

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СМЕШИВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА

Ю.Н.Косников

MATH MODELING AND VISUALIZATION OF CLOSED SURFACES WITH APPLICATION OF BLENDING FUNCTIONS OF ORTHOGONAL BASIS

Y.N. Kosnikov

Аннотация. Статья посвящена визуализации замкнутых пространственных поверхностей, описываемых множеством неупорядоченных опорных точек. Предлагается двухэтапная модель восстановления формы объекта. Первый (предварительный) этап - интерполяция поверхности радиальными базисными функциями. Исходные контрольные точки заменяются новыми, упорядоченными в пространстве. Второй этап - интерполяция поверхности с применением смешивающих функций ортогонального базиса. Для повышения производительности вычислений применяются конечно-разностные формулы.

Ключевые слова: 3D-поверхность, опорная точка, интерполяция, смешивающая функция, визуализация, конечно-разностная формула.

Abstract. The article is devoted to visualization of closed spatial surfaces described by the set of unordered reference points. A two-stage model is proposed to reconstruction of object's form. The first (preliminary) stage is interpolation of the surface by radial basis functions. Initial reference points are replaced by new spatially ordered ones. The second stage is the interpolation of the surface using the blending functions of the orthogonal basis. Finite differences formulas are applied to increase the productivity of calculations.

Keywords: 3D-surface, reference point, interpolation, blending function, visualization, software package, finite differences formula.

Одной из задач отображения является изменение формы объектов с неаналитической поверхностью в режиме реального времени. Сложность задачи заключается в том, что для визуализации неаналитической поверхности в графической системе компьютера применяется высокополигональная модель. Управление положением вершин такой модели в реальном времени требует значительных вычислительных затрат. При этом следует учесть, что основные вычислительные ресурсы обычно тратятся не на визуализацию, а на операции, характерные для прикладной области системы. Тогда экономия ресурсов компьютера наряду с высокой реалистичностью визуализации является актуальной.

Предлагается строить модель неаналитической поверхности в два этапа. На первом этапе поверхность представляется набором упорядоченных характерных (опорных) точек. Их количество в несколько раз меньше числа вершин высокополигональной модели. Этот этап выполняется предварительно. На втором этапе в реальном времени осуществляется управление положением опорных точек и визуализация. Для каждой фазы отображения с помощью интерполяции определяются промежуточные точки. Они становятся вершинами полигональной модели. Для повышения производительности вычислений применяются конечноразностные формулы.

Пространственные объекты во многих случаях описываются набором опорных точек, расположенных в пространстве декартовых координат x, y, z случайным образом (scattered data). Для упорядочения опорных точек проводится интерполяция. Хорошие интерполяционные свойства имеют радиальные базисные функции (РБФ). В общем случае поверхность пространственного объекта является замкнутой. В связи с этим предлагается проводить интерполяцию, используя параметрическую форму записи интерполянта, причем в качестве параметров выбрать сферические координаты:

$$c = f(\varphi, \theta), \quad c = x, y, z,$$

где φ – азимутальный угол (долгота), $\varphi = 0..2\pi$;

θ – полярный угол, $\theta = 0..\pi$.

Сначала с помощью параллельного переноса и поворота исходная декартова система координат помещается во внутреннее пространство объекта, например, в геометрический центр координат. Далее для каждой опорной точки по известным выражениям находятся сферические координаты φ_i, θ_i :

$$\begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ \varphi_i &= \arctg\left(\frac{y_i}{x_i}\right), \\ \theta_i &= \arccos\left(\frac{z_i}{\rho_i}\right), \end{aligned}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты i -ой опорной точки после геометрических преобразований системы координат;

ρ_i – радиус-вектор i -ой опорной точки.

Для большинства замкнутых пространственных объектов такой переход в параметрическую систему координат (СК) позволяет получить интерполянт в виде однозначной функции. Методика перехода к вспомогательной – смещенной и повернутой – системе координат подробно описана в [1].

Применение РБФ дает интерполянт вида:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(\alpha_i), \\ y &= \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(\alpha_i), \\ z &= \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \phi(\alpha_i), \end{aligned} \tag{1}$$

где α_i – угловое расстояние между текущей точкой и i -ой опорной точкой –

$$\alpha_i = \arccos(\cos \theta \cdot \cos \theta_i + \sin \theta \cdot \sin \theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i));$$

$\phi(\alpha_i)$ – РБФ, значение которой зависит от углового расстояния α_i ,

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$ – коэффициенты влияния i -ой опорной точки на текущую точку по декартовым координатам;

N – количество опорных точек поверхности объекта.

Для интерполяции можно применять известные виды РБФ в виде функций расстояния α . Замкнутый характер поверхности позволяет уменьшить число слагаемых в выражениях (1): опорные точки, удаленные от текущей точки на расстояние $|\alpha| > \pi/2$ можно отбросить. Тогда выражение для РБФ, например, инверсного мультиквадрика получает вид:

$$\phi(\alpha_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \alpha_i)^2}} & \text{при } \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \alpha_i \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Нахождение коэффициентов влияния $\lambda_{x,y,z}$ выполняется обычным образом из условия точного прохождения поверхности через опорные точки – отдельно по координатам x , y и z [2,3]. Для этого на основе каждого из уравнений (1) составляется система из N уравнений. Каждое из этих уравнений является условием прохождения поверхности через определенную (k -ю) опорную точку по своей координате:

$$x_k = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(a_{ki}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$y_k = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(a_{ki}),$$

$$z_k = \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \phi(a_{ki}),$$

где a_{ki} – угловое расстояние между i -ой и k -ой опорными точками.

В матричной форме первая система уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} \phi(a_{11}) & \phi(a_{12}) & \dots & \phi(a_{1N}) \\ \phi(a_{21}) & \phi(a_{22}) & \dots & \phi(a_{2N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(a_{N1}) & \phi(a_{N2}) & & \phi(a_{NN}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{x1} \\ \lambda_{x2} \\ \vdots \\ \lambda_{xN} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{vmatrix},$$

или в свернутом виде с очевидными обозначениями – $\Phi \cdot \Lambda X = X$, откуда

$$\Lambda X = \Phi^{-1} \cdot X. \quad (2)$$

Аналогично из второй и третьей систем уравнений находятся остальные весовые коэффициенты. В случае тривиального решения (2) функции (1) дополняются полиномом низкой степени, как это обычно делается при РБФ-интерполяции [4].

Следующим этапом является нахождение нового набора опорных точек, принадлежащих моделируемой поверхности и расставленных на ней с постоянным шагом по аргументам φ, θ . Для этого в уравнениях (1) аргумент α

последовательно изменяется с постоянными приращениями $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ параметров φ , θ .

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= \varphi_i + \Delta\varphi, & \Delta\varphi &= \frac{2\pi}{N_\varphi}, \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \Delta\theta, & \Delta\theta &= \frac{2\pi}{N_\theta},\end{aligned}$$

где N_φ , N_θ – количества опорных точек в направлениях координат φ и θ .
Выбор величин $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ влияет на погрешность интерполяции.

В результате упорядочения неаналитическая поверхность получает новое описание, в которое для каждой опорной точки входят координаты φ , θ узлов координатной сетки и соответствующие им значения декартовых координат x_i, y_i, z_i и коэффициентов влияния $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$.

На этапе визуализации необходимо перейти от опорных точек поверхности к ее полигональной модели. Построить полигональную модель на упорядоченных опорных точках алгоритмически несложно. Нужно вычислить с заданным шагом промежуточные точки поверхности и сделать их вершинами полигональной сетки. Предлагается на этапе визуализации в реальном времени применить для интерполяции смешивающие функции ортогонального базиса (СФОБ) [5]. Их особенность заключается в том, что они зависят не от расстояния между точками, взятого по прямой (что характерно для РБФ), а от расстояний, измеренных отдельно по направлениям первого и второго аргументов. Это позволяет вычислять координаты промежуточных точек поверхности по приращениям с помощью быстрых алгоритмов. Общий вид записи СФОБ для рассматриваемого случая:

$$BF_i = bf(\varphi_i) \cdot bf(\theta_i),$$

где φ_i , θ_i – угловые расстояния между i -ой опорной точкой и текущей точкой поверхности, измеренные для аргументов параметрической системы координат φ , θ ,

$bf(\varphi_i)$, $bf(\theta_i)$ – смешивающие функции по аргументам φ , θ .

При последовательном обходе поверхности на каждом шаге изменяется одно из угловых расстояний φ_i , θ_i . Если выбрать смешивающие функции в виде степенных полиномов, можно вычислять их по конечноразностным формулам.

В качестве примера можно предложить СФОБ следующего вида:

$$BF_i = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{2\varphi_i}{\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{2\theta_i}{\pi}\right)^2\right) & \text{при } |\varphi_i| < \frac{\pi}{2} \text{ и } |\theta_i| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |\varphi_i| \geq \frac{\pi}{2} \text{ или } |\theta_i| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вторая смешивающая функция выглядит аналогично после замены φ_i на θ_i .

Смешивающие функции вычисляются по приращениям [6].
Конечноразностное представление $bf(\varphi_i)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} bf(\varphi_{i+1}) &= bf(\varphi_i) + \Delta_{\varphi i}^1, & bf(0) &= 1, \\ \Delta_{\varphi(i+1)}^1 &= \Delta_{\varphi i}^1 + \Delta_{\varphi i}^2, & \Delta_{\varphi 0}^1 &= -\frac{4}{\pi^2} \delta_{\varphi}^2, \\ \Delta_{\varphi i}^2 &= -\frac{8}{\pi^2} \delta_{\varphi}^2 = const, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\Delta_{\varphi i}^1, \Delta_{\varphi i}^2$ – первая и вторая конечные разности смешивающей функции;
 δ_{φ} – шаг вычислений.

Выражения (3) позволяют вычислить очередное значение смешивающей функции за две операции суммирования.

Предложенный подход тестирован на поверхности сферы, для которой просто найти погрешность моделирования. Визуальный анализ показал хорошие возможности моделирования геометрической формы объекта. Оценка среднеквадратической погрешности интерполяции показала значение 0,026 %, что вполне приемлемо для практического применения. На рисунке 1 показаны изобразительные возможности предложенного подхода. Изображения получены аспирантом Хоанг Т.Х.

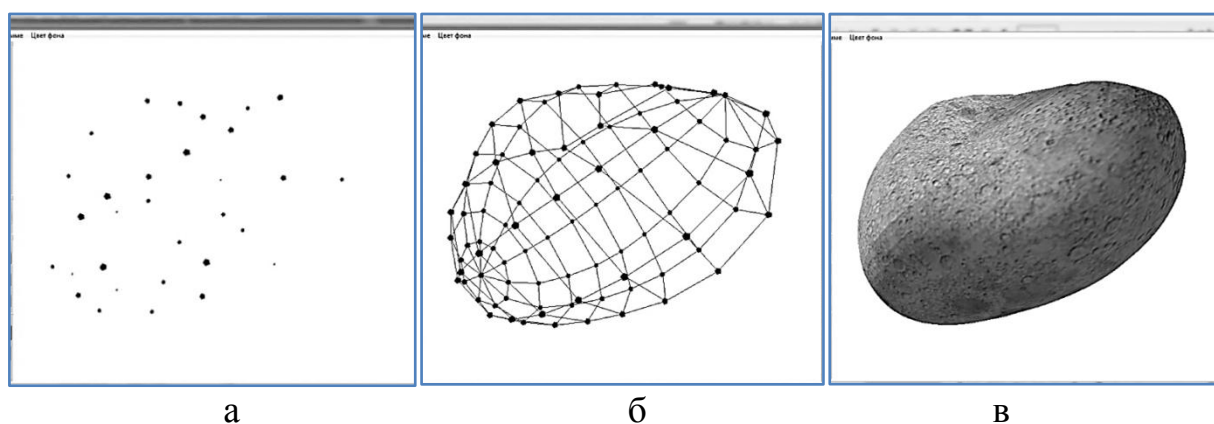


Рисунок 1 – Исходное (а) и новое (б) множества опорных точек замкнутой поверхности, графическое представление реконструированной замкнутой поверхности с текстурой (в)

Список литературы

1. Косников Ю.Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций / XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ, 2014, №03(19). С. 176 – 183
2. Косников Ю.Н. Применение радиальных базисных функций в научной визуализации / Научная визуализация (электронный журнал), 2013. – Том 5. – №1. – С.38–47
3. Carr J.C. and others. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions In Computer Graphics // J.C. Carr, T.J. Mitchell, R.K.

Beatson, J.B. Cherrie, W.R. Fright, B.C. McCallumm, T.R.Evans / Proceedings SIGGRAPH'2001, 2001. – pp. 67–76.

4. Wright G.B. Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical developments / G.B. Wright. – University of Colorado, 2003. – 360 p.

5. Косников Ю.Н. Геометрическое моделирование неаналитических поверхностей в графических системах: от функций радиального базиса к функциям ортогонального базиса / Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сборник статей XV Международной НТК (г.Пенза, ПГУ, 12 - 13 ноября 2015 г.). – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2015. – С.117 – 123.

6. Косников Ю.Н. Применение бикубических сплайнов в графических системах реального времени / Вестник Саратовского государственного технического университета, 2005. – №4(9). – С.30–36.

Косников Юрий Николаевич
Пензенский государственный
университет, г.Пенза, Россия
E.mail: kosnikov@gmail.com

Kosnikov Yuriy Nikolaevich
Penza State University,
Penza, Russia