

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

М. В. Глебова, О. Г. Никитина,
Е. Г. Журавлева

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2021

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшая и прикладная математика»
Пензенского государственного университета
Н. В. Зверовщикова;

кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры «Общепрофессиональных дисциплин»
Пензенский филиал Военной академии материально-технического
обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва
Е. В. Шипанова

Глебова, Мария Владимировна.

Г53 Математика : учеб. пособие / М. В. Глебова, О. Г. Никитина, Е. Г. Журавлева. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. – 102 с.

ISBN 978-5-907456-23-5

Представлены теоретический материал, упражнения и задачи по различным разделам высшей математики: аналитическая геометрия на плоскости, векторная и линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения. Содержатся образцы решения наиболее типичных для рассматриваемых тем задач, после чего приводятся задания для самостоятельной работы.

Издание подготовлено на кафедре «Математическое образование» ПГУ и предназначено для обучающихся по направлениям подготовки: 49.03.02 «Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (адаптивная физическая культура)», 49.03.01 «Спортивная тренировка в избранном виде спорта», 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль «Физкультурное образование».

УДК 51

ISBN 978-5-907456-23-5

© Пензенский государственный
университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
Раздел 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	5
1.1. Матрицы и определители.....	5
1.2. Системы линейных уравнений. Методы решения систем.....	18
1.3. Векторы на плоскости. Система координат. Прямая на плоскости	27
1.4. Кривые второго порядка	42
Раздел 2. Элементы математического анализа	49
2.1. Множества. Операции над множествами	49
2.2. Понятие функции. Свойства. График функции	54
2.3. Понятие производной функции. Правила нахождения производной функции одной переменной.....	57
2.4. Неопределенный и определенный интеграл	74
2.5. Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.....	87
Список литературы	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с требованиями ФГОС ВО (3++) студенты, обучающиеся по направлениям подготовки 49.03.02 «Физическая культура для лиц с отклонениями в состоянии здоровья (адаптивная физическая культура)», 49.03.01 «Спортивная тренировка в избранном виде спорта», 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Физкультурное образование», обязаны знать основы математики.

Целью освоения дисциплины «Математика» является приобретение обучающимися знаний и умений в области математики и ее основных математических методов и их приложений; развитие универсальных компетенций, позволяющих подготовить конкурентоспособного выпускника.

Место математики в жизни и науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, основанные на чисто качественных (а значит, приблизительных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых можно сделать количественные выводы. В спорте присутствует и порядок, и мера, математика для него не может быть сторонней наукой.

Таким образом, при изучении дисциплины «Математика» студенты, обучающиеся по указанным направлениям, получают необходимые для дальнейшей своей профессиональной деятельности теоретические знания, а также у них формируются необходимые профессиональные навыки: навыки проверки научных гипотез, построения экспериментальных схем, проверки достоверности полученных выводов.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Матрицы и определители

Матрицы и операции над ними.

Свойства операций

Матрицей размерности m на n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Обозначаются матрицы заглавными английскими буквами.

Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами* и обозначаются прописными английскими буквами с двойным индексом, где первый индекс указывает номер строки, в которой стоит этот элемент, а второй индекс – номер столбца.

Матрица размера m на n записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = 1, \dots, m$ – номер строки, $j = 1, \dots, n$ – номер столбца.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица размерности 2×2 ,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица размерности 2×3 .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой, обозначается буквой O .

Элементы матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца, называются диагональными и образуют *главную диагональ* матрицы.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размерности 2.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица размерности 2.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* и обозначается буквой E .

Например, $E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 2-го порядка,

$E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

Две матрицы одинакового размера называются равными, если равны элементы этих матриц, стоящие на соответствующих местах.

$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ для всех номеров i от 1 до m , j от 1 до n .

Сложение матриц

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами, причем эти операции определены только для матриц одинакового размера.

Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

Например, $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 10 \end{pmatrix}$.

Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{m \times n} = (b_{ij})$ и $C_{m \times n} = (c_{ij})$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) – матрицы одинакового размера. Тогда имеют место свойства:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 2) $A + O = A$;
- 3) $A + B = B + A$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$, такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$). Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A .

Например, $10 \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -30 & 0 \\ 10 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$

Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{m \times n} = (b_{ij})$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) – матрицы одинакового размера, $\alpha \in R$. Тогда имеют место свойства:

- 1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- 4) $1 \cdot A = A$.

Вычитание матриц

Определение. Разностью двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

Например, $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

Заметим, что данную операцию можно определить, используя предыдущие операции, как $A - B = A + (-1)B$.

Произведение матриц

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

где $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, т.е. элемент i -й строки и k -го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B .

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Заметим, что произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B .

При этом определено произведение $B \cdot A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Важным свойством умножения матриц является то, что умножение матриц **не коммутативно**, т.е. в общем случае $AB \neq BA$, даже если определены оба произведения.

Однако если для каких-либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**. Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера. Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка. Отметим и другие свойства умножения матриц:

- 1) $A(BC) = (AB)C$, если все произведения существуют;
- 2) $A(B + C) = AB + AC$, если произведение AB и сумма $B + C$ существуют;
- 3) $(B + C)A = BA + CA$, если произведение BA и сумма $B + C$ существуют;
- 4) для любых матриц A, B и $\forall (\lambda \in R) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, если произведение AB существует.

Возведение матрицы в натуральную степень

Возведение квадратной матрицы A в натуральную степень n определяется следующим образом: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}$.

Транспонирование матрицы

Матрица, полученная из матрицы A , заменой ее строк столбцами с сохранением их порядка, называется *транспонированной* матрицей к матрице A и обозначается A^T .

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

- 1) $(A^T)^T = A$,
- 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- 3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Определители, свойства определителей

Пусть имеется матрица 1-го порядка $A = (a_{11})$.

Определителем матрицы 1-го порядка $A = (a_{11})$ называется число a_{11} .

Пусть имеется матрица 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

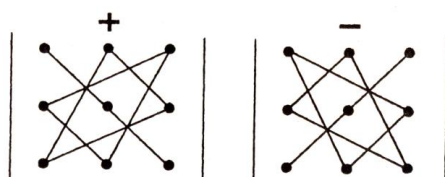
Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

Пусть имеется матрица 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы 3-го порядка называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и определяется равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться так называемым правилом треугольников, которые символически можно записать так:



Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - (5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 2) = -55.$$

Пусть имеется матрица A порядка более третьего.

Для вычисления определителей порядка большего трех используют понятия минора и алгебраического дополнения элемента.

Пусть задана A – квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минором элемента a_{ik} определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием i -й строки и k -го столбца и обозначается M_{ik} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+k}$ и обозначается A_{ik} .

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Минором элемента $a_{23} = 3$

матрицы A является определитель $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$, а алгебраическое

дополнение $A_{23} = (-1)^5 M_{23} = 5$.

Теорема. Определитель квадратной матрицы $A = (a_{st})$ порядка n равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (строки) на их алгебраическое дополнение, т.е.

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} \text{ или } |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится при транспонировании.

Например, используя данное свойство, можно, не вычисляя сами определители, выяснить, что значение выражения

$$\begin{vmatrix} 39 & 41 & 21 & 4 \\ 83 & 71 & -2 & 0 \\ 3 & -14 & 53 & -22 \\ 4 & 73 & 46 & -13 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 39 & 83 & 3 & 4 \\ 41 & 71 & -14 & 73 \\ 21 & -2 & 53 & 46 \\ 4 & 0 & -22 & -13 \end{vmatrix}$$

равно нулю.

Следствие. Все свойства определителя, справедливые для строк также справедливы и для столбцов.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель матрицы меняет знак.

Например, используя данное свойство, можно, не вычисляя сами определители, выяснить, что значение выражения

$$\begin{vmatrix} 9 & 61 & 41 & 4 \\ 37 & 71 & -2 & 0 \\ 13 & -14 & 53 & -22 \\ 64 & 73 & 46 & -13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 64 & 73 & 46 & -13 \\ 37 & 71 & -2 & 0 \\ 13 & -14 & 53 & 22 \\ 9 & 61 & 41 & 4 \end{vmatrix}$$

равно нулю.

3. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

Например, используя данное свойство, можно сразу сказать,

$$\text{что определитель } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \text{ равен нулю.}$$

4. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ .

Следствие. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} 222 & 333 & 111 \\ 400 & 100 & 200 \\ -50 & -30 & -80 \end{vmatrix} = 111 \cdot 100 \cdot (-10) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -111000 \cdot (-55) = 6105000.$$

5. Если все элементы некоторого столбца или строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 11 & -2 & 0 & 4 \\ 23 & 1 & 0 & 3 \\ 39 & -4 & 0 & -2 \\ 41 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\text{Например, } \begin{vmatrix} -9 & 83 & 3 & -18 \\ 41 & 71 & -14 & 82 \\ 21 & -2 & 53 & 42 \\ 4 & 73 & -22 & 8 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как первый и последний столбец пропорциональны.}$$

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\text{Например, } \begin{vmatrix} -9 & 83 & 3 & -18 \\ 0 & 21 & -14 & 82 \\ 0 & 0 & 53 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 21 \cdot 53 \cdot 8 = -80136.$$

8. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, где в выбранном столбце первого определителя записаны первые слагаемые, а во втором определителе – вторые слагаемые, при этом все остальные элементы остаются такими же. Например,

$$\begin{vmatrix} 223 & 334 & 112 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 222+1 & 333+1 & 111+1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 222 & 333 & 111 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5.$$

9. Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки),

умноженные на любой множитель λ , то величина определителя не изменится.

Данное свойство удобно использовать для того, чтобы привести матрицу определителя к треугольному виду.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 96.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A , если выполнено условие: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

Теорема. Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю, имеет обратную матрицу и притом только одну и находится она по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

где A^* – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A .

Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

найдем обратную матрицу A^{-1} .

Решение. Так как $|A| = -3 \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} . Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = (1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\text{Тогда } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найдём сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. При сложении матриц соответствующие элементы складываются, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найдём произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ на

число $k = 2$.

Решение. При умножении числа на матрицу все элементы матрицы умножаются на это число:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \quad \text{тогда } A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислим $A^3 - 2A^2 + E$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^3 - 2A^2 + E = A \cdot A \cdot A - 2A \cdot A + E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix}; \\ A^3 - 2A^2 + E &= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 12 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислим определители матриц

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27$.

$$6) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - \\ - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = 9.$$

Пример 5. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$, разложив его

по элементам первой строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

Пример 6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдём обратную

матрицу.

Решение. Найдём определитель матрицы

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Найдём алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда обратная матрица запишется $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $3A-4B$, AB , BA , A^{-1} : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -5 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & -11 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $5A+B$, AB , A^{-1} : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найти $3A+B$, BA , A^{-1} : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти A^3 , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. 2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$. 3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. 5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 19 \\ 3 & 3 & 17 \end{vmatrix}$.

7) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 8) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -6 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. 9) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 &10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} \cdot 11) \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \cdot 12) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 14) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot 15) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.2. Системы линейных уравнений. Методы решения систем

Основные понятия и определения

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (*)$$

где числа $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i – *свободными членами*, x_i – неизвестные переменные.

Матрица, составленная из коэффициентов системы (*), называется *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – основная матрица, X – вектор-столбец из неизвестных x_i ; B – вектор-столбец из свободных членов b_i .

Основная матрица системы (*), дополненная столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы (*) и обозначается $\bar{A}$.

Решением системы ()* называется n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется *совместной определенной*, если она имеет одно решение и совместно не в противном случае.

Решить систему – значит, выяснить, совместна она или несовместна, если совместна, то найти все ее решения.

Основные методы решения систем линейных уравнений

Основными методами решения систем линейных уравнений являются:

- 1) матричный метод;
- 2) метод Крамера;
- 3) метод Гаусса.

Рассмотрим каждый из этих методов.

Матричный способ решения систем линейных уравнений

Систему линейных алгебраических уравнений, содержащую n уравнений и n неизвестных, в матричном виде можно записать как $AX = B$, где A – основная матрица системы, X – вектор-столбец из неизвестных, B – вектор-столбец свободных членов. Тогда матрицу X находим по формуле $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице A .

Очевидно, что этот метод применим только для тех систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений, и только для тех систем, у которых определитель основной матрицы не равен нулю. Такие системы называются совместно-определенными. Если же определитель основной матрицы системы равен нулю, то система является либо неопределенной, либо несовместной.

Метод Крамера

Данный метод был разработан швейцарским математиком Габриелем Крамером (1704–1752). Этот метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Также необходимо, чтобы определитель основной матрицы системы не равнялся нулю.

Теорема (правило Крамера). Пусть имеется система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение, и это решение находится по формуле $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из основной матрицы системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Если определитель Δ системы (1) равен нулю ($\Delta = 0$) и хотя бы один из определителей Δ_i отличен от нуля, то система не имеет решения.

Если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим определитель Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 (\neq 0).$$

Следовательно, система имеет единственное решение, т.е. является совместно определенной.

Найдем это решение по формулам Крамера. Для этого вычислим $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Заменим первый столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 9 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 9 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Заменим второй столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 9 \cdot 1 = -12.$$

Заменим третий столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 24.$$

По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{4} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{4} = 6$$

получили, что $(0; -3; 6)$ – решение системы.

Метод Гаусса

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса (Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик) может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Пусть имеется система линейных алгебраических уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Суть метода Гаусса (метода последовательного исключения переменных) заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований над уравнениями системы последовательно исключать переменные, т.е. сначала во всех уравнениях, кроме первого, исключить переменную x_1 , затем во всех уравнениях, кроме первого и второго, – исключить переменную x_2 и т.д. Говорят, что систему приводят к так называемому «ступенчатому виду», в частности, возможно, к «треугольному виду».

Напомним, что элементарными преобразования системы линейных уравнений называются следующие преобразования:

- 1) исключение из системы уравнения: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$;
- 2) умножение обеих частей любого уравнения на $\lambda, \lambda \in R, \lambda \neq 0$;
- 3) прибавление к любому уравнению любого другого уравнения, умноженного на $\lambda, \lambda \in R, \lambda \neq 0$.

Определение. Две системы линейных уравнений от n неизвестных называются равносильными, если они не совместны или множеств их решений совпадают.

Теорема. Если система линейных уравнений получена из другой системы уравнений посредством элементарных преобразований типа 1, 2 или 3, то она равносильна исходной.

В результате последовательного исключения переменных посредством элементарных преобразований над уравнениями системы приходим к одному из трех возможных случаев.

Первый возможный случай. В ходе преобразований над уравнениями системы получим систему линейных уравнений (СЛУ), содержащую уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$.

Очевидно, что в этом случае СЛУ (2) несовместна.

Второй возможный случай. Элементарные преобразования, примененные к СЛУ (2), приводят к системе уравнений так называемого «треугольного вида», в этой системе количество переменных совпадает с количеством уравнений и последнее уравнение содержит только одну переменную, т.е. имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = c_1, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = c_2, \\ c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = c_3, \\ \dots \\ c_{nn}x_n = c_n, \\ c_{ii} \neq 0 \quad (i = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет единственное решение. Следовательно, и система (2) имеет единственное решение.

Далее проводим обратный ход метода Гаусса: из последнего уравнения находим переменную x_n , найденное значение подставляем в предпоследнее уравнение и находим переменную x_{n-1} и т.д.

Третий возможный случай. После приведения системы к ступенчатому виду получаем систему, в которой количество уравнений меньше количества переменных:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = c_1, \\ c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n = c_2, \\ c_{3l}x_l + \dots + c_{3n}x_n = c_3, \\ \dots \\ c_{rs}x_s + \dots + c_{rn}x_n = c_r, \end{cases} \quad (4)$$

где $1 < k < l < \dots < s$, $c_{11} \neq 0, c_{2k} \neq 0, \dots, c_{rs} \neq 0, r \leq m$.

В этом случае неизвестные $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$ в системе (4) называются главными неизвестными, а остальные неизвестные — свободными (их число равно $n - r$). Придадим произвольные числовые значения свободным неизвестным, тогда из нее главные неизвестные определяются однозначно. Таким образом, система имеет решение, т.е. является совместной. Так как свободным неизвестным придавали произвольные числовые значения из R , то система (4) является неопределенной. Следовательно, и система (2) является неопределенной.

Выразив в СЛУ (4) главные неизвестные через свободные неизвестные, получим систему, которая называется общим решением системы (2). Если в общее решение системы подставить конкретные значения свободным переменным и найти тогда значения главных переменных, то получим одно из решений системы, которое называется частным решением.

Примеры решения задач

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$ методом

Гаусса.

Решение. Исключим переменную x из второго и третьего уравнений, для этого сложим второе уравнение с первым, умноженным на -3 и третье уравнение с первым, умноженным на -4 , получим

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ -y - z = -5, \\ -y - z = -4. \end{cases}$$

Далее вторую строку, умножив на -1 , прибавляем к 3-й, получим

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ -y - z = -5, \\ 0 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что последнее равенство не будет верным ни при каких значениях переменных, следовательно, система не имеет решений, т.е. является несовместной.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение. Исключим переменную x из второго и третьего уравнений, для этого сложим второе уравнение с первым, умноженным на -3 и третье уравнение с первым, умноженным на -4 , получим

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ -y + 4z = 5, \\ -5y + 9z = 3. \end{cases}$$

Далее вторую строку, умножив на -5 , прибавляем к 3-й, получим

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y - 4z = -5, \\ -11z = -22. \end{cases}$$

Система уравнений приняла треугольный вид

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y - 4z = -5, \\ z = 2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение, из последнего уравнения имеем $z = 2$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y = 3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x = -1$.

Примечание. Поскольку при элементарных преобразованиях над уравнениями мы фактически проводим вычисления над коэффициентами, стоящими перед переменными, то все эти преобразования можно производить над расширенной матрицей системы.

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 7. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений и посредством элементарных строчечных преобразований приведем ее к ступенчатой матрице:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \cdot (-1) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 8 \end{array} \right) \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

По полученной матрице восстановим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1, \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

Эта система равносильна исходной системе. В качестве главных неизвестных возьмем x_1, x_3 , тогда x_2, x_4, x_5 – свободные неизвестные. Выразим главные неизвестные только через свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{11}{2}; \\ x_3 = 5x_4 - x_5 - 4. \end{cases}$$

Получили общее решение СЛУ.

Пусть $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, тогда $x_1 = 5, x_3 = -5$. Следовательно, $(5, 0, -5, 0, 1)$ – частное решение СЛУ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти решения систем:

$$1) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ -3x + y + 2z = 0, \\ x + 4y + 3z = 2. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11, \\ 2x - y - 2z = -6, \\ 3x - 2y + z = 2. \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 3, \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ 3x - 3y + 6z = 3. \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x - 2y + 2z = 4, \\ 3x - 3y + 3z = 5. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

2. Найти общее решение и одно частное решение системы уравнений методом исключения неизвестных:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

1.3. Векторы на плоскости.

Система координат. Прямая на плоскости

Основные понятия и определения

Отрезок называется *направленным*, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы.

Вектором называется направленный отрезок. Направление вектора определяется указанием его начала и конца, при этом начало вектора ставится на первом месте. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

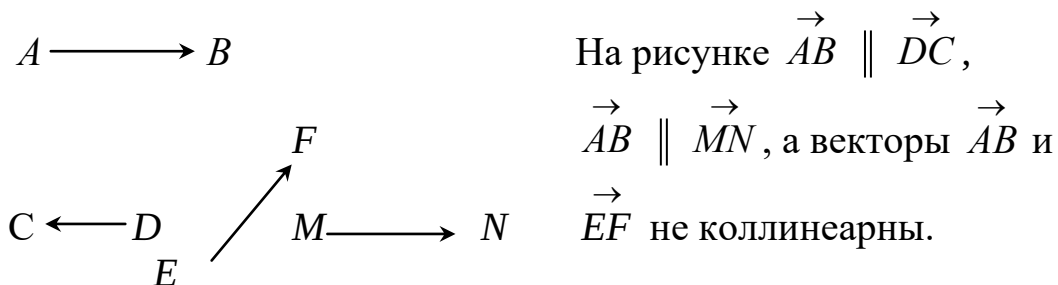
Вектор $\overrightarrow{BA}$ (начало в точке B , а конец в точке A) называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{a}$, обозначается $-\overrightarrow{a}$.

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина соответствующего отрезка. Длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* вектором и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{a}$, называется *ортом* вектора $\overrightarrow{a}$.

Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Записывают: $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

Пример.



Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными*, если лучи AB и CD одинаково направлены.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными*, если лучи AB и CD противоположно направлены.

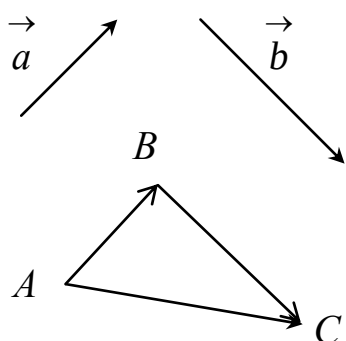
Два вектора называются *равными* ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Вектор можно параллельно переносить самому себе, а начало вектора помещать в любую точку плоскости.

Сложение и вычитание векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. От какой-нибудь произвольной точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\vec{BC} = \vec{b}$.

Определение. Вектор $\vec{AC} = \vec{c}$ называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов приходится строить треугольник.

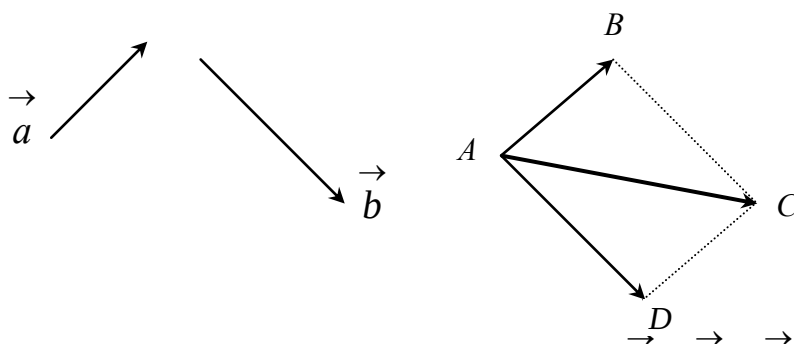
Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для построения суммы двух векторов можно воспользоваться другим способом – *правилом параллелограмма*.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. От какой-нибудь произвольной точки A отложим векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$.

Вектор $\vec{AC} = \vec{c}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Аналогично можно складывать любое конечное число векторов.



Правило параллелограмма. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – произвольные вектора, для них справедливы следующие свойства сложения векторов:

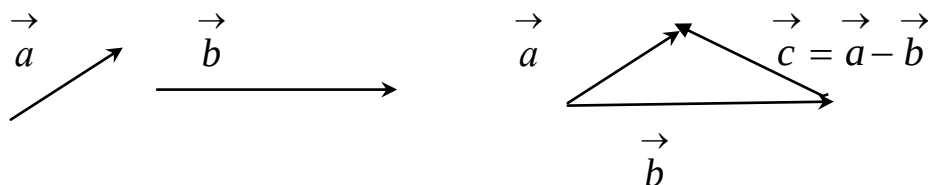
- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность;

$$2) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) - \text{ассоциативность};$$

$$3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} - \text{закон поглощения нулевого вектора};$$

$$4) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Под *разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Можно вычитать векторы по правилу: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{p}$, который удовлетворяет условиям:

$$1) |\vec{p}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, \text{ где } |\lambda| - \text{абсолютное значение числа } \lambda;$$

$$2) \vec{p} \uparrow \vec{a}, \text{ если } \lambda \geq 0 \text{ и } \vec{p} \downarrow \vec{a}, \text{ если } \lambda < 0;$$

$$3) \vec{p} = \vec{0}, \text{ если } \lambda = 0.$$

Вектор $\vec{p}$, являющийся произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ , обозначают через $\lambda \vec{a}$. При любых значениях λ и для любого вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{p}$ определяется однозначно.

Для произвольных чисел α , β и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие равенства:

$$1) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \text{ и } -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}; 2) \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a};$$

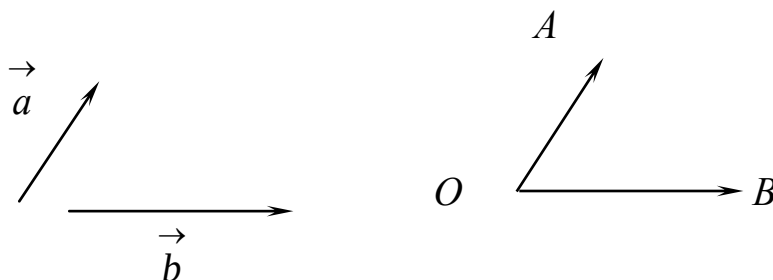
$$3) \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}; 4) (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}.$$

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях (под линейными операциями будем понимать: сложение векторов, умножение вектора на число) с векторами так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и рассмотрим лучи OA и OB .

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между лучами OA и OB , т.е. угол AOB , если лучи не совпадают.



Угол между векторами обозначается так: $(\vec{a}, \vec{b})$. Угол между векторами не зависит от выбора точки O . Если лучи OA и OB совпадают, то угол между ними считается равным нулю.

Два не нулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *взаимно перпендикулярными*, если $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем, что $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается: $\vec{a} \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $(\vec{a}, \vec{b})$.

Согласно определению имеем $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет равно нулю, если хотя бы один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны (ортогональны). Наоборот, если скалярное произведение векторов равно нулю $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то либо один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – нулевой, либо эти векторы перпендикулярны.

Рассмотрим свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение обладает *переместительным* свойством: для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. Скалярное произведение обладает *сочетательным* свойством относительно скалярного множителя: для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Скалярное произведение обладает *распределительным* свойством: для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ или $\vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2}$ (если вектор $\vec{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\vec{a}|$), в частности: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$.

Координаты вектора

Пусть векторы $\vec{a} \{a_1; a_2\}$ и $\vec{b} \{b_1; b_2\}$ заданы своими координатами, тогда справедливы следующие утверждения:

1) при *сложении* (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются): $\vec{a} \pm \vec{b} \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2\}$;

2) при *умножении* вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр: $\vec{a} \rightarrow \{\lambda a_1; \lambda a_2\}$;

3) для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были *коллинеарны*, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2};$$

4) два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *равны* тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2 \end{cases}$, т.е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2; \end{cases}$

5) *длина* вектора $\vec{a} \{a_1; a_2\}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;

6) *скалярное произведение* двух векторов определяется следующим образом: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$;

7) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$;

8) *косинус угла* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется формулой

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ т.е. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Выбранные на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy , с указанными на них положительными направлениями, называются координатными прямыми, точка O – началом координат.

Совокупность координатных осей Ox , Oy и выбранной единицы масштаба называется декартовой прямоугольной системой координат на плоскости. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy – осью ординат (рис. 1).

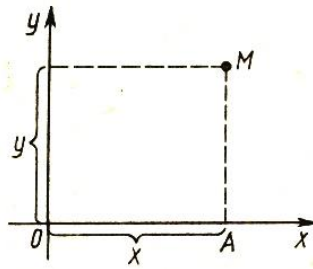


Рис. 1

Пусть точка M – произвольная точка плоскости, ее координатами называется упорядоченная пара чисел $(x; y)$, начало координат имеет координаты $(0, 0)$.

Зная координаты двух точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ на плоскости, можно найти координаты вектора $\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если точка C делит отрезок AB в отношении λ (рис. 2), т.е. $AC : CB = \lambda$, тогда координаты точки $C(x, y)$ находятся по формуле $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

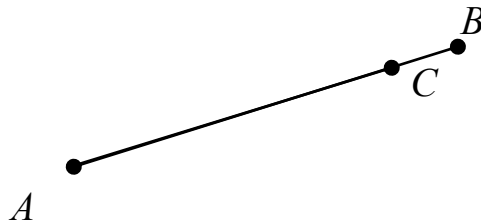


Рис. 2

Если C – середина отрезка AB , то $\lambda=1$, формулы имеют вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

Различные способы задания прямой на плоскости

Общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By + C = 0, \quad (5)$$

где A, B, C – произвольные постоянные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

Рассмотрим положение прямой относительно осей координат, если некоторые из чисел A, B, C равны нулю.

Если $C = 0$, то $Ax + By = 0$. Координаты точки $O(0; 0)$ удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, прямая проходит через начало координат.

Если $B = 0$ ($A \neq 0$), то из (5) имеем $x = -\frac{C}{A}$. Следовательно, прямая параллельна оси Oy .

Если $A = 0$ ($B \neq 0$), то из (5) имеем $y = -\frac{C}{B}$. Следовательно, прямая параллельна оси Ox .

Если $B = C = 0$, то из (5) имеем $Ax = 0$, т.е. $x = 0$ – ось Oy .

Если $A = C = 0$, то $By = 0$, т.е. $y = 0$ – ось Ox .

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид $y = kx + b$, где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется угловым коэффициентом прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy .

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1; y_1)$, с данным угловым коэффициентом k имеет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$, с данным направляющим вектором $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ записывается в виде

– канонического уравнения:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2};$$

– параметрического уравнения:
$$\begin{cases} x = a_1 t + x_0, \\ y = a_2 t + y_0. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Условие параллельности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 имеет вид $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 имеет вид $k_1 = -1/k_2$.

Если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то координаты точки пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ находятся путем решения системы, составленной из уравнений этих прямых.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Векторы $\vec{AC} = \vec{m}$, $\vec{BD} = \vec{n}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ через вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

Решение. По определению суммы и разности векторов имеем

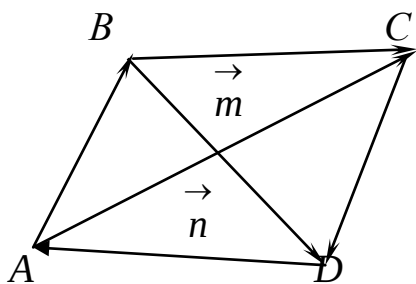


Рис. 3

$$\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{n} \text{ и } \vec{BC} - \vec{CD} = \vec{m} \text{ (рис. 3).}$$

Сложим эти равенства:

$$\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{BC} - \vec{CD} = \vec{n} + \vec{m},$$

$$\text{получим: } \vec{BC} = \frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}.$$

$$\text{Далее вектор } \vec{CD} = \vec{BD} - \vec{BC}, \vec{CD} = \vec{n} - \frac{\vec{m} + \vec{n}}{2} = \frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}.$$

Так как $ABCD$ параллелограмм (по условию), то векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, векторы $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$ противоположно направлены, следовательно, $\vec{AB} = -\vec{CD}$, $\vec{DA} = -\vec{BC}$, тогда $\vec{AB} = -\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2} = \frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; $\vec{DA} = -\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

Пример 2. В треугольнике ABC дано: $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенной из вершины A .

Решение. Обозначим через $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по высоте AH . По правилу параллелограмма сложения векторов получим, что $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AH}$, т.е. $2\vec{AH} = \vec{a} + \vec{b}$.

Вектор $\vec{AH} = x\vec{e}$ (рис. 4), следовательно $|\vec{AH}| = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|}{2}$.

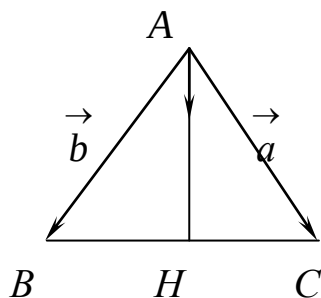


Рис. 4

Найдем длину вектора $\vec{AH}$. $\triangle ABC$ – по условию равнобедренный ($|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$), значит AH – высота, медиана и биссектриса.

Тогда из прямоугольного $\triangle ABH$ имеем: $\cos \angle BAC = \frac{|AH|}{|AB|}$, следовательно, $|\vec{AH}| = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Окончательно:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} : |\vec{AH}| = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 3. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Решение. По свойству скалярного произведения $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2}$ распишем скалярный квадрат вектора $\vec{c}$, с учетом, что $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2}.$$

Далее, зная, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ и $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$, подставим их значения в полученное равенство

$$|\vec{c}| = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2} = \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Пример 4. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Написать для этой прямой уравнение с угловым коэффициентом.

Решение. Решим данное уравнение относительно y , получим уравнение с угловым коэффициентом $y = \frac{12}{5}x - 13$, здесь $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$.

Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 1)$ и $M_2(5; 4)$.

Решение. Подставим координаты данных точек M_1 , M_2 в уравнение прямой, проходящей через две точки, получим искомое уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-1}{4-1} \text{ или } 3x - 2y - 7 = 0.$$

Пример 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -5)$, и параллельной прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

Решение. Решим данное уравнение относительно y , получим $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + b$, в силу условия параллельности угловой коэффициент искомой прямой равен $k = k_1 = -3/4$, т.е. $y = -\frac{3}{4}x + b$. Так как точка $M(-2; -5)$ принадле-

жит искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению

$$-5 = -\frac{3}{4}(-2) + b \Rightarrow b = -\frac{13}{2}.$$

Окончательно имеем $y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$ или $3x + 4y + 26 = 0$.

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (4; 2)$.

Решение. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка искомой прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - 3; y + 5)$ перпендикулярен вектору $\vec{n} = (4; 2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим

$$4(x - 3) + 2(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $2x + y - 1 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Векторы на плоскости

1. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, а E и F – середины параллельных сторон BC и AD . Постройте на чертеже следующие векторы:

2. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$, где O – любая точка плоскости. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

4. Дан треугольник ABC . Постройте вектор $-\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$.

5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

6. Дан вектор $\vec{a}$, длина которого равна 3. Найдите вектор $\vec{b}$ противоположного направления с вектором $\vec{a}$, если $|\vec{b}| = 5$.

7. В треугольнике ABC векторы $\vec{AK}$, $\vec{BL}$, $\vec{CM}$ направлены по медианам. Выразите их через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$.

8. Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, а точка H – на стороне AD , причем $AM:MC = 2:1$ и $AH = HD$. Выразите вектор $\vec{MN}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{p} = \vec{AD}$.

9. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; -3\}$, $\vec{c} = \{-1; 3\}$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2 \vec{c}$ коллинеарны.

10. Найдите координаты векторов $\vec{m} = 2 \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = 5 \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a} = \{-1; 0\}$, $\vec{b} = \{0; 0\}$, $\vec{c} = \{5; 3\}$.

11. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$; $\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 120^\circ$. Вычислите:

а) скалярное произведение векторов $2 \vec{a} - \vec{b}$ и $3 \vec{a} + \vec{b}$;

б) $|\vec{3 \vec{a} + \vec{b}}|$;

в) длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах.

12. Вычислите угол, который образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{m} = 3 \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = 2 \vec{a} + 2 \vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

13. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что вектор $\vec{a} + 3 \vec{b}$ перпендикулярен вектору $7 \vec{a} - 5 \vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 4 \vec{b}$ перпендикулярен вектору $7 \vec{a} - 2 \vec{b}$.

14. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют угол равный 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, определите модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$.

15. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

16. Вычислите длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если известно, что $\vec{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Различные способы задания прямой на плоскости

1. Дана прямая $2x - y + 5 = 0$. Выясните, какие из следующих точек принадлежат данной прямой: $(5, 15)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$, $(3, 0)$, $(7, -5)$, $(1, 7)$, $(0, 3)$.

2. Напишите уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$;

б) проходящей через начало координат и через точку $M(-2; 3)$;

в) проходящей через точку $A(2, -6)$ и параллельной вектору $\vec{p}\{1; -1\}$;

г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

д) проходящей через точку $A(3, 5)$ и параллельной оси Ox ;

ж) проходящей через точку $A(1, -5)$ и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$.

3. Среди прямых: $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ – укажите параллельные и перпендикулярные.

4. Даны вершины треугольника: $A(1; 1)$, $B(10; 13)$, $C(13; 6)$. Напишите уравнения сторон треугольника, его медиан и высот.

5. Даны вершины треугольника ABC : $A(0; 2)$, $B(7; 3)$, $C(1; 6)$. Определите угол $\angle ABC$.

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 3)$ и параллельно прямой $x + 2y + 3 = 0$.

7. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 2x + 1$ и проходящей через точку $(0; 2)$.

8. Даны вершины треугольника ABC : $A(0; 0)$, $B(-1; -3)$, $C(-5; -1)$. Составьте уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

9. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6; 2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.

10. Напишите уравнение прямой, если точка $A(2; 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

11. Две прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найдите угол между этими прямыми.

12. Найдите расстояния между данными точками и расстояния от точек $A(4; 3)$, $B(2; 1)$, $C(1; 0)$, $O(0; 0)$ до прямой $3x + 4y - 10 = 0$. Постройте точки и прямую.

13. Покажите, что прямые $2x - 3y - 6 = 0$ и $4x - 6y - 25 = 0$ параллельны, и найдите расстояние между ними.

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$.

15. Найдите точки пересечения прямых $2x + 3y - 7 = 0$ и $4x + 6y + 11 = 0$.

16. Найдите проекцию точки $M(1; 2)$ на прямую $5x + 2y + 20 = 0$.

17. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$. Определите координаты точки пересечения медиан треугольника.

18. Даны вершины параллелограмма $ABCD$: $A(4,5; 5)$, $B(2; -6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; 1,5)$. Найдите координаты остальных вершин параллелограмма.

19. Прямая проходит через точки $A(7; -3)$ и $B(23; -6)$. Найдите точку пересечения этой прямой с осью абсцисс и длину отрезка AB .

1.4. Кривые второго порядка

К кривым второго порядка относятся: эллипс, гипербола, парабола.

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами (рис. 5).

Если фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат в точках $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$, то каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – большая полуось; b – малая полуось эллипса, причем $b^2 = a^2 - c^2$.

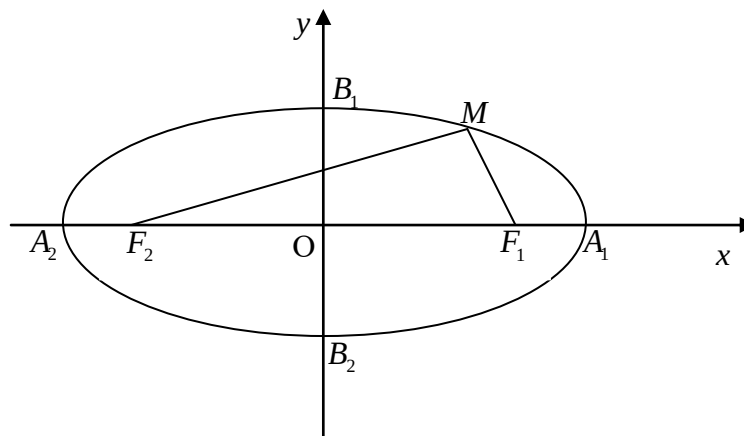


Рис. 5

Величина $F_1F_2 = 2c$ (по определению $c > a$) называется фокальным расстоянием.

Отрезки F_1M и F_2M называют фокальными радиусами, их длины вычисляют по формулам

$$F_1M = \left| a - \frac{c}{a}x \right|, \quad F_2M = \left| a + \frac{c}{a}x \right|. \quad (6)$$

Эллипс пересекает каждую из осей координат в двух точках: ось Ox – в точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, ось Oy – $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$.

Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 называют вершинами эллипса, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – осями эллипса: $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$, так как $a > b$, то A_1A_2 – большая ось, B_1B_2 – малая.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется эксцентриситетом.

Эксцентриситетом эллипса называется число, равное отношению фокального расстояния к большей оси $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Отсюда следует, что среди эллипсов, имеющих одну и ту же большую полуось, но разные эксцентриситеты, более продолговатым является тот, у которого эксцентриситет больше.

Замечание. Окружность является частным случаем эллипса, для которого фокусы F_1 и F_2 совпадают. В этом случае $c = 0$, значит, $a = b$, и каноническое уравнение приводится к виду $x^2 + y^2 = a^2$. Эксцентриситет окружности равен 0.

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, (ее обозначают $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Если точка $M \in \gamma$, то отрезки F_1M и F_2M называют фокальными радиусами точки M . Обозначим $F_1F_2 = 2c$. В силу определения, $a < c$.

Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат и имеют координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, то каноническое (простейшее) уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

где $c^2 - a^2 = b^2$ (рис. 6).

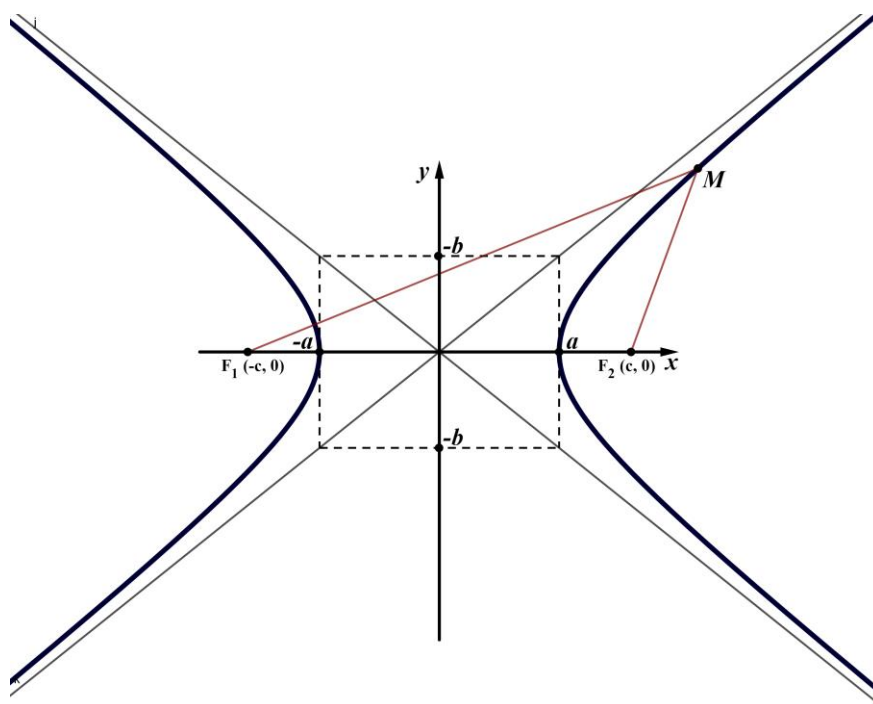


Рис. 6

Гипербола пересекает ось Ox в точках $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$. Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, а отрезок $A_1 A_2$ — ее действительной осью. Ось Oy гипербола не пересекает (пересекает в двух мнимых точках), ее называют мнимой осью.

Уравнения *асимптот* гиперболы имеют вид

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется число, равное отношению фокального расстояния к действительной оси.

Для гиперболы, заданной уравнением (7), это число равно $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Среди гипербол, имеющих одну и ту же действительную полуось, но разные эксцентриситеты, более вытянута вдоль оси Ox та, у которой эксцентриситет больше.

Замечание. Гипербола, полуоси которой равны $a = b$, называется равносторонней. Ее уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны.

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d , не проходящей через точку F .

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d — ее *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается p .

Если фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса d — уравнение $x + \frac{p}{2} = 0$ (рис. 7), то каноническое (простейшее) уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \quad (8)$$

Парабола пересекает оси координат только в точке O . Эта точка называется *вершиной* параболы. Считают, что эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

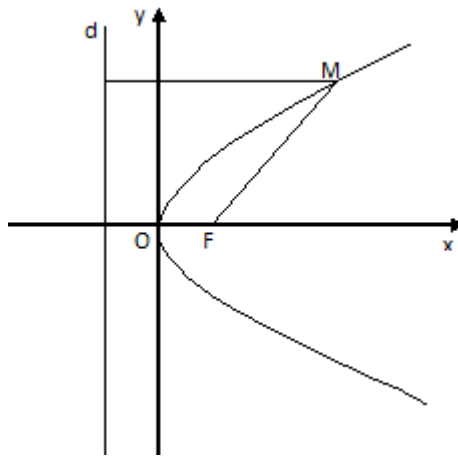


Рис. 7

Примеры решения задач

Пример 1. Составить уравнение эллипса, если его фокусами являются точки $F_1(3; 0)$, $F_2(-3; 0)$, а длина большей полуоси равна 5.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$. По условию длина большей полуоси равна 5, значит, $a = 5$. Так как его фокусами являются точки $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$, то $c = 3$. Тогда $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Пример 2. Составить каноническое уравнение гиперболы, уравнение асимптот которой имеет вид $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию: $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$; $2c = 20 \Rightarrow c = 10$.

С другой стороны, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$.

Имеем систему уравнений для определения a и b :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ \left(\frac{3b}{4}\right)^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ \frac{9b^2}{16} + b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ \frac{25b^2}{16} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ b^2 = \frac{16 \cdot 100}{25} \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ b^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3 \cdot 8}{4} \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8. \end{cases}
\end{aligned}$$

Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Фокусы: $F_1(-10; 0)$; $F_2(10; 0)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7.

2. Напишите уравнение множества точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек $F_1(4; 0)$, $F_2(-4; 0)$ равен 6.

3. Найдите длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол: а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$, б) $25x^2 - 16y^2 - 1 = 0$.

4. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если:

а) расстояние между ее вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку $(6; 2\sqrt{3})$;

в) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $e = \frac{3}{2}$.

8. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, зная, что уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

9. Вычислите площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

10. Определите точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

12. Составьте каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

а) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ox , до вершины равно 4;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M(1, 2)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $M(5, 1)$.

г) если фокус имеет координаты $(3, 0)$.

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Множества.

Операции над множествами

Под термином *множество* понимается совокупность объектов любой произвольной природы, мыслимая как единое целое. Множества обозначают большими буквами латинского или греческого алфавита, элементы множества – строчными буквами. Запись $a \in A$ означает, что объект a является элементом множества A .

Множества, число элементов которых конечно, называют $\subset A$ (отношение включения рефлексивно):

1. $A \subset B$ и $B \subset A \Rightarrow A = B$ (отношение включения антисимметрично);

2. $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (отношение включения транзитивно).

Множество, которое содержит в качестве своего подмножества любое другое множество, будем называть универсальным и обозначать буквой U .

Операции над множествами

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B . Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$.

Другими словами, запись $x \in A \cap B$ равносильна системе

$$\begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A или B . Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$.

Другими словами, запись $x \in A \cup B$ равносильна совокупности

$$\begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A , но только из таких, которых нет во множестве B . Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$.

Другими словами, запись $x \in A \setminus B$ равносильна системе

$$\begin{cases} x \in A, \\ x \notin B. \end{cases}$$

Операции над множествами удобно изображать на кругах Эйлера (рис. 8).

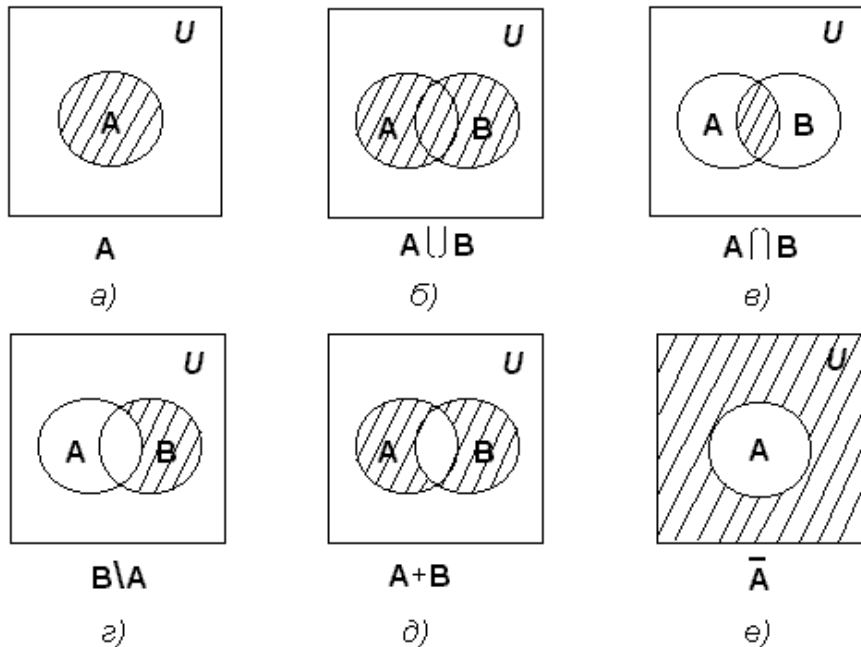


Рис. 8

Пример. Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $B = \{b, c, e, f, m\}$. Найдем пересечение, объединение и разности этих множеств.

Решение. $A \cap B = \{b, c, e, f\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, m\}$,
 $A \setminus B = \{a, d\}$, $B \setminus A = \{m\}$.

Свойства операций над множествами

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность операции объединения;
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность операции пересечения;
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – дистрибутивность операции пересечения относительно объединения.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность операции объединения относительно пересечения.

Примеры решения задач

Пример 1. Верны ли следующие утверждения:

а) $\{5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 5, 6\}$; б) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

в) $\{3, 4\} \in \{3, 4, \{3, 4\}\}$; г) $\emptyset \in \emptyset, \emptyset \subset \emptyset$.

Решение. Утверждение а) верно, так как любой элемент множества $\{5, 6\}$ является элементом множества $\{1, 2, 3, 5, 6\}$. Так как $\{1, 2\}$ не является элементом множества $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$, то утверждение б) неверно. Элементами множества $\{3, 4, \{3, 4\}\}$ являются $3, 4, \{3, 4\}$, поэтому утверждение в) верно. Так как пустое множество $\emptyset$ не имеет элементов, но является подмножеством любого множества, то утверждение $\emptyset \in \emptyset$ неверное, а $\emptyset \subset \emptyset$ – верное утверждение.

Пример 2. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}$.

Решение. $|x| < 5 \Leftrightarrow x \in (-5; 5)$. Значит, множество A есть интервал $(-5, 5)$. Решением неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$ является объединение двух интервалов $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. Следовательно, $B = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Тогда $A \cup B$ есть вся числовая прямая, т.е. $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = (-5, 2) \cup (3, 5)$, $A \setminus B = [2, 3]$, $B \setminus A = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$.

Пример 3. Из 100 студентов английский язык изучают 28 студентов

в, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка изучают трое студентов. Остальные изучают испанский язык. Сколько студентов изучают испанский язык? Сколько студентов изучают только один язык?

Решение. Обозначим через A – множество студентов, изучающих английский язык, B – изучающих немецкий язык, C – французский язык, D – испанский язык.

По условию $m(A) = 28$, $m(B) = 30$, $m(C) = 42$, $m(A \cap B) = 8$, $m(A \cap C) = 10$, $m(B \cap C) = 5$, $m(A \cap B \cap C) = 3$.

Так как всего студентов 100, то $m(A \cup B \cup C) + m(D) = 100$. С учетом $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$, это равенство запишется:

$$m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) + m(D) = 100.$$

Отсюда получим, что $m(D) = 20$.

$m(A) - m(A \cap B) - m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C) = 13$ – число студентов, изучающих только английский язык;

$m(B) - m(A \cap B) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) = 20$ – число студентов, изучающих только немецкий язык;

$m(C) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) = 30$ – число студентов, изучающих только французский язык. Значит, $20 + 13 + 20 + 30 = 83$ – число студентов, изучающих только один язык.

Задачи для самостоятельного решения

1. Верны ли следующие утверждения:

1) $\{5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 5, 6\}$;

2) $\{3, 4\} \in \{3, 4, \{3, 4\}\}$;

3) $\emptyset \subset \emptyset, \emptyset \in \emptyset$;

4) $1 \in \{\{1\}, 2, 3\}$.

2. Найдите все подмножества множества $A = \{1, 2, 3\}$.

3. Определите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$;

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 15 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$;

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 12 < 0\}$.

4. Пусть A – множество всех делителей числа 28, B – множество всех таких нечетных чисел x , что $0 < x < 14$, C – множество всех таких простых чисел x , что $|x| < 28$. Найдите:

1) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$;

2) $A \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$;

3) $B \cup C$, $B \cap C$, $B \setminus C$, $C \setminus B$.

5. Множества A и B – подмножества универсального множества R . Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\bar{A} \cup B$, $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ и изобразите эти множества на числовой прямой, если:

1) $A = [-7, 8) \cup \{12\}$, $B = (-1, \infty)$;

2) $A = (-\infty, 6)$, $B = (-9, 8] \cup \{10\}$;

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 7\}$;

$$4) A = \{x \in R \mid -6 \leq x < 8\}, B = \{x \in R \mid x > 5\};$$

$$5) A = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 \geq 0\}, B = \{x \in R \mid x^2 - 8x + 12 < 0\}.$$

6. В классе 25 учеников. Из них 16 умеют играть в шахматы, 18 – умеют плавать и только 2 ученика не умеют играть в шахматы и не умеют плавать. Сколько учеников умеют играть в шахматы и умеют плавать?

7. Из 40 студентов экзамен по математике сдали на отлично 12 человек, по физике – 10, по педагогике – 16, по математике и физике 8, по математике и педагогике – 6, по физике и педагогике – 5, по всем трем предметам – 3. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

8. В течение 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 3 дождливых и холодных, 5 дождливых и ветреных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода?

9. Староста группы представила следующий отчет о физкультурной работе: «Всего на курсе 45 студентов. Из них в футбольной секции занимаются 25 человек, в баскетбольной – 30 и в шахматной – 28, 16 человек одновременно занимаются и в футбольной и в баскетбольной секциях, 18 – в футбольной и шахматной секциях, 17 – в баскетбольной и в шахматной. А 15 студентов занимаются во всех трех секциях». Объясните, почему отчет был забракован.

10. На полу комнаты площадью 24 м^2 лежат три ковра. Площадь одного из них $= 10 \text{ м}^2$, другого $= 8 \text{ м}^2$, третьего $= 6 \text{ м}^2$. Каждые два ковра перекрываются по площади 3 м^2 , а площадь участка пола, покрытого всеми тремя коврами, равна 1 м^2 . Найдите площадь участка пола:

1) покрытого первым и вторым коврами, но не покрытого третьим ковром;

2) покрытого только первым ковром;

3) не покрытого коврами.

11. Докажите следующие равенства:

$$1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$2) A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$$

$$3) A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C);$$

$$4) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$$

- 5) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
- 6) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$
- 7) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C);$
- 8) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C);$
- 9) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$

2.2. Понятие функции. Свойства. График функции

Пусть даны два непустых множества X и Y .

Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ или $f: X \rightarrow Y$.

Если множества X и Y – множества действительных чисел, то в этом случае говорят, что на множестве X определена действительная функция $y = f(x)$ действительной переменной x , причем x называют *аргументом*, или *независимой переменной*, y – зависимой переменной.

Совокупность всех значений аргумента x , для которых функция определена, называется *областью определения* функции.

Совокупность всех значений, принимаемых переменной y , называется *множеством значений* функции. Область определения функции f обозначается через $D(f)$, а множество значений – через $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само уравнение $y = f(x)$ называется уравнением этого графика (рис. 9).

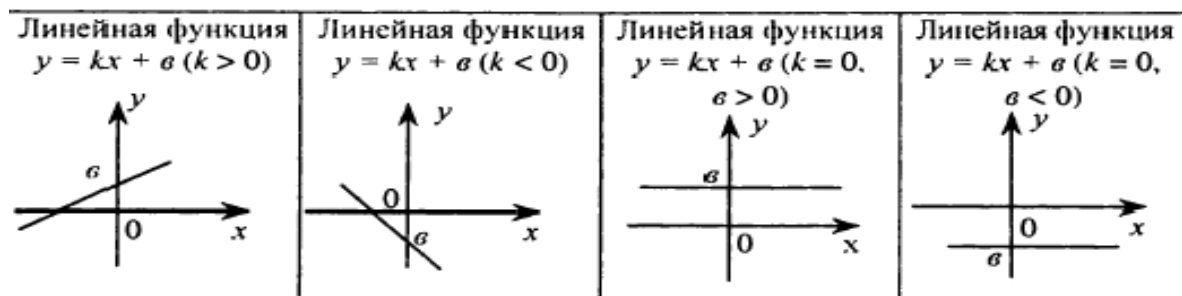


Рис. 9 (начало)

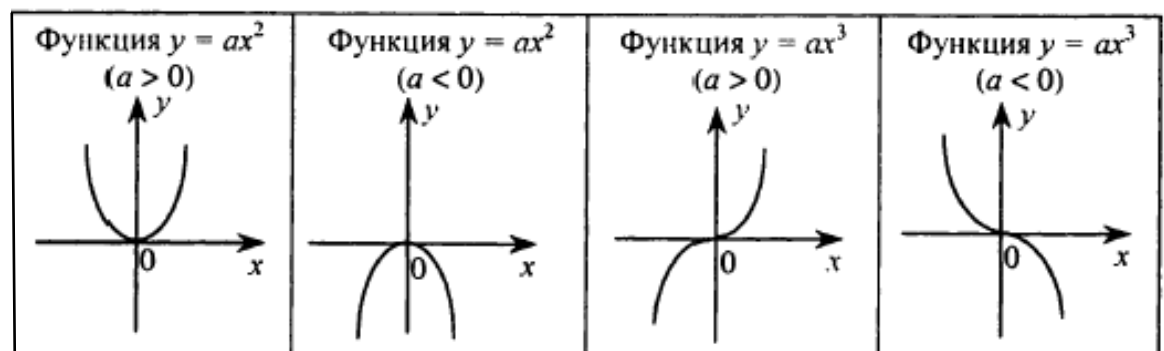
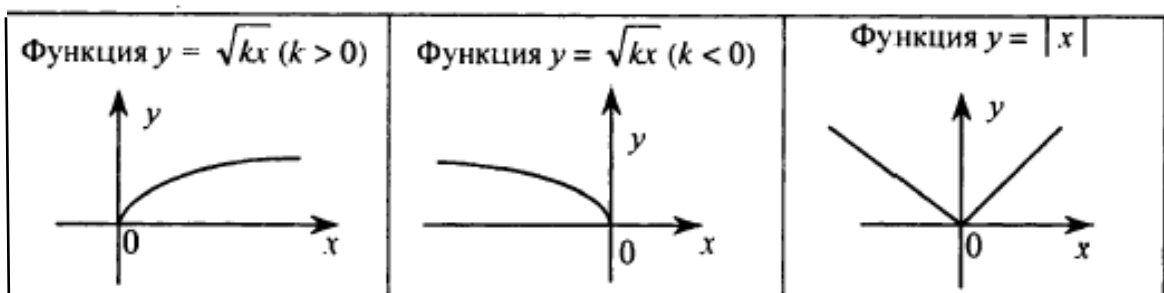
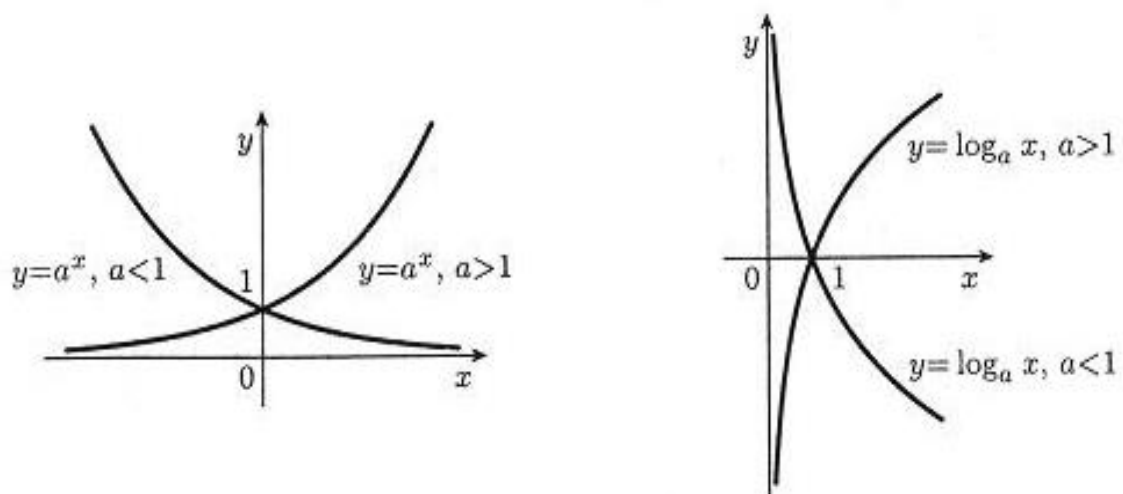


Рис. 9 (продолжение)

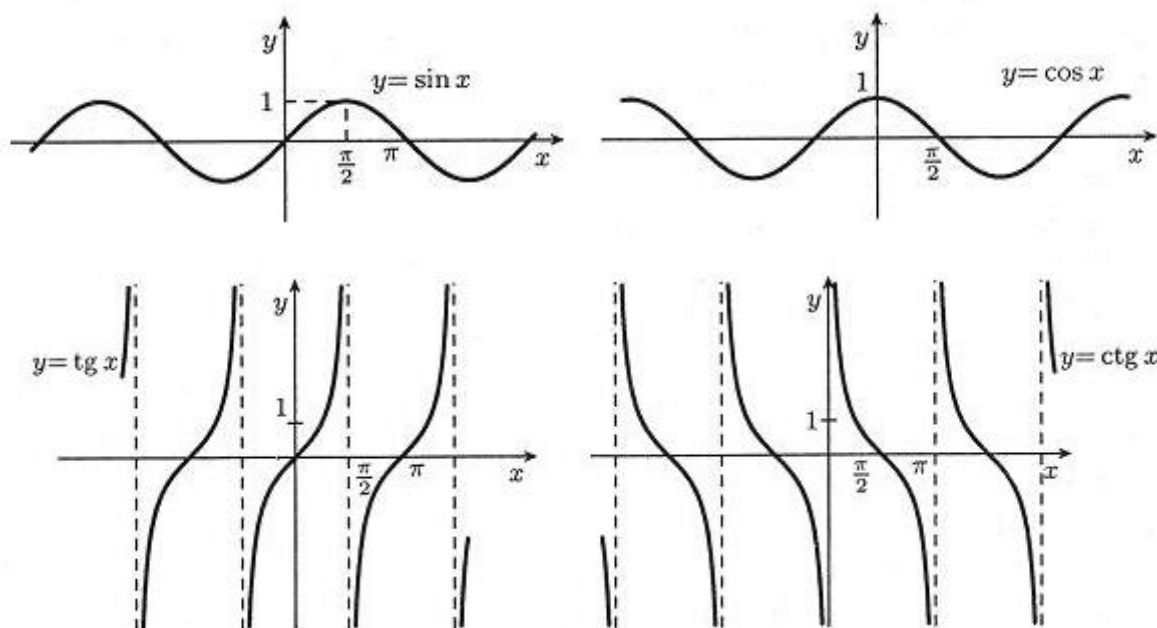


Рис. 9 (окончание)

Свойства функций:

1. Четность и нечетность функции.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого значения $x \in D(f)$ значение $-x \in D(f)$ и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения $x \in D(f)$ значение $-x \in D(f)$ и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Периодичность функции.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$: $x - T \in D(f)$, $x + T \in D(f)$ и выполняются равенства $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. *Основным периодом* функции называется наименьшее положительное число T , обладающее указанным свойством.

3. Ограниченность функции.

Если существует число C такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \leq C$, то функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве $D(f)$. Если существует число C такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geq C$, то функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве $D(f)$.

Если задан график функции $y = f(x)$, то можно построить графики следующих функций:

1) $y = f(x) + b$ (график функции $y = f(x)$, сдвигается вдоль оси Oy на единицу);

2) $y = f(x - a)$ (график функции $y = f(x)$ сдвигается вдоль оси Ox на a единицу);

3) $y = Af(x)$ – график функции $y = f(x)$, растягивается в A раз вдоль оси Oy ;

4) $y = f(kx)$ – график функции $y = f(x)$, растягивается в $1/k$ раз вдоль оси Ox .

По заданному графику функции $y = f(x)$, выполняя последовательно соответствующие преобразования, можно построить график функции вида $y = Af(k(x - a)) + b$.

2.3. Понятие производной функции. Правила нахождения производной функции одной переменной

Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Возьмем Δx так, чтобы точка $x + \Delta x$ также принадлежала этой окрестности.

Производной функцией $y = f(x)$ в точке x называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента (при условии, что этот предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует).

Для производной функции $y = f(x)$ употребляются следующие обозначения: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$ или $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Таким образом, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* функции.

Функция $f(x)$, имеющая конечную производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , то она непрерывна в этой точке.

Таблица производных

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \text{ в частности } (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \text{ в частности } (e^x)' = e^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \lim_{x \rightarrow \infty}.$$

Правила вычисления производных

Если функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы в точке x , то:

$$1) (U + V)' = U' + V';$$

$$2) (U \cdot V)' = U'V + V'U, \text{ в частности, } (C \cdot U)' = C \cdot U', \text{ где } C = \text{const};$$

$$3) \left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}, \text{ где } V \neq 0.$$

Правило дифференцирования сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x)) \equiv F(x)$.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0 и справедлива следующая формула:

$$y'_x(x_0) = y'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$$

или, в компактной записи, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти производную функции $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$, исходя из определения производной.

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx , тогда значение функции в точке $x + \Delta x$ будет равно

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = (2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4) - \\ &- (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x. \end{aligned}$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x}{\Delta x} = \\ &= 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7. \end{aligned}$$

Найдем предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Итак, $y' = 6x^2 + 10x - 7$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{x^2}{\cos x}$, пользуясь правилами вычисления производных и таблицей производных.

Решение. $y' = \frac{2x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^2}{\cos^2 x}.$

Пример 3. Найти производную сложной функции

$$y = (1 + 3x - 5x^2)^4.$$

Решение. $y' = 4(1 + 3x - 5x^2)^3 \cdot (3 - 10x).$

Пример 4. Найти производную сложной функции

$$y = 2x^7 \cdot \sin 4x.$$

Решение. $y' = 14x^6 \cdot \sin 4x + 8 \cos 4x \cdot x^7.$

Пример 5. Найти производную сложной функции

$$y = \frac{e^{2x}}{(3x+1)^3}.$$

Решение. $y' = \frac{2e^{2x} \cdot (3x+1)^3 - 9e^{2x} \cdot (3x+1)^2}{(3x+1)^6}.$

Пример 6. Найти производную сложной функции

$$y = \sqrt{3x^2 - 6x + 1}.$$

Решение. $y' = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x - 6) = \frac{6x - 6}{2\sqrt{3x^2 - 6x + 1}}.$

Понятие дифференциала. Геометрический и механический смысл производной и дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение в этой точке Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – функция от Δx , причем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная линейная относительно Δx часть приращения функции $f'(x)\Delta x$ называется *дифференциалом функции* и обозначается dy :

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (9)$$

Положив в выражении (9) $f(x) = x$, получим $dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Тогда соотношение (9) принимает вид $dy = f'(x)dx$.

Рассмотрим некоторые свойства дифференциалов, аналогичные свойствам производной:

$$1) d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$2) d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv, \quad \text{в частности,} \quad d(C \cdot u) = Cdu, \quad \text{где } C = \text{const};$$

$$3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$. Если заменить приращение функции ее дифференциалом, получим $f'(x)dx \approx f(x + \Delta x) - f(x)$, откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Эта формула применяется для приближенных вычислений значений функций.

Геометрический смысл производной (рис. 10) в точке состоит в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции в соответствующей точке равен значению производной функции в этой точке: $f'(x_0) = \text{tg}\varphi$.

Физический смысл производной состоит в том, что скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени.

Быстрота протекания физических, биологических и других процессов также характеризуется при помощи производной. Например, скорость охлаждения тела равна производной температуры тела по времени; скорость химической реакции равна производной реагирующей массы по времени.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx (рис. 11).

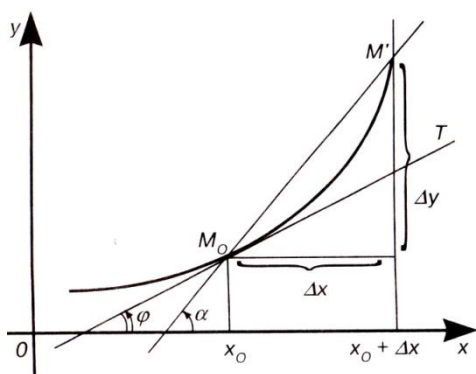


Рис. 10

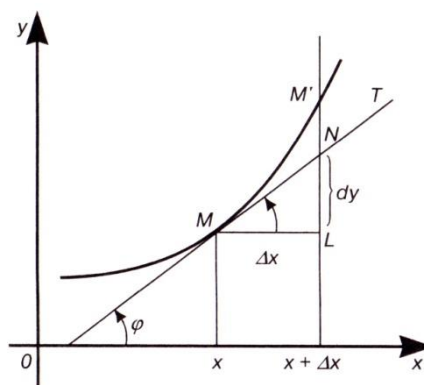


Рис. 11

Уравнения касательной и нормали. Из геометрического смысла производной следует, что уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ может быть записано в виде $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где y'_0 есть значение производной y' в точке $M(x_0, y_0)$. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой. Уравнение нормали имеет вид: $x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0$.

Примеры решения задач

Пример 7. Найти дифференциал функции $y = x^2 + x + 1$.

Решение. $dy = f'(x)dx = (2x + 1)dx$.

Пример 8. Найти дифференциал функции $y = x \ln x$.

Решение. $dy = f'(x)dx = (\ln x + 1)dx$.

Пример 9. Напишем уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Решение. Имеем $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда угловой коэффициент касательной $k = y'|_{x=4} = \frac{1}{4}$. Так как точка касания имеет координаты

$x = 4$, $y = 2$, то уравнение касательной $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ или $x - 4y + 4 = 0$. В силу условия перпендикулярности прямых угловой коэффициент нормали $k_1 = -4$, откуда уравнение нормали $y - 2 = -4(x - 4)$ или $4x + y - 18 = 0$.

Пример 10. Найти приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,001$.

Решение. Воспользуемся формулой $\Delta y \approx dy$, тогда имеем $\Delta y \approx dy = 6x^2 dx = 6 \cdot 2^2 \cdot 0,001 = 0,024$. Точное значение приращения

$$\begin{aligned}\Delta y &= 2(x + \Delta x)^3 + 5 - 2x^3 - 5 = 6x^2 \Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 = \\ &= 6 \cdot 4 \cdot 0,001 + 6 \cdot 2 \cdot 0,000001 + 2 \cdot 0,000000001 = 0,024012002.\end{aligned}$$

Пример 11. Найти приближенное значение функции

$$y = \arcsin 0,51.$$

Решение. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Пусть $x_0 = 0,5$, $\Delta x = 0,01$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = \arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,513.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*, она является функцией, определенной на некотором множестве X .

Производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* (или второй производной) от функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$.

Производная от $f''(x)$ называется *производной третьего порядка* (или третьей производной) от функции $y = f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$.

Производная n -го порядка есть производная от производной $(n-1)$ -го порядка, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Производные второго и более высокого порядка называются производными высшего порядка.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 y = d(dy)$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^n y = y^{(n)}(dx)^n$.

Примеры решения задач

Пример 12. Найти производную второго порядка от функции $y = \ln(1-x)$.

Решение. $y' = \frac{-1}{1-x}, y'' = \frac{1}{(1-x)^2}.$

Пример 13. Найти дифференциал третьего порядка функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получим

$$dy = (4x^3 - 6x)dx, d^2y = (12x^2 - 6)(dx)^2, d^3y = (24x)(dx)^3.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в точке x_0 существует производная функции, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет производную $f'(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одно значение c , где $a < c < b$, такое, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Применение производной к исследованию функций

Говорят, что функция $f(x)$ *возрастает* на промежутке $(a; b)$, если любому большему значению аргумента x в этом промежутке соответствует большее значение функции, т.е.

$$\forall x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b): x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Говорят, что функция $f(x)$ *убывает* на промежутке $(a; b)$, если любому большему значению аргумента x в этом промежутке соответствует меньшее значение функции, т.е.

$$\forall x_1 \in (a, b), \forall x_2 \in (a, b): x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Функция возрастающая (или убывающая) на промежутке $(a; b)$ называется *монотонной*.

Теорема (Достаточный признак возрастания (убывания) функции).

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка, то функция убывает на этом промежутке.

Говорят, что при значении x_0 аргумента x функция $f(x)$ имеет *максимум* $f(x_0)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ для $x \neq x_0$.

Говорят, что при значении x_0 аргумента x функция $f(x)$ имеет *минимум* $f(x_0)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ для $x \neq x_0$.

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума* (*точками максимума* или *точками минимума*).

Из определения следует, что экстремум функции носит *локальный характер* – это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с близлежащими значениями. Поэтому наличие экстремума функции при некотором значении аргумента несколько не зависит от того, как ведет себя функция вдали от этого значения. С этой точки зрения понятно, что минимум функции может быть больше максимума, подобно тому, как впадина в горах может иметь большую отметку над уровнем моря, чем небольшая впадина на равнине.

Теорема (Необходимое условие существования локального экстремума функции).

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю.

Геометрически это означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox . Точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$, называется *стационарной* точкой функции.

Теорема (Достаточное условие существования локального экстремума функции).

Если дифференцируемая функция такова, что для некоторого значения x_0 производная равна нулю $f'(x_0) = 0$ и меняет свой знак при переходе через точку x_0 , то x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, причем функция имеет *максимум* в точке x_0 , если изменение знака производной происходит с плюса на минус; и функция имеет *минимум* в точке x_0 , если изменение знака производной происходит с минуса на плюс.

Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в интервале $(a; b)$, если он расположен не выше любой касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a; b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 12).

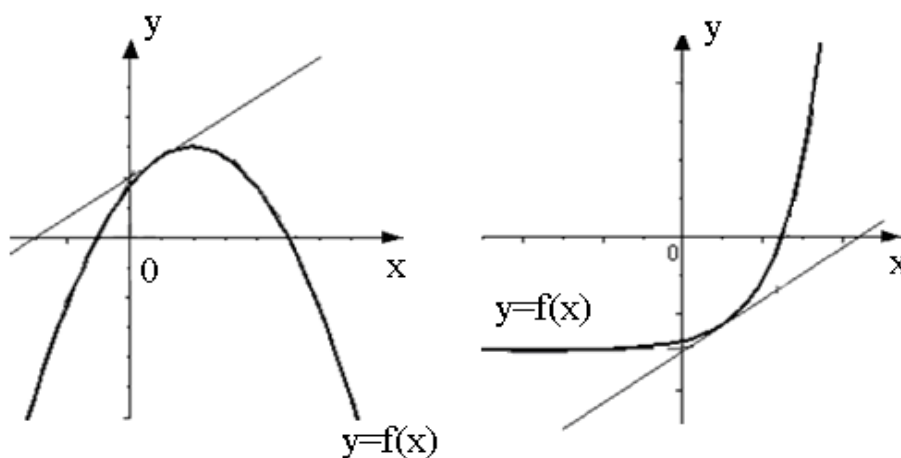


Рис. 12

Теорема (Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции). Если $f''(x) < 0$ в интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым на этом интервале, если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является вогнутым на этом интервале.

Точка $x = x_0$ называется *точкой перегиба графика функции*, если при переходе через нее график функции меняет выпуклость на вогнутость или наоборот.

Теорема (О достаточном условии существования точки перегиба).

Если: 1) первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 ;

2) вторая производная $f''(x_0) = 0$;

3) $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак, тогда в точке $M(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ имеет перегиб.

Асимптоты графика функции. Прямая называется *асимптотой* графика функции, если расстояние от точки M графика функции до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = b$ называется *горизонтальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$, $b \neq \infty$, $k \neq \infty$, $k \neq 0$.

Схема построения графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
3. Найти точку разрыва функции и в них вычислить односторонние пределы.
4. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
5. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$).
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость. Найти точки перегиба.

9. Найти уравнения асимптот, если они существуют.

10. На основании проведенного исследования построить график функции.

Пример 14. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x-3}$, используя методы дифференциального исследования, и построим ее график.

Решение. 1. Область определения функции: $\begin{matrix} x-3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix}$.

Тогда $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Функция непериодическая.

Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-3} = \frac{x^2}{-x-3} = -\frac{x^2}{x+3}.$$

Следовательно, функция $y = \frac{x^2}{x-3}$ есть функция общего вида.

3. Исследуем точку возможного разрыва функции $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) \frac{x^2}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \frac{x^2}{x-3} = -\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ – точка разрыва функции второго рода. Таким образом, найдены вертикальные асимптоты: прямая $x = 3$. Так как других точек разрыва в области определения нет, то и других вертикальных асимптот тоже нет.

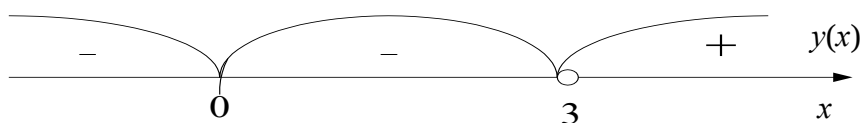
4. Точки пересечения графика функции с осью OX :

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x \neq 3, \text{ получим точку } (0; 0);$$

Точки пересечения графика функции с осью OY :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2}{0-3} = 0, \text{ получим точку } (0; 0).$$

5. Промежутки знакопостоянства. Отметим на числовой прямой точки $x = 0$ и $x = 3$ и определим знак функции на каждом из получившихся промежутков:



$$y = f(x) > 0, \text{ если } x \in (3; +\infty), \quad y = f(x) < 0, \text{ если } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3).$$

6-7. Найдем экстремум функции и интервалы возрастания и убывания функции:

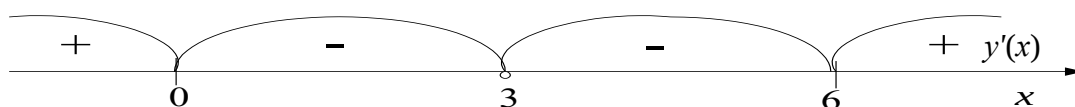
а) критические точки:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-3} \right)' = \frac{(x^2)'(x-3) - x^2(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x=0, x=6, x \neq 3.$$

б) промежутки возрастания/убывания:

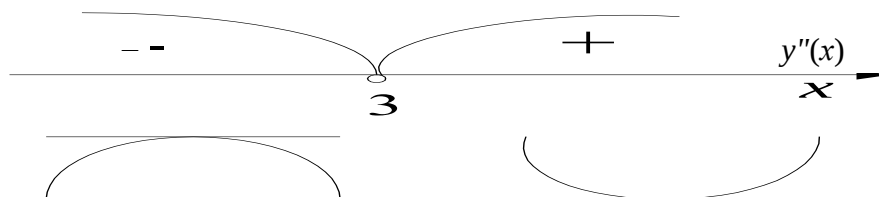


Таким образом, функция возрастает, если $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$, и убывает, если $x \in (0; 3) \cup (3; 6)$.

в) $x=0$ – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = \frac{0^2}{0-3} = 0$;

$x=6$ – точка минимума, $y_{\min} = y(6) = \frac{6^2}{6-3} = \frac{36}{3} = 12$.

8. Точки перегиба. Интервалы выпуклости, вогнутости. Найдем вторую производную:



$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 6x)'(x-3)^2 - (x^2 - 6x)((x-3)^2)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{(x-3)((2x-6)(x-3) - 2x^2 + 12x)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 6x + 18 - 2x^2 + 12x}{(x-3)^3} = \frac{18}{(x-3)^3}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{18}{(x-3)^3} = 0, \quad x \neq 3.$$

9. Найдем уравнения асимптот графика функции. Вертикальные асимптоты найдены ранее.

Горизонтальные асимптоты:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = \infty.$$

Таким образом, горизонтальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: $y = kx + b$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - \frac{3}{x}} = 3.$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = 1.$$

Таким образом, $y = x + 3$ – наклонная асимптота.

10. Строим график функции $y = \frac{x^2}{x-3}$ (рис. 13).

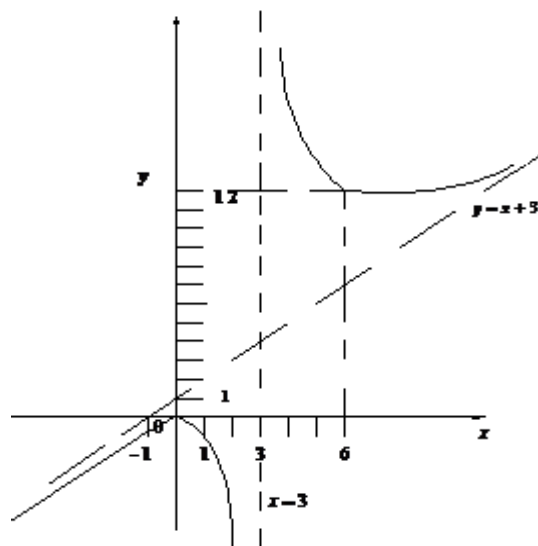


Рис. 13

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите, исходя из определения, производную функций:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 7$; 2) $y = 3x^2 + 1$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

4) $y = \sqrt{3x}$; 5) $y = \cos x$; 6) $y = \sin x$;

7) $y = \log_2 x$; 8) $y = \arccos x$; 9) $y = \frac{2x + 3}{5x + 1}$.

2. Найдите производные следующих функций:

1) $y = 3x^{\frac{1}{2}} - 4x^4 + 6x^3$; 2) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$; 3) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$;

4) $y = \ln 2 \cos x$; 5) $y = x \cdot \arccos x$; 6) $y = x^5 \cdot \operatorname{ctg} x$;

7) $y = (x - 1) \cdot e^x$; 8) $y = \frac{x^{-7}}{\ln x}$; 9) $y = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)$;

10) $y = 2x^3 \cdot \log_2 x$; 11) $y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x$;

12) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^3$; 13) $y = (x^5 - 4x^4) \cdot \operatorname{ctg} x$;

14) $y = (x^4 + 2x^3) \cdot \ln x$; 15) $y = 2x^{\frac{3}{2}} \cdot \arccos x$;

16) $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}$; 17) $y = (5x - 1) \cdot e^x$; 18) $y = (x^4 - 2x) \cdot \operatorname{arctg} x$;

$$19) y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}; 20) y = \frac{\ln x}{\sin x}; 21) y = -5x^{\frac{7}{5}} - \frac{1}{2}x^{-3} + 2x + 6;$$

$$22) y = \frac{\ln x}{4 - 3 \cos x}; 23) y = e^x \arcsin x; 24) y = \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}.$$

3. Найдите производные сложных функций:

$$1) y = (3 + 2x^2)^4; 2) y = \sqrt{1 - x^3}; 3) y = \sqrt[3]{(x^5 - 3x + 1)^{-8}};$$

$$4) y = (3 - 2 \sin x)^5; 5) y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x; 6) y = \sqrt[3]{\sin^2 x};$$

$$7) y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} x}; 8) y = 2x + 5 \cos^3 x; 9) y = e^{-3x} \cdot \cos 5x;$$

$$10) y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - (\arcsin x)^3; 11) y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg} \frac{4}{x};$$

$$12) y = \frac{1}{20} \cos(5x)^2 - 4 \cos x^2; 13) y = \arcsin 2x;$$

$$14) y = \sqrt[3]{(x^5 - 3x)^4}; 15) y = \log_8(x^2 - 3x + 5);$$

$$16) y = \frac{x + \ln 3x}{x^2}; 17) y = \arccos \frac{5x + 1}{x^2 + 2}; 18) y = \sin^3(\cos 4x);$$

$$19) y = \operatorname{arctg}(x^2 + 6x); 20) y = \sqrt[3]{x^2 + \operatorname{tg} 5x} + 15;$$

$$21) y = \frac{x \ln(\sin x)}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{\sqrt{x^2 + 4} \cos x}{\sin x}; 22) y = x \cdot \arcsin(4x - 3);$$

$$23) y = \log_2(\sin 8x); 24) y = \frac{\sin 6x}{3 \cos^4 x}; 25) y = \arccos \frac{1 + x}{1 - x};$$

$$26) y = e^{2x^2 + 6x - 1} \cdot \operatorname{tg} 3x; 27) y = 7^{\arcsin^2 x}; 28) y = \frac{\cos^3 4x}{e^{2x}};$$

$$29) y = \sqrt{e^x} \ln(\sin 6x).$$

4. Напишите уравнение касательной и нормали к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точке $(-2; 5)$.

5. Напишите уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt[3]{x - 1}$ в точке $(1; 0)$.

6. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^3 - x$ в точке $x_0 = 0$.

7. На рис. 14 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к графику в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

8. На рис. 15 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к графику в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

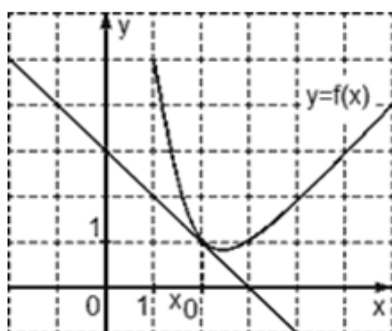


Рис. 14

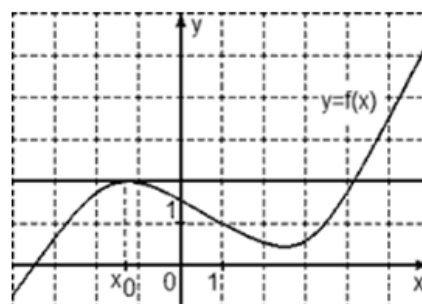


Рис. 15

9. Найдите угол между осью OX и касательной к кривой $y = \frac{1}{1-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

11. Определите, в какой точке графика функции $y = \ln(x-1)$ касательная к нему образует с осью абсцисс угол 45° .

12. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $S = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$. В какой момент времени t_0 скорость точки равна нулю?

13. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $x_1(t) = 2,5t^2 - 6t + 1$ и $x_2(t) = 0,5t^2 + 2t - 3$. В какой момент времени t_0 их скорости будут равны?

14. Точка движется по закону $x_1(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

15. Найдите дифференциалы следующих функций:

1) $y = 3x^2 - x$; 2) $y = \frac{x}{1-x}$;

3) $y = x \ln x - x$; 4) $y = e^{-x^2}$.

16. Найдите приближенное значение функций:

1) $\operatorname{arctg} 1,05$; 2) $\ln \operatorname{tg} 47^\circ 15'$; 3) $\cos 41^\circ$;

4) $\operatorname{tg} 46^\circ$; 5) $\sqrt{e}$; 6) $\sqrt[3]{121}$; 7) $\sqrt[4]{4094}$.

17. Найдите производные второго порядка от функций:

1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$; 4) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

5) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 6) $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$.

18. Найдите производные третьего порядка от функций:

1) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$; 2) $y = xe^{-x}$; 3) $y = x \ln x$.

19. Найдите дифференциалы второго порядка от функций:

1) $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$; 2) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; 3) $y = (\arcsin x)^2$.

20. Найдите дифференциалы третьего порядка от функций:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = x \sin x$; 3) $y = x^2 e^{-x}$; 4) $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

21. Найдите $y''(1)$, если $y(x) = x \ln x$.

22. Постройте графики функций:

1) $y = 6x^2 - x^4$; 2) $y = x^3 - 3x^2$;

3) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$; 4) $g(x) = 5(x-2)e^{x-1}$.

2.4. Неопределенный и определенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для функции $f(x)$ на промежутке X , если в каждой точке x этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Совокупность всех первообразных для функции $F(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на X и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - \text{const.}$$

В формуле $\int$ – знак неопределенного интеграла, x – переменная интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; C – произвольная постоянная.

Отыскание неопределенного интеграла от функции называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int af(x) = a \int f(x)dx$, где a – постоянная не равная нулю.

5. Интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций, т.е. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица интегралов

- | | |
|--|--|
| 1. $\int dx = x + C.$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$ |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$ | 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$ | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C =$
$= -\arccos \frac{x}{a} + C.$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C.$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + a} \right + C,$
$a \neq 0$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$ | 14. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos(x) + C.$ |
| 6. $\int \sin x = -\cos x + C.$ | 15. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C.$ |
| 7. $\int \cos x = \sin x + C.$ | 16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right + C.$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ | 17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ | |

Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование.

Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала, называемые операцией *подведения под знак дифференциала*:

$$dx = \frac{d(\varphi(x))}{\varphi'(x)}.$$

В частности, $dx = d(x + a)$, где a – число, $dx = \frac{1}{k} d(kx + a)$ ($k \neq 0$),

$$x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \frac{1}{x} dx = d(\ln x),$$

$$\cos x dx = d(\sin x), \quad \sin x dx = -d(\cos x).$$

Часто используются следующие интегралы:

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C, \quad k \neq 0, \quad k, b - \text{числа},$$

$$\int (kx + b)^n dx = \frac{1}{k} \frac{(kx + b)^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad k \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{kx + b} = \frac{1}{k} \ln|kx + b| + c, \quad k \neq 0, \quad \int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C,$$

$$\int \sin(kx + b) dx = -\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C.$$

Пример 1. Вычислить интегралы: а) $\int 3x^2 dx$, б) $\int 2x dx$.

Решение. Воспользуемся таблицей интегралов и свойствами неопределенного интеграла: а) $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, б) $\int 2x dx = x^2 + C$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int (3x - 1)^{24} dx$.

Решение. Используя операцию «подведения под знак дифференциала», получим

$$\int (3x - 1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x - 1)^{24} d(3x - 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x - 1)^{25}}{25} + C.$$

2. Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки). Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования, при этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . Формула замены переменной в этом случае

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t к переменной x .

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(u)du, \quad u = \psi(x).$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$.

Решение. Положим $t = 2x^3 + 1$, тогда $dt = 6x^2 dx$, $x^2 dx = \frac{1}{6} dt$.

Таким образом,

$$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{30} t^5 + C = \frac{1}{30} (2x^3 + 1)^5 + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение. Положим $y = 1 + \sqrt{x}$, тогда $\sqrt{x} = y - 1$, $x = (y - 1)^2$, $dx = 2(y - 1)dy$, $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{2(y - 1)dy}{y} = \int \frac{2y - 2}{y} dy = \int \left(2 - \frac{2}{y} \right) dy =$
 $= 2y - 2 \ln |y| + C = 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C.$

3. *Интегрирование по частям.* Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на промежутке X , то справедлива формула $\int u dv = uv - \int v du$. Эту формулу называют формулой интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям чаще всего применяется для интегрирования произведения функций, таких как: $\int P_n(x)e^x dx$, $\int P_n(x)\sin x dx$, $\int P_n(x)\cos x dx$, $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arctg x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен.

При этом за u , как правило, принимается тот сомножитель, который при дифференцировании упрощается. Например, в интеграле $\int x^2 \arctg x dx$ за u надо взять $\arctg x$, а в интеграле $\int x^2 e^x dx$ за u надо взять x^2 .

Алгоритм интегрирования по частям:

- 1) необходимо выбрать u, dv ;
- 2) найти du, v ;
- 3) применить формулу и выполнить интегрирование.

Пример 5. Найти интеграл: $\int x \ln x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Вычислить интеграл: $\int x e^x dx$.

Решение.

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \sqrt{x} dx$; 2) $\int \frac{1}{x^2} dx$; 3) $\int 3,4 x^{-0,17} dx$;

4) $\int \left(x^3 + 3x^{\frac{1}{6}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 4 \right) dx$; 5) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; 6) $\int (x+1)^{15} dx$;

7) $\int \sqrt{8-2x} dx$; 8) $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3+2} dx$; 9) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;

10) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 11) $\int \cos 3x dx$; 12) $\int \sin(2x-3) dx$;

13) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$; 14) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 15) $\int \sqrt{(8-3x)^7} dx$;

$$\begin{aligned}
& 16) \int (2x+1)^{20} dx; 17) \int \cos(4x-10) dx; 18) \int \sqrt{1+x} dx; \\
& 19) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}; 20) \int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx; 21) \int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx; \\
& 22) \int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx; 23) \int x^3 \cos(x^4+2) dx; 24) \int e^{2x^3-1} \cdot x^2 dx; \\
& 25) \int x(1-x)^5 dx; 26) \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5} dx; 27) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx.
\end{aligned}$$

2. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
& 1) \int x \cos x dx; 2) \int x \sin 2x dx; \quad 3) \int x e^{-x} dx; \\
& 4) \int x \arctg x dx; 5) \int x \cdot 3^x dx; 6) \int \frac{\lg x}{x^3} dx; \\
& 7) \int (x+1) \ln 2x dx; 8) \int (x^2 + 2x) e^x dx; 9) \int x \sin(3x-2) dx.
\end{aligned}$$

Определенный интеграл.

Приложения определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разделим отрезок $[a; b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку c_k и найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n.$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k.$$

В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $y = f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Основные свойства определенного интеграла

$$1) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$$

$$2) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$4) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx;$$

$$5) \int_a^b C \cdot f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx, \text{ где } C - \text{постоянная};$$

$$6) \text{ Если } m \leq f(x) \leq M \text{ на } [a; b], \text{ то } m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

Теорема Ньютона – Лейбница: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Методы вычисления определенных интегралов

1. *Интегрирование по частям:* $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, где $u = u(x)$,

$v = v(x)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[a; b]$.

2. *Замена переменной:* $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$, где $\varphi(t)$ —

монотонная функция, имеющая непрерывную производную на отрезке $[\alpha; \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_1^2 3x^2 dx$, используя формулу

Ньютона — Лейбница.

Решение. $\int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7.$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$, используя формулу

Ньютона — Лейбница.

Решение. Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если $x = 1$, то $t = 0$, если $x = e$, то $t = 1$. Следовательно:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

Пример 9. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} 7^{4x} dx$.

Решение. Сведем данный интеграл к табличному, сделав замену переменной $t = 4x$. Тогда $dt = 4dx$, $dx = \frac{dt}{4}$. Изменяем пределы интегрирования: если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = \frac{1}{4}$, то $t = 1$. Получаем

$$\int_0^{\frac{1}{4}} 7^{4x} dx = \int_0^1 7^t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int_0^1 7^t dt = \frac{7^t}{4 \ln 7} \Big|_0^1 = \frac{1}{4 \ln 7} (7^1 - 7^0) = \frac{3}{2 \ln 7}.$$

Пример 10. Вычислить $\int_{-1}^{-2/3} \frac{dx}{(3x+1)^5}.$

Решение. Интеграл можно свести к табличному, если сделать замену $3x+1=t$. Дифференцируя обе части равенства, получим $3dx=dt$, т.е. $dx=\frac{1}{3}dt$. Интеграл определенный, поэтому необходимо изменить пределы интегрирования: если $x=-1$, то $t=-2$; если $x=-\frac{2}{3}$, то $t=-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-2/3} \frac{dx}{(3x+1)^5} &= \int_{-2}^{-1} \frac{\frac{1}{3}dt}{t^5} = \frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} t^{-5} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{-4}}{-4} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{12} \frac{1}{t^4} \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{(-1)^4} - \frac{1}{(-2)^4} \right) = -\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{16} \right) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{5}{64}. \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} x \sin x dx.$

Решение. Положим $u=x$, $dv=\sin x dx$, тогда $du=dx$, $v=\int \sin x dx = -\cos x$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0 + \sin \pi - \sin 0 = \pi. \end{aligned}$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, ($f(x) \geq 0$)

двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

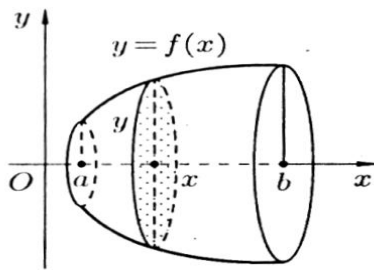


Рис. 16

Вычисление объема тела вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения вычисляется по формуле $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$

(рис. 16).

Вычисление длины дуги плоской кривой. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ – гладкая (т. е. ее производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Вычисление площади поверхности вращения. Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) вращается вокруг оси Ox , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Пример 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$ и $y = x + 1$.

Решение. Построим графики функций, найдем точки их пересечения (рис. 17). Вычислим площадь фигуры, ограниченной данными функциями:

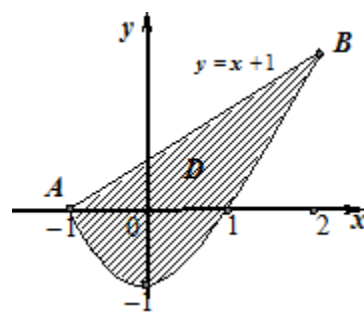


Рис. 17

$$S = \int_{-1}^2 ((x+1) - (x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{29}{3}.$$

Пример 13. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$.

Решение. Сначала рассмотрим фигуру (рис. 18), которая ограничена прямыми $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. При ее вращении вокруг оси Ox получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1 . Рассмотрим фигуру, которая ограничена прямыми $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Если вращать данную фигуру вокруг оси Ox , то получится тоже усеченный конус, только поменьше. Обозначим его объем через V_2 . Разность объемов $V = V_1 - V_2$ — объем искомого тела вращения. Используем стандартную формулу для нахождения объ-

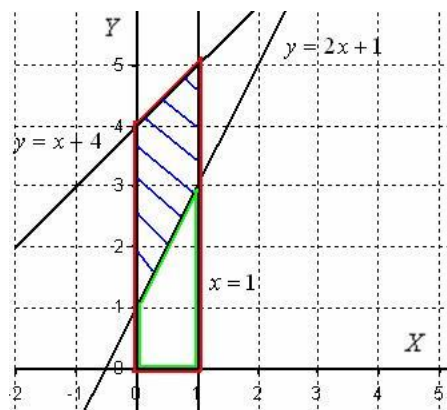


Рис. 18

ема тела вращения: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$. Тогда

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3};$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}.$$

Объем искомого тела вращения вычислим как разность объемов тел:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найдите интегралы:

$$1) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}; \quad 2) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx; \quad 3) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad 5) \int_0^{\pi} \sin 2x dx; \quad 6) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

2. Вычислите определенные интегралы, используя замену переменной:

$$1) \int_2^6 \sqrt{x-2} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}; \quad 3) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2};$$

$$4) \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \quad 5) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx; \quad 6) \int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x} dx;$$

$$7) \int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}; \quad 8) \int_0^2 \frac{4x dx}{(x^2-1)^3}; \quad 9) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Вычислить следующие определенные интегралы интегрированием по частям:

$$1) \int_1^e \ln x dx; \quad 2) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx; \quad 3) \int_1^e x^2 \ln x dx;$$

$$4) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx; \quad 5) \int_1^e \ln^2 x dx.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 2x, y = 2 - x$; 2) $y = x^2 + x, y = 2 + 2x$;

3) $y = -\frac{2}{x}, y = \frac{2}{x} - 1, x = 1$; 4) $y = x^2 + 2x, y = 6 + 3x$;

5) $y = x - \frac{3}{x}, y = \frac{6}{x} - 2, x = 1$; 6) $y = x^2 - 5x, y = 10 - 2x$.

5. Найти объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных данными линиями:

1) $y = x^2, y = \sqrt{x}$; 2) $y = x^2 + x, y = 2 + 2x, x = 0 (x \geq 0)$;

3) $y = 2x - x^2, y = 0$; 4) $y = 0, x = 3, 2x - y - 2 = 0$.

2.5. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков

Понятие дифференциального уравнения первого порядка

Решение различных прикладных задач часто приводит к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой-либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$.

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V , которая также является производной по времени t от перемещения S , т.е. $V = \frac{dS}{dt}$; $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$. Тогда получаем:

$S = S(t) = V_0 t + \frac{S''(t) \cdot t}{2}$. Это уравнение связывает функцию $S(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $S(t)$.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую

функцию и ее производную первого порядка, т.е. это уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (10)$$

Если из уравнения (10) можно выразить производную y' , т.е. привести это уравнение к виду

$$y' = f(x, y), \quad (11)$$

то говорят, что уравнение (10) разрешено относительно производной.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть также записано в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (12)$$

Это так называемая *дифференциальная форма* уравнения первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется *интегрированием*.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, при каких условиях уравнение (11) имеет решение. Эту теорему называют теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (11). Она является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема Коши (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка). Если функция $f(x, y)$:

- 1) непрерывна в некоторой области D плоскости xOy ,
- 2) имеет в этой области непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) из области D , существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0 , принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$.

Задачей Коши называется нахождение частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически задача Коши формулируется так: найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от переменной x и произвольной постоянной C , такая, что:

1) эта функция является решением уравнения при любом допустимом значении постоянной C ;

2) любое решение уравнения может быть получено из этой функции при некотором значении постоянной C .

Всякое решение дифференциального уравнения $y = \varphi(x, C_0)$, которое получается из общего решения при определенном значении постоянной $C = C_0$, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Если при решении дифференциального уравнения (11) получается соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, из которого невозможно выразить переменную y , то считают, что уравнение решено, а полученное соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно имеет вид

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (13)$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$ – непрерывные функции.

Для решения уравнения $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ требуется «разделить в нем переменные». Для этого нужно:

1) заменить производную y' отношением $\frac{dy}{dx}$; тогда (13) запишется в виде $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$;

2) умножить обе части полученного уравнения на dx и разделить на $f_2(y)$ (придем к уравнению $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$, в котором пе-

переменные разделены: переменная x входит только в правую часть, а переменная y – только в левую).

Интегрируя теперь правую и левую части последнего уравнения, получим

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C \text{ – общий интеграл уравнения.}$$

Замечание. При делении дифференциального уравнения на $f_2(y)$ могли быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $f_2(y) = 0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения – так называемые *особые решения* дифференциального уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$.

Решение: 1) заменив производную y' отношением $\frac{dy}{dx}$, получим

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x;$$

2) умножим обе части полученного уравнения на dx :

$$y \cos y dy = -2x dx.$$

Получили уравнение, в котором переменные разделены: переменная x входит только в правую часть, а переменная y – только в левую. Проинтегрируем теперь правую и левую части этого уравнения:

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx.$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям:

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \int dv = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y.$$

Интеграл, стоящий в правой части $-2 \int x dx = -x^2$. Получим

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C \text{ или } y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0.$$

Это общий интеграл исходного дифференциального уравнения, так как искомая функция не выражена через независимую переменную.

Чтобы проверить правильность полученного ответа, продифференцируем его по переменной x :

$$y' \sin y + y y' \cos y - y' \sin y + 2x = 0 \text{ или } y y' = -\frac{2x}{\cos y} - \text{верно.}$$

Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (14)$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные функции, непрерывные на некотором интервале (a, b) . Особенность таких дифференциальных уравнений в том, что функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

При этом, если правая часть уравнения $q(x)$ тождественно равна нулю на интервале (a, b) , то такое уравнение называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением (оно является уравнением с разделяющимися переменными), если правая часть уравнения $q(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то такое уравнение называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($q(x) \neq 0$ на интервале (a, b)) можно применять метод Бернулли.

Этим методом решение уравнения (14) ищется в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции переменной x . Тогда если $y = u \cdot v$, то $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя эти выражения в уравнение (14), получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x)uv = q(x) \text{ или } u' \cdot v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (15)$$

Подберем какую-нибудь функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. найдем какое-нибудь решение уравнения $v' + p(x)v = 0$ – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Подставляя найденную функцию v в уравнение (15) и учитывая, что выражение в скобке равно нулю, получим уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u .

Возвращаясь к переменной y и учитывая, что $y = u \cdot v$, получим решение исходного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как y и y' входят в уравнение в первой степени. Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и исходное уравнение переписывается в виде

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 3uv = e^{2x} \text{ или } u' \cdot v + u \cdot (v' + 3v) = e^{2x}.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим уравнение $v' + 3v = 0$ – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Получим $\frac{dv}{dx} = -3v$ или, разделяя переменные, $\frac{dv}{v} = -3dx$. Проинтегрируем и найдем частное решение этого уравнения при $C = 0$:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 3dx, \ln v = -3x, v = e^{-3x}.$$

Подставим найденную функцию v в уравнение со скобкой и учитывая, что выражение в скобке равно нулю, получим $u' \cdot e^{-3x} = e^{2x}$ или $u' = e^{5x}$. Это опять уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{du}{dx} = e^{5x}, du = e^{5x} dx, \int du = \int e^{5x} dx, u = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения ($y = u v$) имеет вид $y = \left(\frac{1}{5} e^{5x} + C \right) \cdot e^{-3x}$.

Однородные дифференциальные уравнения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n -го порядка* (измерения), если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель $\lambda \neq 0$ вся функция умножится на λ^n , т.е. $f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Например, функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$ является однородной 3-го порядка, так как

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (16)$$

называется *однородным*, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка, т.е. если $f(\lambda x; \lambda y) = f(x, y)$ для любого значения параметра $\lambda \neq 0$. Однородное уравнение всегда можно записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Это уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной $\frac{y}{x} = u$ или что то же самое, $y = u \cdot x$. Найдя общее решение полученного уравнения, следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$.

Однородное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение (17) будет однородным, если $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового порядка. При интегрировании уравнений вида (3.6.8) нет необходимости предварительно приводить их к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Подстановка $\frac{y}{x} = u$ или $y = u \cdot x$ сразу преобразует уравнение (3.6.8) в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию $u = \frac{y}{x}$; $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$.

Подставляя в исходное уравнение $u = \frac{y}{x}$; $y = ux$ и $y' = u'x + u$, получим

$$u'x + u = u(\ln u + 1), \quad u'x + u = u \ln u + u, \quad u'x = u \ln u.$$

Пришли к уравнению с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C|, \quad \ln u = Cx, \quad u = e^{Cx}.$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y , получаем общее решение уравнения $y = xe^{Cx}$.

Определение типа дифференциального уравнения

Для выбора пути решения заданного дифференциального уравнения первого порядка сначала надо определить тип, к которому оно относится. Для этого следует разрешить данное уравнение относительно производной, т.е. привести его к виду

$$y' = f(x, y).$$

После этого надо посмотреть, не разлагается ли функция $f(x, y)$ на множители, один из которых зависит только от x , а второй – только от y . Если это возможно, то перед вами дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Надо разделить переменные и интегрировать обе части получившегося равенства (см. п. 1).

Если переменные не разделились, то следует проверить, не является ли данное уравнение линейным, т.е. не имеет ли правая часть вид

$$f(x, y) = -p(x)y + q(x).$$

Если да, то решение уравнения можно искать в виде $y = uv$ (см. п. 2).

Если же нет, то следует проверить, не является ли функция $f(x, y)$ однородной функцией нулевого измерения. Для этого нужно проверить выполнение равенства $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ при $\lambda \neq 0$. Если равенство выполняется, то уравнение является однородным и решается подстановкой $\frac{y}{x} = u$ (см. п. 3).

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что функция $y = \sqrt{1-x^2}$ является решением дифференциального уравнения $yy' + x = 0$ на промежутке $(-1, 1)$.

2. Найдите общее решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; 2) $\frac{xdx}{1+y} + \frac{ydy}{1+x} = 0$;

3) $xyy' = 1 - x^2$;

4) $y'tgx - y = 3$;

5) $yy' = \frac{1-2x}{y}$;

6) $2xy' + y^2 - 1 = 0$;

7) $xy' + y = y^2$;

8) $yy' + xe^y = 0$;

9) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;

10) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;

11) $y' = 10^{x+y}$;

12) $(1+e^x)yy' = e^x$;

13) $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$;

14) $(1+y^2)dx = -yxdy$.

3. Найдите общие решения линейных дифференциальных уравнений:

1) $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$;

2) $y' + 3xy = 5x$;

3) $xy' + 2xy = x^2$;

4) $y' + y = \cos x$;

5) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

6) $y'\sin x - y\cos x = 1$;

7) $y' + \frac{2y}{x} = -x^2$;

8) $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$.

4. Найдите частные решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям, следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$; 2) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, $y(0) = 0$;

5. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений:

1) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

2) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;

3) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$;

4) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

5) $y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$;

6) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.

Понятие дифференциального уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Основные понятия

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

т.е. это уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные первого и второго порядка.

В случае, если это уравнение можно разрешить относительно производной y'' , получим уравнение вида $y'' = f(x, y, y')$.

Общее решение такого уравнения имеет вид: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Геометрически общее решение представляет собой *семейство интегральных кривых*, т.е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянных C_1, C_2 . Частное решение – это одна из интегральных кривых этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y' = y'(x_0)$.

Для уравнения второго порядка имеет место теорема существования и единственности решения уравнения, аналогичная соответствующей теореме для уравнения первого порядка.

Теорема Коши (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка). Если функция $f(x, y, y')$:

- 1) непрерывна в некоторой области D пространства R^3 ,
- 2) имеет в этой области непрерывные частные производные $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$, то какова бы не была точка (x_0, y_0, y'_0) из области D , существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0 и удовлетворяющее условиям $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (18)$$

где p, q – некоторые постоянные.

По методу Эйлера решение дифференциального уравнения такого вида ищется в виде $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$.

Подставив $y' = ke^{kx}$ и $y'' = k^2 e^{kx}$ в уравнение (18), получим

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \text{ или } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (18).

Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

При решении этого уравнения возможны следующие случаи:

1. Корни k_1, k_2 – действительные и различные ($k_1 \neq k_2$, $D = p^2 - 4q > 0$).

В этом случае общее решение уравнения находится по формуле

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корни k_1, k_2 – действительные и равные ($k_1 = k_2 = k$, $D = p^2 - 4q = 0$).

В этом случае общее решение уравнения находится по формуле

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

3. Корни k_1, k_2 – комплексные ($k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $D = p^2 - 4q < 0$).

В этом случае общее решение уравнения находится по формуле

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Таким образом, нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами сводится к нахождению корней характеристического уравнения и использования соответствующих формул общего решения уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения его общего решения составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ и вычислим его корни:

$$k^2 - 5k + 6 = 0, D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1, \sqrt{D} = 1,$$

тогда $k_1 = \frac{5-1}{2} = 2, k_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Получили корни k_1, k_2 – действительные и различные, тогда общее решение уравнения находится по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ или для нашего случая $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$. Найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0, \sqrt{D} = 0, \text{ тогда } k_1 = k_2 = \frac{6 \pm 0}{2} = 3.$$

Получили корни k_1, k_2 – действительные и равные ($k_1 = k_2 = k$). Тогда общее решение уравнения находится по формуле $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ или для нашего случая $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$.

Пример 6. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 5 = 0$. Найдем его корни:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i,$$

тогда $k_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$, $k_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$. Корни k_1, k_2 – комплексные ($k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$).

В этом случае общее решение уравнения находится по формуле

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

В нашем случае $\alpha = -1$, $\beta = 2$, поэтому общее решение имеет вид $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения:

1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $y'' - 5y' + 6y = 0$;

2) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'' + y = 0$.

2. Найдите общие решения уравнений.

1) $y'' - 7y' + 6y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

2) $y'' + 25y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

3. Найдите решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = -6$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(\pi/6) = 0$; $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$;

4) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

5) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$; $y'(\pi/4) = 1$;

6) $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$; $y'(\ln 2) = 3$;

7) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$;

8) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 0,1$; $y'(0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб. : Лань, 2009. 512 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Физматлит, 2008. 307 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. : Высш. шк., 1980.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. СПб. : Лань, 2014. 224 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие. 12-е изд., стер. СПб. : Лань, 2008
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А. П. Ряпушко. Минск : Высш. шк., 1990. Ч. 1.
7. Шипачев В. С. Высшая математика. М. : Высш. шк., 2002.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Глебова Мария Владимировна,
Никитина Ольга Геннадьевна,
Журавлева Екатерина Геннадьевна

Редактор *В. В. Чувашова*
Технический редактор *Р. Б. Бердникова*
Компьютерная верстка *Р. Б. Бердниковой*
Дизайн обложки *А. А. Стаценко*

Подписано в печать 05.07.2021. Формат 60×84¹/₁₆

Усл. печ. л. 5,93.

Заказ № 303. Тираж 68.

440026, Пенза, Красная, 40. Издательство ПГУ
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru

Вниманию авторов!

Издательство ПГУ выпускает учебную, научную и художественную литературу, презентационную и акцидентную продукцию, а также полноцветные юбилейные и мемориальные издания в соответствии с ГОСТ 7.60–2003.

Издательство ПГУ принимает к изданию рукописи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий **2003 и выше**. Формат – А4, основной шрифт – Times New Roman, 14–16 pt через одинарный интервал (минимальный размер шрифта в таблицах и сносках – 12,5 pt). Тип файла в электронном виде – doc, docx.

Работа должна содержать индекс УДК, аннотацию.

Аннотация (ГОСТ 7.86–2003, ГОСТ 7.9–1995) включает характеристику основной темы, проблемы объекта, цели работы и ее результаты. В аннотации указывают, что нового несет в себе данный документ в сравнении с другими, родственными по тематике и целевому назначению. Аннотация может включать сведения о достоинствах произведения. Текст аннотации начинают фразой, в которой сформулирована главная тема документа. Заканчивается аннотация читательским адресом.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте после ссылки на них (растровые рисунки предоставляются в виде отдельных файлов в формате jpg, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt. Рисунки должны быть доступны для правки!). Рисунки должны сопровождаться подрисуночными подписями, на все рисунки и таблицы в тексте должны быть ссылки.

Формулы в тексте выполняются только в редакторе формул **MathType версия 5.0** и выше. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц – прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования необходимо соблюдать и в рисунках.

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. Требования к оформлению списка литературы на русские и иностранные источники (ГОСТ Р 7.0.5–2008): для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, контактные телефоны.

Контакты Издательства ПГУ: т.: (8412) 66-60-49, 66-67-77, e-mail: iic@pnzgu.ru

