. Это возможно в том случае, если фигура или экран сложной формы целиком помещается в каноническом теле или экране. Эффект от использования субиерархического метода будет хорошо проявляться при решении большой серии поставленных задач.

Следует отметить, что для увеличения точности решения необходимо снова более точно решать задачу на каноническом теле или экране. При увеличении размеров экрана (в длинах волн) также необходимо пересчитать первоначальную задачу. Однако во многих практических приложениях (например, при проектировании печатных антенн) часто приходится решать большое количество задач дифракции на экранах различной формы, помещающихся в некотором прямоугольнике (на подложке антенны), с некоторой фиксированной точностью. В этом случае построенная база данных оказывается весьма полезной и позволяет решать задачи дифракции на экранах нужной формы уже на персональном компьютере, а не на кластере, который использовался при решении первой задачи на прямоугольном экране.

2. Дискретизация задачи

Рассмотрим n -мерный прямоугольный параллелепипед Π в R^n . Будем называть n -мерный прямоугольный параллелепипед фигурой *канонической формы*. Под фигурой канонической формы в самом простом случае будем понимать прямоугольный экран, в случае поверхностной задачи дифракции или прямоугольный параллелепипед для задачи дифракции на теле. Выбранная форма имеет ряд преимуществ, например, для нее просто описать граничные условия и построить сетку. Следует отметить, что в качестве фигуры канонической формы можно выбирать и фигуры другой формы.

Построим *прямоугольную* сетку на фигуре канонической формы Π . Разобьем фигуру канонической формы Π на элементарные ячейки

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i, i = 1, 2, \dots, N\}, \quad (2.1)$$

где k_i – целые числа, а $h_i > 0$.

Обозначим через $\bar{\Pi}_N$ объединение элементарных ячеек (вместе с их границей), таких, что их граница принадлежит $\bar{\Pi} = \Pi \cup \partial\Pi$. Пусть $\partial\Pi_N$ есть граница области $\bar{\Pi}_N$.

Множество вершин элементарных ячеек, принадлежащих $\bar{\Pi}_N$, обозначим символом $\overset{\bullet}{\bar{\Pi}}_N$ и назовем его *сеткой* для фигуры канонической формы Π .

Вершины элементарных ячеек p_i будем называть *узлами сетки*.

Множество узлов сетки, принадлежащих Π , назовем $\overset{\bullet}{\Pi}_N$, а сами узлы – *внутренними узлами*.

Сетка называется равномерной, если размер элементарных ячеек одинаковый для всей сетки, $h_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В общем случае сетка не обязана быть равномерной, условие равномерности упрощает работу по построению сетки.

Любая сетка состоит из узлов, элементарных ячеек, ребер и граней. Элементарные ячейки будем называть *конечными элементами*. *Грань* – это одна из сторон элементарной ячейки. Гранью может быть либо $(n-1)$ -мерный треугольник, либо $(n-1)$ -мерный прямоугольник.

Пересечение двух граней элементарной ячейки является *ребром*. Ребро можно также определить как $(n-1)$ -мерную грань. В двумерном случае на прямоугольной сетке ребра могут быть двух типов – горизонтальные и вертикальные.

Количество узлов в прямоугольной сетке равно m^n , где m – количество узлов разбиения по одной стороне, n – размерность фигуры. Количество конечных элементов равно $(m-1)^n$.

Каждому узлу сетки p поставим в соответствие *мультииндекс* $P(i_1, \dots, i_n)$, где каждый индекс отвечает за порядковый номер по соответствующей координате. Координаты узла p_i по каждой из осей x_i можно вычислить по формуле

$$x_i = a + ih_i; \quad i = (1, \dots, n),$$

где a – начальная позиция по рассматриваемой координате. Аналогично нумеруются конечные элементы.

Рассмотрим построение треугольной сетки в случае двух переменных. Возьмем за основу прямоугольную сетку. Конечный элемент прямоугольной сетки, имеющий форму прямоугольника с двумя вертикальными и двумя горизонтальными ребрами, дополним еще одним диагональным ребром. Для определенности выберем диагональ прямоугольника, выходящего из левого нижнего угла. Полученный прямоугольник состоит из двух треугольников, каждый из которых является конечным элементом треугольной сетки. Данную пару треугольников будем называть *базовыми конечными элементами*. Для прямоугольной сетки базовым элементом будет являться конечный элемент. Проведя описанную выше процедуру с каждым конечным элементом сетки получим равномерную треугольную сетку. Построенная сетка будет также являться регулярной.

Все конечные элементы построенной сетки получаются из базовых конечных элементов только посредством сдвига на одинаковое расстоя-

ние. Равномерная сетка может содержать в себе элементы, полученные вращением базовых конечных элементов.

Конечный элемент в форме n -мерного параллелепипеда можно разбить разными способами. Рассмотрим один пример. Проведем через центр n -мерного параллелепипеда всевозможные $(n-1)$ -мерные плоскости симметрии. Количество n -мерных треугольников при этом равно числу элементов группы симметрии n -мерного параллелепипеда, т.е. $(2n)!!$. Проведя подобную процедуру с каждым конечным элементом n -мерной сетки, получим один из возможных вариантов треугольной сетки. Подробное описание триангуляции можно найти в [6].

Следуя схеме проекционного метода, необходимо ввести базисные функции f для аппроксимации решения. Базисные функции определяются на одном или нескольких конечных элементах. Совокупность конечных элементов Π_i , на которых определена базисная функция f , называется *носителем* $\text{supp } f = \bigcup_i \Pi_i$. В пределах носителя $\text{supp } f$ ба-

зисная функция является кусочно-непрерывной, за ее пределами равна нулю. Конечные элементы, на которых существует базисная функция, должны соприкасаться друг с другом ребрами или гранями. Носитель базисной функции должен быть *локальным*, т.е. должно выполняться условие

$$\text{mes}(\text{supp } f) \ll \text{mes}(\Pi). \quad (2.2)$$

Базисные функции f , в зависимости от типа задачи, разделяются на скалярные или векторные. Носителем для скалярных базисных функций является, как правило, один конечный элемент. Это самый простой вариант носителя. Однако в большинстве задач подобного типа вводится не один, а несколько типов носителей базисных функций. Совокупность всевозможных типов носителей базисных функций будем называть *шаблоном носителей*.

Для дискретизации интегрального уравнения используем проекционный метод для сведения интегрального уравнения к СЛАУ.

3. Проекционный метод

Рассмотрим приближенное решение линейного операторного уравнения с помощью проектирования его на подпространство, имеющее конечную размерность [7]. Ниже все операторы предполагаются линейными.

Определение 3.1. Пусть X – нормированное пространство и $U \subset X$ – нетривиальное подпространство. Ограниченный оператор $P: X \rightarrow U$, такой, что $P\phi = \phi$ для всех $\phi \in U$, называется проекционным оператором (или проектором) X на U .

Утверждение 3.1. Нетривиальный ограниченный оператор является проектором тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию $P^2 = P$. В этом случае $\|P\| \geq 1$.

В гильбертовых пространствах важным примером проекционного оператора является ортопроектор на подпространство U , т.е. оператор наилучшей аппроксимации фиксированного элемента из пространства X элементами из подпространства U .

Утверждение 3.2. Пусть U – нетривиальное подпространство гильбертова пространства X . Тогда оператор P , переводящий элемент $\phi \in X$ в элемент наилучшей аппроксимации в подпространстве U , есть проекционный оператор. Он называется ортопроектором на U и удовлетворяет условию $\|P\| = 1$.

Определение 3.2. Пусть X и Y – банаховы пространства и $A: X \rightarrow Y$ – инъективный оператор. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – две последовательности подпространств с условиями $\dim X_n = \dim Y_n = n$ и пусть $P_n: Y \rightarrow Y_n$ – проекционные операторы. Рассмотрим проекционный метод, образованный посредством X_n и P_n , который аппроксимирует уравнение

$$A\phi = f$$

с помощью приближенного уравнения

$$P_n A \phi_n = P_n f. \quad (3.1)$$

Этот проекционный метод называется сходящимся для оператора A , если существует число N такое, что для каждого $f \in \text{Im } A$ при

ближенное уравнение $P_n A \phi = P_n f$ имеет единственное решение $\phi_n \in X_n$ для всех $n \geq N$, и если эти решения сходятся $\phi_n \rightarrow \phi$ при $n \rightarrow \infty$ к единственному решению ϕ уравнения $A \phi = f$.

В терминах операторов сходимость проекционного метода означает, что для всех $n \geq N$ конечномерные операторы $A_n := P_n A: X_n \rightarrow Y_n$ являются обратимыми и что поточечная сходимость $A_n^{-1} P_n A \phi \rightarrow \phi$, $n \rightarrow \infty$ имеет место для всех $\phi \in X$ (последовательность ограниченных операторов B_n поточечно сходится к ограниченному оператору B , $B_n \rightarrow B$, $n \rightarrow \infty$, если $\|B_n \phi - B \phi\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\phi \in X$).

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства X_n предельно плотны в X [8]:

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \phi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

для всех $\phi \in X$. Свойство (3.2) называют также *свойством аппроксимации* (произвольный элемент из X может быть аппроксимирован элементами из подпространства X_n с любой точностью в норме X). В последующем анализе будем всегда предполагать, что это условие выполняется.

Поскольку $A_n = P_n A$ – оператор, действующий в конечномерных пространствах, применение проекционного метода сводится к решению конечномерной СЛАУ. Ниже метод Галеркина будет рассматриваться как проекционный метод, полученный с помощью ортогонального проектора.

Первоначально приведем общий результат о сходимости проекционного метода и дадим соответствующую оценку для погрешности метода.

Утверждение 3.3. *Проекционный метод сходится тогда и только тогда, когда существует число N и положительная константа M такие, что для всех $n \geq N$ конечномерные операторы $A_n: P_n A: X_n \rightarrow Y_n$ обратимы и операторы $A_n^{-1} P_n A: X \rightarrow X$ равномерно ограничены*

$$\|A_n^{-1} P_n A\| \leq M. \quad (3.3)$$

В этом случае верна оценка для погрешности метода

$$\|\phi_n - \phi\| \leq (1 + M) \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \phi\|. \quad (3.4)$$

Оценка погрешности (3.4), приведенная в утверждении 3.3, называется *квазиоптимальной*. Она показывает, что ошибка в проекционном методе определяется тем, как хорошо точное решение может быть аппроксимировано с помощью элементов подпространства X_n (в норме пространства X).

Утверждение 3.4. *Предположим, что $S: X \rightarrow Y$ есть ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный $S^{-1}: Y \rightarrow X$, и что проекционный метод является сходящимся для S . Пусть $K: X \rightarrow Y$ будет линейным ограниченным оператором, удовлетворяющим любому из двух условий:*

а) $\|K\|$ достаточно мало

или

б) K компактен и $S - K$ инъективен.

Тогда проекционный метод сходится для оператора $S - K$.

Лемма 3.1. *Предположим, что $A: X \rightarrow X$ есть ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный, и что проекционный метод сходится для A . Пусть B – линейный ограниченный оператор, $A + B$ инъективен и оператор B удовлетворяет любому из двух условий:*

а) $\sup_{n \in N} \|A_n^{-1} P_n\| \|B\| = q < 1$;

б) B компактен.

Тогда проекционный метод также сходится для оператора $A + B$.

Для операторных уравнений в гильбертовых пространствах проекционный метод, строящийся с помощью ортопроекторов на конечномерные подпространства, приводит к методу Галеркина. Пусть X и Y – гильбертовы подпространства и $A: X \rightarrow Y$ – инъективный линейный ограниченный оператор. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – последовательность подпространств таких, что $\dim X_n = \dim Y_n = n$, и пусть $P_n: Y \rightarrow Y_n$ – последовательность ортопроекторов. Тогда $\phi_n \in X_n$ будет приближенным решением уравнения $A\phi = f$ с помощью проекционного метода, образованного посредством выбора пространств X_n и проекторов P_n , тогда и только тогда, когда

$$(A\phi_n, g) = (f, g), \text{ для любого } g \in Y_n. \quad (3.5)$$

Действительно, выражение (3.5) эквивалентно уравнению $P_n(A\phi_n - f)$. Уравнение (3.5) называют уравнением Галеркина.

Допустим, что подпространства X_n и Y_n являются линейными оболочками базисных и тестовых функций $X_n = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$, $Y_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Представим ϕ_n в виде линейной комбинации базисных функций

$$\phi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k$$

и подставим это выражение в формулу (3.5). В результате получим эквивалентную СЛАУ порядка n

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Az_k, v_j) = (f, v_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

относительно неизвестных коэффициентов γ_k .

Таким образом, метод Галеркина может быть задан либо с помощью выбора подпространств X_n и проекторов P_n (или подпространств Y_n вместо проекторов P_n , что эквивалентно, поскольку проекторы ортогональные), либо посредством базисных и тестовых функций. Важно отметить, что теоретически сходимость метода Галеркина не зависит от конкретного выбора базисных функций в подпространстве X_n и тестовых функций в подпространстве Y_n . Поэтому для теоретического исследования метода Галеркина фиксируют только подпространства X_n и проекторы P_n . На практике наоборот, удобнее сразу выбрать базисные и тестовые функции, так как без них невозможно формирование матрицы коэффициентов по формуле (3.6).

Обычно скалярное произведение имеет форму интеграла. Следовательно, в случае двумерных интегральных уравнений система (3.6) требует вычисления четырехкратного интеграла для каждого элемента матрицы. Это является наиболее существенным недостатком метода Галеркина, поскольку процедура вычисления четырехкратного интеграла весьма трудоемка. В то же время метод Галеркина является устойчивым к погрешностям вычислений.

Пусть $Y = X'$ – антидвойственное пространство к X . Отношение антидвойственности между X и X' будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Рассмотрим метод Бубнова – Галеркина, образованный с помощью подпространств $X_n \subset X$, $\phi_n \in X_n$:

$$\langle A\phi_n, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle \text{ для любого } \psi \in X_n. \quad (3.7)$$

Если $J : X \rightarrow X'$ – оператор, осуществляющий изоморфизм между X и X' , то (3.7) эквивалентно уравнениям $(A\phi_n, J\psi) = (f, J\psi)$ для любого $\psi \in X_n$, или

$$(A\phi_n, g) = (f, g) \text{ для любого } g \in X_n, \quad (3.8)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $Y = X'$, $X'_n = JX_n$. Таким образом, метод Бубнова – Галеркина (3.7) эквивалентен методу Галеркина (3.8).

Утверждение 3.5. Пусть $A : X \rightarrow X'$ – коэрцитивный оператор. Тогда метод Бубнова – Галеркина (3.7) сходится для оператора A .

Дадим определение оператора, эллиптического на подпространствах. Пусть гильбертово пространство W разложено в прямую сумму m , $m \geq 1$ (замкнутых) подпространств $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$, а его антидвойственное пространство W' также имеет разложение $W' = W^1 \oplus \dots \oplus W^m$. Пусть линейный ограниченный оператор $T : W \rightarrow W'$ обладает свойством $T : W_j \rightarrow W^j$, $j = 1, \dots, m$. Скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать отношение антидвойственности на паре пространств W и W' , а также его сужение на подпространства W_j и W^j , $j = 1, \dots, m$.

Определение 3.3. Оператор $T : W \rightarrow W'$ будем называть *коэрцитивным на подпространствах*, если существуют константы $C_1, \dots, C_m$ (> 0) такие, что выполняется любое из трех условий:

- 1° $|\langle Tu, u \rangle| \geq C_j \|u\|_W^2$ для любого $u \in W_j$, $j = 1, \dots, m$;
- 2° $\operatorname{Re} \langle Tu, u \rangle \geq C_j \|u\|_W^2$ для любого $u \in W_j$, $j = 1, \dots, m$;
- 3° $\operatorname{Im} \langle Tu, u \rangle \geq C_j \|u\|_W^2$ для любого $u \in W_j$, $j = 1, \dots, m$.

Определение 3.4. Оператор $T : W \rightarrow W'$ будем называть *эллиптическим на подпространствах*, если существует линейный компактный оператор $K : W \rightarrow W'$ такой, что оператор $T + K$ – коэрцитивный на подпространствах.

При $m = 1$ определения 1 и 2 совпадают со стандартным определением коэрцитивного и эллиптического операторов. Неравенства 1° – 3° – это аналог неравенств Гординга, выполняемых на подпространствах.

Теорема 3.1. Коэрцитивный на подпространствах оператор T имеет ограниченный обратный $T^{-1}: W' \rightarrow W$.

Доказательство. Инъективность оператора T сразу следует из 1° – 3°: если положить $Tu = 0$, то получаем $u = 0$. Сужение T_j оператора T на W_j есть коэрцитивный оператор $T_j: W_j \rightarrow W^j$, который имеет ограниченный обратный $T_j^{-1}: W^j \rightarrow W_j$, поэтому уравнение $Tu = f$ однозначно разрешимо для любого $f \in W'$: $f = f^1 \oplus \dots \oplus f^m$, $u_j = T_j^{-1} f^j$, $u = u_1 \oplus \dots \oplus u_m$.

Имеет место следующее следствие.

Следствие 3.1. Эллиптический на подпространствах оператор фредгольмов (с индексом 0).

Рассмотрим метод коллокации для уравнения $A\varphi = f$, ($\varphi, f \in X$) в гильбертовом пространстве X , который формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A \varphi_n = P_n f$. Здесь $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n: X \rightarrow X_n$ – оператор проектирования на конечномерное подпространство, который определяется ниже.

Разобьем область Q на элементарные подобласти Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i так, чтобы выполнялись условия $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bar{Q} = \bigcup_i \bar{Q}_i$. Выберем в каждой подобласти Q_i точку (узел) коллокации x^i .

Рассмотрим базисные функции $v_i = \begin{cases} 1, x \in Q_i \\ 0, x \notin Q_i \end{cases}$. Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций: $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации

$$\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0.$$

Проектор $P_n: X \rightarrow X_n$ определим так: $(P_n \varphi)(x) = \varphi(x^i)$, $x \in Q_i$.

Уравнение $P_n A \varphi_n = P_n f$ эквивалентно следующему:

$$(A \varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в схему метода коллокации, получим СЛАУ для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (Av_k)(x^j) = f(x^j), \quad j=1, \dots, n.$$

Справедливо следующее определение.

Определение 3.5. Метод коллокации будем называть *сходящимся* для оператора A и $f \in \text{Im } A$, если существует число N такое, что приближенные уравнения $(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j)$, $j=1, \dots, n$ имеют единственное решение $\varphi_n \in X_n$ для всех $n \geq N$, и если эти решения сходятся $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$ к единственному решению φ уравнения $A\varphi = f$.

4. Решение интегрального уравнения на однородной и неоднородной фигуре сложной геометрической формы

Применим проекционный метод для решения задачи на однородной фигуре канонической формы и сведем ее к решению СЛАУ. Используя описанную процедуру дискретизации, составляем СЛАУ, в которой матрица и вектор являются многоиндексными. Каждый элемент этой матрицы получается путем вычисления интеграла $L_{i,j} = D_1 \int_{\Pi_i} \int_{\Pi_j} G(x,y) \sigma(y) D_2(z(x)) v(y) ds + \int_{\Pi_i} \hat{\alpha}(x) z_j(x) v_i(x) ds$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, i, j – мультииндексы, а $G(x,y)$ – известная функция. Правая часть матричного уравнения описывает поведение падающего поля. Решая СЛАУ одним из итерационных методов, получим решение задачи на экране канонической формы.

Выше был описан метод построения решения интегрального уравнения для фигуры канонической формы. Применим субиерархический метод для решения задачи на фигурах сложной геометрической формы. Пусть фигура G состоит только из *внутренних носителей* $\Pi_{i_1, \dots, i_n}$, тогда ее можно записать следующим образом $G = \bigcup_i \text{supp } f_i$. Здесь f_i – базисные функции, определенные на носителе $\text{supp } f_i$. Зададим геометрию

фигуры сложной геометрической формы G . Для этого введем вектор геометрии W длиной, равной количеству носителей, которые могут быть построены на сетке для фигуры канонической формы. Заполним элементы вектора геометрии W нулевыми или единичными значениями, нуль, если шаблон носителей не определен на новой фигуре G , и единица, если определен. Применим итерационный метод к СЛАУ, полученной проекционным методом. Основная процедура в итерационном методе – это умножение матрицы на вектор. Каждый раз умножая матрицу A на вектор B , будем поэлементно перемножать полученный вектор U на вектор геометрии W .

$$\begin{pmatrix} U_{1,...,1} \\ U_{1,...,2} \\ \dots \\ U_{...,q-1,...} \\ U_{...,q,...} \\ U_{...,q+1,...} \\ \dots \\ U_{n,...,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,...,1} \cdot W_{1,...,1} \\ U_{1,...,2} \cdot W_{1,...,2} \\ \dots \\ U_{...,q-1,...} \cdot W_{...,q-1,...} \\ U_{...,q,...} \cdot W_{...,q,...} \\ U_{...,q+1,...} \cdot W_{...,q+1,...} \\ \dots \\ U_{n,...,n} \cdot W_{n,...,n} \end{pmatrix} \quad W_{...,q,...} = \begin{cases} 1, \text{supp } f_{...,q,...} \in G \\ 0, \text{supp } f_{...,q,...} \notin G \end{cases}$$

Данную процедуру будем называть *выделением фигуры*. Заметим, что выделить из фигуры канонической формы можно не каждую фигуру. Фигура G должна уместаться внутри экрана $G \in \Pi$ и описываться комбинацией носителей.

В результате решения системы линейных уравнений подобным образом мы получим решение только на интересующей нас фигуре.

Лемма 4.1.

Пусть U – решение интегрального уравнения (1.1) на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Пусть $G = \Pi \setminus \Pi_{i_1, \dots, i_q, \dots, i_n}$ – фигура канонической формы, не содержащая носитель $\Pi_{i_1, \dots, i_q, \dots, i_n}$. Опишем геометрию этой фигуры с помощью вектора W и найдем решение интегрального уравнения (1.1), применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на фигуре G .

Доказательство.

Рассмотрим интегральное уравнение (1.1) на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Будем предполагать, что проекционный метод построен и обоснован для данного интегрального уравнения. Применение проекционного метода приводит к решению матричного уравнения $AX = B$. Решаем матричное уравнение итерационным методом. Основной процедурой решения итерационного уравнения является умножение матрицы на вектор.

$$\begin{pmatrix} X_{1,\dots,1}^{(m+1)} \\ X_{1,\dots,2}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{\dots,q-1,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q+1,\dots}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{n,\dots,n}^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} & a_{1,\dots,1}^{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,1}^{\dots,q-1,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,1}^{n,\dots,n} \\ a_{1,\dots,2}^{1,\dots,1} & a_{1,\dots,2}^{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,2}^{\dots,q-1,\dots} & a_{1,\dots,2}^{\dots,q,\dots} & a_{1,\dots,2}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,2}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\dots,n}^{1,\dots,1} & a_{n,\dots,n}^{1,\dots,2} & \dots & a_{n,\dots,n}^{\dots,q-1,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{n,\dots,n}^{n,\dots,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{1,\dots,1}^{(m)} \\ X_{1,\dots,2}^{(m)} \\ \dots \\ X_{\dots,q-1,\dots}^{(m)} \\ X_{\dots,q,\dots}^{(m)} \\ X_{\dots,q+1,\dots}^{(m)} \\ \dots \\ X_{n,\dots,n}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Каждому носителю $\Pi_{i_1,\dots,i_q,\dots,i_n}$ в матрице (4.1) соответствуют строка и столбец с мультииндексом $(i = i_1, \dots, i_q, \dots, i_n)$. Поэлементное умножение вектора решения X на вектор геометрии W до и после каждой итерации обнуляет элементы соответствующих строки и столбца матрицы.

$$\begin{pmatrix} X_{1,\dots,1}^{(m+1)} \\ X_{1,\dots,2}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{\dots,q-1,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q+1,\dots}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{n,\dots,n}^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} \cdot X_{1,\dots,1} & a_{1,\dots,1}^{1,\dots,2} \cdot X_{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,1}^{\dots,q-1,\dots} \cdot X_{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{1,\dots,1}^{\dots,q+1,\dots} \cdot X_{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,1}^{n,\dots,n} \cdot X_{n,\dots,n} \\ a_{1,\dots,2}^{1,\dots,1} \cdot X_{1,\dots,1} & a_{1,\dots,2}^{1,\dots,2} \cdot X_{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,2}^{\dots,q-1,\dots} \cdot X_{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{1,\dots,2}^{\dots,q+1,\dots} \cdot X_{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,2}^{n,\dots,n} \cdot X_{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,1} \cdot X_{1,\dots,1} & a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,2} \cdot X_{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} \cdot X_{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} \cdot X_{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{n,\dots,n} \cdot X_{n,\dots,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,1} \cdot X_{1,\dots,1} & a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,2} \cdot X_{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} \cdot X_{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} \cdot X_{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{n,\dots,n} \cdot X_{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\dots,n}^{1,\dots,1} \cdot X_{1,\dots,1} & a_{n,\dots,n}^{1,\dots,2} \cdot X_{1,\dots,2} & \dots & a_{n,\dots,n}^{\dots,q-1,\dots} \cdot X_{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{n,\dots,n}^{\dots,q+1,\dots} \cdot X_{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{n,\dots,n}^{n,\dots,n} \cdot X_{n,\dots,n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матричное уравнение решается не для всей матрицы, а только для ее подматрицы. Значение подматрицы M получается удалением из матрицы строки с индексами $(\dots, q, \dots)$ и столбца с индек-

сами $(..., q, ...)$, соответствует значению новой матрицы, составленной для этого же интегрального уравнения по области $G = \Pi \setminus \Pi_{i_1, \dots, i_q, \dots, i_n}$.

Рассмотрим экран сложной формы G , составленный из носителей, принадлежащих экрану канонической формы $G = \Pi \setminus \sum_{k=1}^m \Pi_{i_1, \dots, i_n}$. Применяя описанную выше процедуру несколько раз, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.1.

Пусть U – решение интегрального уравнения (1.1) на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Пусть

$G = \Pi \setminus \sum_{k=1}^m \Pi_{i_1, \dots, i_n}$ – фигура канонической формы, не содержащая m -носителей $\Pi_{i_1, \dots, i_n}$. Опишем геометрию этой фигуры с помощью вектора W и найдем решение интегрального уравнения (1.1), применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на фигуре G .

Рассмотрим решение задачи на неоднородной фигуре.

Пусть задача решается на фигуре канонической формы. Дискретизируем задачу, построив на фигуре расчетную сетку. Применяя проекционный метод к решаемой задаче для однородной фигуры канонической формы, сведем ее к решению СЛАУ. Элементы матрицы получаются путем вычисления интеграла

$$L_{i,j} = D_1 \int_{\Pi_i} \int_{\Pi_j} G(x,y) \sigma(y) D_2(z(x)) v(y) ds + \int_{\Pi_i} \hat{\alpha}(x) z_j(x) v_i(x) ds.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, i, j – мультииндексы, а $G(x, y)$ – известная функция. Правая часть матричного уравнения описывает поведение падающего поля. Для нахождения решения задачи на фигуре канонической формы решим систему алгебраических уравнений одним из итерационных методов.

Применим субиерархический метод для решения задачи на неоднородной фигуре. Предположим, что внутри каждого конечного элемента фигура является однородной $\sigma(\Pi_i) = \text{const}$, а любой из конечных элементов может иметь различное значение неоднородности $\sigma(\Pi_i) \neq \sigma(\Pi_j)$. Пусть фигура G состоит только из внутренних носите-

лей $\Pi_{i_1, \dots, i_n}$, тогда ее можно записать следующим образом $G = \bigcup_i \text{supp } f_i$.

Здесь f_i – базисные функции, определенные на носителе $\text{supp } f_i$. Зададим вектор неоднородности H для фигуры G аналогично вектору геометрии. Длина вектора H равна количеству носителей, которые могут быть построены на сетке для фигуры канонической формы. Заполним элементы вектора геометрии H значениями неоднородности на каждом носителе. Применим итерационный метод к СЛАУ, полученной проекционным методом. Основная процедура в итерационном методе – это умножение матрицы на вектор. Каждый раз умножая матрицу A на вектор B , будем поэлементно перемножать полученный вектор U на вектор неоднородностей H .

$$\begin{pmatrix} U_{1, \dots, 1} \\ U_{1, \dots, 2} \\ \dots \\ U_{\dots, q-1, \dots} \\ U_{\dots, q, \dots} \\ U_{\dots, q+1, \dots} \\ \dots \\ U_{n, \dots, n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1, \dots, 1} \cdot H_{1, \dots, 1} \\ U_{1, \dots, 2} \cdot H_{1, \dots, 2} \\ \dots \\ U_{\dots, q-1, \dots} \cdot H_{\dots, q-1, \dots} \\ U_{\dots, q, \dots} \cdot H_{\dots, q, \dots} \\ U_{\dots, q+1, \dots} \cdot H_{\dots, q+1, \dots} \\ \dots \\ U_{n, \dots, n} \cdot H_{n, \dots, n} \end{pmatrix} \quad H_{\dots, q, \dots} = \begin{cases} \sigma(\Pi_{\dots, q, \dots}), & \text{supp } f_{\dots, q, \dots} \in G \\ 0, & \text{supp } f_{\dots, q, \dots} \notin G \end{cases}$$

Данную процедуру будем называть выделением неоднородности фигуры.

В результате решения системы линейных уравнений подобным образом мы получим решение только на неоднородной фигуре канонической формы.

Лемма 4.2.

Пусть U – решение интегрального уравнения (1.1) на однородной фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Опшдем неоднородность этой фигуры с помощью вектора H и найдем решения интегрального уравнения (1.1), применив субиерархический алгоритм.

Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на неоднородной фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$.

Доказательство.

Рассмотрим интегральное уравнение (1.1) на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Будем предполагать, проекционный метод построен и обоснован для данного интегрального уравнения. Применение проекционного метода приводит к решению матричного уравнения $AX = B$. Решаем матричное уравнение итерационным методом. Основной процедурой решения итерационного уравнения является умножение матрицы на вектор.

$$\begin{pmatrix} X_{1,\dots,1}^{(m+1)} \\ X_{1,\dots,2}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{\dots,q-1,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q,\dots}^{(m+1)} \\ X_{\dots,q+1,\dots}^{(m+1)} \\ \dots \\ X_{n,\dots,n}^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} & a_{1,\dots,1}^{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,1}^{\dots,q-1,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,1}^{n,\dots,n} \\ a_{1,\dots,2}^{1,\dots,1} & a_{1,\dots,2}^{1,\dots,2} & \dots & a_{1,\dots,2}^{\dots,q-1,\dots} & a_{1,\dots,2}^{\dots,q,\dots} & a_{1,\dots,2}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,2}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,1} & a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,2} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\dots,n}^{1,\dots,1} & a_{n,\dots,n}^{1,\dots,2} & \dots & a_{n,\dots,n}^{\dots,q-1,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{n,\dots,n}^{n,\dots,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{1,\dots,1}^{(m)} \\ X_{1,\dots,2}^{(m)} \\ \dots \\ X_{\dots,q-1,\dots}^{(m)} \\ X_{\dots,q,\dots}^{(m)} \\ X_{\dots,q+1,\dots}^{(m)} \\ \dots \\ X_{n,\dots,n}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Каждому носителю $\Pi_{i_1,\dots,i_q,\dots,i_n}$ в матрице (4.1) соответствует строка и столбец с мультииндексом $(i = i_1, \dots, i_q, \dots, i_n)$. Поэлементное умножение вектора решения X на вектор неоднородности H до и после каждой итерации соответствует решению задачи на неоднородной фигуре.

В результате решения системы линейных уравнений подобным образом мы получим решение задачи на неоднородной фигуре канонической формы.

Используя совместно вектор геометрии и вектор неоднородностей для решения задачи, мы можем получить решение на неоднородной фигуре сложной геометрической формы.

$$\begin{pmatrix} U_{1,...,1} \\ U_{1,...,2} \\ \dots \\ U_{...,q-1,...} \\ U_{...,q,...} \\ U_{...,q+1,...} \\ \dots \\ U_{n,...,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,...,1} \cdot H_{1,...,1} \cdot W_{1,...,1} \\ U_{1,...,2} \cdot H_{1,...,2} \cdot W_{1,...,2} \\ \dots \\ U_{...,q-1,...} \cdot H_{...,q-1,...} \cdot W_{...,q-1,...} \\ U_{...,q,...} \cdot H_{...,q,...} \cdot W_{...,q,...} \\ U_{...,q+1,...} \cdot H_{...,q+1,...} \cdot W_{...,q+1,...} \\ \dots \\ U_{n,...,n} \cdot H_{n,...,n} \cdot W_{n,...,n} \end{pmatrix}$$

Из леммы 4.1, леммы 4.2 и теоремы 4.1 следует теорема 4.2.

Теорема 4.2.

Пусть U – решение интегрального уравнения (1.1) на неоднородной фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$. Пусть

$G = \Pi \setminus \sum_{k=1}^m \Pi_{i_1, \dots, i_n}$ – фигура канонической формы, не содержащая

m -носителей $\Pi_{i_1, \dots, i_n}$. Опишем геометрию этой фигуры с помощью вектора W и найдем решение интегрального уравнения (1.1), применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на неоднородной фигуре G .

Уменьшение размера фигуры на один носитель за счет использования процедуры «выделения» приводит к уменьшению размерности СЛАУ на единицу. Пусть матрица имеет размер $N \times N$, если размер фигуры уменьшается на M носителей, то размер матрицы будет равен $(N - M) \times (N - M)$. Следовательно, размер матрицы сократился

в $\frac{N}{(N - M)}$ раз.

5. Обобщенные расчетные сетки и обобщенные матрицы

Рассмотрим еще раз процесс дискретизации задачи. Построим расчетную сетку Π_N . Использование определенной расчетной сетки Π_N , насколько мелкой она бы ни была, приводит к наложению ограничений на выбор геометрии фигуры. Определенная расчетная сетка Π_N строит-

ся под конкретную фигуру G , пусть даже фигуру канонической формы. Для того, чтобы улучшить аппроксимацию границ ∂G для фигуры сложной геометрической формы G , добавим дополнительные носители $\text{supp } f_i^k$ для сеточных базисных функций f_i^k в расчетную сетку Π_N , здесь i – порядковый номер носителя, а k – тип носителя. Это позволит применить субиерархический метод и для выбора сеточных базисных функций f_i^k . Использование дополнительных типов сеточных базисных функций f_i^k позволяет лучше аппроксимировать границы фигуры ∂G и минимизировать количество носителей базисных функций $\text{supp } f_i^k$ при выборе вектора геометрии W . Например, прямоугольными носителями трудно аппроксимировать круг. Для аппроксимации круга лучше подходят носители сеточных базисных функций, состоящие из треугольников (рис. 5.1).

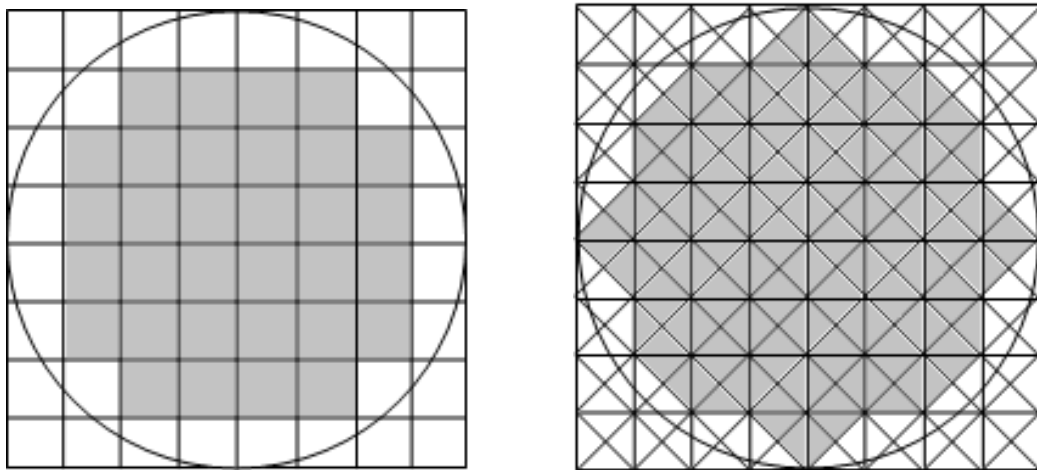


Рис. 5.1. Аппроксимация круга

Применим субиерархический метод к выбору сеточных базисных функций. Для этого построим расчетную сетку Π_N , позволяющую ввести сеточные базисные функции f_i^k нескольких различных типов. Будем называть подобные расчетные сетки *обобщенными каноническими расчетными сетками* $\overset{o}{\Pi}_N$. Для задач дифракции на плоских экранах можно воспользоваться обобщенной канонической расчетной сеткой $\overset{o}{\Pi}_N$, представленной на рис. 5.2. Данная расчетная сетка является объединением треугольной и прямоугольной расчетных сеток.

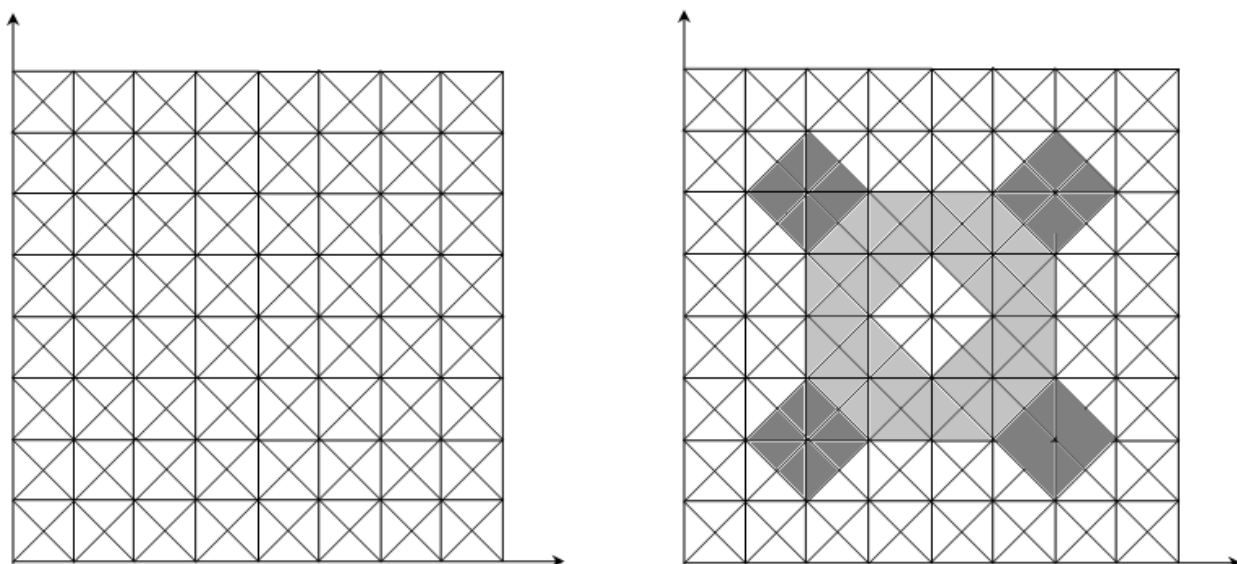


Рис. 5.2. Аппроксимация фигуры сложной формы

В пространственном случае под обобщенной расчетной сеткой $\overset{o}{\Pi}_N$ можно понимать расчетную сетку, образованную гранями элементарных прямоугольных параллелепипедов (конечных элементов), полученных равномерным разбиением прямоугольного параллелепипеда канонической формы. Каждая грань элементарного прямоугольного параллелепипеда (конечного элемента) разделена диагональными линиями на четыре треугольника (рис. 5.3).

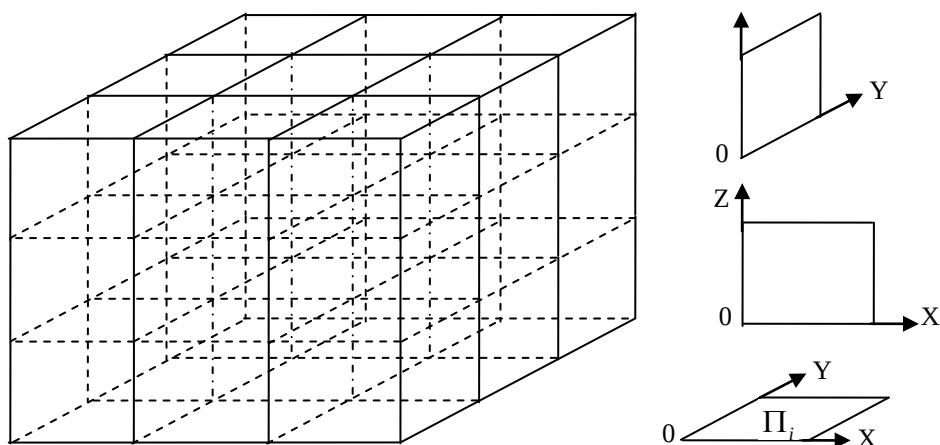


Рис. 5.3. Обобщенная расчетная сетка для пространственного экрана

Определение 5.1. Матрицы, составленные с использованием обобщенных расчетных сеток $\overset{o}{\Pi}_N$, будем называть *обобщенными матрицами* $\overset{o}{A}$.

Определение 5.2. Конечными элементами обобщенной расчетной

сетки $\overset{o}{\Pi}_N$ являются прямоугольники или треугольники, параллельные одной из плоскостей декартовой системы координат и образованные горизонтальными, вертикальными или диагональными ребрами расчетной сетки.

Определение 5.3. Носитель сеточной базисной функции $\text{supp } f_i^k$

для обобщенной расчетной сетки $\overset{o}{\Pi}_N$ – это два несовпадающих конечных элемента, примыкающих к одному ребру, каждый из которых ориентирован вдоль одной из плоскостей декартовой системы координат.

Определение 5.4. Шаблон носителей для обобщенной расчетной

сетки $\overset{o}{\Pi}_N$ – это совокупность всевозможных типов носителей базисных функций f_i^k .

Рассмотрим в обобщенной расчетной сетке $\overset{o}{\Pi}_N$, представленной на рис. 5.1, три типа базисных функций f_i^k ($k=1,2,3$). Первый тип ($k=1$) – это базисные функции f_i^1 , построенные на базе шаблона носителей, состоящих только из треугольных конечных элементов. Второй тип ($k=2$) – это базисные функции f_i^2 , построенные на базе шаблона носителей, которые состоят только из прямоугольных конечных элементов. Третий тип ($k=3$) – это гибридные базисные функции f_i^3 , построенные на базе шаблона, содержащего одновременно прямоугольный и треугольный конечные элементы. Это могут быть, например, базисные функции, построенные методом Рао – Уилтона – Глиссона (RWG) [9], базисные функции крышки (“rooftop”) или гибридные базисные функции [10].

Шаблоны носителей для каждого из перечисленных типов базисных функций представлены на рис. 5.4. Обобщенный шаблон носителей для расчетной сетки, представленной на рис. 5.1, состоит из всех типов носителей, показанных на рис 5.4.

Различные типы носителей f_i^k позволяют удобнее аппроксимировать геометрию различных фигур (рис. 5.4). Прямоугольные фигуры удобнее аппроксимировать прямоугольными носителями, для треугольных фигур предпочтительнее использовать носители гибридных базисных функций. Более сложные геометрические фигуры, например круг, описываются с использованием треугольных носителей.

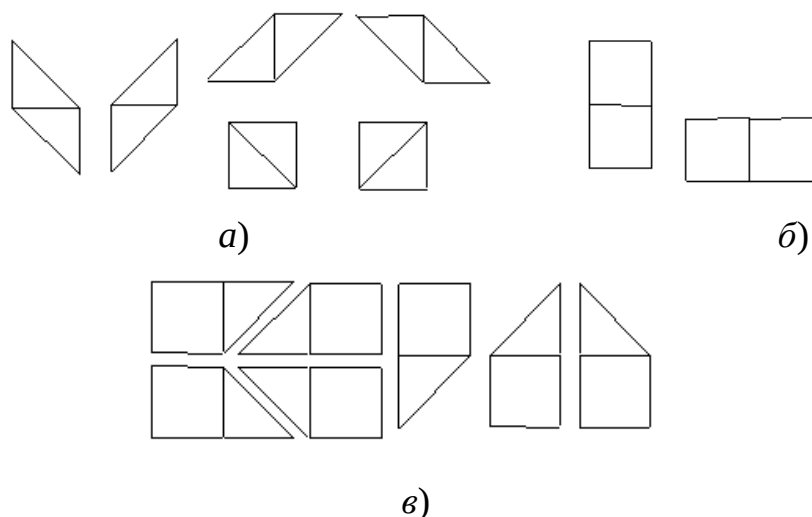


Рис. 5.4. Шаблоны носителей базисных функций для метода:
 a – RWG; b – “rooftop”; c – гибридных

На рис. 5.1 слева представлена обобщенная расчетная сетка Π_N^0 , а справа – фигура сложной геометрической формы G , построенная по этой расчетной сетке. На практике часто используются расчетные сетки Π_N^0 , имеющие ориентацию носителей $\text{supp } f_i^k$ в одном направлении (рис. 5.6) слева. Алгоритм построения таких расчетных сеток более прост, однако использование может привести к проблеме аппроксимации границ фигуры. На рис. 5.6 справа аппроксимирована фигура, построенная на рис. 5.1 справа. Как видно, форму фигуры целиком восстановить не удалось, однако если уменьшить размер сетки, то можно более точно задать рассматриваемую фигуру. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1.

Любая геометрическая фигура G , построенная на равномерной обобщенной расчетной сетке Π_N^0 , содержащей N конечных элементов вдоль одной из осей, может быть без потерь построена на аналогичной равномерной обобщенной расчетной сетке Π_{2N}^0 , содержащей $2N$ конечных элементов вдоль одной из осей.

Доказательство. Рассмотрим произвольный конечный элемент сетки Π_N^0 , содержащей N конечных элементов вдоль одной из осей (рис. 5.5). Пусть рассматриваемый конечный элемент имеет прямоугольную форму, тогда деление его сторон на две равные части приведет

к появлению четырех прямоугольных конечных элементов, которые целиком описывают исходный конечный элемент. Если рассматриваемый конечный элемент имеет треугольную форму, то подобное разбиение сетки приводит к появлению одного конечного элемента прямоугольной формы и двух конечных элементов треугольной формы, которые также целиком описывают исходный конечный элемент.

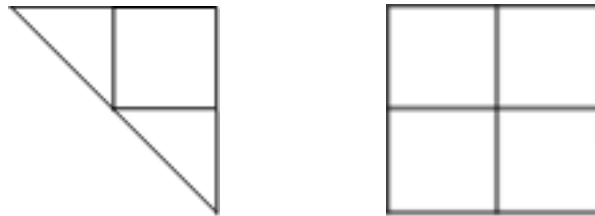


Рис. 5.5. Фигура треугольной и прямоугольной формы

Использование обобщенной матрицы $\overset{o}{A}$ позволяет эффективно справляться с проблемой искусственной анизотропии. Данное явление возникает при решении задачи на расчетной сетке Π_N , носители которой имеют выраженную ориентацию в одном направлении (рис. 5.6). Это приводит к появлению дополнительной погрешности при решении задачи. Обобщенная расчетная сетка $\overset{o}{\Pi}_N$ позволяет эффективно справляться с этой проблемой на этапе определения геометрии фигуры G за счет возможности выбора носителей базисных функций $\text{supp } f_i^k$.

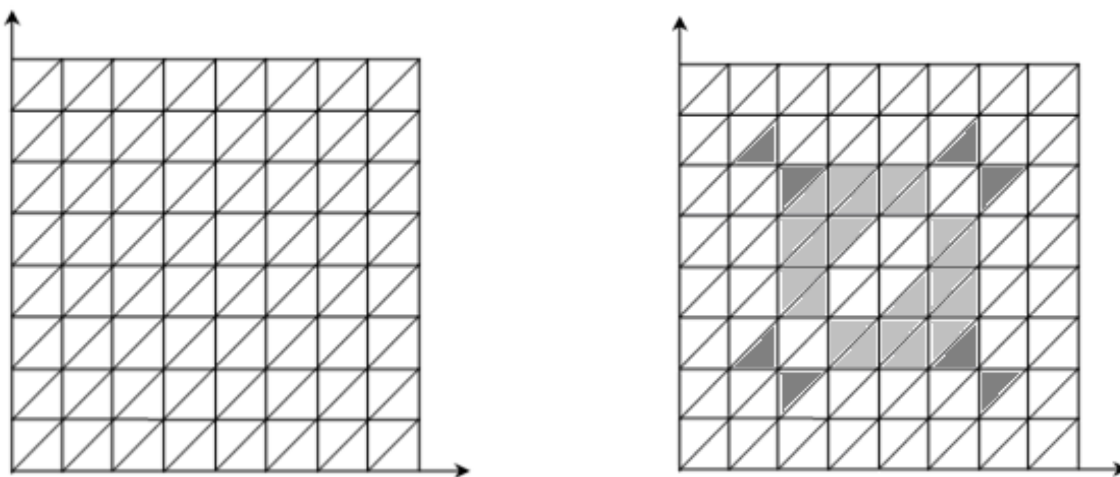


Рис. 5.6. Аппроксимация фигуры, представленной на рис. 5.2

Задать форму фигуры G и ее границ ∂G при использовании обобщенной расчетной сетки $\overset{o}{\Pi}_N$ возможно различными способами. Одну

и ту же фигуру G можно описать несколькими разными комбинациями носителей сеточных базисных функций $\sum \text{supp } f_i^k$. Предпочтение отдается такой комбинации, которая состоит из меньшего числа носителей. В этом случае задача решается быстрее. Второй предпосылкой при выборе носителей служит и наиболее точная аппроксимация границ фигуры. *Однозначность определения формы* фигуры гарантирует утверждение.

Утверждение 5.2.

Форма фигуры определена однозначно, если выполнены два условия:

- 1) *ребра, образующие носитель, не являются пересекающимися;*
- 2) *не существует двух носителей $\text{supp } f_i^k$, образованных одним ребром, конечные элементы которого попарно ориентированы вдоль одной из плоскостей декартовой системы координат.*

Доказательство. Действительно, однозначность построения фигуры G будет нарушена, если некая область на фигуре G будет описана в векторе геометрии W более одного раза (рис. 5.7). Первый критерий гарантирует, что диагональные ребра не описывают одинаковую пару конечных элементов. Второй критерий в условии гарантирует, что один из носителей не является подмножеством другого.

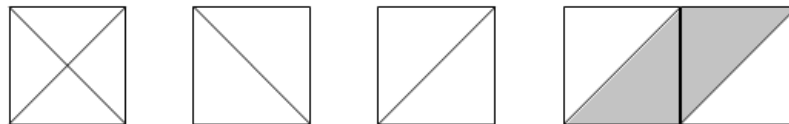


Рис. 5.7. Однозначность определения фигуры

Обобщенная матрица $\overset{o}{A}$ состоит из матричных элементов, включающих в себя сеточные базисные функции f_i^k разных типов. Для решения задачи необходимо, чтобы каждый тип сеточных базисных функций удовлетворял условию аппроксимации, и любая комбинация таких базисных функций также должна удовлетворять условию аппроксимации в выбранных пространствах. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.3.

Пусть обобщенная матрица $\overset{o}{A}$ включает в себя $N \geq 2$ типов базисных функций f_i^k ($k=1, \dots, N$) и пусть каждый из типов базисных

функций f_i^k удовлетворяет условию аппроксимации, тогда любая комбинация из элементов базисных функций различного типа, удовлетворяющая условию однозначности, также удовлетворяет условию аппроксимации.

Доказательство. Условие однозначности гарантирует единственность выбора вектора геометрии W . Каждая базисная функция f_i^k гарантирует аппроксимацию в пределах носителя, поэтому совокупность подобных базисных функций, определенная на носителях, описывающих область, гарантирует выполнение условия аппроксимации на всей области.

Теорема 5.1.

Пусть $\overset{o}{A}$ – обобщенная матрица, полученная дискретизацией интегрального уравнения (1.1) на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d_1, \dots, 0 < x_n < d_n\}$ проекционным методом. Используя вектор геометрии W , однозначно определим фигуру сложной геометрической формы G . Применив субиерархический метод на этапе решения СЛАУ, решим интегральное уравнение на подматрице. Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на фигуре G .

Доказательство. По условию вектор геометрии W определен однозначно, как описано в утверждении 5.2. Это позволяет (при использовании утверждения 5.1 и утверждения 5.3) гарантировать выполнение условия аппроксимации выбранной комбинацией базисных функций. Применяя теорему 4.1, мы гарантируем, что найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на фигуре G .

Можно решать данную задачу на неоднородных фигурах, используя вектор геометрии W и вектор неоднородностей H . Из теоремы 5.1 и теоремы 4.2 следует справедливость утверждения.

Утверждение 5.4.

Пусть U – решение интегрального уравнения (1.1) на однородной фигуре G , определенной однозначно с помощью вектора геометрии W . Опишем неоднородность этой фигуры с помощью вектора H и найдем решения интегрального уравнения (1.1), применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет являться решением интегрального уравнения на неоднородной фигуре G .

Размер обобщенной матрицы A^0 значительно больше, чем размер матрицы, построенной для конкретной расчетной сетки. Однако обобщенная матрица является блочно-теплицевой. Это позволяет вместо целой матрицы хранить только несколько строк, что существенно упрощает процессы вычисления, связанные с расчетом, хранением и обработкой матрицы.

6. Параллельные вычисления

Расчет задач дифракции, подобных рассмотренным выше, связан с большим объемом вычислительных работ, поэтому получение удовлетворительных численных результатов занимает очень много вычислительного времени и часто приходится сталкиваться со следующей ситуацией, когда поставленную задачу невозможно решить с требуемой точностью на обычном персональном компьютере. Самым сложным вычислительным процессом при решении рассматриваемых задач является составление матрицы для системы линейных уравнений. Для сходства математических моделей с реальными физическими задачами необходимо использовать матрицы как можно больших размеров, поэтому для получения результатов с требуемой точностью эффективно используются методы параллельных вычислений на многопроцессорных вычислительных кластерах и распределенных вычислительных системах.

Например, для решения задачи определения электромагнитного поля внутри тела, расположенного в прямоугольном волноводе на расчетной сетке, имеющей размер $8 \times 8 \times 8$, используется матрица размером 1536×1536 элементов. Время расчета данной матрицы на вычислительном кластере НИВЦ МГУ «Чебышев» с использованием 512 процессоров составляло примерно 25 часов. Отметим, что данная матрица является сравнительно небольшой, однако даже расчет подобных задач невозможен без использования вычислительного кластера. Матрица для расчета поверхностных токов на неплоских экранах сложной геометрической формы на расчетной сетке $8 \times 8 \times 8$ имеет размер 9168×9168 элементов, а для расчетной сетки $12 \times 12 \times 12$ размер матрицы равен 31032×31032 элементов. Размеры файлов, в которых хранятся матрицы равны 1,3 Гб и 15,4 Гб соответственно. Строить расчетные сетки больших размеров не имеет смысла, их невозможно обработать на персональных компьютерах.

В связи с этим в нашей задаче постараемся максимально упростить процессы, связанные с составлением матричного уравнения. Наиболее естественным подходом, упрощающим решение задач, является исполь-

зование матричной симметрии. За счет этого время, потраченное на составление матрицы, можно сократить в два раза и хранить на диске только половину матрицы. Некоторые из рассматриваемых задач приводят к теплицевым или ганкелевым матрицам. Учитывая, что основное время, потраченное на решение задачи, уходит на составление матрицы, это существенно упрощает расчет всей задачи и позволяет хранить на диске только одну или две строки матрицы. Второй подход связан с использованием параллельных вычислений. Поясним суть алгоритма параллельных вычислений. Каждый элемент матрицы формируется независимо друг от друга. За счет этого можно рассчитать матрицу на нескольких персональных компьютерах. Предположим, в нашем распоряжении имеется N однопроцессорных компьютеров, в этом случае время, затраченное на составление всей матрицы, сократится примерно в N раз.

Предположим, что расширенная матрица СЛАУ состоит из n строк и в нашем распоряжении p процессоров (рис. 6.1). Распределим задание на заполнение матрицы следующим образом:

- 1-й процессор заполняет строки с номерами $1 \dots \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$;
- 2-й процессор заполняет строки с номерами $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1 \dots 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$;
- $p-1$ -й процессор заполняет строки $(p-2) \cdot \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1 \dots (p-1) \cdot \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$;
- p -й процессор заполняет строки $(p-1) \cdot \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1 \dots n$.

После того, как заполнение матрицы завершено всеми процессорами, запускаем процедуру собирания матрицы на одном из процессоров. На этом же процессоре производим решение системы линейных уравнений.

Использование субиерархического подхода позволяет решать задачи самой разной вычислительной сложности: от очень простых, когда выбрано несколько носителей, до очень сложных (порядка ста тысяч). Для быстрого решения простых задач достаточно ресурсов небольшого кластера, в то время как решение сложных задач требует использования ресурсов самых современных кластеров. В связи с этим естественно использовать ГРИД-технологии к решению столь сложной вычислительной задачи. Используя web-интерфейс, позволяем пользователю задать его параметры счета и геометрию задачи, и перед решением задачи на кластере производим анализ сложности запускаемой задачи.

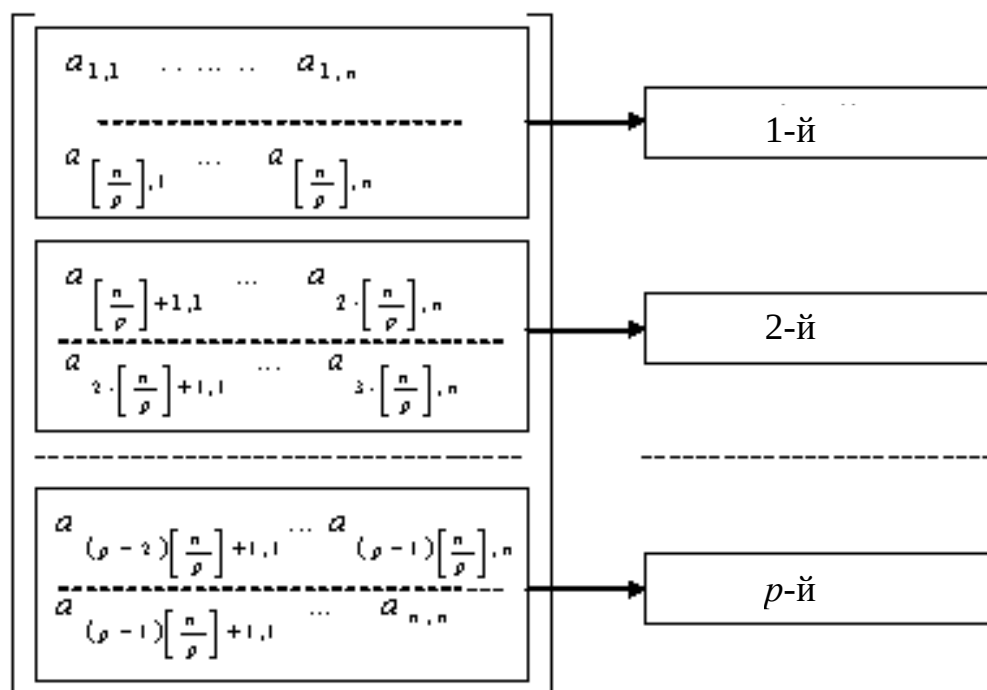


Рис. 6.1. Процедура распараллеливания задач

В случае, если задаче требуются небольшие вычислительные ресурсы, она решается на мини-кластере, в случае использования больших вычислительных ресурсов решение производится на более мощных кластерах. Для самых мощных задач предполагается использование кластера НИВЦ МГУ.

Таблица 6.1

Основные характеристики комплекса СКИФ МГУ «Чебышёв»

Модель процессора	Количество процессоров	Количество ядер на узле	Минимальный объем оперативной памяти на один процессор
Intel Xeon E5472 3.0 ГГц	От 1 до 5000 в зависимости от количества и объема задач, уже работающих на комплексе	8	2 Гбайт

Функциональная схема использования ресурсов при решении задачи отображена на рис. 6.2.

Можно распараллелить и решение матричного уравнения. Основная процедура при решении СЛАУ итерационным методом – это умножение матрицы на вектор, она легко распараллеливается даже с учетом многоиндексности задачи.

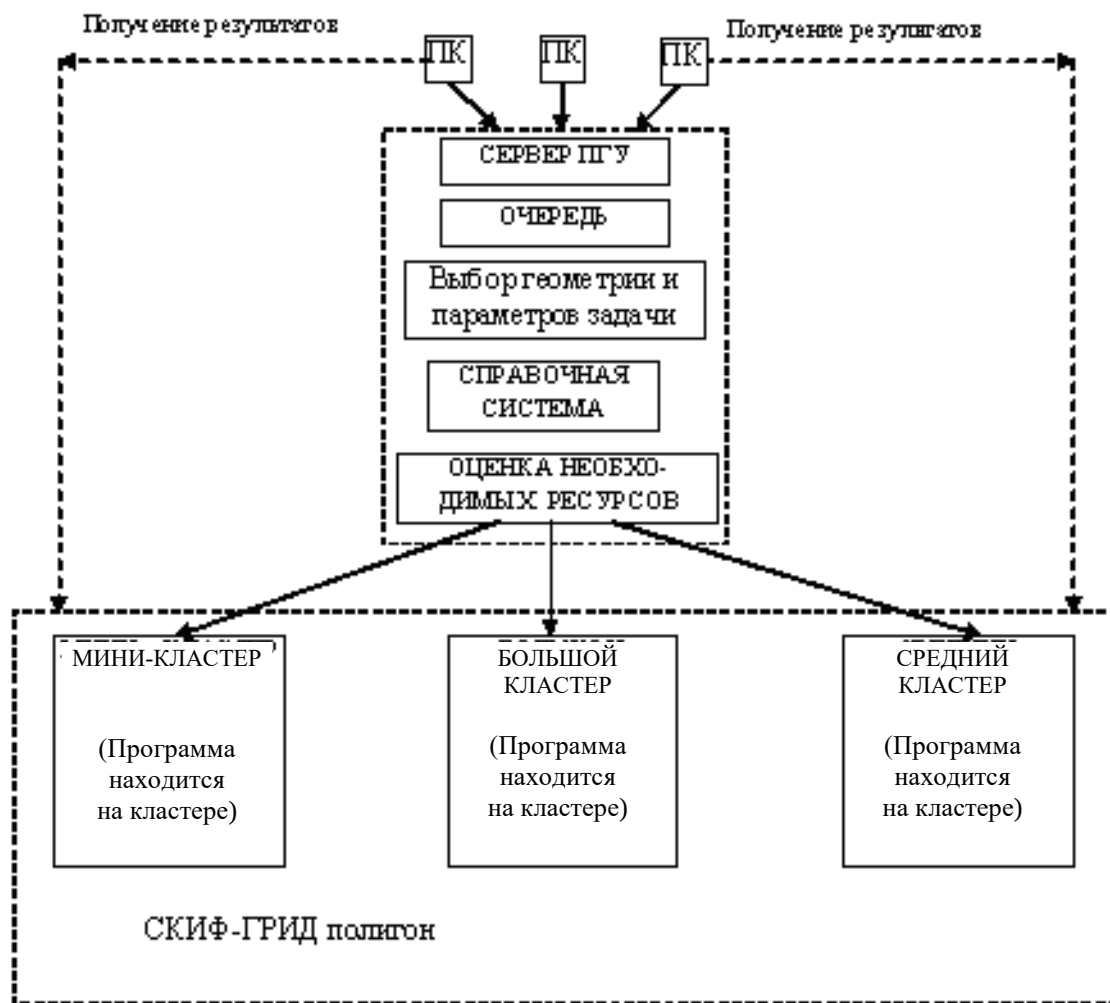


Рис. 6.2. Параллельный процесс решения сложной задачи

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал, представленный в издании поможет студентам и аспирантам математических специальностей в изучении методов решения интегральных уравнений. Представленный субиерархический метод позволяет решать интегральные уравнения на экранах и телах сложной формы.

В пособии последовательно изложены этапы решения задачи проекционными методами. Приведены процедуры дискретизации математической задачи, построения расчетно-вычислительной сетки для различных объектов сложной геометрической формы, рассмотрены проблемы аппроксимации границ. Далее произведено сравнение базисных функций и введено понятие шаблона носителей для базисных функций. Доказаны теоремы об аппроксимации границ. На последнем этапе произведено сведение интегрального уравнения к СЛАУ. Рассмотрена эффективность применения суперкомпьютерных вычислений для решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведик М. Ю. Применение субиерархического метода в задачах электродинамики // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 87–97.
2. Medvedik M. Y. Solution of integral equations by the subhierarchical method for generalized computational grids // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. Vol. 7, № 6. P. 570–580.
3. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : Радиотехника, 1996.
4. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М. : Радио и связь, 1998.
5. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М. : Наука, 1981.
6. Андреев М. Л., Заркевич Н. А., Исаков А. Н. [и др.]. Разбиение N-мерного куба на симплексы с сохранением симметрии // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 3. С. 21–24.
7. Kress R. Linear Integral Equations. Applied Mathematical Sciences. V. 82. Springer-Verlag. New-York, 1989.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М. : Физматгиз, 1959.
9. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1982. Vol. Ap-30, № 3. P. 409–418.
10. Hänninen I., Taskinen M., Sarvas J. Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions // Progress in Electromagnetics Research-PIER. 2006. Vol. 63. P. 243–278.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СУБИЕРАРХИЧЕСКИХ МЕТОДОВ	5
1. Интегральное уравнение.....	5
2. Дискретизация задачи	7
3. Проекционный метод	10
4. Решение интегрального уравнения на однородной и неоднородной фигуре сложной геометрической формы	16
5. Обобщенные расчетные сетки и обобщенные матрицы	22
6. Параллельные вычисления	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	34
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	35

Учебное издание

**Медведик Михаил Юрьевич,
Хорошева Эльвира Александровна**

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Е. А. Дергунова*
Технический редактор *Ю. В. Анурова*
Компьютерная верстка *Ю. В. Ануровой*

Подписано в печать 07.08.2023.
Формат 60×84¹/16. Усл. печ. л. 2,09.
Заказ № 334. Тираж 12.

Издательство ПГУ
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru

