

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ПРИЛОЖЕНИЯХ НАУЧНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Ю.Н.Косников

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

Аннотация. Приведен анализ методов математического моделирования криволинейных объектов визуализации с применением смешивающих функций. Рассмотрены возможности интерполяции, основанной на использовании сплайнов Кэтмулла-Рома и линейных базисных функций предложенного вида.

Ключевые слова: интерполяция, модель, кривая, сплайн, смешивающая функция, визуализация.

Введение. Криволинейные объекты в научной визуализации

В настоящее время активно развиваются трехмерные интерфейсы научной визуализации [1,2]. В то же время существуют задачи визуализации, решением которых являются линии различной геометрии. В качестве примеров можно назвать силовые линии физических полей, турбулентные потоки жидкости, линии одинаковых значений различных физических величин (изолинии), границы выделенных областей, границы сечений пространственных объектов. В виде кривых представляются и результаты визуализации динамики объектов, как на плоскости, так и в пространстве (траектории). Кривые задаются в декартовом пространстве своими характерными (опорными) точками, которые являются результатом вычислений или замеров, указываются разработчиками. Для визуального представления по набору опорных точек находятся промежуточные точки. Средствами компьютерной графики они соединяются прямолинейными отрезками (векторами), образуя сплошные линии. От количества и размера векторов зависят качество изображения и его точность. Для повышения точности отображения перед векторизацией проводится построение модели криволинейного объекта интерполяционным методом. Интерполяция позволяет увеличить количество векторных участков. Узлами интерполяции являются опорные точки. При выборе метода интерполяции основными требованиями являются точное прохождение интерполянта через опорные точки и сохранение топологической тенденции отображаемой линии. Под топологической тенденцией понимается соответствие формы отображаемых кривых форме моделируемого объекта или представлением о ней разработчика. Еще одним требованием является возможность применения быстрых алгоритмов интерполяции, что связано с двумя причинами. Во-первых, наблюдатель может произвольно менять ракурс наблюдения объектов визуализации, что требует обработки множества опорных точек в режиме реального времени (РВ). Во-вторых, основные вычислительные ресурсы в системах научной визуализации используются для решения задач моделирования и вычисления параметров исследуемых объектов, в связи с чем затраты ресурсов на собственно визуализацию следует по возможности сокращать.

1. Параметризация интерполяции криволинейных объектов

Информационным полем систем научной визуализации обычно является экран монитора, привязанный к декартовой прямоугольной системе координат наблюдателя. Опорные точки могут располагаться в пространстве самым различным образом, в связи с чем интерполянт в декартовой системе координат, зачастую, характеризуется многозначностью, что не годится для визуализации. Для объектов научных исследований обычно известна последовательность опорных точек: последовательность отсчетов физической величины на изолиниях, последовательность моментов определения положения объекта на траектории. Тогда однозначность интерполянта может быть достигнута рациональным выбором системы

координат интерполяционной модели. Используются различные формы параметрического описания интерполянта, который в самом общем виде выглядит следующим образом:

$$c = f(t), \quad t = t_{min} \dots t_{max},$$

где c – текущее значение интерполируемой координаты (значение координаты x, y, z текущей точки кривой);

t – параметр, представляющий собой временные или пространственные шаги по кривой;

t_{min}, t_{max} – граничные значения параметра.

Последовательность опорных точек сопоставляется с последовательными значениями параметра, чем вводится одномерная сетка, узлы которой равномерно расставлены в пространстве параметра. Она является основой для сеточной интерполяции кривой.

В связи с тем, что количество опорных точек может быть весьма велико, построение кривой следует проводить по сегментам, а для отслеживания траектории в режиме РВ этот подход является единственно возможным. Такой подход в сочетании со сформулированными ранее требованиями определяет выбор метода интерполяции – метода на основе применения смешивающих функций (СФ) [3].

2. Интерполяция кривых с применением смешивающих функций

Обобщенное описание интерполянта с применением СФ имеет вид

$$c = \sum_{i=1}^N m_{ci} C_i b f(r_{ti}), \quad (1)$$

где c – текущее значение интерполируемой координаты ($c=x, y, z$);

C_i – значение интерполируемой координаты в i -ом узле интерполяции ($C_i=x_i, y_i, z_i$);

m_{ci} – масштабный коэффициент влияния i -го узла интерполяции на значение c ;

N – число узлов интерполяции;

$b f(r_{ti})$ – значение СФ, сопоставленной i -му узлу интерполяции;

r_{ti} – расстояние по параметру t от текущей точки кривой до i -го узла интерполяции:

$$r_{ti} = (t - t_i) / R_t;$$

t_i – параметрическая координата i -го узла интерполяции;

R_t – расстояние по параметру t между начальным (его координата t_{min}) и конечным (t_{max}) узлами интерполяции.

Известно множество смешивающих функций, позволяющих получить интерполяцию с различными свойствами. Кусочно-линейная интерполяция проста, но не позволяет сформировать криволинейные участки. Интерполяция по методу обратно взвешенных расстояний также проста, но не позволяет получить текущие значения интерполянта, превышающие координаты его узлов, что нарушает топологическую тенденцию кривой. Хорошими интерполяционными свойствами обладают радиальные базисные функции (РБФ), например, гауссиан (gaussian), инверсный квадратик (inverse quadratic), инверсный мультиквадрик (inverse multiquadric). Однако они имеют в своем составе вычислительно-емкие тригонометрические, экспоненциальные, логарифмические, дробные функции, а интерполяционное выражение традиционно строится на всем множестве опорных точек и при добавлении или изменении хотя бы одной точки пересчитывается полностью. В этом случае обеспечение визуализации в режиме РВ является проблематичным [3, 4]. В отличие от РБФ интерполянты на основе сплайнов могут вычисляться на конечных интервалах, отображаемая кривая в этом случае строится из последовательности отсеков.

3. Сплайновые модели криволинейных объектов

Универсальным инструментом интерполяции является базовый сплайн (В-сплайн). При добавлении очередной опорной точки формируется очередной отсек В-сплайновой кривой, который «автоматически», то есть без дополнительных условий или действий гладко

сопрягается с предыдущим, в том числе по кривизне. При изменении одной опорной точки В-сплайна пересчитывать приходится не всю кривую, а лишь четыре ее отсека. Однако В-сплайновая кривая в общем случае не проходит ни через одну опорную точку, а лишь приближается к ним. Чтобы обеспечить точное прохождение через опорные точки, нужно строить кривую по новым опорным точкам, которые следует находить по довольно громоздким алгоритмам [5].

Точное прохождение через опорные точки обеспечивает сплайн Безье [6,7]. К тому же он позволяет «наращивать» кривую по отсечкам. Однако и он не свободен от недостатков. Их легко показать на примере плоского сплайна. Отсек Безье на плоскости задается четырьмя опорными точками, из которых две крайние точки P_1, P_2 принадлежат концам отсека. Это две соседние исходные опорные точки (два соседних узла интерполяции). Две средние точки отсека Q_1, Q_2 лежат на касательных, проведенных через крайние точки, и задают изгибы концов отсека. Описание отсека в параметрической форме имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^3 x_{P_1} + 3t(1-t)^2 x_{Q_1} + 3t^2(1-t) x_{Q_2} + t^3 x_{P_2}, \\ y(t) &= (1-t)^3 y_{P_1} + 3t(1-t)^2 y_{Q_1} + 3t^2(1-t) y_{Q_2} + t^3 y_{P_2}. \end{aligned}$$

Координаты $x_{P_1}, y_{P_1}, x_{P_2}, y_{P_2}$ известны, а координаты $x_{Q_1}, y_{Q_1}, x_{Q_2}, y_{Q_2}$ требуется найти. Они входят в выражения производных dy/dx , задающих углы наклона касательных в крайних точках отсека (для $t=0$ и $t=1$):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(t=0) &= \frac{\frac{dy}{dt}(t=0)}{\frac{dx}{dt}(t=0)} = \frac{3(y_{Q_1}-y_{P_1})}{3(x_{Q_1}-x_{P_1})}, \\ \frac{dy}{dx}(t=1) &= \frac{\frac{dy}{dt}(t=1)}{\frac{dx}{dt}(t=1)} = \frac{3(y_{P_2}-y_{Q_2})}{3(x_{P_2}-x_{Q_2})}. \end{aligned}$$

Пользуясь рекомендациями [8], направления (углы наклона) касательных, проведенных через крайние точки отсека P_1, P_2 , можно определить из координат предыдущих и последующих точек: P_0 и P_2 для P_1 , P_1 и P_3 для P_2 . Тогда возникают два уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{(y_{Q_1}-y_{P_1})}{(x_{Q_1}-x_{P_1})} &= \frac{(y_{P_2}-y_{P_0})}{(x_{P_2}-x_{P_0})}, \\ \frac{(y_{P_2}-y_{Q_2})}{(x_{P_2}-x_{Q_2})} &= \frac{(y_{P_3}-y_{P_1})}{(x_{P_3}-x_{P_1})} \end{aligned}$$

и для нахождения точек Q_1, Q_2 на касательных нужны дополнительные условия. Для кривой, которая еще не построена, эти условия могут быть заданы только на основе некоторых предположений разработчика. Применение таких условий усложняет алгоритм интерполяции.

От описанного недостатка свободен сплайн Кэтмулла-Рома (Catmull-Rom) [9]. Он также задается четырьмя опорными точками и в матричной форме имеет математическое описание следующего вида:

$$c = \frac{1}{2} T \cdot M \cdot C = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\dot{c} = \frac{1}{2} DT \cdot M \cdot C = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где обозначения соответствуют выражению (1), а значение параметра t изменяется в диапазоне от 0 до 1. Чтобы увидеть свойства этого сплайна, нужно задать крайние значения параметра t в выражения (2),(3):

$$\begin{aligned} c(t=0) &= C_2, & c(t=1) &= C_3, \\ \dot{c}(t=0) &= \frac{1}{2}(C_3 - C_1), & \dot{c}(t=1) &= \frac{1}{2}(C_4 - C_2). \end{aligned}$$

Легко видеть, что отсек сплайна расположен между двумя средними опорными точками и проходит через них, а изгибы отсека (значения производных) в его концевых точках определяются только опорными точками этого отсека. При добавлении новой опорной точки следующий отсек сплайна строится также на четырех опорных точках, в которые входит новая и три предыдущие «старые» опорные точки. Благодаря этому, следующий отсек «автоматически» гладко сопрягается с предыдущим. При изменении любой опорной точки пересчитать придется положение четырех отсеков, а не всей кривой. Еще одним достоинством сплайна Кэтмулла-Рома является возможность вычислять его точки с помощью быстрых алгоритмов. Переведа выражение (2) в координатную форму и сгруппировав его члены по степеням параметра t , получим

$$c = \frac{1}{2}((-C_1 + 3C_2 - 3C_3 + C_4)t^3 + (2C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4)t^2 + (-C_1 + C_3)t + 2C_2),$$

или после ввода очевидных обозначений

$$c = \frac{1}{2}(A_c t^3 + B_c t^2 + C_c t + D_c).$$

Промежуточные точки кривой находятся последовательно, поэтому полученный кубический полином можно вычислять по приращениям методом конечных разностей [10]:

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= c_i + \Delta c_i, & c_0 &= D_c/2, \\ \Delta c_{i+1} &= \Delta c_i + \Delta^2 c_i, & \Delta c_0 &= (A_c \delta_t^3 + B_c \delta_t^2 + C_c \delta_t)/2, \\ \Delta^2 c_{i+1} &= \Delta^2 c_i + \Delta^3 c, & \Delta^2 c_0 &= (3A_c \delta_t^3 + B_c \delta_t^2), \\ \Delta^3 c &= 3A_c \delta_t^3 = \text{const}, \end{aligned}$$

где Δc , $\Delta^2 c$, $\Delta^3 c$ – конечные разности функции-интерполянта первого, второго и третьего порядка;

δ_t – шаг приращения по параметру t .

Таким образом, очередное значение сплайн-функции находится за три операции суммирования.

4. Формирование кривых с применением модифицированных радиальных базисных функций

Альтернативным решением при моделировании криволинейных объектов является применение модифицированных РБФ. Ранее отмечалось, что РБФ-интерполянт определяется на всем множестве заданных опорных точек. Для снижения вычислительных затрат на моделирование геометрического объекта его нужно разбить на отсеки, каждый из которых задается небольшим количеством опорных точек. Тогда каждый отсек становится самостоятельным объектом, и возникает задача его гладкой стыковки с соседними отсеками. Для решения этой задачи можно использовать метод переноса опорных точек [11]. Он заключается в том, что в описание очередного отсека вводятся опорные точки предыдущего

и последующего отсеков, а визуализируется только сам очередной отсек. Так поступают со всеми отсеками.

Применительно к моделированию кривых минимальным вариантом будет отсек, заданный четырьмя опорными точками: двумя граничными точками отсека, одной точкой, принадлежащей предыдущему отсеку, и одной точкой, принадлежащей последующему отсеку. Функции радиального базиса названы так потому, что их влияние распространяется от ядер во все стороны, то есть по радиусам воображаемой сферы. В рассматриваемом случае СФ действуют вдоль кривой линии, являются функциями одной переменной – параметра t и условно могут быть названы линейными базисными функциями (ЛБФ).

Рационально применять ЛБФ, имеющие максимум в узлах интерполяции и спадающие при удалении от узлов. Для возможности вычисления их значений быстрыми алгоритмами эти СФ должны быть степенными полиномами невысокой степени. Можно предложить ЛБФ следующего вида

$$bf(r_{ti}) = \begin{cases} (r_{ti}^2 - 1)^2 & \text{при } r_{ti} < R_t, \\ 0 & \text{при } r_{ti} \geq R_t, \end{cases} \quad (4)$$

где обозначения соответствуют принятым в выражении (1). Применение ЛБФ вида (4) дает интерполянт, совпадающий по форме с выражением (1) с учетом обозначения $m_{ci}C_i = \lambda_{ci}$:

$$c = \sum_{i=1}^4 \lambda_{ci} \left(\left(\frac{t-t_i}{R_t} \right)^2 - 1 \right)^2, \quad t = t_{min} \dots t_{max}, \quad (5)$$

где λ_{ci} – коэффициент влияния i -го ядра ЛБФ на текущую точку кривой по координате c . Коэффициенты λ_{ci} находятся из условия точного прохождения интерполянта через узлы интерполяции. Это система из четырех уравнений вида

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_{ci} \left(\left(\frac{t_j-t_i}{R_t} \right)^2 - 1 \right)^2 = C_j,$$

где j – номер узла интерполяции, для которого записывается условие, $j=1 \dots 4$.

Удобно выбирать $t_1 = t_{min} = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = t_{max} = 3$ и $R_t = 3$. Тогда значения ЛБФ для всех сочетаний t_i и t_j для любого отсека соответствуют данным таблицы 1.

Таблица 1 – Значения смешивающих функций (4), определенные из условия точного прохождения интерполянта (5) через узлы интерполяции

j	i			
	1	2	3	4
1	1	64/81	25/81	0
2	64/81	1	64/81	25/81
3	25/81	64/81	1	64/81
4	0	25/81	64/81	1

Зная координаты опорных точек кривой, можно найти коэффициенты λ_{ci} матричным методом, например, методом Крамера, который хорошо алгоритмируется. Полученный интерполянт (5) визуализируется в интервале значений параметра $t=1..2$, что дает на поле вывода очередной отсек кривой. После раскрытия скобок и перегруппировки членов интерполянт (5) представляется в форме полинома четвертой степени и вычисляется методом конечных разностей за 4 операции суммирования.

Для сравнения на рисунке 1 показаны кривые, составленные из трех отсеков сплайна Кэтмулла-Рома (рис.1,а) и интерполянта (5) на основе ЛБФ (рис.1,б). Изображения получены средствами свободно распространяемой программы 3D Grapher. В качестве узлов

интерполяции взяты одни и те же опорные точки $P_1, \dots, P_6$, отмеченные на рисунке. Выбрано сочетание опорных точек, задающие и прямолинейные, и криволинейные участки.

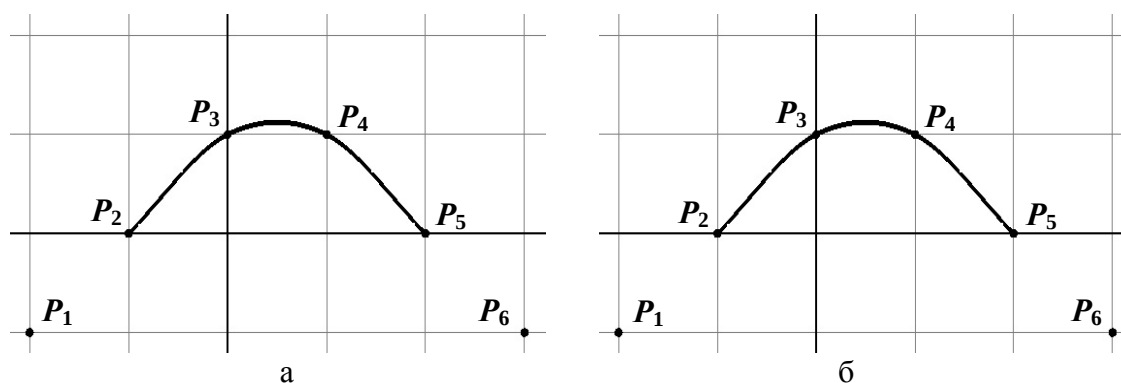
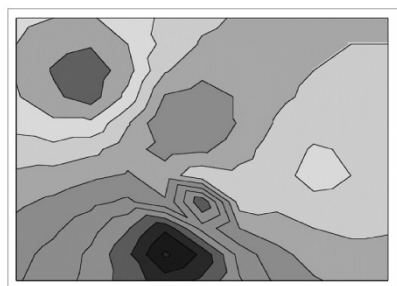


Рисунок 1 – Результаты интерполяции кривой сплайном Кэтмулла-Рома (а) и на основе линейных базисных функций (б)

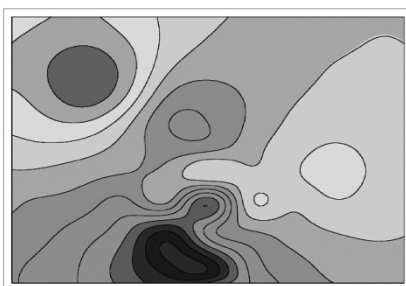
Визуальный анализ показывает точное прохождение через опорные точки и гладкость обеих кривых. Количественный анализ показывает более высокую гладкость кривой Кэтмулла-Рома. Это объясняется тем, что соседние отсеки этой кривой имеют в точке стыковки касательные, точно совпадающие по направлению без методической погрешности. Напротив, соседние отсеки кривой на основе ЛБФ-интерполяции принципиально строятся на наборах из четырех опорных точек, три из которых – общие для обоих отсеков, а одна – своя для каждого отсека. В итоге уравнения производных функции-интерполянта в точке стыковки отсеков имеют различие. При переходе через точку стыковки первая производная интерполянта терпит разрыв. Однако, как показывает рис.1, эта аномалия незначительна и не является препятствием для практического применения описанного способа.

Заключение. Подведение итогов исследования

Применение интерполяции значительно улучшает внешний вид изображений, что иллюстрирует рисунок 2,а,б. Применение СФ для отображения траектории подвижного объекта показано на рисунке 2,в (изображение получено аспирантом Хоанг Т.Х.).

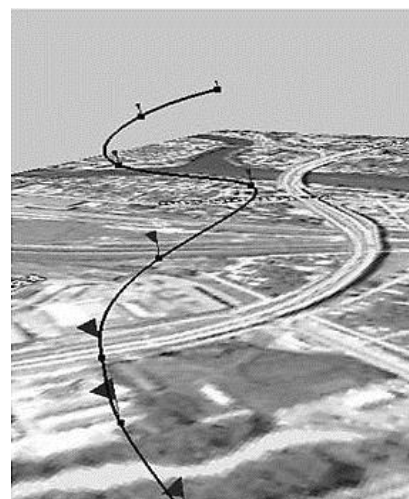


а



б

Рисунок 2 – Результаты кусочно-линейной (а) и сплайновой (б) интерполяции изолиний, траектория подвижного объекта, построенная с применением смешивающих функций (в)



в

Анализ интерполяционных моделей криволинейных объектов научной визуализации показывает, что условиям отображения в большей мере отвечают сплайновые кривые, в частности, сплайны Кэтмулла-Рома. Они обеспечивают точное прохождение кривой через опорные точки и непрерывность первой производной интерполянта. Хорошими

интерполирующими свойствами обладают кривые на основе ЛБФ. Аномалии непрерывности первой производной интерполянта в точках стыковки сегментов у них весьма незначительная. Два указанных способа интерполяции позволяют применять быстрые вычислительные алгоритмы на основе метода конечных разностей.

При отображении траекторий движения динамических объектов оба способа дают задержки на один шаг по параметру t , что для объектов, имеющих высокие скорости перемещения и высокую детальность отображения, заставляет определять местоположение с более высокой частотой. Другим выходом является экстраполяция траектории на один шаг вперед. Лучшими экстраполяционными возможностями из двух описанных способов обладают ЛБФ.

Библиографический список

1. Алешин, А. Актуальные информационные технологии: визуализация информации, виртуальное окружение, неогеография, осязаемые изображения // А. Алешин, В. Афанасьев, П. Брусенцев, Е. Ерёмченко, А. Клименко, С. Клименко, И. Никитин, Л. Никитина, В. Пестриков, А. Сурин, О. Сурина. – Научная визуализация. – 2013. – Том 5. – № 4. – С. 1-17. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sv-journal.com/index.php?lang=ru> (дата обращения 15.03.2019).
2. Косников Ю.Н. Построение интерфейса человек-компьютер для системы автоматизированного управления сложными объектами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2014. – № 4. – С.82 – 92.
3. Александрова, Н.В. Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм / Н.В.Александрова, А.П.Зимин, Ю.Н.Косников, Т.Х.Хоанг // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ. – 2015 – №03(25). – Т.1. – С. 51 – 60.
4. Косников, Ю.Н. Развитие аппарата смешивающих функций в компьютерной графике // Педагогическая информатика. – 2005. – №3. – С.26–35.
5. Косников, Ю.Н., Хоанг, Т.Х. Сплайн-интерполяция траектории движения динамического объекта // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информатика, вычислительная техника и управление. – Пенза: Изд-во ПГТУ. – 2016. – №03(31). – С. 195 – 202.
6. Шикин, Е.В., Плис, А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. – 240 с.
7. Косников, Ю.Н., Александрова, Н.В. О применении геометрических форм в вычислительных системах графического назначения // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ. – 2013. – №10(14). – С.124 – 130.
8. Фокс, А., Пратт, М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
9. Catmull, E., Rom, R. A Class of Local Interpolating Splines // Computer Aided Geometric Design / R.E. Barnhill and R.F. Reisenfeld, Editors, Academic Press. – NY, 1974. – pp. 317–326.
10. Косников, Ю.Н. Применение бикубических сплайнов в графических системах реального времени // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2005 – №4(9). – С.30 – 36.
11. Косников, Ю.Н. Геометрическое моделирование в графических системах реального времени. – Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского государственного университета, 2006. – 218 с.