

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем
(МКМ-2025)

Сборник статей по материалам XIX Всероссийской с международным
участием научно-технической конференции молодых специалистов,
аспирантов и студентов

Россия, г. Пенза, 4–6 июня 2025 г.

Под редакцией кандидата физико-математических наук, доцента А. Н.
Тынды

**Mathematical and Computer Modelling
of Natural Science and Social Problems (MCM-2025)**

Proceedings of the Eighteen Russian Conference with international participation

Penza, Russian Federation, 4–6 June, 2025

Edited by A. N. Tynda

Пенза • Издательство ПГУ • 2025

УДК 51
ББК 22.1

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. по материалам XIX Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ–2025)» с конкурсом научно-исследовательских работ обучающихся.

Отражены основные результаты работы XIX Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем», охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, медицины, демографии, социальных наук; математические модели в физике и технологиях; нейроматематика и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

Программный комитет

А.Н. Тында, к.ф.-м.н., доцент (ПГУ, г. Пенза) – *председатель*;

Р.В. Жалнин, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. Н.П. Огарева, г. Саранск) – *заместитель председателя*;

Д. В. Артамонов, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);

А.А. Вартанов (генеральный директор НТП «Криптософт», г. Пенза)

В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);

И.М. Губайдуллин, д.ф.-м.н., профессор (ИНК УФИЦ РАН, г. Уфа);

В.Д. Кревчик, д.ф.-м.н., профессор (ПГУ, г. Пенза);

П.П. Макарычев, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза);

П.С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург);

Д.Н. Сидоров, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН, (Байкальский институт БРИКС, ИрНИТУ, г. Иркутск);

Н.А. Сидоров, д.ф.-м.н., профессор (ИГУ, г. Иркутск);

Ю.Г. Смирнов, д.ф.-м.н., профессор (ПГУ, г. Пенза);

Л.А. Сухарев, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. Н.П. Огарева, г. Саранск);

А.В. Филиппов, к.т.н., доцент (начальник лаборатории квантовой оптики АО НПП «Цифровые решения»);

Л.Р. Фионова, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза));

Е.В. Чистякова, к.ф.-м.н., доцент (ИДСиТУ имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск));

М.А. Щербаков, д.т.н., профессор (ПГУ, г. Пенза));

Е.В. Яницкий (Российский исследовательский институт Huawei, г. Москва).

О т в е т с т в е н н ы й с е к р е т а р ь к о н ф е р е н ц и и

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия)

П р и к а з

о подготовке и проведении XIX Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ–2025)» с конкурсом научно-исследовательских работ обучающихся № 0250/о от 03.03.2025

Оглавление

1. Уравнения математической физики	8
Нестеров В.О., Цупак А.А. Решение скалярной задачи дифракции акустической волны на плоском экране со специальными условиями сопряжения	8
Тихов С.В. Метод логарифмических интегральных уравнений в задаче дифракции ТМ-волн на плоском слое, покрытом графеном.....	13
Тихов С.В., Дюньдяева А.А. Нестандартный метод возмущений в задаче о распространении нелинейных связанных ТЕ-ТЕ волн	19
Галиакберов Р.Р. Периодические решения линейных дифференциальных уравнений с дискретным параметром.....	25
Скворцов О.С. Поиск резонансов однородного шара, покрытого графеном	30
Кондырев О.В. Численный метод решения задачи электромагнитной дифракции на сфере с графеновым слоем.....	35
Кудряшова Н.Ю., Темникова А.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.....	41
Кудряшова Н.Ю., Антонова П.М. Метод граничных элементов для решения дифференциальных уравнений гиперболического типа.....	47
2. Теория приближения и кубатурные формулы	54
Черушева Т.В., Саликов И.С., Ларин А.А. Интерполяция функции двух независимых переменных	54
Гущин В.А. Рациональная аппроксимация аналитических функций	61
Галат А.Р. Применение кривых Бернштейна-Безье в теории приближения.....	70
Катышева О.В. Приближение функций отрезками рядов по ортогональным многочленам Чебышёва.....	76
Политова А.С. Использование В-сплайнов в задачах аппроксимации. ..	83
Крымова Е.А. Аппроксимация недифференцируемых функций.....	90
3. Численные методы	98
Грунина Т.В., Нестеров Д.Г. Численные методы решения однородных уравнений параболического типа в областях с подвижными границами. ..	98
Паткин Т. С. Особенности применения итерационного метода Зейделя для решения систем линейных уравнений.....	102
Бянкин В.Е. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения нагруженных интегральных уравнений Вольтерра.....	109
Симакова Е.А., Тында А.Н. Применение метода коллокации при решении задач с рядами Вольтерра с использованием интерполяционных многочленов Лагранжа.....	116
Лапкин В.В. Использование технологий параллельного программирования при решении задач вычислительной математики...	121

Шорикова Д.В., Тарасов Д.В. Решение плоскопараллельных задач теплопередачи	125
Кудряшова Н.Ю., Козлов Д.С. О некоторых итерационных методах решения систем линейных алгебраических уравнений	131
4. Математические модели экономики, медицины, демографии, социальных наук	136
Гринцов М.И., Гринцова В.М. Астрофизика в моделировании традиционных обычаев репродуктивного поведения населения	136
Скибицкая Н.Ю., Хохлов Е.С. Оценка влияния параметров ссылочной массы сайта на позиции в поисковой выдаче с использованием статистического моделирования	147
Бузин В.А., Мамедова Т.Ф. Оптимизация инвестиций при ограниченном бюджете	154
Вычугжанин М.В. Регистрация разнородной диагностической информации на мобильной исследовательской платформе	158
Буданов К.М. Выбор параметров для анализа статистической значимости диагностических признаков при обработке сигналов ЭКГ .	162
Бастрыгин И.Р., Самуйлова С.В. Применение теории вероятностей к решению некоторых экономических задач	167
Яковлева А.Д., Черушева Т.В. Крупные инвестиционные проекты Пензенской области: важность и необходимость.....	172
Аюпова А.С., Мойко Н.В. Фрактальный анализ для прогнозирования рыночных трендов	179
5. Математические модели в физике и технологиях.....	184
Бедин З.Р., Барсукова О.Ю. Применение математического моделирования в дизайне плавательных костюмов	184
Мартыненко И.А., Черушева Т.В. Применение метода сжимающих отображений для описания некоторых физических моделей.	189
Вельмисов П.А., Абрашкин П.М., Анкилов Г.А., Ликанин А.В. Математическое моделирование динамики трубопроводных систем с учетом запаздывания реакции и демпфирования вязкоупругих связей.	194
Кутыркина М.А., Мамедова Т.Ф. Анализ результатов медицинских экспериментов с использованием критерия Манна-Уитни.....	200
Сайфетдинов С.Ф., Мамедова Т.Ф. Исследование развития сердечно-сосудистых заболеваний на территории Российской Федерации.....	205
Абубекеров Д.Р. Геометрический примитив для интерполяции	210
и визуализации плоских контуров свободных форм	210
Черный В.В., Капранов С.В. Сила Максвелла в расталкивании диамагнитных кусков льда и магнитная анизотропная аккреция в происхождении видимых плотных колец Сатурна	216
Самылкина Е.Н., Мамедова Т.Ф. Моделирование исследования нейронной активности головного мозга.....	224

Рябов Д.П., Буданов К.М. Решение прямой задачи для уравнения Коула-Коула в среде SCILAB.....	228
Першенков П.П., Грозная Е.В. Алгоритмы измерения СВЗС	232
Макеева Г.С. Метод нелинейных автономных блоков с каналами Флоке в моделировании нелинейных СВЧ-устройств с распределенным взаимодействием.....	238
Макеева Г.С. Электродинамическое моделирование взаимодействия электромагнитных волн с нелинейным распределенным полупроводниковым включением в полосково-щелевой структуре.....	247
Макеева Г.С. Математическое моделирование дифракции электромагнитных волн на нелинейной гиромангнитной неоднородности в волноведущей структуре.....	255
Артамонов Д.В., Литвинов А.Н., Акимов А.А. Динамика замкнутых контактных систем вакуумных высокочастотных коммутирующих устройств	262
Литвинов А.Н. Моделирование динамических характеристик плат электронных блоков, залитых полимерными компаундами	268
6. Нейроматематика и нейрокомпьютеры.....	273
Майоров А.О., Горбаченко В.И. Реализация в PyTorch физически-информированной нейронной сети радиальных базисных функций	273
Целаев Д.О., Романова Е.Г. Оценка качества открытых больших языковых моделей (LLM).....	280
Усачев М.А. Математические модели искусственного интеллекта в задаче идентификации представителей фауны по акустической информации.	287
7. Информационные технологии в образовании	292
Касимова К.Д. Применение средств Maple при изучении некоторых разделов математического анализа	292
Волинский А.Д., Тарасов Д.В. Анализ эффективности параллельных алгоритмов сортировки данных	299
Иванов Д.С., Романова Е.Г. Визуализация алгебраических объектов в образовательном процессе	306
Михайлов С.Л. Трисекция и пяти-секция угла прямым и точным построением циркулем и линейкой без делений	311
Сазыкина П.А., Романова Е.Г. Ортогональные операторы и их матрицы.....	316
Шлыков А.А. Программное обеспечение для модуляции сигнала ЭКГ	321
Мойко И.М., Купряшина Л.А., Шорикова Д.В. Блокчейн в образовании: прозрачность и честность как новые ценности.....	325
Мойко И.М., Мойко Н.В., Аюпова А.С. Цифровая культура и этика: как воспитывать ответственность у будущих IT-математиков.....	330
Надеева Я.И., Тарасов Д.В. Программная реализация процесса ортогонализации векторов	335

Купряшина Л.А., Бельдягина Е.Ю., Зверовщикова Н.В.	
Особенности изучения раздела «интегральное исчисление» студентами непрофильных специальностей с использованием рабочих тетрадей (на примере специальности «медицинская кибернетика»).....	343
Айкашев П.В., Зверовщикова Н.В., Купряшина Л.А., Черушева Т.В.	
Реализация принципа профессиональной направленности обучения математике студентов направления «Электроэнергетика и электротехника»	352
Наземнова Н.В.	
Аналогия как метод формирования образа при повторении темы производных и первообразных.....	361

1. Уравнения математической физики

УДК 517.968

РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Нестеров Владислав Олегович¹, Цупак Алексей Александрович²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹

nesterovvlad0_o@mail.ru

²

altsupak@yandex.ru

Аннотация. Разработан и программно реализован численный метод (коллокаций) для решения скалярной задачи дифракции на плоском экране со специальными условиями сопряжения.

Ключевые слова: задача дифракции, нелинейное интегральное уравнение, метод коллокации, итерационный метод.

SOLUTION OF THE SCALAR PROBLEM OF ACOUSTIC WAVE SCATTERING FROM A FLAT SCREEN WITH SPECIAL TRANSMISSION CONDITIONS

Nesterov Vladislav Olegovich¹, Tsupak Alexey Alexandrovich²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹

nesterovvlad0_o@mail.ru

²

altsupak@yandex.ru

Постановка задачи дифракции

Рассмотрим плоский экран $S = \{(x_1, x_2, 0) : a_i < x_i < b_i\}$ в однородном непоглощающем пространстве $\mathbb{R}^3$ с волновым числом $k_0 > 0$. Экран обладает конечной проводимостью σ ,

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 |u(x)|^2, \quad (1)$$

где $u(x)$ – комплексная амплитуда полного поля.

Пусть падающая волна описывается функцией

$$u_0(x) = e^{ik_0(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Требуется найти решение следующей задачи:

$$\Delta u(x) + k_0^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}, \quad (2)$$

$$[u]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_S = \sigma u|_S, \quad (3)$$

$$u_s(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_0 u_s + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Задача (1)-(4) может быть сведена методами теории потенциала [1,2] к интегральному уравнению по поверхности экрана

$$u(x) - \sigma_1 \int_S G(x, y) u(y) ds_y - \sigma_2 \int_S G(x, y) |u(y)|^2 u(y) ds_y = u_0(x), \quad x \in S. \quad (5)$$

При этом полное поле вне экрана может быть определено по формуле

$$u(x) = \int_S G(x, y) u(y) \sigma(y) ds_y + u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}.$$

Метод коллокаций для решения нелинейного интегрального уравнения

На экране $S = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ введем равномерную сетку и конечные элементы, определенные через число разбиений $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{k,i_k} = a_k + i_k h_k, \quad h_k = \frac{b_k - a_k}{n}, \quad k=1,2, \quad i_k = 0, \dots, n.$$

$$S_i := S_{i_1, i_2} = [x_{1,i_1}; x_{1,i_1+1}] \times [x_{2,i_2}; x_{2,i_2+1}], \quad i_1, i_2 = \overline{0, n-1}.$$

Здесь i номера конечных элементов при их одноиндексной нумерации. В качестве базисных функций будем использовать финитные кусочно-постоянные функции

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_i, \\ 0, & x \in S \setminus S_i, \end{cases}$$

а в качестве узлов коллокации ξ_i – центры областей S_i .

Приближенные решения запишем согласно методу коллокаций [3] в виде

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_j(x) \quad (N = n^2).$$

Тогда неизвестные коэффициенты можно найти из системы нелинейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \left[c_j \chi_j(\xi_i) - (\sigma_1 + \sigma_2 |c_j|^2) c_j \int_{S_j} G(\xi_i, y) ds_y \right] = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Введя обозначение $\int_{S_j} G(\xi_i, y) = A_{ij}$, получим краткий вид системы (7):

$$\sum_{j=1}^N \left[c_i - (\sigma_1 c_j + \sigma_2 |c_j|^2 c_j) A_{ij} \right] = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Для приближенного решения системы (8) будем использовать итерационный процесс

$$c_{i,m+1} = \sum_{j=1}^N (\sigma_1 c_{j,m} - \sigma_2 |c_{j,m}|^2 c_{j,m}) A_{ij} + u_0(\xi_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Здесь $c_{j,m}$ – j -я компонента m -го приближения.

Результаты численного решения задачи дифракции

Исследуем внутреннюю сходимость метода коллокаций при следующих предположениях:

$$S = [0;1]^2, k_0 = 3, \sigma_1 = 0.3 + 0.6i, \sigma_2 = 0.1 + 0.2i, u_0(x) = e^{ik_0(0.6x_3 - 0.8x_1)}.$$

На рисунке 1 показаны графики $|u_n(x)|$ для нескольких значений n .

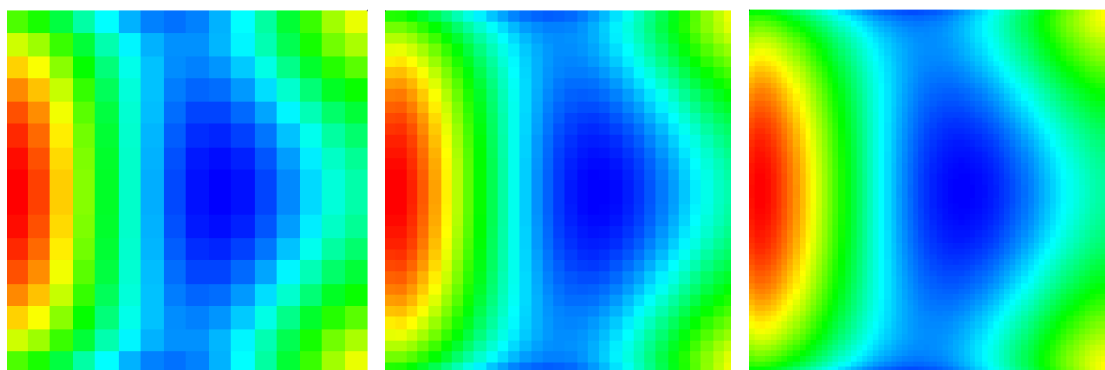


Рисунок 1. Графики $|u_n(x)|$ при $n=16, 32$ и 64 .

В таблице 1 приведены значения отклонения приближенных решений друг от друга по норме $\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|$.

Таблица 1. Значения $\|u_{n_1} - u_{n_2}\|_\infty$

n_1	8	16	24	32	48
n_2	16	24	32	48	64
$\ u_{n_1} - u_{n_2}\ _\infty$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$

Приведенные графические и табличные данные подтверждают внутреннюю сходимость разработанного численного метода решения задачи дифракции.

Список литературы

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
3. Приближенное решение операторных уравнений / *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рунтцкий, В. Я. Стеценко.* М.: Наука, 1969.

Метод логарифмических интегральных уравнений в задаче дифракции ТМ-волн на плоском слое, покрытом графеном

Станислав Вячеславович Тихов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tik.stanislav2015@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача дифракции ТМ-волны на плоском диэлектрическом слое, покрытом графеном, с учетом оптической нелинейности графена. Задача сводится к логарифмическому интегральному уравнению на $\mathbb{R}$. Предлагается метод решения данного уравнения, позволяющий вычислить входящие в него логарифмические интегральные операторы аналитически.

Ключевые слова: электромагнитные волны, задача дифракции, плоский слой, графен, нелинейность, логарифмические интегральные уравнения.

Logarithmic integral equations approach in a scattering problem of a TM-waves on a slab covered with graphene

Stanislav V. Tikhov

Penza State University, Penza, Russia

tik.stanislav2015@yandex.ru

Abstract. The paper focuses on a scattering problem of TM-wave on a dielectric slab covered with graphene accounting for the optical nonlinearity of graphene. The problem is reduced to a logarithmic integral equation on $\mathbb{R}$. To solve this equation a method allowing to calculate logarithmic integral operators analytically is suggested.

Keywords: electromagnetic waves, scattering problem, planar layer, graphene, nonlinearity, logarithmic integral equations.

Введение

В настоящее время во всем мире большое внимание уделяется изучению двумерных материалов и двумерных электронных компонентов. Среди них особое место занимает графен, впервые экспериментально полученный в 2004 году Геймом и Новоселовым.

Графен представляет собой двумерный слой атомов углерода, образующих гексагональную решетку. Благодаря такому строению графен обладает рядом уникальных физических свойств, в том числе оптических,

что делает его перспективным кандидатом для создания различных оптоэлектронных и фотонных устройств, интегрируя графен с конвенциональными материалами, такими как, скажем, кремний.

Как известно, изготовлению опытного образца того или иного устройства всегда предшествует этап математического моделирования его характеристик. Это верно и для графен-интегрированных оптоэлектронных и фотонных устройств. Отметим, что возникающие в этой связи задачи математического моделирования не только имеют большое практическое значение, но и богаты математическим содержанием.

В данной работе рассматривается задача дифракции ТМ-поляризованной волны на плоском слое, покрытом графеном, с учетом нелинейности графена и предлагается метод логарифмических интегральных уравнений для ее исследования.

1. Постановка задачи

Определим множества

$$\Omega_1 := \{(x, z): x > h, z \in \mathbb{R}\}, \quad \Omega_2 := \{(x, z): 0 < x < h, z \in \mathbb{R}\},$$

$$\Gamma_0 := \{(x, z): x = 0, z \in \mathbb{R}\}, \quad \Gamma_h := \{(x, z): x = h, z \in \mathbb{R}\},$$

Рассмотрим двумерный бесконечный слой Ω_2 толщины h , покрытый графеном на границе Γ_h и имеющий идеально проводящую стенку на границе Γ_0 . Области Ω_1 и Ω_2 заполнены изотропными однородными немагнитными средами, которые характеризуются постоянными вещественными диэлектрическими проницаемостями.

На границу Γ_h из полуплоскости Ω_1 падает монохроматическая ТМ-поляризованная волна $\mathbf{E}^{\text{inc}} \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{H}^{\text{inc}} \exp(-i\omega t)$. Пусть $(\mathbf{E}^{\text{ref}}, \mathbf{H}^{\text{ref}}) \exp(-i\omega t)$ и $(\mathbf{E}^{\text{trn}}, \mathbf{H}^{\text{trn}}) \exp(-i\omega t)$ обозначают отраженное и прошедшее поля, соответственно, а $(\mathbf{E}^{\text{tot}}, \mathbf{H}^{\text{tot}}) \exp(-i\omega t)$ – полное поле.

Комплексные амплитуды $\mathbf{E}^{\text{tot}}$, $\mathbf{H}^{\text{tot}}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла. Касательная компонента вектора $\mathbf{E}^{\text{tot}}$ обращается в нуль на границе Γ_0 . Наличие графенового покрытия на границе Γ_h обуславливает следующее условие сопряжения:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}^{\text{tot}}]|_{x=h+0} - [\mathbf{n}, \mathbf{H}^{\text{tot}}]|_{x=h-0} = -\sigma_g [\mathbf{n}, \mathbf{E}^{\text{tot}}]|_{x=h-0},$$

где $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ — единичный вектор нормали, направленный вдоль оси Ox , $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение и σ_g — проводимость графена. Предполагаем, что источник поля находится в конечной области, поэтому

как отраженное $\mathbf{E}^{\text{ref}}$, $\mathbf{H}^{\text{ref}}$ так и падающее $\mathbf{E}^{\text{inc}}$, $\mathbf{H}^{\text{inc}}$ поля удовлетворяют условиям Зоммерфельда в полуплоскости.

Ниже индекс j принимает значения 1, 2.

Описанная задача дифракции эквивалентна краевой задаче, которая состоит в нахождении функций $u_j(x, z) \in C^2(\Omega_j) \cap C(\bar{\Omega}_j)$, удовлетворяющих паре уравнений Гельмгольца

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \quad (x, z) \in \Omega_j, \quad (1)$$

однородному условию второго рода на границе Γ_h :

$$\left. \frac{\partial u_2(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

условию непрерывности на границе Γ_h :

$$\left. \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial u_1(x, z)}{\partial x} \right|_{x=h+0} - \left. \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial u_2(x, z)}{\partial x} \right|_{x=h-0} = - \left. \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial u_{\text{inc}}(x, z)}{\partial x} \right|_{x=h+0}, \quad (3)$$

условию сопряжения вида

$$u_1(x, z)|_{x=h+0} - u_2(x, z)|_{x=h-0} - \frac{\gamma \sigma_g}{k_2^2} \left. \frac{\partial u_2(x, z)}{\partial x} \right|_{x=h-0} = -u_{\text{inc}}(x, z)|_{x=h+0}, \quad (4)$$

где $\gamma = (ic\varepsilon_0)^{-1}$, и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} u_1 = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + ik_1 u_1 \right) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (5)$$

В качестве u_{inc} используем фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в области Ω_1 , имеющее вид

$$u_{\text{inc}}(x, z) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k_1 \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right),$$

где $H_0^{(1)}$ есть функция Ханкеля первого рода и x_0, z_0 — вещественные параметры. Ниже будем также использовать обозначения

$$g(\eta) := u_{\text{inc}}(x, z)|_{x=h+0}, \quad f(\eta) := \left. \frac{\partial u_{\text{inc}}(x, z)}{\partial x} \right|_{x=h+0}.$$

2. Логарифмическое интегральное уравнение

Краевую задачу (1)–(5) можно свести к граничному интегральному уравнению вида

$$k_2^2 (\mathcal{N}_2 v)(z) + k_1^2 (\mathcal{N}_1 v)(z) + \gamma \sigma_g v(z) = F(z), \quad (6)$$

где $v(z)$ есть след решения $u_2(x, z)$ на границе Γ_h , в правой части $F(z) = k_2^2(\mathcal{N}_1 f)(z) + k_2^2 g(z)$ и

$$(\mathcal{N}_j \varphi)(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} G_j^h(z, \eta) \varphi(\eta) d\eta.$$

Здесь $G_j^h(z, \eta) := G_j(h, z, h, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для двумерного уравнения Гельмгольца в области Ω_j . Аналитические выражения для G_j представлены в работе [1].

Оба интегральных оператора $\mathcal{N}_j$ имеют логарифмическую особенность. Для вычисления таких интегралов целесообразно представить решение $v(z)$ в виде Чебышевского ряда и использовать явные выражения для действия интегрального оператора с логарифмической особенностью на многочлены Чебышева первого рода [2]. Однако, прежде необходимо перейти от интегралов по всей числовой прямой к интегралам по отрезку $[-1, 1]$, а также получить $(1 - t^2)^{-1/2}$ в качестве весовой функции.

2. Преобразование интегрального уравнения

Введем новые переменные

$$z = \operatorname{arctanh} \zeta, \quad \eta = \operatorname{arctanh} p.$$

Представим решение $v(z)$ в виде

$$v(z) = v\left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \tilde{v}(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2} \left(\frac{a_0}{2} T_0(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(\zeta) \right),$$

где T_n есть многочлены Чебышева второго рода, а a_n есть некоторые (искомые) коэффициенты.

Введем обозначения $\tilde{\sigma}_g = \gamma \sigma_g$, $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ и $\tilde{F}(\zeta) = F\left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$.

Выполняя ряд преобразований, уравнение (6) примет вид

$$\frac{a_0}{2} \left(Y_0(\zeta) + \tilde{\sigma}_g \sqrt{1-\zeta^2} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(Y_n(\zeta) + \tilde{\sigma}_g \sqrt{1-\zeta^2} T_n(\zeta) \right) = \tilde{F}(\zeta), \quad (7)$$

где

$$Y_0(\zeta) = \kappa \ln 2 - \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 K_3(\zeta, p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \sum_{r=1}^2 k_r^2 \int_{-1}^1 \tilde{K}_r(\zeta, p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

$$\Upsilon_n(\zeta) = \frac{\kappa T_n(\zeta)}{n} - \frac{\kappa}{\pi} \int_{-1}^1 K_3(\zeta, p) \frac{T_n(p) dp}{\sqrt{1-p^2}} + \sum_{r=1}^2 k_r^2 \int_{-1}^1 \tilde{K}_r(\zeta, p) \frac{T_n(p) dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Здесь

$$K_3(\zeta, p) = \ln \left| \operatorname{arctanh} \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right| + \ln \frac{1}{|p - \zeta|},$$

а два других интегральных ядра определяются как

$$\tilde{K}_r(\zeta, p) = K_r \left(\ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \ln \frac{1 + p}{1 - p} \right),$$

$$K_1(\zeta, p) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k_1 |z - \eta|) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|z - \eta|},$$

$$K_2(\zeta, p) = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|z - \eta|} + \frac{1}{2h} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta_n}{\beta_n} \exp(-\beta_n |z - \eta|),$$

где $\beta_n = \sqrt{q_n^2 - k_2^2}$, $q_n = \pi n h^{-1}$ и

$$\theta_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Подробный вывод выражения (7) представлен в работе [3]

Проводимость графена σ_g в уравнении (7) в общем случае имеет вид $\sigma_g = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)}(1 - \zeta^2)|\tilde{v}(\zeta)|^2$, где $\sigma^{(1)}, \sigma^{(3)}$ есть комплексные величины [4].

Для получения приближенного решения уравнения (7) с учетом нелинейности графена можно использовать следующий подход. Вначале находим приближенное решение $\tilde{v}^0(\zeta)$ линейного ($\sigma^{(3)} = 0$) уравнения (7). Затем при помощи итерационной процедуры, используя в качестве начального приближения функцию $\tilde{v}^0(\zeta)$, находим приближенное решение нелинейного ($\sigma^{(3)} \neq 0$) уравнения (7).

Заключение

Итак, в данной работе рассмотрена задача дифракции ТЕ-волны на плоском диэлектрическом слое, покрытом графеном, с учетом нелинейности графена. Используя метод функций Грина, задача сведена к граничному интегральному уравнению. Для нахождения приближенного решения данного уравнения предложен метод, позволяющий вычислить входящие в него логарифмические интегральные операторы аналитически.

Схожая техника была ранее применена автором для решения гиперсингулярного интегрального уравнения, к которому сводится задача дифракции ТЕ-волны на плоском диэлектрическом слое с графеновым покрытием [5].

Финансирование

Работа поддержана Стипендией Президента Российской Федерации для аспирантов и адъюнктов.

The work was supported by a Scholarship from the President of the Russian Federation for graduate students and adjuncts.

Библиографический список

1. Polianin A. D., Nazaikinskii V. E. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists 2 ed. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2016. – 1643 p.

2. Shestopalov Y.V., Smirnov Y.G., Chernokozhin E.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics – De Gruyter: Berlin, Germany, 2000. – 128 p.

3. Тихов С. В., Метод интегральных уравнений для исследования задачи дифракции ТМ-волны на слое с графеновым покрытием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 4. С. 79–90.

4. Nonlinear electromagnetic response of graphene: frequency multiplication and the self-consistent-field effects / S.A. Mikhailov, K. Ziegler // Journal of Physics: Condensed Matter, 2008, vol. 20, no. 38. – P. 384204.

5. Smirnov Y., Tikhov S., Boundary Integral Equations Approach for a Scattering Problem of a TE-Wave on a Graphene-Coated Slab // Photonics, 2025, vol. 12, p. 456.

Нестандартный метод возмущений в задаче о распространении нелинейных связанных ТЕ-ТЕ волн

Станислав Вячеславович Тихов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tik.stanislav2015@yandex.ru

Анна Александровна Дюндяева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

andyundyaeva@gmail.com

Аннотация. Рассматривается нелинейная задача на собственные значения, описывающая распространение связанной ТЕ-ТЕ-волны в плоском слое, заполненном нелинейной неоднородной средой. Для исследования задачи предлагается нестандартный метод возмущения. С помощью данного метода получены результаты, устанавливающие разрешимость задачи.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, задача на собственные значения, плоский волновод, нелинейная среда, неоднородная среда, связанная ТЕ-ТЕ волна, метод возмущений.

Nonstandard perturbation method in the problem on the propagation of nonlinear coupled TE-TE waves

Stanislav V. Tikhov

Penza State University, Penza, Russia

tik.stanislav2015@yandex.ru

Anna A. Dyundyaeva

Penza State University, Penza, Russia

andyundyaeva@gmail.com

Abstract. A nonlinear eigenvalue problem describing the propagation of a coupled TE-TE wave in a slab filled with nonlinear inhomogeneous medium is considered. To study the problem a nonstandard perturbation method is suggested. Using this method, results establishing the solvability of the problem are obtained.

Keywords: nonlinear boundary value problem, eigenvalue problem, planar waveguide, nonlinear medium, inhomogeneous medium, coupled TE-TE wave, perturbation method.

Введение

Как известно, задачи, возникающие в теории распространения электромагнитных волн в нелинейных средах, не только имеют большое прикладное значение, но и богаты математическим содержанием. Их решение требует развития нестандартных математических методов.

В данной работе рассматривается одна из таких задач. Для ее исследования мы развиваем нестандартный метод возмущения, основанный на использовании решений более простой нелинейной задачи (являющейся частным случаем исходной задачи) [1], [2]. Такой метод позволяет установить существование в том числе так называемых *нелинеаризуемых* решений задачи, т.е. таких решений, которые не обладают аналогами среди решений соответствующей линейной задачи.

1. Постановка задачи

Пусть всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2. Рассмотрим распространение электромагнитной волны

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad (1)$$

с комплексными амплитудами $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$, имеющими вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0, e_y(x), 0) e^{i\gamma_1 z}, & \mathbf{H}_1 &= (h_x^{(1)}(x), 0, h_z(x)) e^{i\gamma_1 z}, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, 0, e_z(x)) e^{i\gamma_2 y}, & \mathbf{H}_2 &= (h_x^{(2)}(x), h_y(x), 0) e^{i\gamma_2 y}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_j \in \mathbb{R}$, в слое $\Omega_l = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq h, z \in \mathbb{R}\}$.

Диэлектрическая проницаемость среды в Ω_l имеет вид

$$\varepsilon_l = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где элемент ϵ_{xx} произволен (она не влияет на поле (1)), и

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \varepsilon_1(x) + c_1 \epsilon_1(x) + (\alpha + c_3 a(x)) |(E_1, e_y)|^2 + c_4 \beta(x) |(E_2, e_z)|^2, \\ \epsilon_{zz} &= \varepsilon_2(x) + c_2 \epsilon_2(x) + (\alpha + c_3 a(x)) |(E_2, e_z)|^2 + c_4 \beta(x) |(E_1, e_y)|^2; \end{aligned}$$

здесь $\alpha > 0$, c_j, c_{j+2} – постоянные, $\epsilon_j \in C(\bar{\Gamma})$, $\varepsilon_j, a, \beta \in C^{(1)}(\bar{\Gamma})$, где $\bar{\Gamma} = [0, h]$, и $\varepsilon_j(x) > 0$, $\varepsilon'_j(x) \geq 0$. Области $\Omega_c := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: x < 0, z \in \mathbb{R}\}$ и $\Omega_s := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: x > h, z \in \mathbb{R}\}$ заполнены средами, характеризующимися, соответственно, диэлектрическими постоянными ε_c и ε_s , причем $1 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_s$. Поле (1) называется (нелинейной) *связанной TE-TE волной* [3].

Амплитуды (2) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_j = -i\omega_j \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}_j, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_j = i\omega_j \mu_0 \mathbf{H}_j, \quad (4)$$

здесь $\varepsilon = \varepsilon_r$ при $(x, z) \in \Omega_r$, где $r = \{c, l, s\}$. Касательные компоненты векторов $\mathbf{E}_j$ непрерывны на обеих границах слоя и подчиняются дополнительному условию

$$|(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_y)|^2|_{x=0} = A_1^2 = \text{const}, \quad |(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_z)|^2|_{x=0} = A_2^2 = \text{const}, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные орты осей Oy, Oz , а $(\cdot, \cdot)$ обозначает евклидово скалярное произведение. Кроме того, $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ затухают при $|x| \rightarrow \infty$.

Задача заключается в нахождении чисел γ_j , отвечающих векторам $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$, удовлетворяющим всем перечисленным выше условиям. Такие γ_j являются *постоянными распространения* рассматриваемого волновода.

Данная задача о распространении ТЕ-ТЕ волн сводится к задаче $\mathcal{P}$, заключающейся в нахождении таких $\gamma_j = \hat{\gamma}_j$, что существуют решения $u_j(x; \gamma_1, \gamma_2) \in C^2(\bar{\Gamma})$ системы уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_1^{-2} u_1'' &= -(\varepsilon_1(x) + c_1 \varepsilon_1(x) - \gamma_1^2) u_1 - (\alpha + c_3 a(x)) u_1^3 - c_4 \beta(x) u_1 u_2^2, \\ \kappa_2^{-2} u_2'' &= -(\varepsilon_2(x) + c_2 \varepsilon_2(x) - \gamma_2^2) u_2 - (\alpha + c_3 a(x)) u_2^3 - c_4 \beta(x) u_2 u_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(k_{s,j} u_j - u_j')|_{x=0} = 0, \quad u_j|_{x=0} = A_j, \quad (7)$$

$$(k_{c,j} u_j - u_j')|_{x=h} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\kappa_j = \omega_j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $k_{s,j} = \kappa_j \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_s}$, $k_{c,j} = \kappa_j \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_c}$. Пары чисел $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ назовем *векторными собственными значениями* (СЗ) задачи $\mathcal{P}$.

2. Вспомогательная нелинейная задача

Для исследования задачи $\mathcal{P}$ применим метод возмущений. В качестве «невозмущенной» используем задачу – назовем ее $\mathcal{P}'$ – получающуюся из $\mathcal{P}$, если в системе (6) положить c_j, c_{j+2} равными нулю. Заметим, что $\mathcal{P}'$ представляет собою две независимые задачи $\mathcal{P}'_j$, каждая из которых состоит в нахождении таких значений $\gamma_j = \bar{\gamma}_j$, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $v_j \equiv v_j(x, \bar{\gamma}_j)$, удовлетворяющая уравнению

$$\kappa_1^{-2} v_j'' = -(\varepsilon_j(x) - \gamma_j^2) v_j - \alpha v_j^3, \quad (9)$$

и краевым условиям

$$(k_{s,j}v_j - v'_j)|_{x=0} = 0, \quad v_j|_{x=0} = A_j, \quad (10)$$

$$(k_{c,j}v_j - v'_j)|_{x=h} = 0. \quad (11)$$

Задача $\mathcal{P}'_j$ исследована в работе [4]. Используя представленные в работе [4] результаты, получаем следующие факты.

Утверждение 1. Число $\gamma_j = \bar{\gamma}_j$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}'_j$ если и только если, оно удовлетворяет уравнению

$$\varphi_j(\gamma_j) \equiv \kappa_{c,j}v_j(h, \gamma_j) + v'_j(h, \gamma_j) = 0,$$

где $v_j(x, \gamma_j)$ является решением задачи Коши (9), (10).

Функцию φ_j назовем характеристической функцией (ХФ) задачи $\mathcal{P}'_j$.

Теорема 1. Задача $\mathcal{P}'_j$ имеет бесконечно много СЗ $\gamma_j = \bar{\gamma}_j > 0$. Кроме того, существует бесконечное число СЗ $\gamma_j = \bar{\gamma}_{j,k}$, имеющих окрестности

$$\Gamma_{j,k} = (\bar{\gamma}_{j,k} - \delta_{j,k}, \bar{\gamma}_{j,k} + \delta_{j,k}),$$

где $\delta_{j,k} > 0$ – некоторая постоянная, на противоположных концах которых характеристическая функция $\varphi_j(\gamma_j)$ задачи $\mathcal{P}'_j$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi_j(\bar{\gamma}_{j,k} - \delta_{j,k}) \cdot \varphi_j(\bar{\gamma}_{j,k} + \delta_{j,k}) < 0, \quad (12)$$

причем окрестность $\Gamma_{j,k}$ не содержит других решений задачи $\mathcal{P}'_j$, кроме $\bar{\gamma}_{j,k}$.

Подчеркнем, что задача $\mathcal{P}'_j$ имеет бесконечно много нелинеаризуемых решений, удовлетворяющих (12).

3. Основные результаты

Утверждение 2. Пусть $\alpha + c_3a(x) > 0$, $c_4\beta(x) > 0$ при всех $x \in \bar{I}$. Тогда задача Коши для системы (6) с условиями (7) глобально однозначно разрешима, а ее решения $u_1 \equiv u_1(x, \gamma_1, \gamma_2)$, $u_2 \equiv u_2(x, \gamma_1, \gamma_2)$ непрерывно зависят от переменной $x \in \bar{I}$ и параметров $\gamma_j \in \Gamma := [\sqrt{\varepsilon_c}, +\infty]$, $c_j, c_{j+2} \in \mathbb{R}$.

Утверждение 3. Упорядоченный набор $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ является векторным СЗ задачи $\mathcal{P}$ если и только если, удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}\psi_1(\gamma_1, \gamma_2) &\equiv \kappa_{c,1}u_1(h, \gamma_1, \gamma_2) + u'_1(h, \gamma_1, \gamma_2) = 0, \\ \psi_2(\gamma_1, \gamma_2) &\equiv \kappa_{c,2}u_2(h, \gamma_1, \gamma_2) + u'_2(h, \gamma_1, \gamma_2) = 0,\end{aligned}\tag{13}$$

где $u_j \equiv u_j(x, \gamma_1, \gamma_2)$ являются решениями задачи Коши (6), (7).

Далее будем считать, что $\gamma_j \in \Gamma_j^0, c_j \in C_j^0, c_{j+2} \in C_j^0$, где $\Gamma_j^0 := (\sqrt{\varepsilon_s}, \gamma_j^0)$, $C_j^0 = (-c_j^0, c_j^0)$, $C_{j+2}^0 = (-c_{j+2}^0, c_{j+2}^0)$ и $\gamma_j^0, c_j^0, c_{j+2}^0$ есть некоторые фиксированные положительные числа, причем $\gamma_j^0 > \sqrt{\varepsilon_s}$.

Вычитая из обеих частей первого уравнения системы (13) ХФ задачи $\mathcal{P}'_1$, а из второго уравнения системы (13) ХФ задачи $\mathcal{P}'_2$, получаем

$$\begin{aligned}\psi_1(\gamma_1, \gamma_2) - \varphi_1(\gamma_1) &= -\varphi_1(\gamma_1), \\ \psi_2(\gamma_1, \gamma_2) - \varphi_2(\gamma_2) &= -\varphi_2(\gamma_2).\end{aligned}$$

Исследуя эти уравнения в некоторых окрестностях наборов СЗ задач $\mathcal{P}'_j$, получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть каждая из задач $\mathcal{P}'_j$ имеет n'_j решений

$$\bar{\gamma}_{j,1}, \dots, \bar{\gamma}_{j,n'_j} \in \Gamma_j^*,$$

удовлетворяющих (9), где $\Gamma_j^* := (\varepsilon_c, \gamma_j^*)$. Тогда существуют $c_j^0, c_j^0 > 0$, такие, что для всех $c_j \in C_j^0, c_{j+2} \in C_j^0$ задача $\mathcal{P}$ имеет не менее $n'_1 \times n'_2$ векторных собственных значений $\hat{\gamma}_{i_1, i_2} = (\hat{\gamma}_{1, i_1}, \hat{\gamma}_{2, i_2})$, где $i_j = \overline{1, n'_j}$; при этом каждое $\hat{\gamma}_{i_1, i_2}$ содержится в некоторой окрестности точки $(\bar{\gamma}_{1, i_1}, \bar{\gamma}_{2, i_2})$.

Поскольку числа γ_j^* могут быть выбраны так, что множества Γ_j^* содержат нелинеаризуемые СЗ задач $\mathcal{P}'_j$, то теорема 2 устанавливает существование в том числе нелинеаризуемых векторных СЗ задачи $\mathcal{P}$.

Заключение

Итак, в данной работе рассмотрена задача о распространении (нелинейной) связанной ТЕ-ТЕ волны в плоском слое, заполненном неоднородной нелинейной средой. Используя нестандартный метод возмущения, нам удалось установить существование решений (собственных значений) исследуемой задачи при некоторых ограничениях на ее параметры (коэффициенты возмущения), в частности нелинеаризуемых решений. Подчеркнем, что последние не могут быть найдены при помощи классического метода возмущений, использующего в качестве невозмущённых решения соответствующей линейной задачи. Такие нелинеаризуемые решения отвечают новым модам рассматриваемой

нелинейной волноводной системы, не имеющим аналогов среди мод того же волновода, заполненного линейной средой.

Финансирование

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда по гранту 24-21-00028.

The study was supported by the Russian Science Foundation under grant 24-21-00028.

Библиографический список

1. Dyundyaeva A. A., Tikhov S. V., Valovik D. V., Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function // Photonics. 2023. Vol. 10, № 4. 371 p.

2. Валовик Д. В., Дюндяева А. А., Тихов С. В., О нестандартном методе возмущений для доказательства существования нелинеаризуемых решений в одной нелинейной задаче на собственные значения, возникающей в теории волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64, №10. 1949–1965 с.

3. Smirnov Yu. G., Valovik D. V., Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // Journal of mathematical physics. 2013. Vol. 54, №8.

4. Tikhov S. V., Valovik D. V., Maxwell's equations in a plane waveguide with nonhomogeneous nonlinear permittivity: Analytical and numerical approaches // Journal of Nonlinear Science. 2023. Vol. 33, №6. 105 p.

Периодические решения линейных дифференциальных уравнений с дискретным параметром

Руслан Рустамович Галиакберов¹

¹Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

¹ruslan10651999@gmail.com

Аннотация. Исследуются условия существования периодических решений для линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков с параметром λ , принимающим значения 0 или 1. Рассмотрены как однородные, так и неоднородные случаи, получены критерии периодичности решений в зависимости от параметра. Приведены примеры, иллюстрирующие теоретические выводы. Результаты могут быть применены в задачах управления, теории колебаний и математического моделирования систем с переключающимися параметрами.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, периодические решения, параметрический анализ, устойчивость.

PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A DISCRETE PARAMETER

Ruslan R. Galiakberov¹

¹Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹ruslan10651999@gmail.com

Abstract. The conditions for the existence of periodic solutions for linear differential equations of the first and second orders with the parameter λ taking the values 0 or 1 are investigated. Both homogeneous and heterogeneous cases are considered, criteria for the periodicity of solutions depending on the parameter are obtained. Examples illustrating the theoretical conclusions are given. The results can be applied in control problems, oscillation theory, and mathematical modeling of systems with switching parameters.

Keywords: linear differential equations, periodic solutions, parametric analysis, stability.

Периодические решения дифференциальных уравнений играют важную роль в теории динамических систем, механике и теории управления. Особый интерес представляют уравнения с параметрами, поскольку их поведение может кардинально меняться при изменении параметра.

В данной работе рассматриваются линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков с параметром $\lambda \in \{0,1\}$. Основная цель — выяснить, при каких условиях существуют периодические решения и как параметр λ влияет на них.

Определение 1. Решение $y(t)$ дифференциального уравнения называется периодическим с периодом $T > 0$, если для всех t из области определения выполняется $y(t + T) = y(t)$.

Лемма 1. О структуре решения линейного уравнения первого порядка.

Для уравнения

$$y' + \alpha(\lambda)y = f(t, \lambda)$$

общее решение имеет вид:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-\alpha(\lambda)t} + e^{-\alpha(\lambda)t} \int e^{\alpha(\lambda)t} (f, \lambda) dt$$

Где $y_h(t)$ — общее решение однородного уравнения, $y_p(t)$ — частное решение неоднородного, $\alpha(\lambda)$ — коэффициент, зависящий от параметра, $f(t, \lambda)$ — функция, зависящая от переменной t и λ .

Теорема 1. Критерий периодичности для однородного уравнения.
Для уравнения [1, гл. 3]

$$y' + \alpha(\lambda)y = 0$$

нетривиальные периодические решения существуют тогда и только тогда, когда $\alpha(\lambda) = 0$. При этом все решения являются постоянными.

Доказательство:

1. При $\alpha(\lambda) = 0$: решение $y(t) = C$ — константа, которая периодична с любым периодом. [2, теорема 2.1]
2. При $\alpha(\lambda) \neq 0$: решение $y(t) = Ce^{-\alpha(\lambda)t}$ непериодично, так как экспонента не обладает свойством периодичности.

Теорема 2. Условия периодичности для неоднородного уравнения.

Пусть $f(t, \lambda)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T . Тогда [3, стр. 45]:

1. При $\alpha(\lambda) = 0$: решение периодично тогда и только тогда, когда $\int_0^T f(t, \lambda) dt = 0$

2. При $a(\lambda) \neq 0$: существует единственное периодическое решение, совпадающее с $y_p(t)$.

Доказательство:

1. Следует из явного вида решения при $a(\lambda) = 0$: $y(t) = C + \int (f, \lambda) dt$
2. При $a(\lambda) \neq 0$ однородное решение стремится к нулю, поэтому асимптотически решение становится периодическим.

Лемма 2. О структуре решений линейного уравнения второго порядка.

Для уравнения

$$y'' + p(\lambda)y' + q(\lambda)y = g(t, \lambda)$$

общее решение имеет вид $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, где $y_h(t)$ - общее решение однородного уравнения, определяемое корнями характеристического уравнения $r^2 + p(\lambda)r + q(\lambda) = 0$, $p(\lambda), q(\lambda)$ - коэффициенты, зависящие от параметра, $g(t, \lambda)$ - функция, зависящая от переменной t и параметра λ .

Теорема 3. Критерий периодичности для однородного уравнения второго порядка.

Однородное уравнение имеет нетривиальные периодические решения тогда и только тогда, когда [4]:

1. $p(\lambda) = 0$, т. е. отсутствие диссипации
2. $p(\lambda) > 0$, т. е. эллиптический случай

При этом все решения являются периодическими с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{q(\lambda)}}$.

Теорема 4. Условия существования периодических решений для неоднородного уравнения.

Пусть $g(t, \lambda)$ - непрерывная периодическая функция с периодом T . Тогда [5]:

1. При $p(\lambda) = 0$ и $q(\lambda) > 0$:

Если $g(t, \lambda)$ ортогональна решениям сопряженной задачи, существует периодическое решение

2. При $p(\lambda) \neq 0$ существует единственное периодическое решение

Доказательство:

Используется метод Фредгольма и теория линейных операторов.

Пример 1.

Для уравнения $y' + \lambda y = \sin(t)$:

При $\lambda = 0$: $y(t) = C - \cos(t)$ - периодически

При $\lambda = 1$: $y(t) = Ce^{-t} + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}$ - асимптотически периодически

Пример 2.

Для уравнения $y'' + \lambda y' + (1 + \lambda)y = 0$:

При $\lambda = 0$: $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ – периодически

При $\lambda = 1$: решения имеют вид $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}))$ – непериодичны

Рассмотренный в первом примере подход к анализу асимптотической периодичности согласуется с методом, изложенным в [6]. Второй пример демонстрирует типичный случай параметрического резонанса, описанный в [7, стр. 112].

В работе строго доказаны критерии существования периодических решений для линейных дифференциальных уравнений с дискретным параметром. Основные результаты сформулированы в виде теорем 1–4. Для уравнения первого порядка периодические решения существуют только при $a(\lambda)=0$ и специальных условиях на $f(t, \lambda)$. Для уравнения второго порядка периодичность возможна при $p(\lambda) = 0$ и $q(\lambda) > 0$. Параметр λ существенно влияет на динамику системы, переключая её между периодическим и непериодическим режимами.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965. — 385 с.
2. Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. — New York: Wiley, 1964. — 408 p.
3. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958. — 474 с.
4. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 240 с.
5. Якубович В. А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. — М.: Наука, 1972. — 336 с.
6. Hale J.K. Ordinary Differential Equations. — New York: Wiley-Interscience, 1969. — 332 p.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 410 с.

Информация об авторах

Галиакберов Руслан Рустамович, аспирант

Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Российская Федерация, 664074, г. Иркутск
ruslan10651999@gmail.com

Information about the authors

Galiakberov Ruslan Rustamovich, postgraduate student
Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russian
Federation
ruslan10651999@gmail.com

Поиск резонансов однородного шара, покрытого графеном

Скворцов Олег Сергеевич¹

¹ Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ ghj.ghh.13@mail.ru

Аннотация. Решается трёхмерная, векторная задача поиска резонансов на шаре, методом Галёркина.

Ключевые слова: трёхмерная задача, векторная задача, задача поиска резонансов, система уравнений Максвелла, метод Галёркина, метод Гаусса, шарообразное тело, кубическая сетка.

Search for resonances of a homogeneous ball coated with grapheme

Skvortsov O.S.¹

¹ Penza State University, Penza, Russia

¹ ghj.ghh.13@mail.ru

Abstract. The three-dimensional vector problem of searching for resonances on a ball is solved using the Galerkin method.

Keywords: three-dimensional problem, vector problem, resonance search problem, Maxwell's system of equations, Galerkin method, Gauss method, spherical body, cubic grid.

Введение

Графен — это одноатомный слой углерода, который обладает уникальными физическими и химическими свойствами. Это делает его объектом повышенного интереса для научного сообщества.

Исследование резонансных явлений в диэлектриках, покрытых графеном, имеет большое значение как из-за уникальных свойств самого графена, так и из-за перспектив его применения в различных областях науки и техники.

Одним из основных направлений исследований графена является его использование в электронике. Благодаря высокой подвижности электронов, графен может стать основой для создания новых электронных устройств, таких как транзисторы, диоды и интегральные схемы. Это

может привести к созданию более быстрых и энергоэффективных электронных устройств.

Исследователи подробно изучают электромагнитные свойства структур, включающих слои графена. Многие аспекты таких структур были тщательно исследованы и нашли широкое практическое применение.

В этой статье рассматривается вопрос о нахождении резонансных частот в диэлектрическом шаре, покрытом графеном. Предлагается метод численного поиска резонансов и упоминается его параллельная реализация.

1. Интегро-дифференциальное уравнение

Задача поиска резонансов на шаре покрытом графеном сводится к гибриднему интегро-дифференциальному уравнению [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \left[\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(y) dy - \\ - \frac{i}{\omega \varepsilon_0} (k_g^2 + \text{grad div}) \int_{\partial Q} \sigma_g G(x, y) \mathbf{E}_\tau(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – волновое число, $G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, σ_g – функция проводимости графена, $\mathbf{E}_\tau$ – касательное поле.

Для постоянной σ_g получаем уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \left[\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \frac{i\sigma_g}{\omega \varepsilon_0} (k_g^2 + \text{grad div}) \int_{\partial Q} G(x, y) \mathbf{E}_\tau(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (2) так же может использоваться для решения задачи рассеяния электромагнитной волны телом Q .

2. Дискретизация задачи

Применим метод Галеркина для дискретизации интегро-дифференциального уравнения (2). Для этого нужно построить расчетную сетку на Q .

Введём наборы параллелепипедов Π_{j_1, j_2, j_3} и зададим трёхиндексную нумерацию $j = (j_1, j_2, j_3)$ на $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, где

$$\Pi_j := \Pi_{j_1, j_2, j_3} = [x_{1, j_1}; x_{1, j_1+1}] \times [x_{2, j_2}; x_{2, j_2+1}] \times [x_{3, j_3}; x_{3, j_3+1}],$$

а $j_1 = \overline{0, n-1}, j_2 = \overline{0, n-1}, j_3 = \overline{0, n-1}, x_{k, j_k} = a_k + j_k h_k, h_k = \frac{b_k - a_k}{n}, k = 1, 2, 3$.

Выберем только те наборы параллелепипедов, для которых выполняется следующее условие [2]:

$$\pi_j := \Pi_j \cap Q, \quad \text{vol}(\pi_j) > \text{vol}_0, \quad (3)$$

где $\text{vol}(\pi_j)$ – объём носителя π_j , а vol_0 – минимально допустимый объём носителя и является заранее заданным числом. Например, π_j может выглядеть следующим образом:

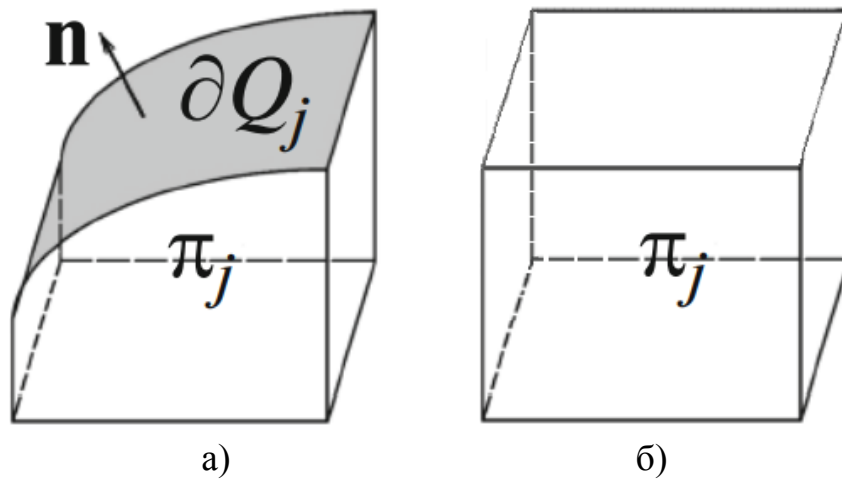


Рис. 1. Носитель базисной функции при $\pi_j \cap \partial Q \neq \emptyset$ (а), при $\pi_j \subset Q$ (б).

Зададим финитные кусочно-постоянные функции вида

$$\chi_{j_1, j_2, j_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{j_1, j_2, j_3}, \\ 0, & x \notin \Pi_{j_1, j_2, j_3} \end{cases}$$

и определим базисные вектор-функции на теле по формулам

$$\mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^1(x) = (\chi_{j_1, j_2, j_3}(x), 0, 0); \mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^2(x) = (0, \chi_{j_1, j_2, j_3}(x), 0); \mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^3(x) = (0, 0, \chi_{j_1, j_2, j_3}(x));$$

Элементы правой части уравнения (2) вычисляются по формулам

$$f_i = \int_Q \mathbf{E}_0(x) \mathbf{m}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx = \int_{D_{i_1, i_2, i_3}} \mathbf{E}_0(x) \mathbf{m}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dx, \quad (4)$$

Элементы матрицы, соответствующие базисным и тестовым функциям на теле, получаются путем вычисления трехкратных, шестикратных и пятикратных интегралов:

$$\begin{aligned}
s_{ij} = & \int_Q \mathbf{m}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) \mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^l(x) dx - \\
& - k_0^2 \int_Q \int_Q G(x, y) \left[\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) \mathbf{m}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dy dx - \\
& - \int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G(x, y) \left[\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right] dy dx + \\
& + \frac{i\sigma_g}{\omega \varepsilon_0} k_0^2 \int_Q \int_Q G(x, y) \left[\mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) \right]_{\tau} \mathbf{m}_{i_1, i_2, i_3}^k(x) dy dx \\
& + \frac{i\sigma_g}{\omega \varepsilon_0} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\partial Q} \text{grad}(G(x, y)) \left[\mathbf{m}_{j_1, j_2, j_3}^l(y) \right]_{\tau} dy dx, \quad x \in Q.
\end{aligned} \tag{5}$$

3. Постановка задачи поиска резонансов

Для выявления резонансных состояний в поставленной задаче, необходимо построить кривые α и β согласно уравнениям

$$\begin{aligned}
\alpha(\omega) &= \text{Re}(\det[\mathbf{S}(\omega)]) = 0, \\
\beta(\omega) &= \text{Im}(\det[\mathbf{S}(\omega)]) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Эти кривые изображают множества решений уравнений $\text{Re}(\det[\mathbf{S}(\omega)]) = 0$ и $\text{Im}(\det[\mathbf{S}(\omega)]) = 0$ на координатной плоскости (ω_1, ω_2) , $\omega = \omega_1 + \omega_2 \cdot i$. $\mathbf{S}$ – матрица состоящая из элементов s_{ij} . Точка пересечения α и β указывает на присутствие резонанса в данной координате.

4. Численные результаты

Зафиксируем $\omega_2 = 1.45$, и найдем приближенные решения ω_1 на отрезке $[1; 2]$ с шагом для однородного шара, покрытого слоем графена. Значения σ_g были получены согласно [3-5]. Для реализации применена библиотека MSMPI [6].

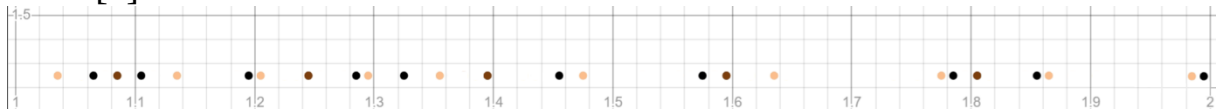


Рис. 2. График пересечений при $\omega_2 = 1.45$ (однородный случай), где α и β это чёрные и оранжевые точки соответственно. Коричневые точки являются пересечениями α и β .

На рисунке 2 наблюдаем, что значения ω_1 сгруппированы в кластеры (возможно, существуют и связные множества значений), повторяющиеся с определённой периодичностью.

Заключение

В статье была исследована математическая модель неоднородного диэлектрического шара, поверхность которого покрыта графеном. На основе данной модели был создан алгоритм для определения резонансных частот колебаний. Реализация алгоритма осуществлена с использованием библиотеки MSMPI. В результате вычислительных экспериментов получены приближенные значения резонансных комплексных частот, что позволяет сделать выводы о характере и особенностях резонансных процессов в исследуемой системе.

Список литературы

1. Цупак А. А. Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 96–106. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-8
2. Skvortsov O. S., Tsupak A. A. Galerkin Method and Parallel Algorithm for Solving the Problem of EM-Wave Propagation in a Locally Inhomogeneous Medium with a Graphene Layer at the Boundary of the Inhomogeneity Domain. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 45, No. 7. 2024; doi: 10.1134/S1995080224603813
3. S. A. Mikhailov, “Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene,” Phys. Rev. B. 2016. V. 93. 8. P. 085403
4. G. W. Hanson, “Dyadic Green’s functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene,” Journal of Applied Physics. 2008. Vol. 103, 6. P. 0643
5. Otsuji, T.; Boubanga Tombet, S.A.; Satou, A.; Fukidome, H.; Suemitsu, M.; Sano, E.; Popov, V.; Ryzhii, V.; Ryzhii, V. Graphene-based devices in terahertz science and technology. J. Phys. D Appl. Phys. 2012, 45, 303001. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/30/303001>.
6. Microsoft MPI. Available at: [https://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb524831\(v=vs.85\).aspx](https://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb524831(v=vs.85).aspx)

Численный метод решения задачи электромагнитной дифракции на сфере с графеновым слоем

Олег Владимирович Кондырев¹

¹ Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ kow20002204@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на диэлектрической сфере с графеном. Выписана система скалярных уравнений пригодных для численного решения. Выбран численный метод и обоснован выбор базисной функции. Представлено графическое отображение каждой из искомых функций.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, нелинейность Керра, уравнения Максвелла, диэлектрическое тело, графен, метод коллокации, численный метод.

Numerical method for solving the problem of electromagnetic diffraction on a sphere with a graphene layer

Oleg V. Kondyrev¹

¹ Penza State University, Penza, Russia

¹ kow20002204@mail.ru

Abstract. The problem of diffraction of electromagnetic waves on a dielectric sphere with graphene is considered. A system of scalar equations suitable for numerical solution is written out. The numerical method is chosen and the choice of the basic function is justified. A graphical representation of each of the desired functions is presented.

Keywords: singular integral equations, Kerr nonlinearity, Maxwell equations, dielectric body, graphene, collocation method, numerical method.

Введение

Добавление бесконечно тонкого слоя материала на границе раздела сред приводит к изменению условий сопряжения. В качестве частного случая можно рассмотреть графен. Так как графен имеет толщину в один атом, его можно считать бесконечно тонким. В общем случае, графен проявляет нелинейность в инфракрасном и терагерцовом диапазонах частот. Но во многих важных для приложений случаях нелинейностью можно пренебречь (формула Кубо-Хансена).

В данной работе рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на диэлектрической сфере покрытой тонким слоем графена. Для численного поиска неизвестных функций применяется метод коллокации и выбирается базисная функция с учетом особенности задачи.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать сферу $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$ с границей Γ и значениями диэлектрической и магнитной проницаемости ε_1, μ_1 в области Ω_1 и ε_2, μ_2 в $\Omega_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$, причем $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$. Обозначим за $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ электромагнитное поле в области Ω_1 , а в области $\Omega_2 - \{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Так как внешнее поле состоит из рассеянного и падающего, представим его как сумму $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s$ где $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ – падающее поле, а $\{\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\}$ – рассеянное. Для того, чтобы найти неизвестные компоненты, требуется решить систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1\mathbf{E}_1 \\ \text{rot } \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1\mathbf{H}_1 \end{cases} \text{ в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_2\mathbf{E}_2 \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_2\mathbf{H}_2 \end{cases} \text{ в } \Omega_2, \quad (2)$$

где ω – круговая частота.

На границе тела Γ должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_{\Gamma} &= \sigma \mathbf{E}_{\tau}, \\ [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $[\cdot]_{\Gamma}$ означает разность следов функции с разных сторон Γ , $\mathbf{v}$ – вектор нормали к границе Γ , направленный в область Ω_2 , индекс τ означает взятие касательных компонент, $(\times)$ обозначает векторное произведение, а

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |\mathbf{E}_{\tau}|^2 \quad (4)$$

нелинейная проводимость графена, выраженная законом Керра. Также должны выполняться условия на бесконечности:

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_s) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_s)) = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_r$ – вектор нормали к единичной сфере, $r := |x|$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

В данной статье будем считать $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_3 = 0$, то есть рассматривать только линейный случай.

2. Численный метод

Поставленную задачу можно свести к системе скалярных уравнений в сферической системе координат [3]:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& - \int_{\Gamma} (k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y)) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \cos(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) + \sin(\theta_y) \sin(\theta_x) \} j_\theta(y) + \cos(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy \\
& - \frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_\phi(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_\theta(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} (G_{1,\phi_x}(x,y) + G_{2,\phi_x}(x,y)) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \} m_\theta(y) + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) \right) dy = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1} + \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (j_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial j_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& - \int_{\Gamma} (k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y)) \left(\{ \cos(\theta_y) \sin(\phi_y - \phi_x) \} j_\theta(y) + \cos(\phi_y - \phi_x) j_\phi(y) \right) dy \\
& - \frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2} \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (\sigma m_\phi(y) \sin \theta_y) - \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial \sigma m_\theta(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} (G_{1,\theta_x}(x,y) + G_{2,\theta_x}(x,y)) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \} m_\theta(y) + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) \right) dy = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta_y} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& + \int_{\Gamma} (k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y)) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \cos(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) + \sin(\theta_y) \sin(\theta_x) \} m_\theta(y) + \cos(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\phi(y) \right) dy \\
& + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} (G_{1,\phi_x}(x,y) + G_{2,\phi_x}(x,y)) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \} j_\theta(y) + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy \\
& + \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x \sin \theta_x} G_{2,\phi_x}(x,y) \\
& \left(\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \} m_\phi(y) - \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\theta(y) \right) \sigma dy \\
& = \frac{\sigma}{2} m_\phi(x),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_x \sin \theta_x} \int_{\Gamma} \left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1} + \frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2} \right) \left(\frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial}{\partial \theta} (m_\theta(y) \sin \theta_y) + \frac{1}{r_y \sin \theta_y} \frac{\partial m_\phi(y)}{\partial \phi} \right) dy \\
& + \int_{\Gamma} \left(k_1^2 \Phi_1(x,y) + k_2^2 \Phi_2(x,y) \right) \left(\cos(\theta_y) \sin(\phi_y - \phi_x) m_\theta(y) + \cos(\phi_y - \phi_x) m_\phi(y) \right) dy \\
& - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} (G_{1,\theta_x}(x,y) + G_{2,\theta_x}(x,y)) \\
& \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} j_\theta(y) + \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) j_\phi(y) \right) dy \\
& - \int_{\Gamma} \frac{1}{r_x} G_{2,\theta_x}(x,y) \left(\left\{ \cos(\theta_y) \sin(\theta_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\theta_y) \cos(\theta_x) \right\} m_\phi(y) \right. \\
& \left. - \sin(\theta_x) \sin(\phi_x - \phi_y) m_\theta(y) \right) \sigma dy = -\frac{\sigma}{2} m_\theta(x).
\end{aligned} \tag{9}$$

Для решения данной системы воспользуемся методом коллокации. Так как в уравнениях имеется производная по обоим направлениям, то введём базисную функцию типа «пирамидка» (Рисунок 1).

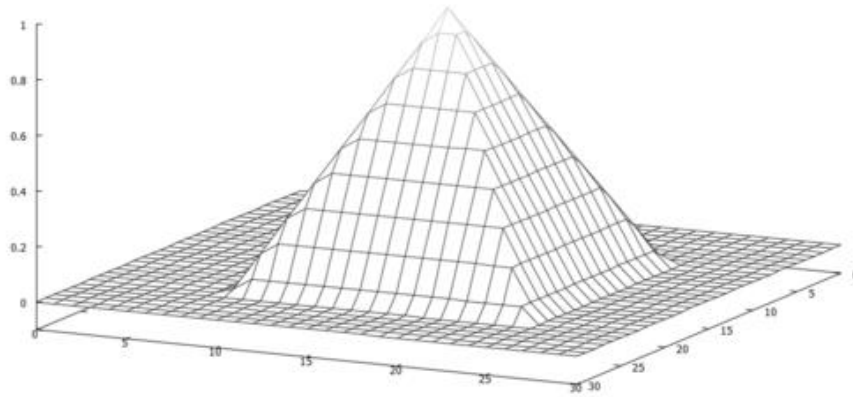
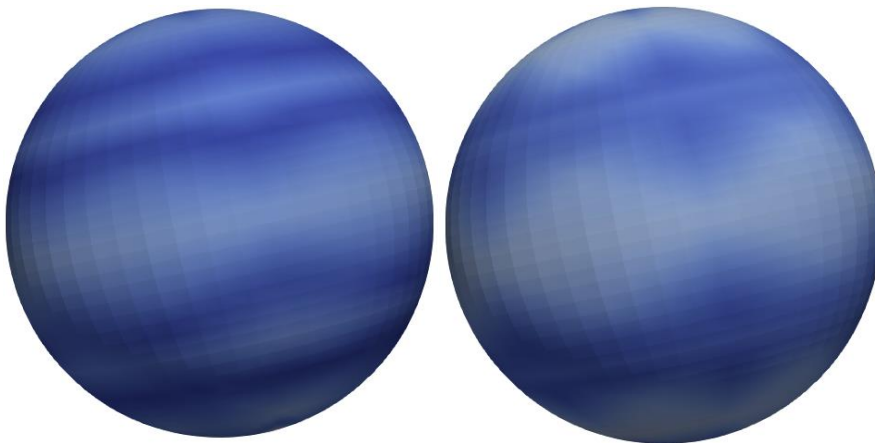
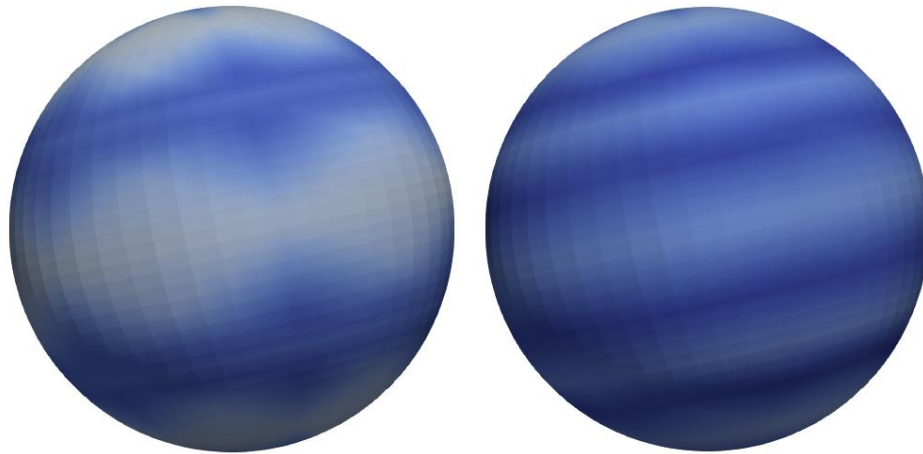


Рисунок 1. Базисная функция «пирамидка»

После нахождения неизвестных функций m_ϕ , m_θ , j_ϕ и j_θ отобразим значение их модуля на поверхности сферы:



(a) (б)
Рисунок 2. Функции m_ϕ (a) и m_θ (б)



(a) (б)
Рисунок 3. Функции j_ϕ (a) и j_θ (б).

Заключение

В данной работе выписана система скалярных уравнений в сферической системе координат. Таким образом решение свелось к поиску двух неизвестных вектор-функций из двух компонент (всего 4 функции). Так как в уравнениях присутствуют производные по двум направлениям осей координат, то базисная функция должна быть такой, чтобы её производная не обращалась в нуль по любому из направлений. Была выбрана базисная функция типа «пирамидка», отвечающая указанным требованиям. Так же представлены численные результаты.

© Кондырев О. В. 2025

Список литературы

1. Колтон Д., Кресс Р., Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва, Мир, 1987.
2. Colton D., Kress R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer Science+Business Media New York, 2013.
3. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Система сингулярных интегральных уравнений в задаче об электромагнитных колебаниях диэлектрического шара, покрытого графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 3–17.

4. Лерер А.М., Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя // Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67. № 9. С. 855-858.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М. : Наука, 1977. 831 с.

УДК 517.6

**Применение метода граничных интегральных уравнений к решению
дифференциальных уравнений в частных производных
эллиптического типа**

Наталья Юрьевна Кудряшова, Алина Вячеславовна Темникова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

math.kudryashova@yandex.ru, aline.temnickova@yandex.ru

Аннотация. Решение уравнения Лапласа в замкнутой области на плоскости с граничными условиями первого или второго рода сводится к решению граничных интегральных уравнений. Приближенное решение граничных интегральных уравнений осуществляется методом коллокации.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, граничное интегральное уравнение, метод коллокации, гармоническая функция.

**Application of the method of boundary integral equations to the solution of
partial differential equations of elliptic type**

Natalya Yuryevna Kudryashova, Alina Vyacheslavovna Temnikova

Penza State University, Penza, Russia

Abstract. Solving the Laplace equation in a closed domain on a plane with boundary conditions of the first or second kind is reduced to solving boundary integral equations. The approximate solution of boundary integral equations is carried out by the collocation method.

Keywords: Laplace equation, boundary integral equation, collocation method, harmonic function.

Метод граничных интегральных уравнений представляет собой инструмент для решения дифференциальных уравнений в частных

производных, которые описывают физические явления в области математической физики и инженерии. Одним из наиболее значимых классов таких уравнений являются эллиптические. Такие уравнения, как правило, описывают стационарные состояния систем, где временные изменения отсутствуют или несущественны. Классическими примерами являются уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Решение этих уравнений часто связано с нахождением полей потенциальных функций, которые удовлетворяют определённым граничным условиям.

Предположим, что в некоторой области D требуется отыскать функцию u , которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Будем предполагать, что на границе Γ области D задано одно из двух граничных условий 1-го или 2-го рода соответственно.

$$u = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y). \quad (2)$$

В каждой точке границы области задаётся только одна функция f или g , вторая функция остаётся неизвестной. Независимо от типа задачи, обе функции сразу никогда не задаются [1].

Такие задачи имеют хорошо известные физические интерпретации в теориях воздействия на упругие тела, электростатики, волновых процессов.

Приближённое решение будем искать по формуле

$$u(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} g(t) \frac{dl}{r(\rho, t)} - \int_{\Gamma} f(t) \left[\frac{1}{r(\rho, t)} \right] dl. \quad (3)$$

это основное тождество для гармонических функций. Здесь dl – элемент контура Γ , $r(\rho, t)$ – расстояния между точками ρ и t , ρ – точка области D , t – текущая точка на Γ , n – внешняя нормаль к контуру.

Из тождества (3) выражается криволинейный интеграл, включающий фундаментальное решение уравнения Лапласа $\frac{1}{r(\rho, t)}$, его производную по нормали и граничные условия 1-го и 2-го рода.

В интегральном тождестве (3) рассмотрим предельный переход точки ρ области D к любой точке P принадлежащей контуру Γ . Результатом предельного перехода будет являться уравнение [1]

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(g(t) \frac{1}{r(P, t)} - f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r(P, t)} \right] \right) dl \quad (4)$$

при этом

$$f(P) = \lim_{\rho \rightarrow P} f(\rho).$$

Для внешних и внутренних задач направления нормалей противоположны, поэтому второй интеграл в тождестве (3) испытывает скачок равный $2\pi f(P)$ при приближении точки ρ к точке P изнутри, и равный $-2\pi f(P)$ при приближении точки ρ к точке P извне к границе области Γ .

Уравнение (4) следует рассматривать как уравнение, которое позволяет найти неизвестную функцию f при известной функции g , и неизвестную функцию g при известной f . То есть, уравнение (4) позволяет установить связь между функциями g и f , а так же установить соответствие этих функций единой гармонической функции u [2].

Функции f и g могут быть произвольными, а также и контур области может иметь произвольную форму, в таком случае невозможно аналитически найти решение уравнения (3), поэтому требуется найти решение с помощью численных методов [3].

В качестве области D возьмём квадрат на плоскости XOY (рис.1) и будем рассматривать на границе условия 2-го рода (2). Тогда уравнение (4) примет вид.

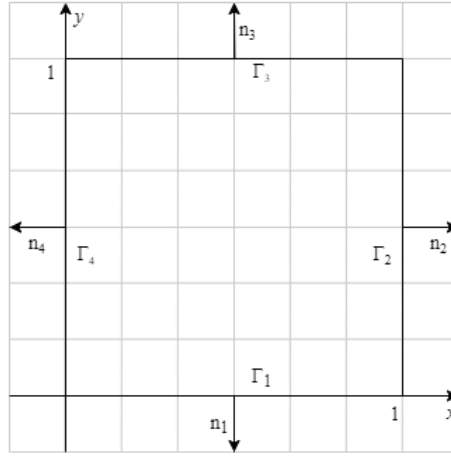


Рис. 1

$$\begin{aligned}
 f(P) + \frac{1}{2\pi} & \left[\int_{\Gamma_1} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \int_{\Gamma_2} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \right. \\
 & \left. + \int_{\Gamma_3} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \int_{\Gamma_4} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl \right] = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_1} \frac{g_1(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_2} \frac{g_2(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_3} \frac{g_3(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_4} \frac{g_4(P)}{r(P,t)} dl \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$R = \frac{1}{r(P,t)}; \quad \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial t} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial \tau} \cos \beta,$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_1} = - \frac{y - \tau}{[(x - t)^2 + (y - \tau)^2]^{3/2}} = R_1(x, y, t, \tau);$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_2} = \frac{x - t}{[(x - t)^2 + (y - \tau)^2]^{3/2}} = R_2(x, y, t, \tau);$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_3} = \frac{y - \tau}{[(x - t)^2 + (y - \tau)^2]^{3/2}} = R_3(x, y, t, \tau);$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_4} = - \frac{x-t}{[(x-t)^2 + (y-\tau)^2]^{3/2}} = R_4(x, y, t, \tau).$$

Применим метод коллокации для приближенного решения уравнения (5). Возьмём 4 сетки узлов: x_k, y_l – равномерные сетки на каждой границе, x_k^*, y_l^* – узлы коллокации.

$$x_k^* = x_k + h, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad h \in \left(0; \frac{1}{2N}\right],$$

$$y_s^* = y_s + l, \quad s = 1, 2, \dots, M-1, \quad l \in \left(0; \frac{1}{2M}\right].$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f(x_i^*, 1) + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k^*, 0) R_1(x_i; 1; x_k^*; 0) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M f(1, y_s^*) R_2(x_i; 1; 1; y_s^*) + \\ + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k^*, 1) R_3(x_i; 1; x_k^*; 1) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M f(0, y_s^*) R_4(x_i; 1; 0; y_s^*) = \\ = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k^*, 0) R(x_i; 1; x_k^*; 0) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M g(1, y_s^*) R(x_i; 1; 1; y_s) + \\ + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k^*, 1) R(x_i; 1; x_k^*; 1) + \\ + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M g(0, y_s^*) R(x_i; 1; 0; y_s), \quad i = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

решая которую, мы получим значения неизвестной функции f на границе области в узлах коллокации.

Используя эти значения в (3), получим формулу для вычисления значений неизвестной функции u [3]

$$u(x_m, y_s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 g(t, 0) R(x_m; y_s; t; 0) dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 g(1, \tau) R(x_m; y_s; 1; \tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 g(t,1)R(x_m; y_s; t;1)dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 g(0,\tau)R(x_m; y_s; 0;\tau)d\tau + \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(t,0)R(x_m; y_s; t;0)dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(1,\tau)R(x_m; y_s; 1;\tau)d\tau - \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(t,1)R(x_m; y_s; t;1)dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 f(0,\tau)R(x_m; y_s; 0;\tau)d\tau. \quad (7)
\end{aligned}$$

Вычисления значений неизвестной функции во внутренних узлах области будем производить, применяя к вычислению определённых интегралов (7) квадратурные формулы

$$\begin{aligned}
u(x_m, y_s) = & \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i^*, 0)R(x_m; y_s; x_i^*; 0) + \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} g(1, y_i^*)R(x_m; y_s; 1; y_i^*) - \\
& - \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i^*, 1)R(x_m; y_s; x_i^*; 1) - \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} g(0, y_i^*)R(x_m; y_s; 0; y_i^*) + \\
& + \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, 0)R(x_m; y_s; x_i^*; 0) + \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} f(1, y_i^*)R(x_m; y_s; 1; y_i^*) - \\
& - \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, 1)R(x_m; y_s; x_i^*; 1) - \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} f(0, y_i^*)R(x_m; y_s; 0; y_i^*). \quad (8)
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Бреббия К. Методы граничных элементов: Пер. с англ. / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Дербасова, В. А. Решение уравнений Лапласа методом граничных интегральных уравнений: учеб. пособие / В. А. Дербасова – М.: МАИ, 1985. – 40 с.
3. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М.: Гостехиздат, 1956. – 416 с.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Наталья Юрьевна Кудряшова, Полина Михайловна Антонова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

math.kudryashova@yandex.ru, pantonova35@gmail.com

Аннотация. Рассматривается сведение решения дифференциальных уравнений гиперболического типа в замкнутой области к граничным интегральным уравнениям по границе области. Полученные интегральные уравнения приближенно решаются методом коллокации.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, уравнение колебания струны, граничные интегральные уравнения, метод коллокации.

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLVING HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Natalya Yuryevna Kudryashova, Polina Mikhailovna Antonova

Penza State University, Penza, Russia

Abstract. The reduction of solutions of hyperbolic differential equations in a closed domain to boundary integral equations along the boundary of the domain is considered. The resulting integral equations are approximately solved by the collocation method.

Keywords: hyperbolic type equation, string oscillation equation, boundary integral equations, collocation method.

Основной особенностью метода граничных элементов (МГЭ) является то, что при его реализации дискретизации подлежат лишь границы изучаемых областей. Это ведет к существенному уменьшению числа дискретных элементов по сравнению с методами, требующими внутренней дискретизации всего рассматриваемого тела. Следовательно, для того, чтобы найти окончательное решение, нужно решить систему

алгебраических уравнений более низкого порядка, чем при использовании других методов [1].

Общий вид уравнения гиперболического типа в области $\Omega \in R^2$:

$$\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где Ω – исследуемая область, c – известный физический параметр.

Граничные условия заданы на Γ , где Γ – гладкая граница области Ω :

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \bar{q}(x,t), \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Начальные условия в области Ω имеют вид:

$$u(x,t)|_{(t=0)} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{(t=0)} = \psi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Отметим, что $\bar{u}(x,t)$, $\bar{q}(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – известные функции.

Потребуем, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла следующему уравнению

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left(\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right) u^*(\xi, x, t_F, \tau) d\Omega(x) d\tau, \quad (4)$$

где t_F – момент наблюдения, ξ – точка области, $u^*(\xi, x, t_F, \tau)$ – фундаментальное решение уравнения (1).

Это решение определяется из уравнения

$$\nabla^2 u^*(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*(\xi, x, t_F, \tau)}{\partial t^2} = \delta(\|\xi - x\|) \delta(t_F - \tau), \quad (5)$$

где $\delta(x)$ – δ -функции Дирака.

Для произвольной точки запишем соотношение:

$$\begin{aligned}
u(\xi, t_F) = & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, \tau) \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, \tau)}{\partial n} d\Gamma(x) d\tau - \\
& - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} u^*(\xi, x, t_F, \tau) d\Gamma(x) d\tau - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left[u(x, \tau) \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, \tau)}{\partial t} \right] - \right. \\
& \left. - \left[u^*(\xi, x, t_F, \tau) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] \right]_{t=0} d\Omega(x).
\end{aligned}
\tag{6}$$

Функции $\bar{u}(x, t)$, $\bar{q}(x, t)$ заданы только на части границы, но их можно доопределить, устремив ξ к границе и решив следующее граничное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
\alpha(\xi)u(\xi, t_F) = & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, \tau) \nabla u^*(\xi, x, t_F, \tau) d\Gamma(x) d\tau - \\
& - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \nabla u(x, t) u^*(\xi, x, t_F, \tau) d\Gamma(x) d\tau - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left[u(x, \tau) \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, \tau)}{\partial t} \right] - \right. \\
& \left. - \left[u^*(\xi, x, t_F, \tau) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] \right]_{t=0} d\Omega(x).
\end{aligned}
\tag{7}$$

где $\alpha(\xi) = \frac{1}{2}$ для регулярной границы [1].

Уравнение (7) справедливо для задач, сформулированных для областей произвольных размерностей. Их отличия заключаются лишь в том, что для каждого фундаментальное решение имеет свой вид, определяемый из (5).

Фундаментальное решение уравнения (5) для одномерного случая имеет вид

$$u^*(\xi, x, t_F, \tau) = \frac{cH(c(t_F - \tau) - r)}{2},$$

где $r = \|x - \xi\|$ – расстояние от точки x до точки ξ . Она представляет собой ответ среды на возмущение вида δ -функции.

Нормальная производная функции на границе Γ имеет вид:

$$q^*(\xi, x, t_F, \tau) = \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, \tau)}{\partial n} = -c \frac{\delta(c(t_F - \tau) - r)}{2} n_r,$$

здесь $n_r = \frac{\partial r}{\partial n}$.

В одномерном случае граница Γ области Ω состоит из точек a и b , являющихся концами отрезка. Учитывая вид фундаментального решения, его производной, первые два интегральных слагаемых в уравнениях (6) и (7) находятся аналитически [2]:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} q(x, t) \frac{c}{2} H(c(t_F - t) - |x - \xi|) \Big|_a^b dt &= \frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b, \\ \int_{t_0}^{t_F} -u(x, t) \frac{cn_r}{2} \delta(c(t_F - t) - |x - \xi|) \Big|_a^b dt &= -\frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b, \end{aligned}$$

где $t_R = t_F - \frac{r}{c}$.

Интегрирование третьего и четвертого слагаемых в уравнениях (6) и (7) по отрезку $[a, b]$ также проводится аналитически:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[u(x, t) c^2 \frac{(c(t_F - t) - |x - \xi|)}{2} \right]_{t=t_0} dx &= -\frac{c^2}{2} (u(\xi - c(t_F - t_0)t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0)t_0)), \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{cH(c(t_F - t) - |x - \xi|)}{2} \right]_{t=t_0} dx = \frac{c}{2} \int_{\max(\xi - c(t_F - t_0), a)}^{\min(\xi + c(t_F - t_0), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, в одномерном случае соотношение (6) для произвольной точки внутри области Ω примет вид:

$$\begin{aligned}
u(\xi, t_F) = & -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\
& + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\max(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая, что (8) справедливо на всей области включая ее границу, устремим ξ к границе и получим два уравнения относительно двух неизвестных функций:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(\xi, t_F) = & -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\
& + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\max(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0} \quad \xi \rightarrow a; \\
\frac{1}{2} u(\xi, t_F) = & -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\
& + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\max(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0} \quad \xi \rightarrow b;
\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим задачу о колебании струны, закрепленной в точках x_1 и x_2 к неподвижному основанию, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \\
u(x_1, t) &= u(x_2, t) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Граничные интегральные уравнения (9) дают соотношения для определения функций $q(x_1, t)$ и $q(x_2, t)$ в точках x_1, x_2 :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_1, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_2, t) dt \right) + \\ & + \left[\frac{\varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{\min(x_1 + c(t_F - t_0), x_2)} \psi(x) dx \right] = 0, \\ & \frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_1, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_2, t) dt \right) + \\ & + \left[\frac{\varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\min(x_2 - c(t_F - t_0), x_1)}^{x_2} \psi(x) dx \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Система рекуррентных уравнений для неизвестных функций в точках x_1, x_2 :

$$\left\{ \begin{aligned} q(x_1, t_F) &= q(x_2, t_R) - \left[\varphi_x(x_1 + c(t_F - t_0)) + \frac{\psi(x_1 + c(t_F - t_0))}{c} \right] H(c(t_F - t_0) - \\ & \quad - |x_2 - x_1|), \\ q(x_2, t_F) &= q(x_1, t_R) - \left[\varphi_x(x_2 + c(t_F - t_0)) + \frac{\psi(x_2 + c(t_F - t_0))}{c} \right] H(c(t_F - t_0) - \\ & \quad - |x_2 - x_1|). \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Для произвольной точки отрезка $[x_1, x_2]$ соотношение (8) примет вид [1]:

$$\begin{aligned} u(\xi, t_F) &= -\frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_2, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_1, t) dt \right) + \\ & + \left[\frac{\varphi(\xi - c(t_F - t_0)) + \varphi(\xi + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\min(\xi - c(t_F - t_0), x_1)}^{\max(\xi + c(t_F - t_0), x_2)} \psi(x) dx \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены только внутри отрезка $[x_1, x_2]$. Данная формула справедлива в предположении, что эти функции равны нулю вне отрезка.

Список литературы

1. Федотов В. П. Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак – УрО РАН, 2009. – 161 с.
2. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес., Л. Вроубел – М.: Мир, 1987. – 524 с.

2. Теория приближения и кубатурные формулы

УДК 519.652

Интерполяция функции двух независимых переменных

**Черушева Татьяна Вячеславовна, Саликов Илья Сергеевич, Ларин
Артём Александрович**

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

tank1100@yandex.ru, ilyamurom76@gmail.com,
larinartem1312200610@gmail.com

Аннотация. В работе представлен метод реализации интерполирования функции двух независимых переменных. Рассматривается задача восстановления 3D-поверхности методом ближайшего соседа.

Ключевые слова: интерполяция, функция многих переменных, метод ближайшего соседа, регулярная сетка, 3D-визуализация.

Interpolation of a function of two independent algorithms

Cherusheva Tatiana Vyacheslavovna, Salikov Ilya Sergeevich, Larin Artem Alexandrovich

Penza State University, Penza, Russia
tank1100@yandex.ru, ilyamurom76@gmail.com,
larinartem1312200610@gmail.com

Abstract. The paper presents a software implementation of interpolation of a function of two independent variables. The problem of restoring a 3D surface using the nearest neighbor method is considered, including generation of initial points and visualization of results.

Keywords: interpolation, function of many variables, nearest neighbor method, regular grid, 3D visualization.

Введение

Интерполяция — это важный математический метод, позволяющий находить промежуточные значения функции на основе известного набора данных. В современном мире интерполяция находит применение в самых разных областях, что делает её изучение и совершенствование крайне актуальным.

Актуальность темы состоит в том, что интерполяция позволяет восстанавливать непрерывные зависимости, прогнозировать значения в промежуточных точках и повышать точность моделей, предсказывать значения высот, температур или других параметров в точках, где прямые измерения отсутствуют. [1]

Интерполяция методом ближайшего соседа:

Метод ближайшего соседа — это простейший метод интерполяции, основанный на использовании значения ближайшей известной точки для предсказания значения в новой точке.

Суть метода:

1. Для новой точки находят ближайшую известную точку из имеющихся данных.
2. Значение новой точки принимается равным значению этой ближайшей известной точки.

Особенности:

- Прост в реализации и быстр в вычислениях.
- Сохраняет резкие границы (не размывает данные).
- Может создавать "ступенчатые" артефакты, так как не учитывает плавные переходы между точками.

Применение:

Используется в задачах, где важна скорость, а плавность не критична (например, увеличение изображений, цифровая картография).

Программа представляет собой интерактивный скрипт, который позволит пользователю задавать параметры для генерации поверхности. Она использует формулу для вычисления высоты каждой сгенерированной точки на плоскости (x, y).

Используемые формулы:

- $h(P) = h(P|n)$

где:

P_n - ближайшая известная точка из набора данных

$h(P|n)$ - её значение (например, высота).

- $d(P, P_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y + y_i)^2}$ – евклидово расстояние в 2D
- $d(P, P_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y + y_i)^2 + (z + z_i)^2}$ – евклидово расстояние в 3D

Результат визуализируется в форме интерактивной 3D поверхности, где исходные точки отмечены красными маркерами.

По методу ближайшего соседа написана программа. Входные данные:

Число для воспроизведения результатов — 3000;

Количество случайных точек — 400;

Размер сетки интерполяции — 400;

Уровень шума данных — 0.1;

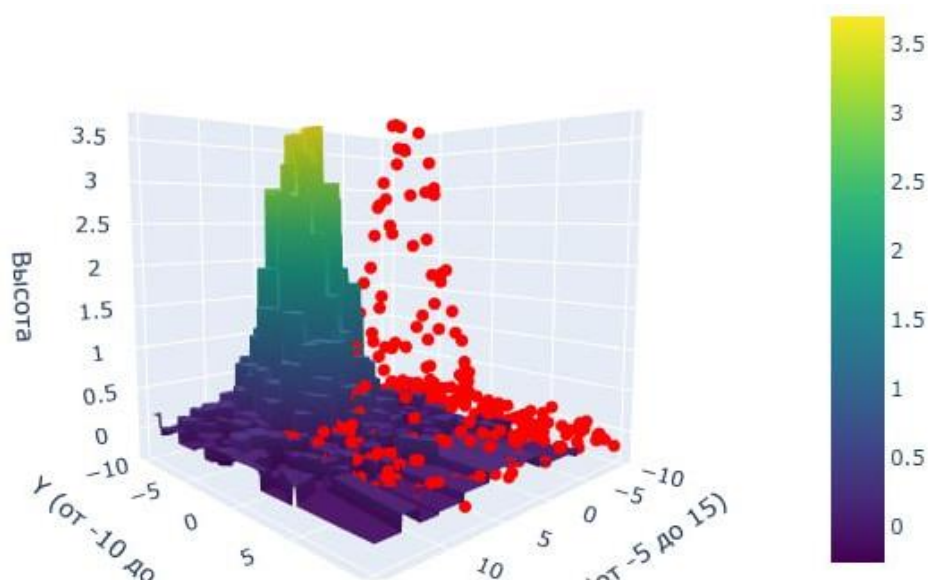
Амплитуда горы — 4;

Скорость затухания высоты — 0.1. [2]

Результаты программной реализации

После ввода всех параметров программа сгенерирует и визуализирует 3D поверхность на основе указанных значений. Пользователь увидит следующее:

- Интерактивный 3D график:
- Позволяет вращать, приближать и отдалять изображение.
- Высота поверхности будет отображена в виде цветных градиентов.
- Сгенерированные точки будут выделены красными маркерами, что поможет визуально оценить их распределение по поверхности.
- Визуализация высоты, описанная выше, помогает оценить, как изменение входных параметров влияет на форму и характеристики поверхности.



Метод линейной интерполяции

Линейная интерполяция — это способ приближённого определения значения функции в точке между двумя известными значениями, предполагая, что изменение происходит по прямой линии.

Суть метода:

1. Берутся две ближайшие известные точки.
2. Строится прямая между ними.
3. Значение в промежуточной точке вычисляется на этой прямой.

Особенности:

- Простота и высокая скорость вычислений.
- Даёт более гладкий результат, чем метод ближайшего соседа.
- Не учитывает нелинейные изменения (например, резкие перепады высот).
- В многомерном случае требует разбиения на треугольники или тетраэдры (2D/3D).

Применение:

Метод линейной интерполяции применяется для расчёта промежуточных значений между известными точками в компьютерной графике (масштабирование изображений), геодезии (построение рельефа), финансах (анализ временных рядов) и научных расчётах. Он прост в реализации и эффективен, но даёт лишь грубую аппроксимацию, так как предполагает линейное изменение между точками.

Используемые формулы:

$$d_i = |x_i - x_{tr}| + |y_i - y_{tr}|, i = 1, 2, \dots, N$$

$$w1 = \frac{1}{d_{p1}}, w2 = \frac{1}{d_{p2}}$$

$$Z_{tr} = \frac{w1 * Z_{p1} * w2 * Z_{p2}}{w1 + w2}$$

где

По методу линейной интерполяции написана программа. Входные данные:

Число для воспроизведения результатов — 3000;

Количество случайных точек — 400;

Размер сетки интерполяции — 400;

Уровень шума данных — 0.1;

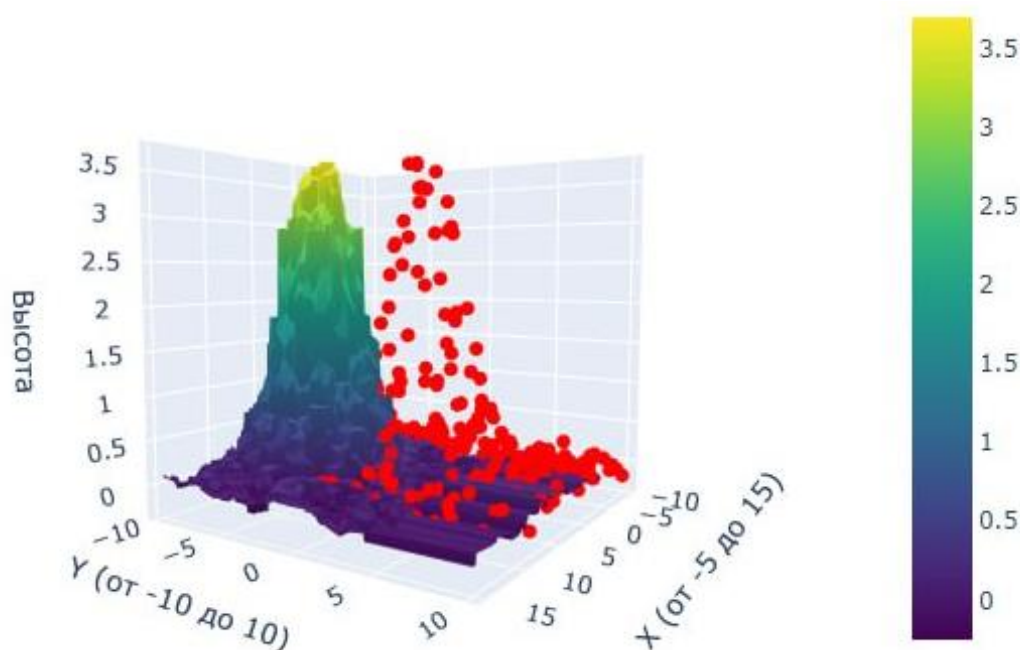
Амплитуда горы — 4;

Скорость затухания высоты — 0.1. [3]

Результаты программной реализации

После ввода всех параметров программа сгенерирует и визуализирует 3D поверхность на основе указанных значений. Пользователь увидит следующее:

- Интерактивный 3D график:
- Позволяет вращать, приближать и отдалять изображение.
- Высота поверхности будет отображена в виде цветных градиентов.
- Сгенерированные точки будут выделены красными маркерами, что поможет визуально оценить их распределение по поверхности.
- Визуализация высоты, описанная выше, помогает оценить, как изменение входных параметров влияет на форму и характеристики поверхности.



При других значениях параметров программа показала хорошие результаты.

В 3D поверхности, построенной первым методом мы наблюдаем "ступенчатые" артефакты, резкие границы, в то время, как 3D поверхность, построенная вторым методом, отличается своей гладкостью. Сравнив результаты, можно сделать вывод, что построение методом линейной интерполяции приводит к результату, более приближенному к реальности.

Вывод:

В рамках данной работы была создана 3D поверхность и машинная реализация для генерации и визуализации 3D поверхности. Реализованные функции и возможности программного продукта открывают новые горизонты для исследования и визуализации различных научных и практических задач. С учетом достигнутых результатов, программа служит полезным и мощным инструментом для пользователей, заинтересованных в анализе пространственных данных. Пользуясь формулами для создания реалистичной поверхности и методами интерполяции, мы можем исследовать различные явления и зависимости. С помощью настроек пользователей можно гибко адаптировать вывод в зависимости от потребностей, что делает программу универсальным решением для задач визуализации.

Список литературы

1. Гайдышев И. *Анализ и обработка данных: специальный справочник* СПб, 2001. 752 с.
2. И. И. Сурина. Метод интерполяции одного класса функций многих переменных, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1982, 1237–1241 с.

3. Бахвалов Ю.Н. Многомерная интерполяция и аппроксимация на основе теории случайных функций ИМИТ СПбГПУ, г.Череповец, 2009.

УДК 519.6

Рациональная аппроксимация аналитических функций

Гущин Владислав Алексеевич

Пензенский государственный университет

Россия, г. Пенза, ул. Красная 40

Vlgdschn.05@mail.ru

Аннотация. Рассматривается изучение методов рациональной аппроксимации аналитических функций, основанных на представлении функций в виде отношений полиномов. Подробно рассмотрены классические методы аппроксимации, включая аппроксимации Паде, а также их модификации и обобщения. Проанализирована скорость сходимости и устойчивость вычислений рациональных аппроксимаций при увеличении степени полиномов числителя и знаменателя. Изучено влияние распределения узлов интерполяции и весовых функций на точность приближений. Практическая значимость полученных результатов продемонстрирована на примере задач из теоретической физики, вычислительной гидродинамики и анализа сигналов. Предложены и реализованы эффективные алгоритмы рациональной аппроксимации с применением современных программных средств символьной математики и многопоточного программирования. Материал адресован специалистам в области вычислительной математики, научным сотрудникам и инженерам-разработчикам, заинтересованным в повышении производительности и надежности численных методов расчета и моделирования.

Ключевые слова: аппроксимация Паде, полиномы, рациональность, ряд Тейлора, maple

Rational approximation of analytic functions

Information about the authors:

Guschin Vladislav Alekseevich

Penza State University

Russia, Penza, Krasnaya St. 40

Vlgdschn.05@mail.ru

Abstract. The work is devoted to the study and development of methods for rational approximation of analytical functions based on representing them as ratios of polynomials. Classical approximation techniques are thoroughly examined, including Padé approximations along with their modifications and generalizations. Convergence rates and computational stability of rational approximations have been analyzed when increasing polynomial degrees of numerators and denominators. The influence of interpolation node distribution and weight functions on approximation accuracy has also been studied. Practical significance of obtained results is demonstrated through examples from theoretical physics, computational hydrodynamics, and signal analysis. Efficient algorithms for rational approximation using modern tools of symbolic mathematics and parallel programming have been proposed and implemented. This material will be useful for specialists in computational mathematics, researchers, and engineers interested in improving performance and reliability of numerical calculation and modeling methods.

Keywords: Pade approximation, polynomials, rationality, Taylor series

Введение

Интерес к рациональной аппроксимации, особенно к аппроксимациям Паде, вырос из-за их эффективности в вычислительных задачах физики и механики. Метод Паде назван в честь французского математика Анри Паде, который предложил его в 1892 году. Суть метода заключается в представлении функции как отношения двух полиномов, чьи коэффициенты зависят от разложения функции в ряд Тейлора. Ключевое преимущество — высокая точность даже вне радиуса сходимости исходного ряда и способность учитывать особенности функций, такие как сингулярности и разрывы. Эти свойства делают аппроксимацию Паде незаменимым инструментом в моделировании физических процессов, обработке сигналов и решении дифференциальных уравнений.

Цель данной работы — изучение исследования методов рациональной аппроксимации аналитических функций, изучение свойств и возможностей аппроксимаций Паде, выявление условий достижения высокой точности приближения, а также применения в задачах научного и технического моделирования.

Задачи работы:

1. Изучить теоретические основы рациональной аппроксимации аналитических функций.

2. Ознакомиться с различными методами рациональной аппроксимации функций

3. Исследовать свойства и особенности аппроксимаций Паде.

4. Оценить зависимость точности аппроксимации от порядка аппроксимации и характеристик аппроксимируемой функции.

5. Рассмотреть вопросы численной устойчивости вычислений при реализации аппроксимаций Паде.

6. Привести примеры практического применения рациональной аппроксимации задач.

7. Сделать вывод об эффективности применения аппроксимации Паде.

Аппроксимация функций – это математический метод приближения заданной функции другой функцией, которая представлена в виде отношения двух полиномов (рациональной дроби) [1]. Данный метод позволяет значительно увеличить точность приближения по сравнению с обычной полиномиальной аппроксимацией, особенно когда исходная функция имеет особенности, например, полюсы или быстро меняющиеся участки.

Рассмотрим наиболее популярные методы рациональной аппроксимации функций:

1. Аппроксимация Паде. Данный метод один из самых известных и эффективных методов рациональной аппроксимации. Основная идея заключается в представлении функции $f(x)$ в виде отношения двух полиномов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ [1]:

$$f(x) \approx R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

где n – степень полинома $P_x(x)$, а m – степень полинома $Q_m(x)$. Полиномы представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n \\ Q_m(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_mx^m \end{aligned}$$

где $p_0, p_1 \dots p_n$ и $q_0, q_1 \dots q_m$ – неизвестные коэффициенты этих полиномов, которые легко найти решив систему уравнений через известные коэффициенты ряда Тейлора

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots, \\ \left\{ \begin{array}{l} p_0 = q_0c_0, \\ p_1 = q_0c_1 + q_1c_0 \\ \dots \\ p_n = q_0c_{n+m} + q_1c_{n+m-1} + \dots + q_mc_n \end{array} \right. \end{aligned}$$

Обычно система уравнений строится так, чтобы количество уравнений было равно столько, сколько неизвестных коэффициентов. Чаще всего решают систему уравнений линейного типа, причём число уравнений зависит от желаемого порядка аппроксимации [2].

2. Метод наименьших квадратов – это статистический метод, используемый для поиска оптимальной аппроксимации данных или функций путём минимизации суммы квадратов отклонений между наблюдаемыми и предсказанными значениями [5].

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - R(x_i))^2$$

где $y_i = f(x_i)$ значения функции в точках x_i , $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – искомая рациональная функция для минимизации ошибки. Коэффициенты полиномов находятся путём решения системы нормальных уравнений, получаемых из условий минимума S [3].

3. Чебышевские аппроксимации. Идея метода Чебышёва заключается в том, чтобы минимизировать максимальную абсолютную погрешность аппроксимации на заданном интервале. В отличие от классического метода наименьших квадратов, где минимизируется среднее квадратичное отклонение, метод Чебышёва фокусируется на обеспечении равномерной точности по всему интервалу аппроксимации.

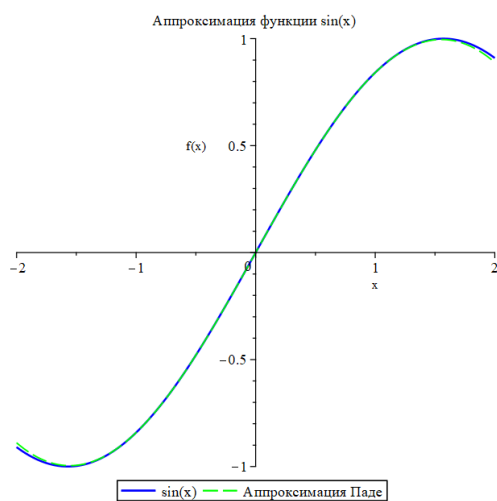
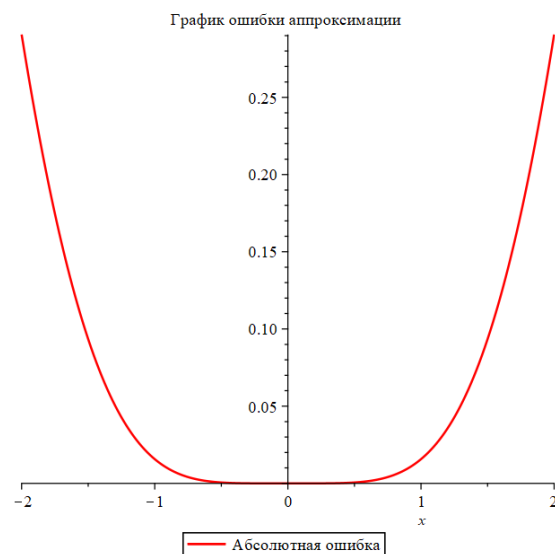
$$\Delta = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - R(x)|$$

где $f(x)$ – данная аналитическая функция, которую мы хотим аппроксимировать на интервале $[a,b]$, $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – искомая рациональная функция, которая минимизирует максимальное отклонение от $f(x)$ на этом интервале. Цель – свести Δ к минимуму [4].

Практическая часть

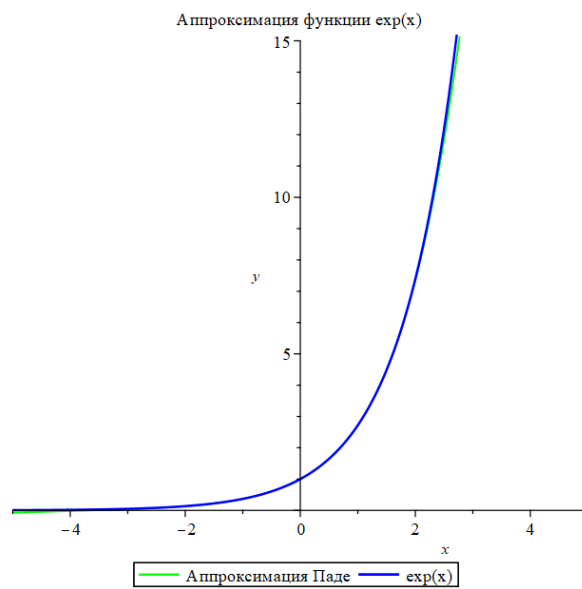
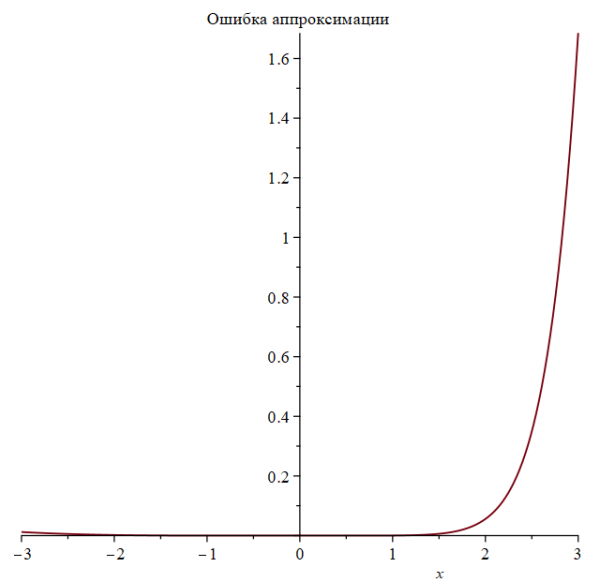
Рассмотрим $f(x) = \sin(x)$ и найдем ее аппроксимацию Паде. Реализация данного метода, с помощью программы Maple

m	2	3	6	8	8
n	2	2	2	3	4
ε	1.05887999	0.244568284	0.026527051	0.001834293	0.000097006
	2	0	1	8	6



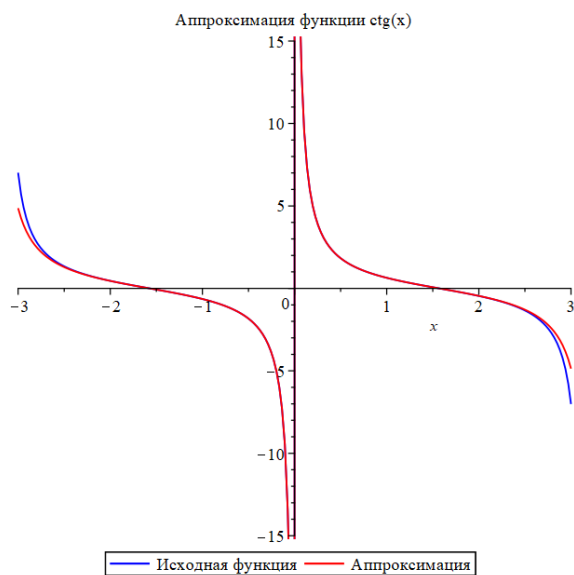
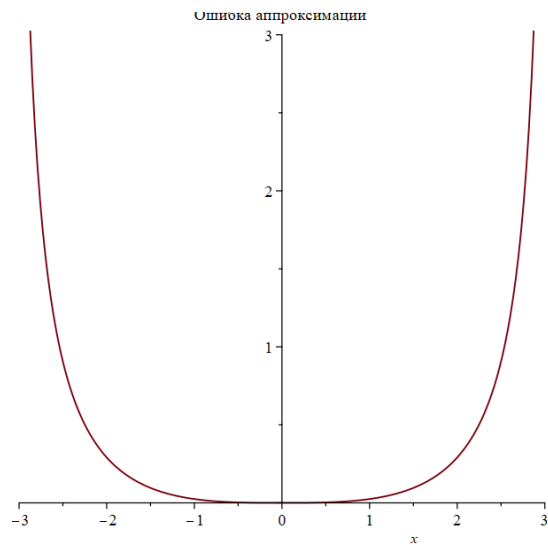
Рассмотрим поведение функции $f(x) = e^x$.

m	3	4	4	5	6	10
n	2	4	2	5	6	10
ε	1.6855369	0.0201636	0.3355369	0.000435	$6.635 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-13}$



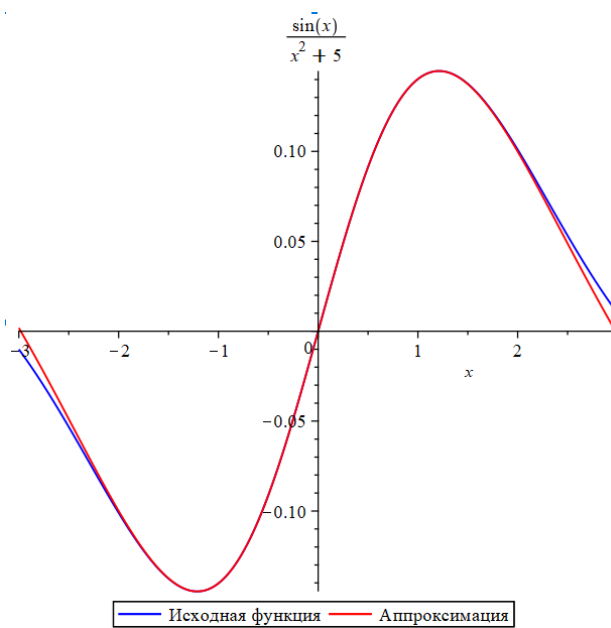
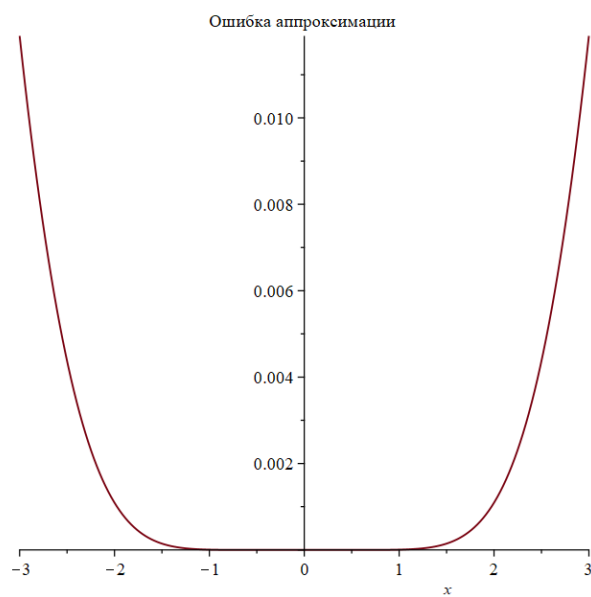
Рассмотрим аппроксимацию функции $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$.

m	4	7	7	4	8
n	4	4	7	7	8
ε	2.148585884	0.605728741	0.001404875	0.046572462	0.000053717



Рассмотрим аппроксимацию Паде функции $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+5}$.

m	2	4	6	2	10	15
n	2	2	4	6	10	6
ε	0.129454 88	0.069081 51	0.001230 75	0.036414 89	$2 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-10}$



Заключение.

Как видно из представленных результатов, в ряде случаев аппроксимация Паде даёт лучшую аппроксимацию функций, чем классическая аппроксимация многочленами уже при небольших значениях параметров. Кроме того, она позволяет учитывать особенности степенного характера, имеющиеся у аппроксимируемых функций.

Список литературы:

1. Номерман, Ю. И. Методы аппроксимации функций и уравнений / Ю. И. Номерман. – Новосибирск : НГУ, 1990. — 192 с.
2. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – Москва : Физматлит, 2009. — 672 с.
3. Мак-Кормик, Дж. Б. Теория приближенных вычислений : пер. с англ. / Дж. Б. Мак-Кормик. – Москва : Мир, 1973. — 400 с.
4. Энциклопедия элементарной математики. Ряд Паде. Электронный ресурс. URL: http://elementy.ru/trefil/Rad_Pade (дата обращения: 05.05.2025).
5. Элементы математики. Приближённое решение дифференциальных уравнений методом Паде. Электронный ресурс. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=12621423> (дата обращения: 06.05.2025)

Применение кривых Бернштейна-Безье в теории приближения.

Галат Анна Романовна

Пензенский государственный университет. Ул. Красная, 40, г. Пенза,
Россия.

agalat2005@vk.com

Аннотация. Работы посвящена исследованию теоретических основ кривых Бернштейна-Безье и их применению в теории приближений. Рассматриваются свойства полиномов Бернштейна, включая равномерную сходимость, сохранение монотонности и устойчивость к ошибкам округления. Описывается построение кривых Безье через контрольные точки, их геометрические свойства (аффинная инвариантность, локальное управление, выпуклая оболочка) и связь с теорией аппроксимации. Приводятся алгоритмы построения кривых, включая кубические кривые Безье, и обсуждаются их приложения в сглаживании данных, компьютерном моделировании и инженерных расчетах.

Ключевые слова: Кривые Бернштейна-Безье, полиномы Бернштейна, аппроксимация функций, компьютерная графика, контрольные точки, аффинная инвариантность, кубические кривые Безье, численные методы.

Application of Bernstein-Bezier curves in approximation theory.

Galat Anna Romanovna.

Penza State University. Krasnaya St., 40, Penza, Russia.

agalat2005@vk.com

Abstract. The work is devoted to the study of the theoretical foundations of Bernstein-Bezier curves and their application in the theory of approximations. The properties of Bernstein polynomials are considered, including uniform convergence, conservation of monotony, and resistance to rounding errors. The construction of Bezier curves through control points, their geometric properties (affine invariance, local control, convex hull) and their connection with approximation theory are described. Algorithms for constructing curves, including cubic Bezier curves, are presented and their applications in data smoothing, computer modeling, and engineering calculations are discussed.

Keywords: Bernstein-Bezier curves, Bernstein polynomials, function approximation, computer graphics, control points, affine invariance, cubic Bezier curves, numerical methods.

Введение

Кривые Бернштейна-Безье играют ключевую роль в современной компьютерной графике, инженерии и численных методах. Они представляют собой гладкие параметрические кривые, которые позволяют моделировать сложные формы с высокой точностью. Эти кривые широко используются в различных областях, включая проектирование автомобилей, самолетов, создание шрифтов и анимаций. Данная работа посвящена изучению теоретических основ и практического применения кривых Бернштейна-Безье в контексте теории приближений.

1. Построение кривых Безье с помощью полиномов Бернштейна

Для функции f , заданной на $[0,1]$, аппроксимирующий полином степени n :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

где $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ - базис Бернштейна [2].

Свойства:

- Равномерная сходимость: $\|B_n(f) - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$
- Сохранение монотонности и выпуклости
- Устойчивость к ошибкам округления

Кривые Безье

Задаются контрольными точками $\{P_k\}_{k=0}^n$:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} P_k, t \in [0,1],$$

где $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ - вес Безье [1].

Геометрические свойства [3]:

Свойство	Описание	Пример
Аффинная инвариантность	Инвариантность к линейным	Поворот/масштабирование системы координат

преобразованиям

**Локальное
управление**

Изменение точки P_k влияет лишь на кривой
окрестность $t \approx k/n$

**Выпуклая
оболочка**

Кривая лежит внутри оболочки "выбросов"
Гарантия отсутствия контрольных точек

2.2. Связь с теорией приближения [1]

1. Аппроксимация функций:

- Полиномы Бернштейна минимизируют колебания (явление Гиббса)
- Применяются для сглаживания экспериментальных данных

2. Оптимальность:

Для класса $C[0,1]$ оценка погрешности:

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{5}{4} \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

где ω_f — модуль непрерывности f .

3. Обобщения:

- **Рациональные кривые Безье** — точное представление конических сечений
- **Тензорные произведения** — построение поверхностей (патчи Безье)

2.4. Шаги построения кривой Безье

1. Выбор контрольных точек. Определите набор контрольных точек $P_0, P_1, \dots, P_n$. Эти точки будут влиять на форму кривой.

2. Вычисление базисных функций. Используя полиномы Бернштейна, рассчитайте базисные функции для каждой контрольной точки:

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

3. Определение параметра t . Параметр t принимает значения от 0 до 1. Он определяет положение текущей точки на кривой.

4. Расчет положения точки на кривой. Подставьте значение параметра t в выражение для кривой Безье:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)P_i.$$

4. Повторение шагов 3 и 4. Повторяйте шаги 3 и 4 для разных значений t , чтобы получить множество точек, образующих кривую Безье.

Далее представлены ключевые алгоритмы, использующие кривые Бернштейна-Безье [1].

3.1. Первый пример работы алгоритма

Кривая Безье 3-й степени (кубическая)

Приведем примеры кривых Безье с 4 и 7 контрольными точками (Рис.1-2).

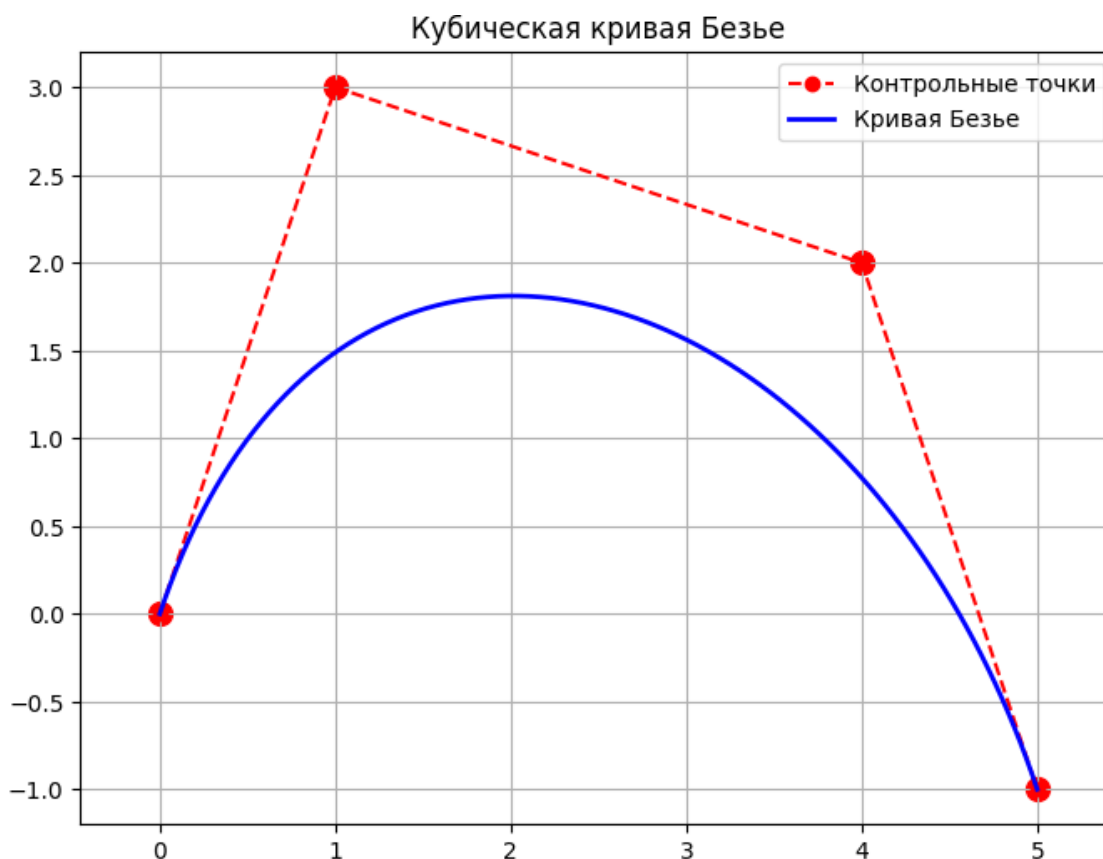


Рис. 1

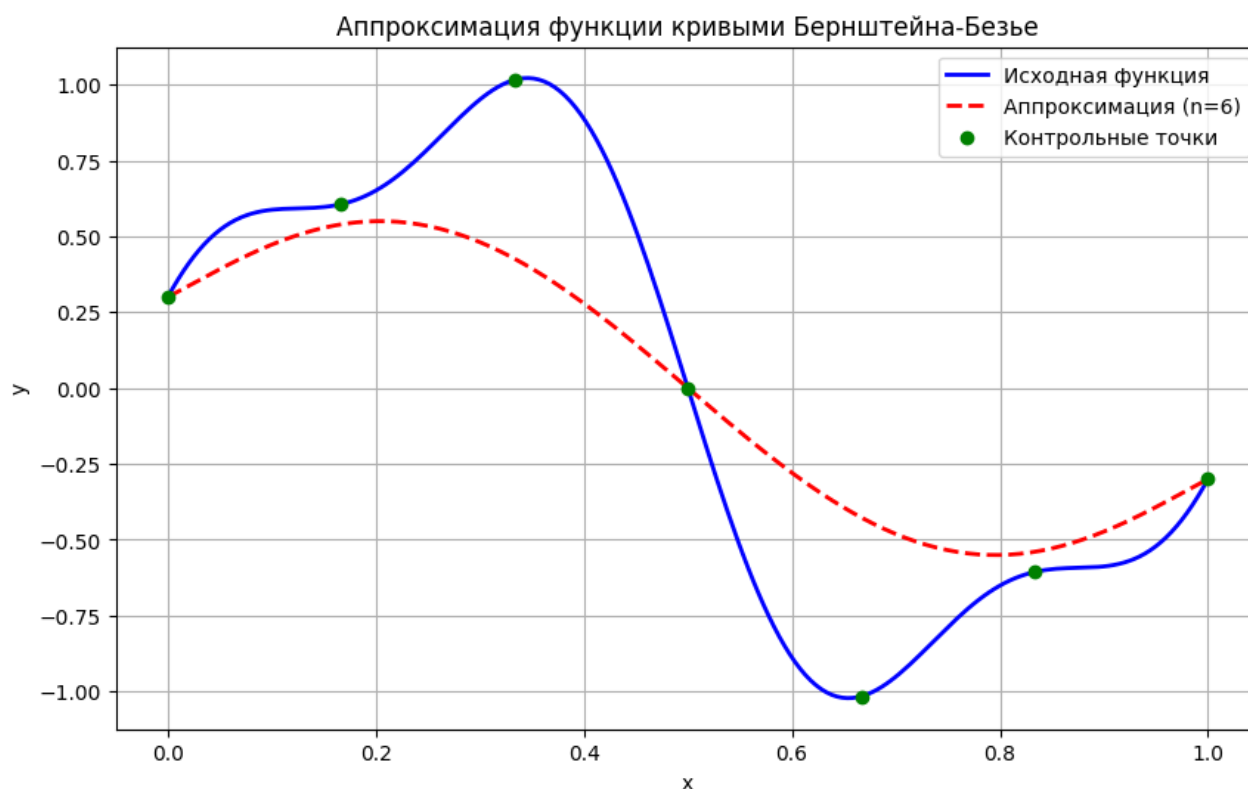


Рис. 2

Заключение

Проведенное исследование продемонстрировало значимость кривых Бернштейна-Безье в различных областях, начиная от теоретической математики и заканчивая прикладными дисциплинами. Были систематизированы их математические свойства, включая сходимость, устойчивость и геометрические характеристики, а также рассмотрены алгоритмы построения и модификации.

Особую ценность данный математический аппарат представляет в вычислительных задачах, где требуется точное моделирование форм и плавная интерполяция данных. Благодаря сочетанию гибкости и вычислительной эффективности, эти кривые нашли широкое применение в проектировании, компьютерной анимации и научных расчетах.

Дальнейшее развитие методов, основанных на кривых Бернштейна-Безье, перспективно для создания более совершенных алгоритмов обработки данных, трехмерного моделирования и оптимизационных процедур. Их потенциал остается неисчерпанным, что открывает новые направления для исследований в вычислительной математике и смежных дисциплинах.

Список литературы

1. Фарин Г. Кривые и поверхности в компьютерной графике и САПР. — М.: ДМК Пресс, 2018.

2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. — М.: Мир, 2001.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория знаний, 2015.

**Приближение функций отрезками рядов по ортогональным
многочленам Чебышёва.**

Катышева Ольга Валерьевна

Пензенский Государственный Университет

Россия, г.Пенза, ул.Красная 40

katysheva_olga@list.ru

Аннотация. Работа посвящена приближению функций отрезками рядов по ортогональным многочленам Чебышёва. Рассмотрены методы разложения произвольных непрерывных функций в ряды Чебышёва, обладающие высокой скоростью сходимости и устойчивостью вычислений. Исследованы особенности поведения коэффициентов ряда Чебышёва при увеличении степени многочлена и влияние весовой функции на точность приближений. Полученные результаты имеют практическое значение для инженерных расчётов, обработки сигналов и оптимизации вычислительных процессов в научных исследованиях. Представлены конкретные примеры реализации предложенных подходов с использованием современных программных инструментов символьной математики и высокопроизводительного параллельного программирования.

Ключевые слова: приближение функций, ортогональные многочлены, многочлены Чебышёва, аппроксимация, весовая функция, базисная функция, скорость сходимости.

Approximation of functions by series segments by orthogonal Chebyshev
polynomials.

Information about the authors:

Katysheva Olga Valeryevna

Penza State University

Russia, Penza, Krasnaya St. 40

katysheva_olga@list.ru

Abstract. The work is devoted to the approximation of functions by segments of series in Chebyshev orthogonal polynomials. Methods for expanding arbitrary continuous functions into Chebyshev series with high convergence rate and computational stability are considered. Features of the behavior of Chebyshev series coefficients as the polynomial degree increases and the influence of the weight function on the accuracy of approximations are investigated. The obtained results have practical significance for engineering calculations, signal processing, and optimization of computational processes in scientific research. Specific examples of implementing

the proposed approaches using modern tools of symbolic mathematics and high-performance parallel programming are presented.

Keywords: function approximation, orthogonal polynomials, Chebyshev polynomials, approximation, weight function, basis function, convergence.

Введение

Приближение функций — важная задача математического анализа, активно применяемая в науке и технике. Рост объемов данных и сложности моделей повышает значимость изучения методов приближения. Численное представление сложных функций достигается использованием ортогональных многочленов, среди которых особенное внимание заслужили многочлены Чебышева благодаря своей точности и скорости сходимости.

Целью данной работы является комплексное изучение методов приближения функций с использованием ортогональных многочленов Чебышева, а также практическое применение в различных задачах.

Задачи работы:

1. Изучение основных понятий, связанных с ортогональными многочленами и их свойствами.
2. Анализ теоремы о наилучшем приближении и ее применение к многочленам Чебышева.
3. Рассмотрение алгоритмов построения приближения функций с использованием многочленов Чебышева.
4. Реализация практических примеров и задач для иллюстрации эффективности расчетов.
5. Обобщение результатов и их обсуждение, что позволит сделать выводы о целесообразности применения методов приближения в различных областях.

Приближение функций — это процесс нахождения простых математических представлений (н-р, многочленов или других функций), которые наиболее точно отражают заданные функции на определённом интервале. Обычно такая задача возникает, когда необходимо оценить значение сложной функции в определённой точке или на заданном диапазоне, для чего используются упрощённые модели.

Для приближения функции можно использовать функции, которые образуют базис в пространстве функций, обозначенные как $\varphi_k(x)$. Функция $f(x)$ может быть разложена по базису следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

где коэффициенты c_k вычисляются по формуле:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) w(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) w(x) dx}.$$

Базисные функции $\phi_k(x)$ могут быть функциями из различных классов [1, 5].

№	Вид функции	Формула	Начальные условия	Весовая функция
1	Многочлены Чебышева первого рода	$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$	$T_0(x) = 1,$ $T_1(x) = x$	$w(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$ $x \in [-1, 1]$
2	Многочлены Чебышева второго рода	$U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$	$U_0(x) = 1,$ $U_1(x) = 2x$	$w(x) = \sqrt{(1-x^2)},$ $x \in [-1, 1]$
3	Многочлены Лежандра	$P_{n+2}(x) = \frac{2n+1}{n+2}P_{n+1}(x) - \frac{n}{n+2}P_n(x)$	$P_0(x) = 1,$ $P_1(x) = x$	$w(x) = 1,$ $x \in [-1, 1]$
4	Ряды Фурье	$f(x) = a_0 +$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$		$w(x) = 1,$ $x \in [-\pi, \pi]$

В некоторых задачах возникает необходимость приблизить функцию с использованием конечного числа базисных функций. В этом случае приближение функции можно записать следующим образом [2]:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(x),$$

где N — это конечное число членов, которое определяется в зависимости от конкретной задачи. Формула для вычисления коэффициентов c_k при этом остается прежней. При увеличении количества базисных функций N точность аппроксимации функции возрастает. Однако эта точность зависит от следующих факторов: 1) выбор базисных функций; 2) сложность функции. При приближении функции $f(x)$ с помощью конечного числа базисных функций $\varphi_k(x)$ важным аспектом является оценка точности полученного приближения. Обычно для этого используют различные показатели отклонения между точными значениями функции $f(x)$ и их аппроксимации:

$$deviations_i = |f(x_i) - f_{approx}(x_i)|$$

На основе этого можно вычислить следующие показатели:

Минимальное отклонение $\delta_{min} = \min_i |f(x_i) - f_{approx}(x_i)|$

Максимальное отклонение $\delta_{max} = \max_i |f(x_i) - f_{approx}(x_i)|$

Среднее отклонение

$$\delta_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i) - f_{approx}(x_i)|$$

N – число точек.

Приведем примеры аппроксимации нескольких функций. Сначала аппроксимируем функцию $f(x) = \cos(\pi x)$ с помощью многочленов Чебышёва на интервале $[-1; 1]$. Весовая функция: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Коэффициенты c_k :

Для $k = 0$:
$$c_0 = \frac{\int_{-1}^1 f(x) \cdot T_0(x) \cdot w(x) dx}{\int_{-1}^1 T_0^2(x) \cdot w(x) dx}$$

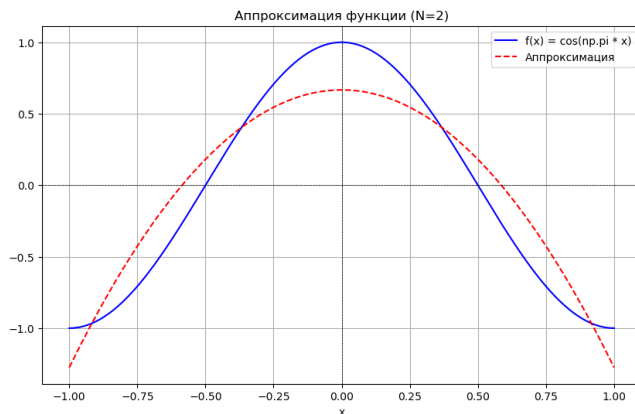
Для $k \geq 1$:

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(\pi x) \cdot T_k(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

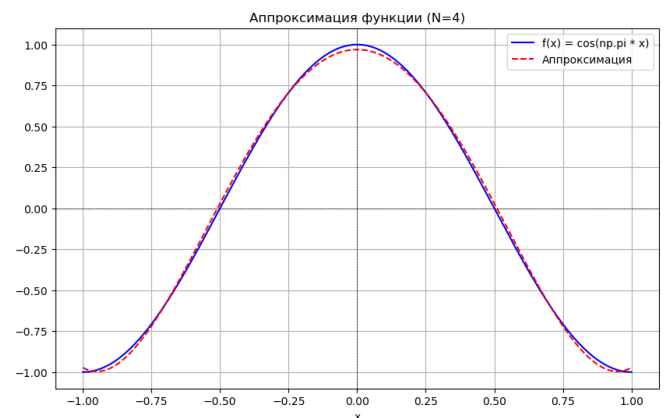
Вычисление интегралов может быть выполнено с помощью численных методов, в данной работе мы воспользуемся языком программирования Python и библиотекой SciPy, чтобы упростить процесс вычисления.

Приведем примеры аппроксимации при различных значениях N .

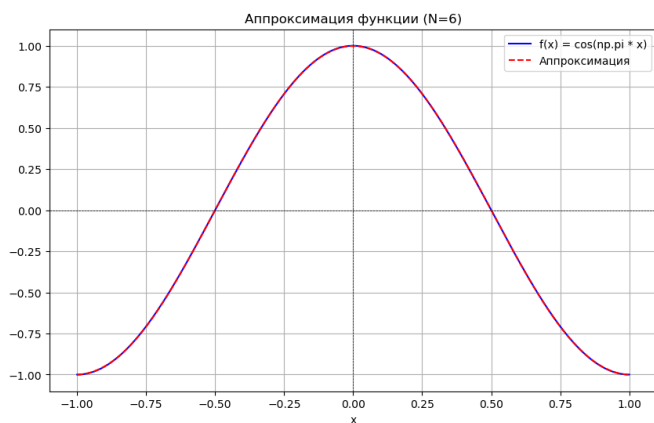
При $N=2$:



При $N=4$:



При $N=6$:



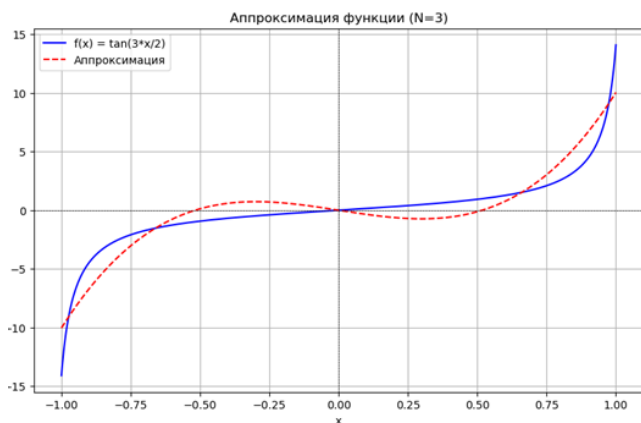
Ниже представлены оценки погрешности аппроксимации при различных N:

N	Минимальное отклонение	Максимальное отклонение	Среднее отклонение
1	2.378784e-03	1.304222e+00	6.663760e-01
2	1.069940e-03	3.333623e-01	1.976091e-01
3	1.069940e-03	3.333623e-01	1.976091e-01
4	9.097009e-05	3.052287e-02	1.876404e-02
5	9.097009e-05	3.052287e-02	1.876404e-02
...	...	...	...
96	2.112754e-13	1.007725e-10	9.117645e-12
97	2.108314e-13	1.007721e-10	9.117645e-12
98	9.658940e-15	1.189654e-10	8.960783e-12
99	1.421085e-14	1.189685e-10	8.960783e-12
100	5.223599e-14	1.382517e-10	9.582446e-12

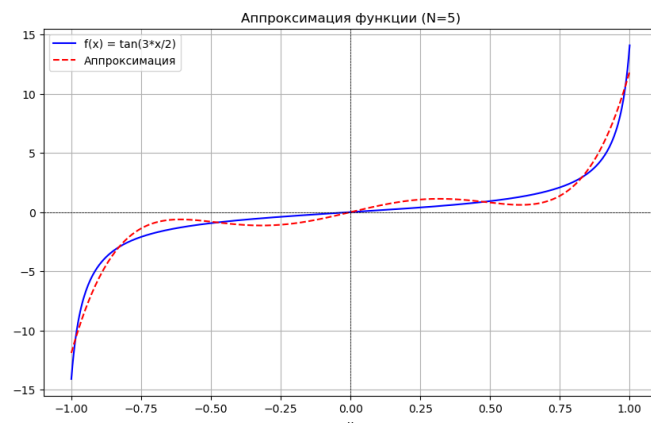
Аппроксимируем функцию $f(x) = \tan\left(\frac{3x}{2}\right)$ с помощью многочленов

Чебышёва на интервале $[-1; 1]$. Примеры аппроксимации при различных значениях N.

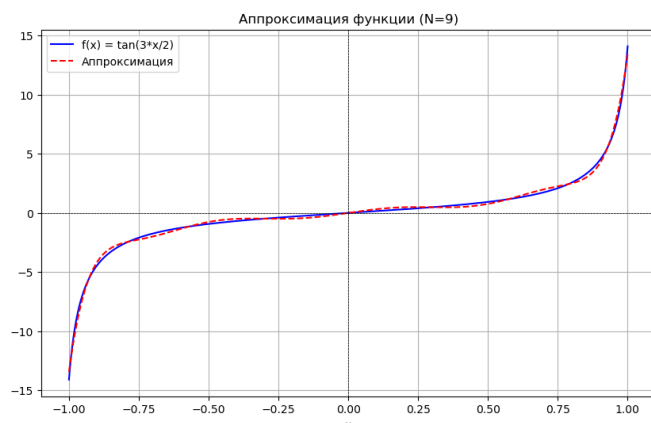
При N=3:



При N=5:



При $N=9$:



Ниже представлены оценки погрешности аппроксимации при различных N :

N	Минимальное отклонение	Максимальное отклонение	Среднее отклонение
1	1.024936e-02	7.486983e+00	1.872311e+00
2	1.024936e-02	7.486983e+00	1.872311e+00
3	1.037072e-02	4.057158e+00	1.018647e+00
4	1.037072e-02	4.057158e+00	1.018647e+00
5	8.239660e-03	2.199813e+00	5.537528e-01
...	...	...	...
96	5.327960e-13	1.332049e-09	1.252585e-10
97	1.877887e-12	1.593980e-09	1.310205e-10
98	1.894152e-12	1.593964e-09	1.310205e-10
99	1.906697e-12	1.858384e-09	1.311017e-10
100	1.928402e-12	1.858362e-09	1.311017e-10

Представленные результаты подтверждают сходимость аппроксимации по количеству задействованных базисных функций N .

Список литературы

1. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков Численные методы. - 8-е изд. - Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. - 637 с. URL: <https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf>
2. В.В. Залипаев, Д.Р. Гулевич Численные методы в физике и технике. – СПб.: Университет ИТМО, 2020. - 211 с. URL: <https://books.ifmo.ru/file/pdf/2627.pdf>
3. С.П. Шарый Курс вычислительных методов. - Новосибирск: Новосибирский государственный университет Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 2025. - 211 с. URL: <http://mathscinet.ru/files/SShary.pdf>
4. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. - М.; Л.: Гос. изд.-во техн.-теорет. лит., 1949. - 688 с. URL: <https://djvu.online/file/XRGk7xeV5Ob9B>
5. В.Л. Гончаров Теория интерполирования и приближения функций. - 2-е изд. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. - 329 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=793148>

Использование В-сплайнов в задачах аппроксимации.

Политова Алеся Сергеевна

Пензенский государственный университет. Ул. Красная, 40, г. Пенза,
Россия.

alesapolitova2699@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена применению открытых В-сплайнов в задачах теории приближения. Приведены основные определения и свойства В-сплайнов, их точность и область применения, а также примеры аппроксимации двух функций с построением графиков.

Ключевые слова: аппроксимация функции, В-сплайны, свойства, открытый В-сплайн, построение В-сплайна.

The use of B-splines in approximation problems.

Politova Alesya Sergeevna. Penza State University. Krasnaya St., 40, Penza,
Russia.

alesapolitova2699@gmail.com

Abstract. The paper is devoted to the application of open B-splines in problems of approximation theory. The basic definitions and properties of B-splines, their accuracy and scope of application, as well as examples of approximating two functions with graphs are given.

Keywords: function approximation, B-splines, properties, open B-spline, B-spline construction.

Введение

В-сплайны, или базисные сплайновые функции, представляют собой математические функции, которые позволяют создавать гладкие кривые и поверхности, которые аппроксимируют заданные наборы данных. Их главными преимуществами являются высокая степень гладкости, локальность изменения и возможность гибкого управления формой конструкции. Эти свойства делают В-сплайны особенно полезными в задачах, где требуются как точность, так и возможность манипуляции. Они строятся на основе набора контрольных точек и узлов, которые определяют

их форму и поведение. Основное свойство В-сплайнов заключается в том, что они представляют собой линейные комбинации базисных функций, которые обеспечивают гладкость и высокий уровень контроля над формой кривой или поверхности.

Базисные функции В-сплайнов — это ключевые компоненты, используемые для построения В-сплайновых кривых и поверхностей. Эти функции обеспечивают удобный способ определения и манипуляции кривыми и представляют собой линейные комбинации контрольных точек. В-сплайны строятся на основе порядка и узлового вектора.

Обозначим через $N_{i,p}(t)$ В-сплайновую базисную функцию p -го порядка, связанного с узловым вектором $\{t, t_1, \dots, t_{n+p}\}$, где n — количество контрольных точек. Базисные функции В-сплайнов задаются рекурсивно следующим образом:

Порядок 0 (константные функции):

$$N_{i,p}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{если } t \notin (t_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (1)$$

Порядок p :

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (2)$$

Где $N_{i,p-1}(t)$ и $N_{i+1,p-1}(t)$ - базисные функции более низкого порядка, t - параметр. [1]

Основные свойства В-сплайнов

Гладкость: В-сплайны обладают высокой степенью гладкости, что позволяет создавать кривые и поверхности без резких переходов. Степень гладкости зависит от порядка сплайна.

Локальность: Изменение одной контрольной точки влияет только на часть кривой, что упрощает процесс редактирования и управления формой. Это свойство особенно полезно в интерактивных приложениях.

Непрерывность: В-сплайны обладают хорошей непрерывностью, которая может быть контролируема. В зависимости от порядка сплайна, в точках стыка производная функции может быть непрерывна.

Типы В-сплайнов

1. Элементарные В-сплайны — представляют собой сплайны, основанные на замкнутом узловом векторе, который создает замкнутую кривую.

Характеристики: Первая и последняя контрольные точки соединены. Обеспечивают непрерывность и гладкость на всей длине кривой. Узловой вектор включает повторяющиеся значения в начале и в конце, чтобы обеспечить замыкание.

2. Открытый В-сплайн — это В-сплайн с открытым узловым вектором. Открытый узловой вектор отличается от обычного тем, что первый и последний узлы имеют повторяющиеся значения, что гарантирует, что кривая начнется и закончится в контрольных точках.

3. Периодические В-сплайны — представляют собой разновидность В-сплайнов, которые обеспечивают непрерывность кривой не только в пределах диапазона контрольных точек, но и связывают начало и конец кривой, создавая замкнутую (циклическую) форму. Они обладают периодическим узловым вектором. Это означает, что первый и последний сегменты кривой совпадают.

Узловой вектор: Для В-сплайна степени p и n контрольных точек, периодический узловой вектор может быть записан как:

$$U=[0,0,\dots,0,1,2,\dots,n,n,n,\dots,n]$$

Характеристики: Узловой вектор включает повторяющиеся секции, которые делают кривую периодической.

4. Нормализованные периодические В-сплайны — представляют собой специальный тип периодических В-сплайнов, где узлы упорядочены или нормализованы для более удобного представления.

Характеристики: Узловой вектор упорядочен, что позволяет равномерно располагать сегменты на диапазоне, создавая баланс в общем виде сплайна. Обеспечивают легкость в вычислении и поддерживают периодичность.

5. Составные В-сплайны — это комбинации нескольких В-сплайнов, объединенных вместе. Они могут иметь разные параметры и порядок в зависимости от области их применения.

Характеристики: Позволяют моделировать сложные формы и поверхности, используя несколько разных В-сплайнов для разных участков. Каждый сегмент может иметь свой порядок и узловой вектор. [2]

Пример задачи

В качестве примера рассмотрим открытые В-сплайны. Вектор параметризации в этом случае:

$$T = \{a, \dots, a, t_{p+2}, \dots, t_{m-p-1}, b, \dots, b\}$$

a и b - кратные узлы, встречаются $(p + 1)$ раз.

Предположим, что нам необходимо аппроксимировать функцию $f(x) = \cos(x)$ на интервале $[-\pi, \pi]$ открытым В-сплайном.

Шаг 1. Выбор контрольных точек:

Возьмем ряд контрольных точек на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$x = [-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi],$$

$$y = [\cos(-\pi), \cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(0), \cos(\frac{\pi}{2}), \cos(\pi)] = [-1, 0, 1, 0, -1]$$

Шаг 2. Определение узловой сетки

Для открытого В-сплайна готовим узлы таким образом, чтобы сохранить локальные особенности:

$$t = [-\pi, -\pi, -\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \pi, \pi, \pi]$$

Шаг 3. Построение В-сплайна

В данном случае воспользуемся открытым В-сплайном 3 порядка, который имеет формулу:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{m-1} N_{i,3}(t)y_i$$

Где m - число контрольных точек, $N_{i,3}(t)$ - базисные функции третьего порядка, y_i - координаты контрольных точек.

Подставляя y_i получаем:

$$S(t) = N_{0,3}(t) \cdot (-1) + N_{1,3}(t) \cdot 0 + N_{2,3}(t) \cdot 1 + N_{3,3}(t) \cdot 0 + N_{4,3}(t) \cdot (-1)$$

Подстановка конкретных значений: например, $t = \frac{\pi}{4}$. Предположим, что мы хотим определить значение сплайна в точке . Тогда мы подставляем t в каждую базовую функцию и считаем сумму произведений:

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = N_{0,3}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-1) + N_{1,3}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 0 + N_{2,3}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 + N_{3,3}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 0 + N_{4,3}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-1)$$

Для построения $N_{i,3}(t)$ воспользуемся формулами (1) - (2).

Результат (Рисунок 1):

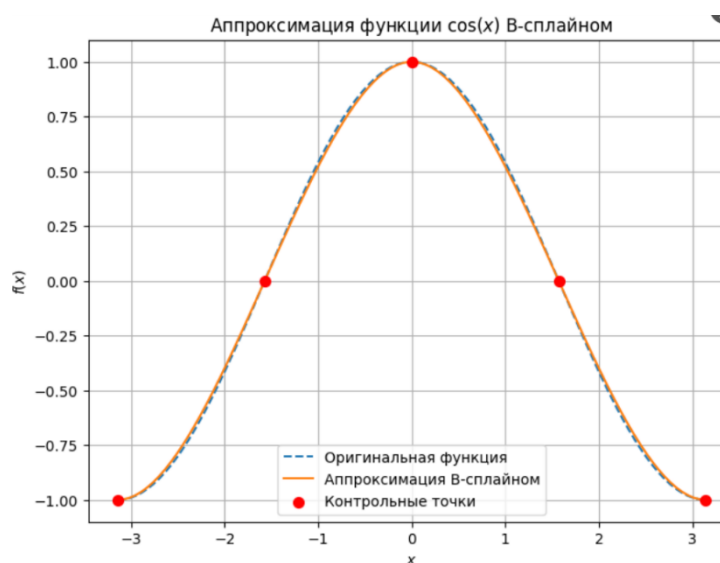


Рисунок 1-Аппроксимация $\cos(x)$

Данный график показывает, что при минимальном количестве контрольных точек аппроксимация функции В-сплайном дает нам практически точный результат.

Попробуем увеличить количество точек. Проведенное исследование показало, что при использовании большого количества контрольных точек мы получаем более точную аппроксимацию. (Таб. 1)

Количество контрольных точек	5	10	50
Погрешность	2.00e-02	5.00e-03	6.97e-06

Таблица 1- погрешность аппроксимации функции $\cos(x)$

Рассмотрим еще один пример: аппроксимируем функцию $x \cdot \ln(x) \cdot e^{-x}$ на интервале $[0,8; 5]$

Контрольные точки:

[0.8, 1.5, 2.5, 3.75, 5]

Вектор параметризации:

$t = [0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 1.5, 2.5, 3.75, 5, 5, 5, 5]$

Результат (Рисунок 2):

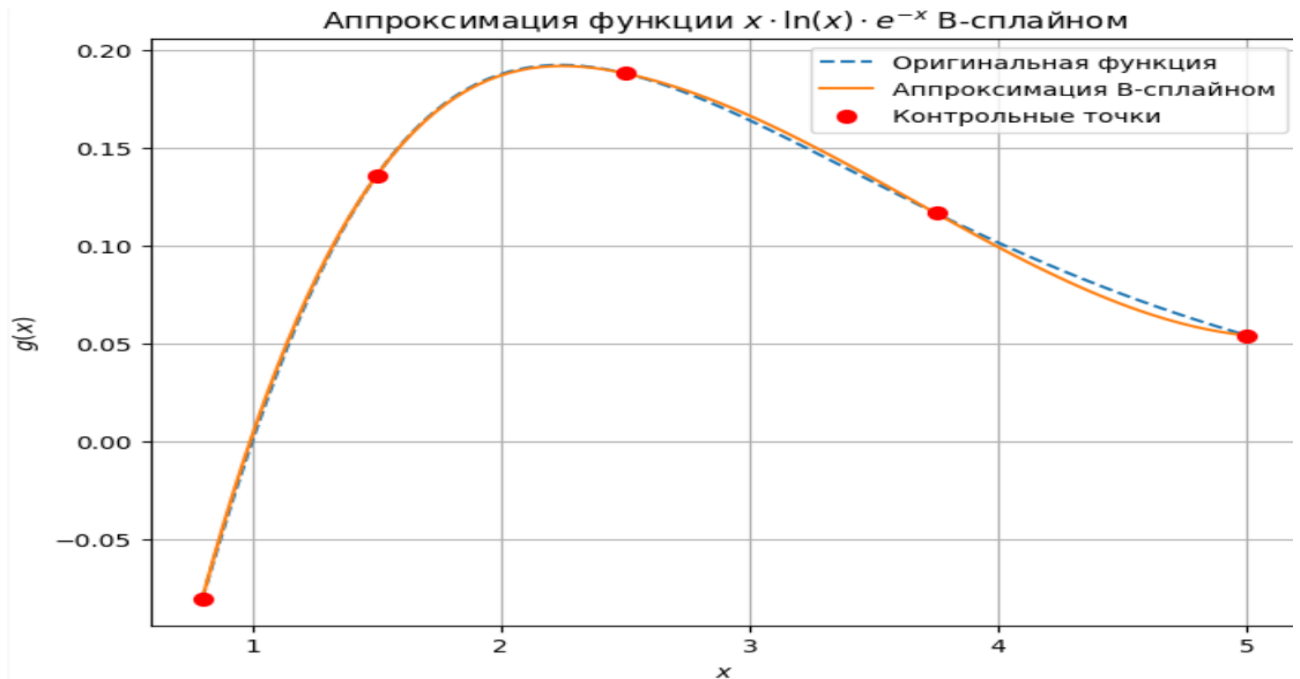


Рисунок 2-Аппроксимация функции $x \cdot \ln(x) \cdot e^{-x}$

Данный график показывает, что применение этого метода для минимального количества контрольных точек дает большое отклонение от начальной функции. Увеличим число разбиений. Как результат, аппроксимация более точна.

Количество контрольных точек	5	10	50
Погрешность	5.21e-03	1.41e-03	6.35e-06

Таблица 2- погрешность аппроксимации функции $x \cdot \ln(x) \cdot e^{-x}$

Заключение

Метод аппроксимации функций с помощью В-сплайнов является мощным инструментом для представления сложных аналитических выражений и обработки экспериментальных данных в различных областях науки и

техники. Благодаря своей универсальности и способности обеспечивать высокую точность приближения, В-сплайны широко применяются в компьютерной графике, инженерии, экономике и многих других дисциплинах. В ходе исследования были рассмотрены ключевые аспекты построения В-сплайновой аппроксимации, включая выбор оптимального количества узлов и порядок сплайна.

Список литературы

4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
5. Задорожный А. Г., Киселев Д. С. ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ OPENGL. - Новосибирск: НГТУ, 2019. - 88 с.

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Крымова Елена Александровна

г. Пенза ПГУ

krymova06@list.ru

Аннотация: В работе исследуются методы аппроксимации недифференцируемых функций, их математические основы, преимущества и ограничения при практическом применении. Проведен анализ различных подходов к аппроксимации функций с разрывами производных.

Ключевые слова: недифференцируемые функции, аппроксимация, функции с ограниченной вариацией, фрактальные функции, кусочно-линейная интерполяция, сплайн-интерполяция, локально-взвешенная регрессия.

APPROXIMATION OF NON-DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Krymova Elena Alexandrovna

Penza, Penza State University

krymova06@list.ru

Abstract: The paper examines the methods of interpolation of non-differentiable functions, their mathematical foundations, advantages and limitations in practical application. The analysis of various approaches to interpolation of functions with discontinuities of derivatives is carried out.

Keywords: nondifferentiable functions, approximation, functions with limited variation, fractal functions, piecewise linear interpolation, spline interpolation, locally weighted regression.

В отличие от хорошо разработанной теории аппроксимации гладких функций, методы работы с негладкими функциями требуют специальных подходов и глубокого понимания их структурных особенностей.

Классификация особенностей недифференцируемых функций

Существует несколько типов недифференцируемости, которые существенно влияют на способы интерполяции и аппроксимации. Рассмотрим основные типы:

Точки разрыва производных — это точки, в которых производная функции не существует или имеет разрыв. Например, функция может быть непрерывной, но её производная может существовать лишь на части интервала.

Например:

Функция Хевисайда $H(x)$:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной, но её производная в точке $x = 0$ не существует, так как существует резкий скачок. В точке $x = 0$ имеется разрыв первой производной.

Функции с ограниченной вариацией — это функции, чьи производные в среднем могут быть бесконечно большими в определённые моменты времени. Это не означает, что функция не дифференцируема во всех точках, но её поведение можно аппроксимировать методами с учётом этих ограничений.

Например:

Модуль функции $f(x)$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной, но её производная не существует в точке $x = 0$. На остальных участках производная представлена как:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Суммарная вариация этой функции, определяемая как интеграл от абсолютной производной, конечна:

$$V(a, b) = \int_a^b |f'(x)| dx < \infty$$

Это свойство позволяет использовать методы, минимизирующие вариацию, для аппроксимации функции.

Фрактальные функции — функции, которые являются примерами не дифференцируемых объектов, обладающих сложной структурой на всех масштабах, например, график таких функций может иметь бесконечно много углов, но в то же время быть вполне определённым и непрерывным.

Например:

Функция Вейля $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}} \sin(2\pi nx)$$

где a_n -случайные коэффициенты и α - параметр, контролирующий степень фрактальности.

График этой функции представляет собой самоподобную структуру и имеет бесконечное количество углов. Несмотря на то, что функция является непрерывной, она недифференцируема в любой точке.

Классификация этих функций позволяет выделить несколько подходов для их интерполяции, каждый из которых имеет свои особенности и ограничения.

Точки разрыва производных могут существенно влиять на точность интерполяции, поскольку в этих точках традиционные методы, предполагающие гладкость функции, теряют свою эффективность.

Точки разрыва могут приводить к возникновению осцилляций в интерполируемых данных, что в свою очередь снижает точность. Однако, учитывая характер разрывов и корректируя подходы к аппроксимации, можно эффективно минимизировать эти осцилляции.

Перед тем как приступить к аппроксимации функции, необходимо найти точки разрыва производной. Основываясь на определении дифференцируемости функции в точке x_0 : производная в точке существует, если существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

В точках недифференцируемости левосторонний и правосторонний пределы производной не совпадают:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Таким образом, необходимо разбить интервал на равномерные узлы и для каждой точки посчитать и сравнить левую и правую производную.

Методы интерполяции недифференцируемых функций

2.1. Кусочно-линейная интерполяция

Это самый простой метод для работы с недифференцируемыми функциями. Он соединяет соседние точки линиями, образуя непрерывную ломаную.

Формула кусочно-линейной интерполяции [1]:

На интервале между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) функция задаётся как:

$$f(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

2.2. Полиномиальная аппроксимация

Теорема о полиномиальной аппроксимации методом наименьших квадратов [1]

Для функции $f(x)$, заданной на наборе точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, полином степени m :

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

находит такие коэффициенты $\{a_j\}$, что минимизируют сумму квадратичных ошибок:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - P_m(x_i))^2$$

Коэффициенты определяются из системы нормальных уравнений:

$$\sum_{i=0}^m a_j \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k \quad k = 0, 1, \dots, m$$

или в матричной форме:

$$A^T A \cdot a = A^T y$$

где матрица Вандермона A :

$$A_{i,j} = x_i^j$$

2.3. Кубическая сплайн-интерполяция

Определение

Кубический сплайн $S(x)$, для функции $f(x)$, заданной на узлах $\{x_i\}_{i=0}^n$, имеет вид на интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_1) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Для гладкости необходимо соблюдение условий:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1})$$

$$c_i = \frac{1}{2} M_i \quad (M_i = S''(x_i))$$

$$d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

Где $h_i = x_{i+1} - x_i$

2.4. Тригонометрическая аппроксимация (ряды Фурье)

Теорема о разложении в ряды Фурье [2]

Для периодической функции с периодом 2π :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

2.5. Локально-взвешенная регрессия

Формула оценки

$$\widehat{f(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^n w_i(x)}$$

где веса задаются функцией:

$$w_i(x) = \exp \left(- \left(\frac{|x - x_i|}{h} \right)^2 \right)$$

с параметром сглаживания h .

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы(для 100 узлов):

Кусочно-линейная аппроксимация показала наилучшие результаты среднеквадратической ошибки(CO) для трех из четырех функций:

- Модуль (CO = 0.000087)
- Кусочная функция с разрывом производной (CO = 0.000902)
- Функция Хевисайда (CO = 0.000884)

Кубические сплайны показали лучший результат для функции Вейля ($CO = 0.025265$) и были вторыми по точности для остальных функций.

Ряды Фурье с 10 членами хорошо справились с аппроксимацией модуля ($CO = 0.000379$), но показали очень плохие результаты для кусочной функции с разрывом производной ($CO = 0.997044$).

Полиномиальная аппроксимация показала наихудшие результаты для большинства функций, причем:

- Для функций с разрывами производных (модуль, кусочная, Хевисайда) качество аппроксимации улучшалось с повышением степени полинома
- Для функции Вейля даже полином 7-й степени давал большую ошибку ($CO = 0.586630$)

Локальная регрессия с параметром сглаживания 0.2 показала умеренные результаты для функции Хевисайда ($CO = 0.009841$), но для других функций была менее эффективна.

Наибольшие трудности у всех методов вызвала аппроксимация функции Вейля, которая известна своей "фрактальной" природой и недифференцируемостью.

Ряды Фурье особенно плохо справились с кусочной функцией с разрывом производной, что связано с эффектом Гиббса вблизи точек разрыва.

По метрике **максимальной ошибки (MAX)** кубические сплайны показали наименьшие значения для модуля ($MAX = 0.029660$), что говорит о их способности хорошо сглаживать функции.

Общий вывод: для аппроксимации функций с особенностями (разрывы, негладкие участки) наиболее эффективными оказались кусочно-линейная аппроксимация и кубические сплайны. Полиномиальные методы и ряды Фурье показали существенно худшие результаты, особенно для функций с разрывами и быстрыми изменениями. Метод локальная регрессия с правильным подбором параметра сглаживания может быть эффективен для некоторых типов функций, но требует тщательной настройки.

Список литературы

1. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 688 с.

2. Шарый, С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый; Новосибирский государственный университет, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий. – Новосибирск: [б. и.], 2025. – 785 с.

3. Численные методы

УДК 517.9

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Татьяна Владимировна Грунина, Данила Геннадьевич Нестеров

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
eliseevat@mail.ru

Аннотация. Рассматривается численное решение задачи теплопроводности в области с подвижными границами.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, подвижные границы, модифицированная схема Кранка-Николсона.

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING HOMOGENEOUS EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE FOR A DOMAINE WITH MOVING BOUNDARIES

Tatiana V. Grunina, Danila G. Nesterov
Penza State University, Penza, Russia
eliseevat@mail.ru

Abstract. The numerical solution of the heat conduction problem in a domain with moving boundaries is considered.

Keywords: heat equation, moving boundaries, modified Crank-Nicholson scheme.

Задачи математической физики с подвижными границами – это задачи об отыскании закона перемещения для некоего внутреннего фронта $\Gamma(t)$, разделяющего физически различные среды Ω_1 и Ω_2 . При этом поведение основной функции $F(x, t)$, $F(x, t), x \in R^n$, связанной с моделируемым процессом, описывается в областях Ω_1 и Ω_2 уравнениями одного типа. Физические различия между средами Ω_1 и Ω_2 учитываются с помощью коэффициентов в уравнениях для $F(x, t)$, терпящей сильный или слабый разрыв на внутренней границе раздела $\Gamma(t)$.

По этой причине поиск общих решений для задач с подвижной границей становится одними из актуальных исследований. Это приводит к появлению

новых математических моделей и связанных с ними методов решения соответствующих уравнений.

В работе [2] рассматривается модифицированная схема Кранка – Николсона численного решения краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с подвижными границами с заданной линейной зависимостью $x=a(t)$.

В настоящей работе численная схема распространена на случай, когда на подвижной границе задан закон более общего вида.

Рассмотрим первую краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности с подвижными границами. Пусть границы области, в которой следует решить уравнение математической физики $0 \leq l \leq L$, представляют собой не задание значений функции $u(t, x)$, при $x=0$ и $x=l$, а задаются в виде функций на соответствующих границах области L . Таким образом, имеем постановку первой краевой задачи с подвижными границами:

$$u(t, b(t)) = \varphi_1(t), \quad x = b(t), \quad 0 < t \leq T; \quad u(t, a(t)) = \varphi_2(t), \quad x = a(t), \quad 0 < t \leq T,$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – функции, заданные в некотором промежутке времени $t_0 \leq t \leq T$, в котором изучается процесс; $b(t)$ и $a(t)$ – функции от времени.

Модифицированная схема Кранка-Николсона

Рассмотрим первую краевую задачу с подвижной границей, когда $a(t) = e^{kt} - 1$, $b(t) = 0$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{x=0} = e^{\alpha^2 t}, u|_{x=a(t)} = e^{\alpha(a+\alpha)t}. \end{cases}$$

Численное решение можно получить, применив неявную разностную схему [3]. В этом случае на каждом слое для нахождения неизвестных значений функции в узлах сетки необходимо решать СЛАУ из $(i-1)$ уравнений, где i – номер слоя по времени, $\sigma_i = \tau_i / h^2$, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$. Для решения таких систем был применен метод Жордана-Гаусса.

При использовании более точной разностной схемы Кранка-Николсона возникает проблема - граничные узлы становятся нерегулярными. Во избежание этого предлагается использовать модифицированную схему Кранка-Николсона и решать следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} u_{i,0} = e^{\alpha^2 t_i}, u_{i,i} = e^{\alpha(a+\alpha)t_i} \\ -\frac{1}{2}\sigma u_{i+1,k-1} + (1+\sigma)u_{i+1,k} - \frac{1}{2}\sigma u_{i+1,k+1} = \frac{1}{2}\sigma u_{i,k-1} + (1-\sigma)u_{i,k} + \frac{1}{2}\sigma u_{i,k+1}, \quad k = \overline{1, i-1} \\ -\sigma u_{i+1,k-1} + (1+2\sigma)u_{i+1,k} - \sigma u_{i+1,k+1} = u_{i,k}, \quad k = i \end{cases}$$

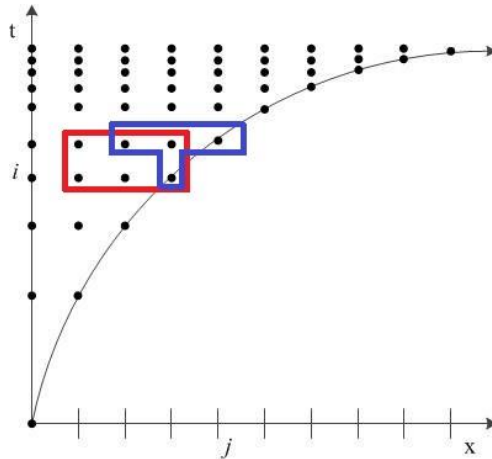


Рис. 1. Графическая интерпретация модифицированной схемы Кранка-Николсона.

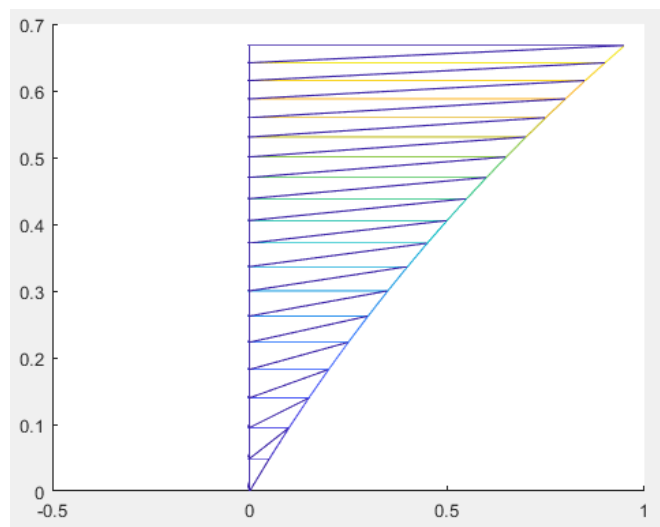


Рис. 2. Расчетная область.

Для решения задачи мы использовали модифицированную схему Кранка-Николсона с двумя шаблонами. Первый шаблон – шеститочечный, второй четырехточечный (рис. 1). В нашей задаче использовалась сетка равномерная по x и неравномерная по t (рис. 2).

Также было получено численное решение первой краевой задачи с двумя подвижными несимметричными границами, изменяющимися по экспоненциальному закону. Применение разностной схемы в этом случае вызывает некие сложности, поскольку шаг по пространству в первом

квадранте и во втором – неодинаков. Перейдя к новым независимым переменным, получаем задачу для уравнения параболического типа с одной подвижной границей.

Библиографический список

1. Касаткин А. Е. Математическое моделирование и численное решение плоских квазистационарных задач параболического типа с подвижной границей/ А. Е. Касаткин. – Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2015. – 192 с.
2. Болтвина Е.К. Первая краевая задача с подвижными границами для уравнения теплопроводности / Е. К. Болтвина // Всероссийская конференция. – Иркутск, 2013. – 187 с.
3. Самарский А. А. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский, А. В. Колбода, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский. – Минск, 1996. – 267 с.

УДК 51-7

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ЗЕЙДЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Паткин Тимур Сергеевич

Пензенский государственный университет, **Пенза, Россия**
tspatkin962@yandex.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается итерационный метод Зейделя, применяемый для численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Изложены основные принципы метода, условия сходимости и особенности по сравнению с методом Якоби. Представлена реализация на языке Python с подробным анализом алгоритма и примером применения.

Ключевые слова: метод Зейделя, итерационные методы, численные методы, система линейных уравнений, Python

SEIDEL ITERATIVE METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATION

Patkin Timur Sergeevich,

Penza State University, Penza, Russia
tspatkin962@yandex.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru

Abstract. The Seidel iterative method used for the numerical solution of systems of linear algebraic equations is considered. The fundamental principles of the method, convergence conditions, and a comparison with the Jacobi method are presented. A Python implementation is provided with a detailed analysis of the algorithm and a practical example.

Keywords: Seidel method, iterative methods, numerical methods, system of linear equations, Python

Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) представляет собой одну из краеугольных задач прикладной математики и вычислительной техники.

Во многих инженерных, физических и экономических моделях возникают системы, содержащие десятки, сотни, а в отдельных случаях и миллионы уравнений, решение которых необходимо получить с высокой степенью точности [1, 2].

Цель настоящей работы заключается в рассмотрении особенностей применения метода Зейделя для решения СЛАУ. В качестве задач можно выделить: формализацию метода, описание условий сходимости, реализацию алгоритма на языке Python и анализ полученных результатов.

Теоретические основы метода Зейделя

Метод Зейделя относится к числу простейших итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений вида [1, 2]:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где $A \in R^{n \times n}$ - невырожденная квадратная матрица, $\bar{x} \in R^n$ - вектор неизвестных, $\bar{b} \in R^n$ - вектор свободных членов.

Основу метода составляет разложение матрицы A на сумму трёх компонент:

$$A=D+L+U,$$

где D — диагональная матрица, содержащая элементы a_{ii} , L — строго нижняя треугольная матрица с элементами ниже главной диагонали; U — строго верхняя треугольная матрица.

Рекуррентная формула метода Зейделя имеет следующий вид [1, 2]:

$$\bar{x}^{k+1} = -(D + L)^{-1} \cdot U \cdot \bar{x}^{(k)} + (D + L)^{-1} \cdot \bar{b}$$

что эквивалентно последовательному вычислению каждого элемента $x_i^{(k+1)}$ по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)})$$

Метод Зейделя характеризуется быстрой сходимостью при выполнении определённых условий. Достаточным условием сходимости является диагональное преобладание матрицы A , то есть [1, 3]:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Альтернативно, сходимость обеспечивается, если матрица A симметрична и положительно определена.

В сравнении с методом Якоби, в котором используются только значения предыдущей итерации, метод Зейделя задействует вновь вычисленные компоненты в текущей итерации [1, 4]. Это позволяет, при прочих равных

условиях, добиться более быстрой сходимости и уменьшить количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

Реализация метода Зейделя на языке Python

В данном разделе представлена развёрнутая реализация метода Зейделя с пояснением всех этапов алгоритма. Программа написана на языке Python с использованием библиотеки NumPy, обладающей мощным функционалом для численных вычислений [4].

Подробный разбор алгоритма

В первую очередь реализуется функция `is_diagonally_dominant(A)`, выполняющая проверку матрицы на диагональное преобладание — важное условие сходимости метода Зейделя. Для каждой строки матрицы сравнивается абсолютное значение диагонального элемента с суммой модулей остальных элементов строки. Возвращается логическое значение.

```
def is_diagonally_dominant(A):  
    for i in range(len(A)):  
        diag = abs(A[i][i])  
        off_diag = sum(abs(A[i][j]) for j in range(len(A)) if j != i)  
        if diag <= off_diag:  
            return False  
    return True
```

Основная функция `gauss_seidel` принимает на вход матрицу коэффициентов `AAA`, вектор свободных членов `bbb`, начальное приближение `x0x_0x0`, допустимую погрешность `tol`, максимальное число итераций, а также логический параметр `verbose` для поэтапного вывода.

Внутри функции все входные данные преобразуются в массивы NumPy с типом `float` для обеспечения числовой точности. Если пользователь не задал начальное приближение, оно по умолчанию инициализируется нулевым вектором.

На каждом шаге итерационного процесса переменные x^{k+1} вычисляются с использованием обновлённых значений, что и составляет суть метода Зейделя. Формально для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ вычисляется:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot (b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)})$$

```
for i in range(n):  
    s1 = sum(A[i][j] * x_new[j] for j in range(i))  
    s2 = sum(A[i][j] * x[j] for j in range(i + 1, n))  
    x_new[i] = (b[i] - s1 - s2) / A[i][i]
```


Проверка корректности

До начала итерационного процесса выводится предупреждение, если матрица не удовлетворяет условию диагонального преобладания. Это позволяет заранее предсказать возможные проблемы со сходимостью.

Также предусмотрено ограничение по числу итераций (`max_iterations`), предотвращающее заикливание при расходимости или медленной сходимости.

Критерии остановки

В качестве критерия остановки используется бесконечная норма вектора разностей между двумя последовательными приближениями [1, 2]:

$$\|x^{(k+1)} - x^k\|_{\infty} < \varepsilon$$

Гарантируется, что итерации прекращаются при достижении заданной точности `tol` либо по исчерпанию допустимого числа шагов.

```
diff_norm = np.linalg.norm(x_new - x, ord=np.inf)
```

```
if diff_norm < tol:
```

```
    return x_new, iteration, True
```

Пример решения

Пример ниже иллюстрирует решение системы из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 + 3x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов и вектор свободных членов заданы в виде массивов Python:

```
A = [[10, -1, 2, 0],
```

```
      [-1, 11, -1, 3],
```

```
      [2, -1, 10, -1],
```

```
      [0, 3, -1, 8]]
```

```
b = [6, 25, -11, 15]
```

Результатом работы алгоритма становится вектор приближённого решения, число итераций, а также булев индикатор, указывающий, достигнута ли сходимость. Например:

Итерация 21: $x = [1. \ 2. \ -1. \ 1.]$

Сходимость достигнута.

Примеры сходимости в зависимости от числа итераций

На приведённом графике представлена динамика сходимости метода Зейделя при решении системы из четырёх линейных уравнений с матрицей, обладающей диагональным преобладанием. По оси абсцисс отложен номер итерации, по оси ординат — значения компонент вектора решения. Каждая кривая отражает изменение соответствующей переменной x_i на каждом шаге.

График построен на основе численного эксперимента, где зафиксированы промежуточные приближения на каждом шаге алгоритма. Видно, что все компоненты быстро стремятся к устойчивым значениям, что подтверждает сходимость метода при выполнении достаточных условий [1].

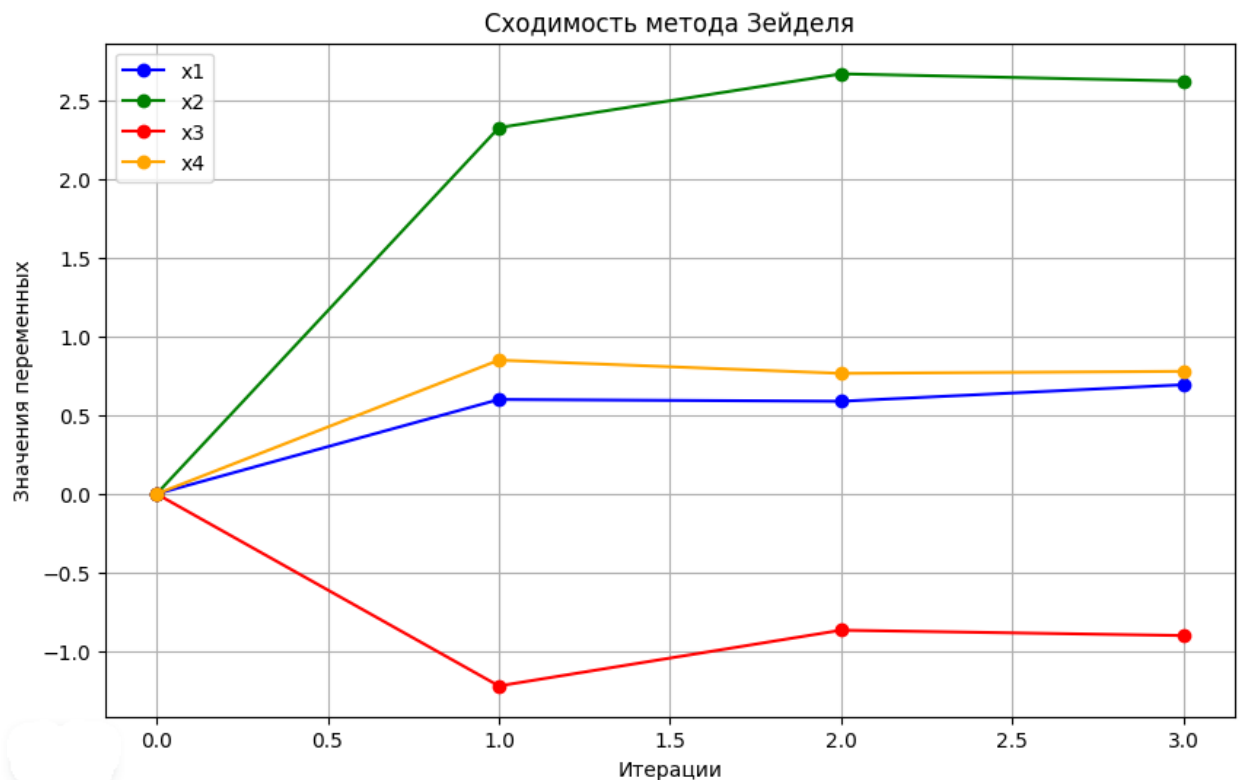


Рис. 1 График сходимости метода Зейделя

Анализ результатов

Анализируя работу метода на приведённом примере, можно отметить его эффективность: при разумном значении точности ($\varepsilon = 10^{-8}$) сходимость достигается за 15–25 итераций. Благодаря использованию новых значений переменных в пределах одной итерации метод демонстрирует более быструю сходимость по сравнению с методом Якоби [1]. Однако при отсутствии диагонального преобладания или положительной определённости матрицы решение может расходиться или замедляться.

Таким образом, реализация демонстрирует как прозрачность и наглядность итерационного процесса, так и высокую точность при умеренных вычислительных затратах. Метод Зейделя является надёжным инструментом

для решения СЛАУ в случаях, где невозможно или нецелесообразно применение прямых алгоритмов.

Заключение

В ходе проведённого исследования была подробно рассмотрена теория и реализация итерационного метода Зейделя для численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод продемонстрировал высокую вычислительную эффективность при решении разреженных и слабо связанных систем, характерных для прикладных задач математического моделирования, особенно в механике сплошных сред, теплопередаче и электрических цепях [3].

К числу очевидных достоинств метода следует отнести его концептуальную простоту, сравнительно низкие требования к объёму памяти, а также способность учитывать новейшие значения переменных в пределах одной итерации, что способствует ускорению сходимости по сравнению с методом Якоби.

Тем не менее, следует отметить и ограничения: метод не гарантирует сходимости при отсутствии диагонального преобладания или положительной определённости матрицы коэффициентов. Кроме того, при плохо обусловленных системах он может требовать большого количества итераций или вовсе расходиться [1].

Метод Зейделя занимает важное место в арсенале численных методов линейной алгебры и представляет собой эффективный инструмент в случае корректной предварительной оценки применимости. Его реализация легко адаптируется к конкретным инженерным и научным задачам.

Список литературы

1. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы. Численный анализ : учеб. для вузов. — М. : Академия, 2013. — 304 с. — (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика). — ISBN 978-5-7695-5089-8.
2. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с. — ISBN 5-9221-0479-9
3. Грехов Л. В., Мазья В. Г. Прикладные методы анализа и вычислительной математики. — СПб.: Лань, 2004. — 416 с.
4. Киреев В. И. Численные методы. Основы алгоритмизации: учебное пособие. — СПб.: Питер, 2021. — 256 с.

5. Чеботарёв П. Н. Численные методы: учебник для вузов. — 3-е изд., перераб. — М.: Академия, 2013. — 352 с.

МЕТОД КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Владислав Евгеньевич Бянкин¹

¹Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

¹Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия

¹Borck1@yandex.ru

Аннотация. В последнее время интерес исследователей все больше вызывает класс нагруженных интегральных уравнений. Такой класс интегральных характеризуется наличием нагрузочной функции, что усложняет их теоретический и численный анализ. Нагруженные интегральные уравнения применяются в математических моделях с эффектом «памяти». В работе исследуется уравнение Вольтерра с локально нагруженными интегральными операторами. Приведены теоремы о существовании единственности их решения. Рассмотрено применение кусочно-линейной аппроксимации точного решения, которая основана на методе коллокационного типа. Представлены несколько численных результатов решения модельных задач, подтверждающие сходимость метода.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, нагруженные интегральные уравнения, численные методы

PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION METHOD FOR SOLVING THE LOADED INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS

¹Vladislav Evgenievich Byankin

¹Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia.

¹Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

¹Borck1@yandex.ru

Annotation. In recent times, the class of loaded integral equations has attracted the interest of researchers more and more. Such a class of integral equations is characterised by the presence of a loading function, which complicates their theoretical and numerical analysis. Loaded integral equations are used in mathematical models with the ‘memory’ effect. In this paper we study the Volterra’s equation with locally loaded integral operators. Theorems on the existence of uniqueness of their solution are given. The application of piecewise linear approximation of the exact solution, which is based on the collocation-type method, is considered. Several numerical results of the solution of model problems are presented, confirming the convergence of the method.

Keywords: piecewise linear approximation, loaded integral equations, numerical methods

Понятие уравнений с нагрузками впервые было введено Адамом Нахушевым [1]. Исследование различных дифференциальных и интегральных уравнений с локальными и нелокальными нагрузками позволяет описывать более сложные процессы, в которых существенны эффекты пространственной и/или временной локализации и памяти.

Практическое применение таких уравнений описано в [1] представлена математическая модель, описывающая процесс переноса влаги в пористой почвенной среде при некоторых идеализированных предположениях. В других работах [2] разработаны методы решения краевых задач математической физики и биологии, в том числе моделирования процессов переноса частиц [3]. Особое внимание уделено задачам тепломассопереноса с конечной скоростью распространения возмущений и моделированию процессов фильтрации жидкости в пористых средах [4]. В работе [5] представлены дополнительные приложения аппроксимирующих методов и их применение в науке и технике.

Рассмотрим, следуя книге [1], интегральное уравнение вида:

$$a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) = \lambda \int_{t_0}^t K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in \Omega \in [t_0, T] \quad (1)$$

где $t_j, (j = 1, 2, \dots, m-1)$ – заданные фиксированные точки интервала $[t_0, T]$, причем $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$; λ – постоянный параметр; $f(t), a_j(t) \in C_{[t_0, T]}, i = \overline{0, m-1}$.

Это уравнение называется либо линейным одномерным интегральным уравнением Вольтерра с нагрузкой, либо просто интегральным уравнением Вольтерра с нагрузкой (ИУВН).

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$Vx(t) = f(t),$$

где оператор V , определен следующим образом:

$$Vx(t) \equiv a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) - \lambda \int_{t_0}^t K(t,s)x(s)ds,$$

Оператор V называется локально нагруженным оператором, поскольку он включает в себя след искомого решения через его значения $x(t_j)$ в определенных точках $t_j \in \Omega$, где $j = 1, 2, \dots, m-1$.

В качестве примечания отметим, что, насколько нам известно, разработка численных методов для решения нагруженных уравнений в научной литературе еще не сообщалось.

Мы рассмотрим уравнение (1) в пространстве $C_{[t_0, T]}$. Мы также предположим, что $a_0(t) \neq 0$. Тогда, не теряя общности, зададим $a_0(t) \equiv 0$ в уравнении (1). В этом случае ядро $K(s, t)$ обладает резольвентой $R(t, s, \lambda)$, которая может быть представлена представить в виде равномерно сходящегося ряда.

$$R(t, s, \lambda) = \lambda K_1(t, s) + \lambda^2 K_2(t, s) + \dots + \lambda^n K_n(t, s) + \dots \quad (2)$$

где $K_1(t, s) = K(t, s)$, $K_n(t, s) = \int_s^t K_1(t, z)K_{n-1}(z, s)dz$ и уравнение (1) сводится к следующему уравнению:

$$x(t, \lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} b_j(t, \lambda)x(t_j, \lambda) = F(t, \lambda), \quad (3)$$

$$F(t, \lambda) = f(t) + \int_{t_0}^t R(t, s, \lambda)f(s)ds,$$

$$b_j(t, \lambda) = a_j(t) + \int_{t_0}^t R(t, s, \lambda)a_j(s)ds.$$

Полагая в (3), что t последовательно равно $t_j, j = \overline{1, m}$, чтоб определить вектор нагрузки $\bar{c} = (x(t_1, \lambda), \dots, x(t_m, \lambda))^T$, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A(t_j, \lambda) \bar{c} = \bar{d}_\lambda, \quad (4)$$

где матрица $A(t_j, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_{ij} + b_j(t_i, \lambda)]_{ij=\overline{1, m}}$, δ_{ij} – символ Кронекера, $\bar{d}_\lambda = (F(t_j, \lambda), \dots, F(t_m, \lambda))^T$.

Если $\det A(t_j, \lambda) \neq 0$, то СЛАУ (4) имеет единственное решение: $\bar{c} = A^{-1} \bar{d}_\lambda$. В этом случае уравнение (1), очевидно, имеет единственное решение. Отсюда теорема:

Теорема 1. Предположим, что в уравнении (1) все входные функции непрерывны и $a_0(t) \equiv 1$. Пусть $\det A(t_j, \lambda) \neq 0$. Тогда ИУВН (1) имеет единственное решение для всех λ в классе $C_{[t_0, T]}$.

В работе [6] представлены дополнительные теоремы о существовании единственности решения. Также более подробно описан метод кусочно-линейной аппроксимации для интегрального уравнения Вольтерра с нагрузкой и представлены дополнительные численные эксперименты.

Численные эксперименты проводились с помощью написанного программного алгоритма на языке программирования C++. Для решения СЛАУ используется метод Гаусса-Жордана с выбором максимального элемента.

В качестве точного решения для модельного примера используется функция $x(t) = t \cdot \sin(t)$. Обозначим следующие неизвестные параметры уравнения (1) для модельного примера:

$$\begin{aligned} t \in [t_0, T] = [0, 1]; m = 6; t_1 = \frac{6}{10}; t_2 = \frac{12}{10}; t_3 = \frac{15}{10}; t_4 = \frac{25}{10}; t_5 = \frac{34}{10}; t_6 = T; \\ \lambda = \frac{1}{8}; a_0(t) = t^2 + 5; a_1(t) = e^t - 2; a_2(t) = 2 \cos(t^2) - 6; a_3(t) = t^2 + t + 4; \\ a_4(t) = 2^t; a_5(t) = 3^t - t; K(t, s) = 5 - 2s + t^3; \\ f(t) = (t^2 + 5)t \sin(t) + \frac{3(e^t - 2) \sin\left(\frac{3}{5}\right)}{5} + \frac{6(2 \cos(t^2) - 6) \sin\left(\frac{6}{5}\right)}{5} \\ + \frac{3(t^2 + t + 4) \sin\left(\frac{3}{2}\right)}{2} + \frac{5 \cdot 2^t \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\right)}{2} + \frac{17(3^t - t) \sin\left(\frac{17}{5}\right)}{5} - \frac{1}{2} \\ + \frac{\cos(t) t^4}{8} - \frac{\sin(t) t^3}{8} - \frac{\cos(t) t^2}{4} + \frac{t \sin(t)}{2} + \frac{5 \cos(t) t}{8} - \frac{5 \sin(t)}{8} + \frac{\cos(t)}{2} \end{aligned}$$

В таблице 1 приведены результаты метода для различных шагов, где используются следующие обозначения: h – шаг дискретизации, $\varepsilon_h = \|X_N(t) - x(t)\|_{C_{[t_0, T]}}$ – ошибка, и

$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{h_{k-1}}}{\varepsilon_{h_k}}}{\ln \frac{h_{k-1}}{h_k}} - \text{порядок сходимости.}$$

Таблица 1

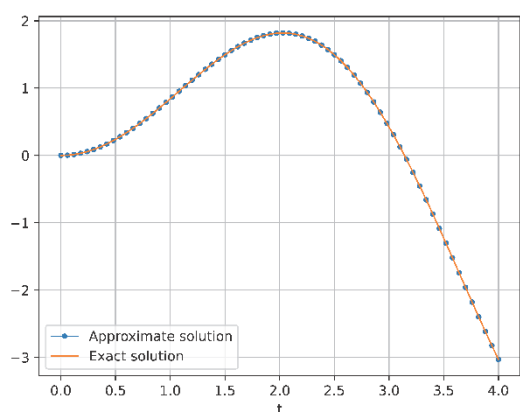
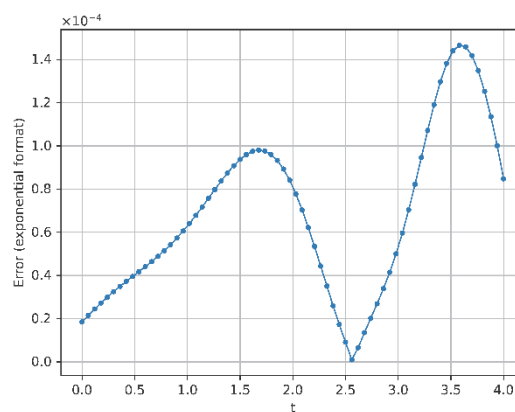
Значение ошибки для численного эксперимента

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
ε_h	5,07E-04	1,47E-04	3,90E-05	9,90E-06	2,50E-06	6,32E-07
r	-	1,79	1,91	1,98	1,98	1,99

На (рис. 1) изображен график точного и приближенного решения при шаге $h = 1/16$. На (рис. 2) изображено распределение величины ошибки для модельного примера с шагом $h = 1/16$.

Полученные данные показывают тенденцию к уменьшению ошибки при увеличении шага. Такая тенденция также прослеживается и на других модельных примерах, представленных в работе [6].

Также следует отметить, что эмпирическая скорость сходимости стремится к $r \approx 2$, что, несомненно хороший показатель. На (рис.2) наблюдается уменьшение ошибки ближе к концу отрезка, однако максимальная ошибка достигается в точке $t = 3,58$. Вероятно такое поведение связано с начальными условиями модельного примера.



Проведены численные эксперименты для уравнения с шумом, далее представлен общий вид такого уравнения:

$$a_0(t)x(t) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(t)x(t_j) = \lambda \int_{t_0}^t K(t,s)x(s)ds + f_n(t), \quad t \in \Omega \in [t_0, T] \quad (5)$$

где $f_n(t) = f(t) + n(t)$, $n(t)$ – случайная величина в определенном диапазоне.

В таблице 2 представлены численные результаты проведенных экспериментов. На их основе можно сказать, что метод чувствителен к шумам и для него требуется применение регуляризационных методов. В таблице также видно, что ошибка при самом крупном и самом мелком шаге почти не отличается для первых двух случаев, а в последнем случае различие в 4 раза.

В будущих работах будет рассмотрена возможность применения регуляризационных методов и их эффект.

Таблица 2

Модельный пример с шумом

Шум в пределах от -0.1 до 0.1							
h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
E	9,78E-03	1,69E-02	9,91E-03	1,19E-02	1,02E-02	1,80E-02	1,21E-02
r	-	-0,79	0,77	-0,26	0,22	-0,82	0,57
Шум в пределах от -0.01 до 0.01							

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
E	1,11E-03	1,71E-03	9,81E-04	1,19E-03	1,02E-03	1,80E-03	1,21E-03
r	-	-0,63	0,81	-0,28	0,22	-0,82	0,57
Шум в пределах от -0.001 до 0.001							
h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
E	5,18E-04	2,43E-04	1,21E-04	1,21E-04	1,02E-04	1,79E-04	1,21E-04
r	-	1,09	1,01	-0,01	0,24	-0,81	0,57

Список литературы

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука 2012, 8-23
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. Издательство "Высшая Школа", 1995, 102-125
3. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1995. – Т. 18. – №. 2. – С. 209-228.
4. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах //Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – №. 4. – С. 689-699.
5. Sidorov D. et al. Approximation And Regularisation Methods For Operator-functional Equations. – 2025.
6. Byankin, V., Tynda, A., Sidorov, D., & Dreglea, A. Numerical solution of locally loaded Volterra integral equations //Computation. – 2025. – Т. 13. – №. 5. – С. 121.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С РЯДАМИ ВОЛЬТЕРРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГРАНЖА

Екатерина Алексеевна Симакова¹, Александр Николаевич Тында²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹sim.kate29@gmail.com, ²tynda@pnzgu.ru

Аннотация. На основании нелинейной динамической системы с использованием интегро-степенных рядов Вольтерра была предложена модель с двумя слагаемыми ряда Вольтерра, в которой ядра интегральных операторов описываются с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа. Для нахождения ядер решается система линейных уравнений с помощью метода коллокации. Данный метод идентификации нелинейных динамических систем был протестирован на модельной задаче.

Ключевые слова: ряды Вольтерра, интерполяционные многочлены Лагранжа, метод коллокации.

APPLICATION OF THE COLLOCATION METHOD IN SOLVING PROBLEMS WITH VOLTERRA SERIES USING LAGRANGE INTERPOLATION POLYNOMIALS

Ekaterina A. Simakova¹, Alexander N. Tynda²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹sim.kate29@gmail.com, ²tynda@pnzgu.ru

Abstract. Based on a nonlinear dynamical system using Volterra series, a model with two terms of the Volterra series was proposed in which the kernels of integral operators are described using Lagrange interpolation polynomials. To find the kernels, a system of linear equations is solved using the collocation method. This method of identification of nonlinear dynamical systems has been tested on a model problem.

Keywords: Volterra series, Lagrange interpolation polynomials, collocation method.

1. Постановка задачи и вводные замечания

В настоящее время теория и приложения математического моделирования нелинейных динамических систем в задачах идентификации и обработки сигналов развивается интенсивно. Одним из способов идентификации нелинейных динамических систем является моделирование с помощью интегро-степенных рядов Вольтерра.

В 1930 году известный итальянский математик В. Вольтерра ввел понятие интегро-степенного ряда. Основным результатом является то, что ряд Вольтерра

$$\begin{aligned} y(t) = F[x(t)] &= \int_a^t K_1(t, s) \cdot x(s) ds + \int_a^t \int_a^t K_2(t, s_1, s_2) \cdot x(s_1) \cdot x(s_2) ds_1 ds_2 \\ &+ \int_a^t \int_a^t \int_a^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) \cdot x(s_1) \cdot x(s_2) \cdot x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \dots \int_a^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (1)$$

описывает нелинейные системы с памятью.

На основе (1) зададим нелинейную динамическую систему с использованием интегро-степенного ряда Вольтерра:

$$y(t) = \int_0^t K_1(s) x(t-s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2(s_1, s_2) x(t-s_1) x(t-s_2) ds_1 ds_2, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

В предложенной модели есть два слагаемых ряда Вольтерра. Основная задача состоит в определении ядер $K_1(s)$ и $K_2(s_1, s_2)$ по известным входам $x(t)$ и выходам $y(t)$ [1].

Ядра интегральных операторов будут аппроксимироваться с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \ell_i(x).$$

Базисные функции Лагранжа $\ell_i(x)$ определяются по формуле:

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Тогда ядра примут следующий вид:

$$\tilde{K}_{1,m}(s) = \sum_{i=1}^m A_i \cdot \ell_i(s), \quad (3)$$

$$\tilde{K}_{2,m_1,m_2}(s_1, s_2) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} C_{ij} \cdot \ell_i(s_1) \cdot \ell_j(s_2), \quad (4)$$

где m, m_1, m_2 – число слагаемых, необходимых для аппроксимации. A_i, C_{ij} – некоторые коэффициенты.

Воспользуемся методом коллокации для дискретизации уравнения (2). Для определения неизвестных коэффициентов A_i и C_{ij} введем равномерную сетку узлов

$$t_k \in [0, T], \quad k = \overline{0, N}, \quad (5)$$

где $N + 1$ – это количество узлов.

Подставляем (3) и (4) в модель (2). Равенства должны выполняться в точках (5):

$$\tilde{y}(t_k) = \int_0^{t_k} \tilde{K}_{1,m}(s) x(t_k - s) ds + \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \tilde{K}_{2,m_1,m_2}(s_1, s_2) x(t_k - s_1) x(t_k - s_2) ds_1 ds_2, \quad k = \overline{0, N}.$$

Упростим и в итоге получим:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_k) = & \sum_{i=0}^{m-1} A_i \int_0^{t_k} \ell_i(s) x(t_k - s) ds + \\ & + \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} C_{ij} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \ell_i(s_1) \ell_j(s_2) x(t_k - s_1) x(t_k - s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (6)$$

С практической точки зрения, в данной работе задача идентификации системы будет сводиться к нахождению пары приближенных ядер $\tilde{K}_1(s)$ и $\tilde{K}_2(s_1, s_2)$, а если точнее, то будут находиться неизвестные коэффициенты A_i и C_{ij} в модели (6), которые при изначально заданном входе $x(t)$ лучше всего приближают $\tilde{y}(t_k)$ к $y(t)$.

Для оценки качества аппроксимации воспользуемся следующей мерой ошибки:

$$\varepsilon_N = \max_{t \in [0, T]} |y(t) - \tilde{y}(t_k)|.$$

Для удобства тестирования переменные m, m_1, m_2 будут равными.

Описанный метод идентификации нелинейных динамических систем с интегро-степенными рядами Вольтерра был протестирован на модельной задаче [2].

2. Результаты модельной задачи

В модельной задаче заданы вход

$$x(t) = \sin(6t)$$

и выход

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{5}{36} t^2 + \frac{6}{37} e^{-t} + \frac{1}{108} t \sin(6t) + \frac{37}{1296} \cos^2(6t) - \frac{1}{18} \cos(6t) - \frac{4888}{999} \cos^6(t) + \\ & + \frac{2444}{333} \cos^4(t) - \frac{611}{222} \cos^2(t) + \frac{32}{37} \sin(t) \cos^5(t) - \frac{32}{37} \sin(t) \cos^3(t) + \\ & + \frac{6}{37} \sin(t) \cos(t) + \frac{8183}{47952}. \end{aligned}$$

На рис. 1 показаны графики входа $x(t)$ и выхода $y(t)$.

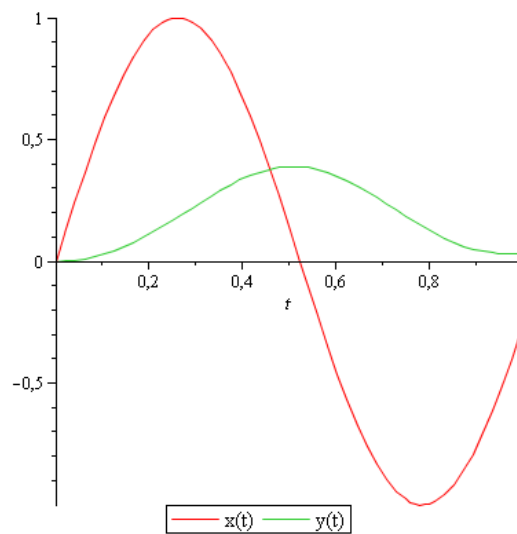


Рис. 1. Входная и выходная функции

Результаты метода коллокации для модельной задачи:

В таблице 1 показана зависимость ошибки ε_N от параметров $m = m_1 = m_2$ для равномерной сетки узлов $t_k = \frac{k}{N}$, $k = \overline{0, N}$, охватывающей отрезок $[0, 1]$.

Таблица 1

Погрешность аппроксимации

m	2	3	5	7
ε_N	$1,73 \times 10^{-2}$	$-1,93 \times 10^{-6}$	$1,61 \times 10^{-19}$	$2,77 \times 10^{-22}$

На рисунках 2-5 показана погрешность аппроксимации при фиксированном параметре m .

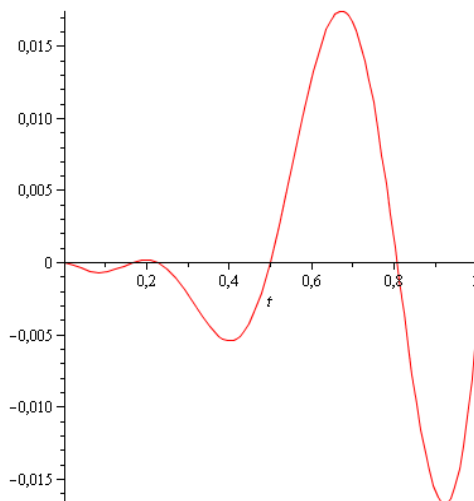


Рис. 2. Ошибка ε_N при $m = 2$

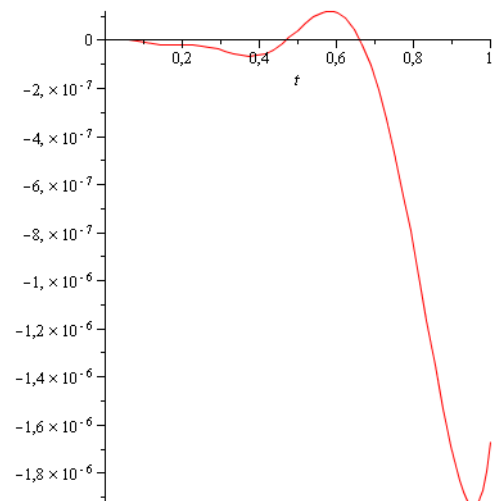


Рис. 3. Ошибка ε_N при $m = 3$

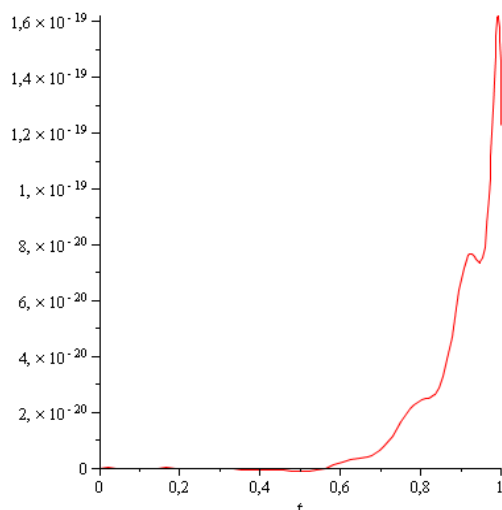


Рис. 4. Ошибка ε_N при $m = 5$

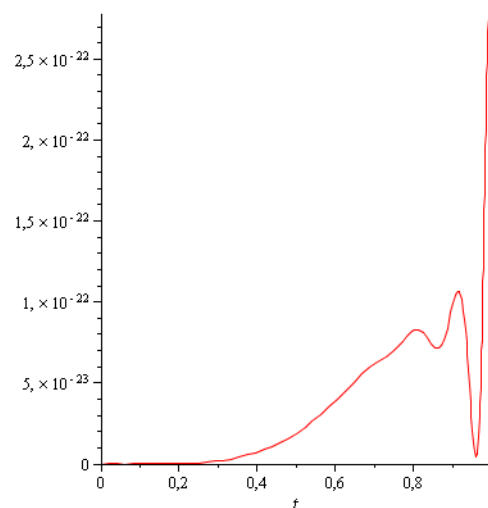


Рис. 5. Ошибка ε_N при $m = 7$

Как видно из предложенных результатов, ошибка ε_N постепенно уменьшается по мере увеличения параметра m . Таким образом, при увеличении количества узлов коллокации точность аппроксимации нелинейной динамической системы значительно увеличивается.

Список литературы

1. Сидоров, Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приближения: монография / Д. Н. Сидоров. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
2. Sidorov, D. Volterra Black-Box Models Identification Methods: Direct Collocation vs. Least Squares / D. Sidorov, A. Tynda, V. Muratov, E. Yanitsky // Mathematics. – 2024. – Vol. 12. – № 2. – P. 227.

**Использование технологий параллельного программирования
при решении задач вычислительной математики**

Вячеслав Владимирович Лапкин

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
lapkin2001@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается возможность при разработке программной реализации метода конечных элементов выделить этапы задачи, решения которых можно выполнять с учетом возможностей программных пакетов, а также специфики технологий параллельного программирования для многоядерных ЭВМ.

Ключевые слова: метод конечных элементов, дискретизация области, MPI, OpenMP, MATLAB

**Using parallel programming technologies
to solve computational mathematics problems**

Vyacheslav V. Lapkin

Penza State University, Penza, Russia
lapkin2001@inbox.ru

Abstract. The possibility is being considered when developing a software implementation of the finite element method to identify the stages of the task, the solutions of which can be performed taking into account the capabilities of software packages, as well as the specifics of parallel programming technologies for multicore computers.

Keywords: finite element method, domain discretization, MPI, OpenMP, MATLAB

Введение

При разработке программного обеспечения для вычислительной математики и прикладных задач крайне важно понимать алгоритмы решения и учитывать возможности и ограничения компьютерного оборудования. В численном анализе существует ряд сложных методов для решения дифференциальных и интегральных уравнений. Одним из таких методов является метод конечных элементов (МКЭ), который отличается универсальностью и позволяет эффективно решать широкий спектр инженерных задач, включая теплопередачу, электромагнетизм, механику деформируемого тела, гидро- и газодинамику. Популярность МКЭ среди исследователей, инженеров, ученых и разработчиков систем инженерного анализа обусловлена его многочисленными преимуществами.

Метод конечных элементов (МКЭ) предназначен для решения краевых задач, сформулированных в виде дифференциальных уравнений. Суть метода заключается в дискретизации непрерывной функции, описывающей решение, путем её аппроксимации. Процесс построения дискретной модели состоит из следующих шагов:

1. Дискретизация области решения путем разбиения её на конечное множество узлов.
2. Определение значений искомой функции в каждом узле.
3. Разбиение области на конечные элементы, соединенных узлами, для аппроксимации геометрии области.
4. Аппроксимация решения внутри каждого элемента с использованием полиномиальных функций, интерполирующих значения функции в узлах элемента. Выбор полиномов обеспечивает непрерывность аппроксимации на границах элементов.

В результате применения МКЭ, исходная краевая задача преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой представляет собой приближенное решение исходной задачи.

Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) – это эффективный способ моделирования различных физических явлений, таких как механические напряжения, теплопередача и электромагнитные поля [1, 2]. Важнейшим этапом применения МКЭ является создание сетки, которая разбивает исследуемую область на множество небольших, конечных элементов.

При решении задач методом конечных элементов используются элементы различных типов. Например, одномерные, двумерные и трёхмерные симплекс-элементы. Наиболее подробное рассмотрим разбиение дискретной модели двумерной области.

При создании дискретных моделей двумерных областей обычно применяются два типа элементов: треугольники и четырёхугольники [2]. Простейшие версии этих элементов имеют прямолинейные границы. Более сложные элементы, такие как квадратичные и кубические, могут иметь как прямые, так и кривые стороны. Для точного представления криволинейных границ в элементы добавляются дополнительные узлы, расположенные посередине сторон. Оба типа элементов можно использовать совместно в одной модели, при условии, что они имеют одинаковое количество узлов на каждой общей стороне.

Для простых областей, разбиение на сетку вручную с применением стандартных техник не представляет сложности. Однако, при наличии в области сложных геометрических элементов или структур, ручное построение сетки становится трудоемким и неэффективным. В таких ситуациях целесообразно использовать специализированное программное обеспечение, например, Matlab [3], которое предлагает мощные инструменты для автоматизированного создания сложных сеток, значительно упрощая процесс разбиения.

Пример разбиения области, в которую включен круг приведён на рисунке 1.

Сформированный набор данных после построения треугольных сеток, предназначен для использования с численными методами, реализованными на C/C++, при расчете матрицы жесткости, аппроксимирующей систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Один из способов достижения этой цели – экспорт необходимых данных из Matlab в файл, который затем будет использован в последующих этапах метода конечных элементов (МКЭ), реализованных на C/C++. Для повышения скорости вычислений возможно применение параллельного программирования [4].

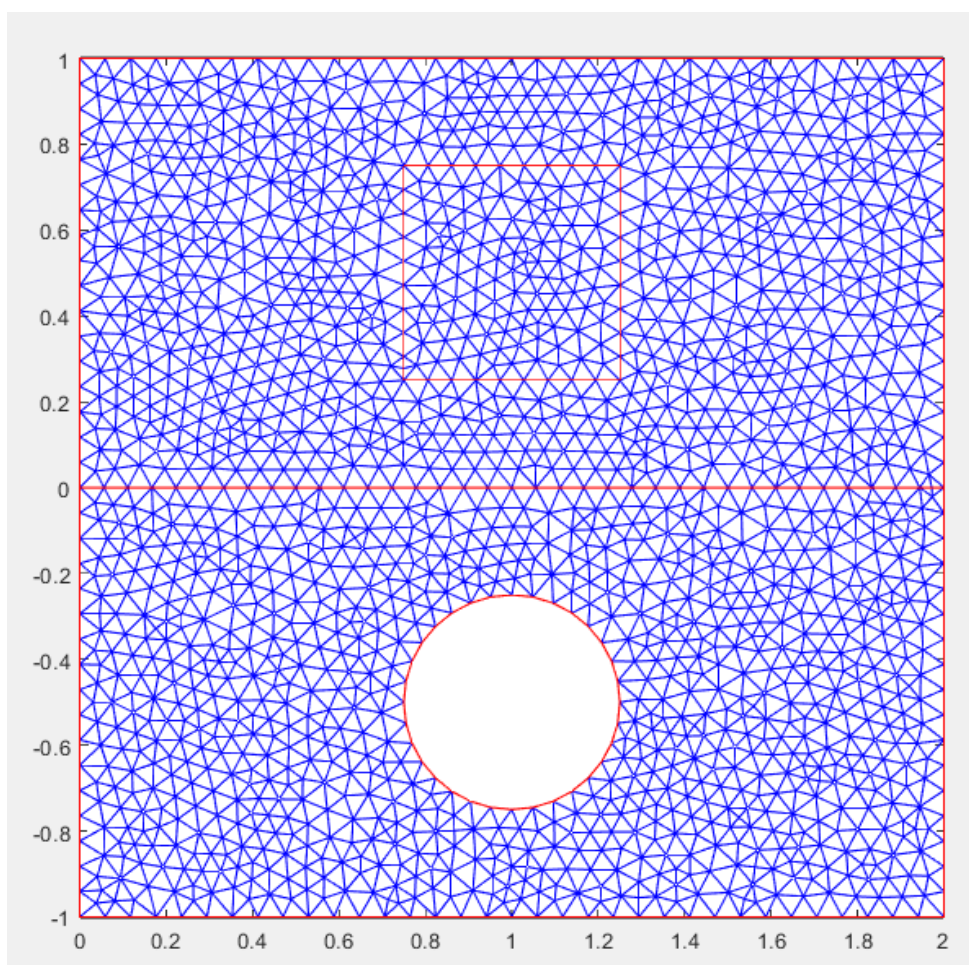


Рис. 1. Пример построения треугольных сеток в Matlab

Параллельные вычисления в МКЭ

Самым сложным этапом в методе конечных элементов является зачастую построение матрицы жесткости и расчет ее элементов. Однако на отдельных классах задач, вместо использования численных алгоритмов, возможно эффективное построение аналитических вычислений. А вот финальный этап в виде решения аппроксимирующей системы линейных алгебраических уравнений, безусловно, придется решать только численно. Например, возможно использование метода Гаусса с учетом параллельной реализации на многоядерных ЭВМ.

В частности, мелкие сетки узлов в МКЭ и высокие размерности аппроксимирующих систем линейных алгебраических уравнений дают выигрыш в использовании того же метода Гаусса уже на сравнительно небольших размерностях (табл. 1).

Таблица 1 – Сравнение времени выполнения метода Гаусса: последовательная и параллельная реализация (с OpenMP)

Размерность матрицы N	Время расчёта, сек	
	На одном ядре	На двух ядрах
100×100	0,016	0,0071
200×200	0,069	0,0439
500×500	0,929	0,538
1000×1000	8,03	4,55

2000×2000	82,021	42,56
-----------	--------	-------

Выводы

Распараллеливание программы целесообразно только для ресурсоемких задач с длительным временем выполнения. Для малозатратных вычислений оптимизация не оправдана. Технология OpenMP представляет собой оптимальное решение для таких случаев, поскольку позволяет легко адаптировать существующий код, не требует значительных временных затрат на реализацию и обеспечивает эффективное ускорение «тяжелых» вычислений.

Список литературы

1. Тарасов Д. В. Решение интегральных уравнений теории линейных антенн методом конечных элементов // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 554–564. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202301.554-564>
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва, 1979. 392 с.
3. Даутов Р. З. Программирование МКЭ в MATLAB. Казань, 2010. 71 с.
4. Лапкин В. В., Коннов Г. А., Тарасов Д. В. Применение технологии OpenMP к численному решению интегральных уравнений // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2023 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – С. 102–108.

Решение плоскопараллельных задач теплопередачи

Шорикова Дарья Владимировна¹, Дмитрий Викторович Тарасов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹ papsevadara30@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются методы решения плоскопараллельных задач теплопередачи, которые имеют ключевое значение в инженерных и научных приложениях. Описаны аналитические и численные подходы, включая метод конечных элементов, для моделирования теплообмена в плоских системах. Приведены примеры решения плоскопараллельных задач теплопередачи при помощи пакета программ ELCUT.

Ключевые слова: плоскопараллельная задача, теплопередача, метод конечных элементов, теплообмен, ELCUT

Solving plane-parallel heat transfer problems

Darya V. Shorikova¹, Dmitriy V. Tarasov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹ papsevadara30@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Abstract. Methods for solving plane-parallel heat transfer problems, which are of key importance in engineering and scientific applications, are considered. Analytical and numerical approaches, including the finite element method, for modeling heat transfer in planar systems are described. Examples of solving plane-parallel heat transfer problems using the ELCUT software package are given.

Keywords: plane parallel problem, heat transfer, finite element method, heat transfer, ELCUT

Введение

Теплопередача является одной из ключевых областей теплотехники и инженерной физики, играющей важную роль в различных отраслях науки и техники. Плоскопараллельные задачи теплопередачи представляют собой особый класс задач, в которых процесс передачи тепла происходит в плоской системе с постоянными параметрами. Эти задачи находят широкое применение в таких областях, как энергетика, строительные технологии, машиностроение и многих других.

Плоскопараллельные задачи характеризуются тем, что температурное поле и потоки тепла не зависят от координаты, перпендикулярной плоскости, что значительно упрощает анализ. Однако, несмотря на эту упрощенную геометрию, такие задачи могут включать разнообразные граничные условия и неоднородности материалов, что требует применения мощных численных методов для их решения [1].

1. Теплопроводность через плоскую стенку

При стационарном тепловом состоянии стенки тепловой поток через нее постоянный. Поэтому, проинтегрировав уравнение плотности теплового потока (при условии, что внутренняя и наружная ее поверхности равны)

$q = \frac{Q}{F} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$, приняв при этом $\lambda = \text{const}$, получим для однослойной стенки

следующее выражение: $q = \frac{t_1 - t_2}{s / \lambda}$, где t_1 и t_2 – температура соответственно

на внутренней и наружной поверхностях стенки, s – толщина стенки.

Если плоская стенка имеет n слоев, то плотность теплового потока через нее можно выразить следующим образом:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n s_i / \lambda_i}.$$

2. Метод конечных элементов для стационарной задачи теплопроводности

Стационарная задача теплопроводности – это процесс переноса теплоты за счёт теплопроводности, при котором температурное поле в теле меняется только в пространстве, без учета времени.

Рассмотрим двумерную стационарную задачу теплопередачи с учетом граничных условий (последнее слагаемое) можно записать в виде [2]:

$$k \left(\frac{\partial}{\partial x} l_x + \frac{\partial}{\partial y} l_y \right) U + h(U - U_\infty) = 0. \quad (1)$$

Величины l_x и l_y – направляющие косинусы вектора нормали к поверхности, h – коэффициент теплообмена, $U_\infty = T$ – температура окружающей среды.

Решение задачи будем строить методом конечных элементов, т.к. он представляет собой универсальный инструмент, позволяющий разбивать сложные области на простые элементы, что делает его особенно подходящим для анализа теплопередачи. Этот метод обеспечивает высокую точность расчетов и гибкость в моделировании различных сценариев.

С вариационной точки зрения решение уравнения (1) с граничными условиями первого и второго рода, эквивалентно отысканию минимума функционала [1]:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U dV + \int_V \frac{1}{2} h (U - U_\infty)^2 dS. \quad (2)$$

Минимизация функционала осуществляется на множестве узловых значений $\{U\}$. Будем минимизировать функционал до вычисления интегралов.

Начнём процесс минимизации с преобразования функционала. Перепишем соотношение (2) в виде:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} dV + \int_V \frac{h}{2} (U^2 - 2UU_{\infty} + U_{\infty}^2) dS, \quad (3)$$

где $\{g\}$ – матрица частных производных, $[D]$ – единичная матрица, умноженная на k .

Вместо функции U введём в рассмотрение функции $U^{(e)}$, определённые на отдельных элементах. Тогда интегралы в (3) должны быть разбиты на интегралы по отдельным элементам:

$$\chi = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} dV + \int_{S^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} (U^2 - 2UU_{\infty}^{(e)} + (U_{\infty}^{(e)})^2) dS, \quad (4)$$

где E – общее число элементов.

Последнее соотношение может быть символически записано как:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}.$$

Минимизация χ требует выполнения соотношений:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{U\}} = \frac{\partial}{\partial \{U\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{U\}} = 0.$$

Частные производные $\partial \chi^{(e)} / \partial \{U\}$ не могут быть определены, пока интегралы в (4) не будут выражены через узловые значения $\{U\}$. Учитывая соотношение $U^e = [N^{(e)}] \{U\}$ можно вычислить $\{g\}$:

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] U, \quad (5)$$

где $[B]$ содержит информацию, связанную с производными от функций формы. Таким образом получаем

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = & \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B^{(e)}]^T \{D^{(e)}\} [B^{(e)}] \{U\} dV + \\ & + \int_{S^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{U\} dS - \int_{S^{(e)}} h U_{\infty} [N^{(e)}] \{U\} dS + \int_{S^{(e)}} \frac{h}{2} (U_{\infty}^{(e)})^2 dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируем величины (6) по $\{U\}$, и эта совокупность интегралов может быть записана в компактной форме:

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}]U + f^{(e)},$$

где

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS,$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{S^{(e)}} h U_{\infty} [N^{(e)}]^T dS.$$

Получаем окончательную систему уравнений:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{U\}} = \sum_{e=1}^E \left([k^{(e)}]U + f^{(e)} \right) = 0, \text{ или } [K]\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ – матрица жёсткости (теплопроводности), $\{F\}$ – вектор нагрузки.

Расчет температуры верхних поверхностей пластины и теплового потока через при помощи пакета ELCUT

Методом конечных элементов на сегодняшний день активно применяется в инженерных программных пакетах (ELCUT, ANSYS и др.). Решение задачи в пакете ELCUT предполагает задание модели задачи и построение сетки, с последующими расчетами [3].

Рассмотрим расположенную под углом к вертикали пластину, которая отдает тепло в окружающее пространство (рис. 1).

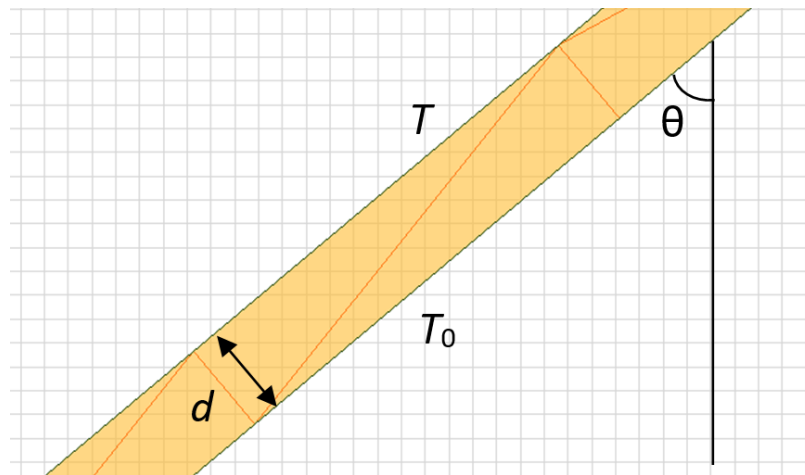


Рисунок 1 – Постановка задачи и сетка модели

В качестве данных модельного примера будем считать, что длина пластины $l = 1000$ мм, толщина пластины $d = 2$ мм, угол наклона $\theta = 50^\circ$. Площадь пластины 1 м^2 . Температура нижней части пластины $T_0 = 20^\circ \text{C}$, температура воздуха выше пластины $T = -5^\circ \text{C}$. В качестве материала

пластины рассматривали сталь (теплопроводность пластины $\lambda_{\text{пласт}} = 46$ Вт/(м·К); удельная теплоёмкость $C = 500$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 7800$ кг/м³) и дерево ($\lambda_{\text{пласт}} = 0,15$ Вт/(м·К); $C = 2300$ Дж/(кг·К), $\rho = 500$ кг/м³).

В пакете Elcut была построена модель задачи и задана сетка конечных элементов (см. рис. 1). Также с учетом геометрии задачи были определены граничные условия. Нижняя часть пластины нагрета до 20 °С, а температура воздуха над верхней частью –5 °С, поэтому тепловой поток теплопроводности внутри пластины направлен к внешней поверхности. Верхняя поверхность пластины теплее окружающего её воздуха, поэтому тепловой поток направлен от поверхности в окружающее холодное пространство за счет конвекции. Коэффициент конвекции зависит от многих параметров, включая температуру среды, форму и ориентацию поверхностей. Средний коэффициент конвекции с поверхности пластины: $\alpha = 4$ Вт/(м²·К). Температура верхней поверхности $T_{\text{пов}}$ для пластины из стали и дерева показали соответственно следующие результаты: 19,8 и 18,7 °С (рис. 2). В обоих случаях полученные значения температуры близки к начальному предположению о температуре поверхности, поэтому проведение итерационного процесса уточнения коэффициента конвекции не требуется.

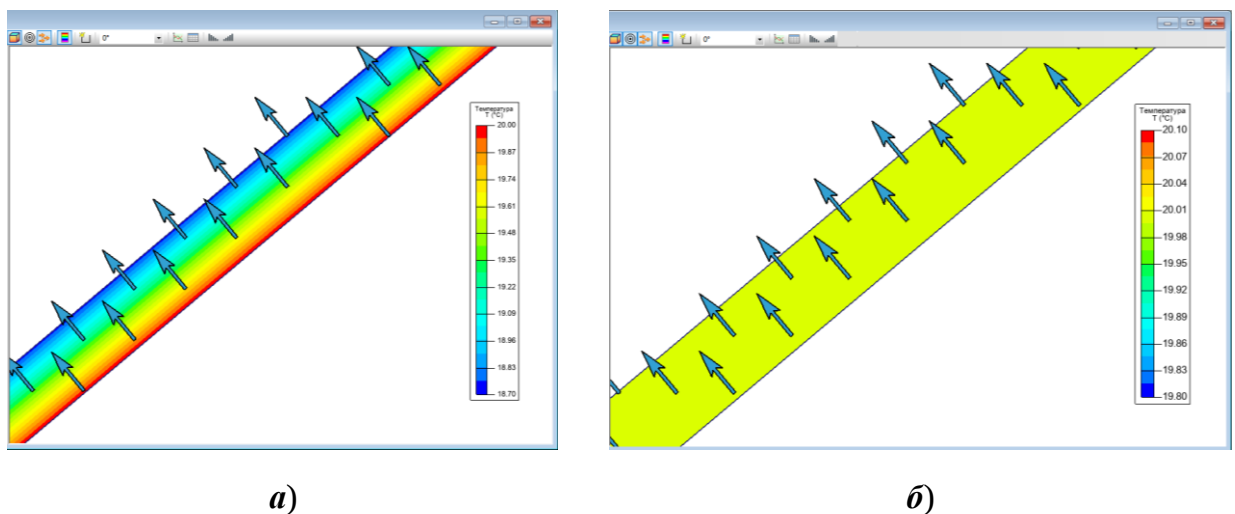


Рисунок 2 – Картина температурного поля: **a** – сталь; **б** – дерево

Заключение

Применение метода конечных элементов для решения плоскопараллельных задач теплопередачи представляет собой мощный инструмент, позволяющий эффективно анализировать и моделировать тепловые процессы в различных инженерных системах. Метод конечных элементов обеспечивает высокую точность расчетов и гибкость в учете сложных геометрий и граничных условий, что делает его незаменимым в современных исследованиях и разработках.

Список литературы

5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979. 392 с.
6. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф., Никулин С. С., Антонов О. А. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов : учебное пособие. Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2014. 80 с.
7. ELCUT – программа моделирования. URL: <https://elcut.ru/help/index.htm> (дата обращения 30.04.2025).

**О некоторых итерационных методах решения систем линейных
алгебраических уравнений**

Наталья Юрьевна Кудряшова, Дмитрий Сергеевич Козлов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

math.kudryashova@yandex.ru, kozlo_99@list.ru

Аннотация. Рассматриваются итерационные методы решения систем линейных уравнений (СЛАУ), которые являются важным инструментом в численных вычислениях и прикладной математике. Приведены сведения о критериях сходимости, влиянии начальных приближений и параметров, необходимые для достижения оптимальной производительности методов.

Ключевые слова: последовательные приближения, система линейных алгебраических уравнений, итерационные методы, условия сходимости.

On some iterative methods for solving systems of linear algebraic equations

Natalya Yuryevna Kudryashova, Dmitry Sergeevich Kozlov

Penza State University, Penza, Russia

math.kudryashova@yandex.ru, kozlo_99@list.ru

Abstract. Iterative methods for solving systems of linear equations (SLA), which are an important tool in numerical calculations and applied mathematics, are considered. Information is provided on the convergence criteria, the influence of initial approximations, and the parameters necessary to achieve optimal performance of the methods.

Keywords: sequential approximations, system of linear algebraic equations, iterative methods, convergence conditions.

Актуальность темы состоит в том, что современные вычислительные задачи требуют эффективных и надежных методов решения систем линейных уравнений (СЛАУ), которые возникают в различных областях науки и техники. С увеличением объемов данных и сложности моделируемых процессов традиционные прямые методы решения СЛАУ, как правило, становятся менее эффективными, особенно при работе с большими и разреженными матрицами. Итерационные методы предлагают совершенно иной подход, который позволяет существенно сократить вычислительные ресурсы и улучшить адаптивность к специфическим условиям задачи.

Пусть система линейных уравнений $AX = F$, где A невырожденная квадратная матрица, представлена в виде:

$$X = BX + G. \quad (1)$$

Выбираем начальное приближение, любой вектор $X^{(0)}$, каждое последовательное приближение строим по формулам

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + G, \quad k=1,2,3,\dots$$

или в развернутом виде

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

В качестве контроля точности может служить вектор невязки (невязка) $r^{(k)} = F - AX^{(k)}$.

Необходимые и достаточные условия сходимости.

Теорема [1]. Для того чтобы процесс последовательных приближений сходил, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы B были меньше единицы.

Подготовка системы к виду, удобному для итераций [2].

Пусть матрица A положительно определена. Тогда система $AX = F$ всегда может быть подготовлена к виду, в котором метод последовательных приближений будет сходящимся. Подготовка состоит в переходе от данной системы $AX = F$ к равносильной системе $HAX = HF$, где H - некоторая неособенная матрица, которая выбирается так, чтобы матрица HA была бы близка к единичной.

Положим

$$H = \frac{2}{\mu} E,$$

(2)

где μ - любая из норм матрицы A .

Тогда система уравнений преобразуется к виду

$$X = \left(E - \frac{2}{\mu} A \right) X + \frac{2}{\mu} F = BX + G. \quad (3)$$

Собственные значения матрицы

$$B = E - \frac{2}{\mu} A \quad (4)$$

будут заключены в открытом интервале $(-1;1)$, в силу того, что собственные значения положительно определенной матрицы A находятся в интервале $(0; \mu)$. Следовательно, метод последовательных приближений для системы (3) будет сходящимся.

Рассмотрим модификацию метода последовательных приближений - метод Зейделя. Обозначим компоненты числового вектора решения через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Одношаговый циклический процесс (метод Зейделя) напоминает процесс последовательных приближений, с той разницей, что при вычислении k -го приближения для i -ой компоненты учитываются вычисленные уже ранее k -ые приближения для компонент $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$.

Приближения строятся по формулам:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i. \quad (5)$$

Одношаговый циклический процесс может быть истолкован двумя способами, как разновидность общего итерационного процесса. За один шаг процесса принять переход от вектора: $(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$ к вектору: $(x_1^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$; или же за один шаг можно считать результат применения полного цикла, т.е. переход от вектора $(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$ к вектору $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$.

В первом истолковании метод не будет стационарным, но будет циклическим.

Во втором истолковании процесс будет стационарным. Исследуя его подробнее, уравнение $X = BX + G$ представим в виде

$$X = (M + N)X + G, \quad (6)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

В этих обозначениях формулы (5), представленные в матричной форме, будут иметь вид:

$$X^{(k)} = MN^{(k)} + NX^{(k-1)} + G \quad (8)$$

Отсюда следует:

$$X^{(k)} = (E - M)^{-1} NX^{(k-1)} + (E - M)^{-1} G \quad (9)$$

Таким образом, один полный цикл одношагового циклического процесса для системы (6) оказывается равносильным одному шагу процесса последовательных приближений, примененного к системе:

$$X = (E - M)^{-1} NX + (E - M)^{-1} G, \quad (10)$$

которая равносильна исходной системе $X = (M + N)X + G$ и может быть получена из неё умножением слева на неособенную матрицу $(E - M)^{-1}$. Из такого представленного процесса следует, что для сходимости необходимо и

достаточно чтобы все собственные значения матрицы $S = (E - M)^{-1}N$ были по модулю меньше единицы. Эти собственные значения матрицы являются корнями полинома $|S - tE| = 0$. Умножаем обе части этого уравнения на $|E - M|$ и воспользуемся теоремой о произведении определителей двух матриц, преобразуем уравнение к виду: $|N - (E - M)t| = 0$ или

$$\begin{vmatrix} b_{11} - t & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}t & b_{22} - t & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}t & b_{n2}t & \dots & b_{nn} - t \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Таким образом, для сходимости одношагового процесса необходимо и достаточно чтобы все корни уравнения (11) были по модулю меньше единицы.

Одношаговый циклический процесс не всегда оказывается более выгодным, чем процесс последовательного приближения. Иногда одношаговый циклический процесс сходится медленнее процесса последовательного приближения.

В качестве примера была взята система $AX = F$, в которой A - невырожденная квадратная матрица 10-го порядка, точным решением этой СЛАУ является единичный вектор $X = (1, \dots, 1)$. Методы последовательных приближений и Зейделя были запрограммированы на языке C++. В таблице 1 приведены результаты работы программы на основе метода последовательных приближений при количестве итераций $k=11266071$, в таблице 2 даны результаты решения СЛАУ методом Зейделя при $k=9939653$.

Таблица 1

N	$X^{(k)}$	$ Y^{(k)} = X - X^{(k)} $	$ r^{(k)} = F - AX^{(k)} $
1	1.00000006900145	0.00000006900145	8.015810237793630e-14
2	1.0000000909284	0.0000000909284	1.052491427344648e-13
3	0.999999767325208	0.000000232674792	2.694511280765255e-13
4	1.0000003173282	0.0000003173282	3.674838211509268e-13
5	0.999999136539051	0.000000863460949	1.000310945187266e-12
6	0.999999408268918	0.000000591731082	6.854516954035716e-13
7	1.00000005275521	0.00000005275521	6.128431095930864e-14

8	1.00000063137758	0.00000063137758	7.314149286230531e-13
9	0.999999619688512	0.000000380311488	4.407585407761871e-13
10	1.0000000630657	0.0000000630657	7.305267502033530e-14

Таблица 2

N	$X^{(k)}$	$ Y^{(k)} = X - X^{(k)} $	$ r^{(k)} = F - AX^{(k)} $
1	1.00000005913654	0.00000005913654	7.971401316808624e-14
2	1.00000007792864	0.00000007792864	6.972200594645983e-14
3	0.999999800589588	0.000000232674792	2.574607194105738e-13
4	1.00000027196125	0.00000027196125	3.590461261637756e-13
5	0.999999259982661	0.000000740017339	9.336975637097567e-13
6	0.999999492861903	0.000000507138097	5.079270337660091e-15
7	1.00000004522852	0.00000004522852	4.218847493575595e-15
8	1.00000054101641	0.00000054101641	7.274181257344026e-13
9	0.999999674121335	0.000000325878665	1.254552017826427e-13
10	1.00000005403997	0.00000005403997	1.221245327087672e-14

Решение модельных примеров показало высокую эффективность обоих численных методов решения СЛАУ.

Список литературы

1. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры: учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2009. — 736 с.
2. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков В.В., П.И. Монастырский. — М.: Наука, 1976.

4. Математические модели экономики, медицины, демографии, социальных наук

УДК 021.271-614.258.1, 021.475-614.258.1

Астрофизика в моделировании традиционных обычаев репродуктивного поведения населения

Гринцов М.И.

Пензенский медицинский институт ПГУ, grintsovM@mail.ru

Гринцова В.М.

ординатор дорожной больницы в г. Москве, grintsova2012@mail.ru

Аннотация. Приведены результаты научного анализа симметричных разно направленных клинических и социальных событий: в одни и те же сутки на свет появляются как здоровые дети, со временем становящиеся талантливыми и гениальными, так и их ровесники, рождающиеся с различными пороками развития и с низким интеллектом. Исследование, проведенное сквозь призму механизмов объединенной теории канцеромутагенеза Овсянникова-Барсукова-Фортова показывает, что в процессах земного мутагенеза принимают участие потоки вещества и ионизирующих форм лучевой энергии галактических космических лучей, вторгающихся из Космоса к Земле и биоте. Привлечение законов перетоков вещества и энергии в пределах Солнечной системы раскрывает механизмы объяснения таких нечетких клинически и социальных категорий как «благоприятные или неблагоприятные» моменты времени зачатия. С точки зрения законов астрофизики благоприятные моменты времени представляют собой такие астрофизические конфигурации планет на эклиптике, которые предотвращают вторжение и захват геномом гамет родителей или зиготы ионизирующих форм лучевой энергии галактических космических лучей. В таких случаях на свет появляются здоровые и талантливые дети. Мутационный процесс является следствием законов захвата биотой перетоков вещества и энергии галактических космических лучей в Солнечной системе. Неблагоприятные моменты времени и появление на свет детей с пороками развития ассоциируются с астрофизической конфигурацией планет на эклиптике, которая не предотвращает вторжение и захват геномом гамет родителей или зиготой ионизирующих форм энергии галактических космических лучей. Длительность интервала или «ширины окна захватывания» ионизирующих форм лучевой энергии определяется дуговым расстоянием эклиптики, на котором в определенный момент времени и на определенных координатах сферы Земля не образовалась конфигурация планет типа «закрытого окна», предотвращающего вторжение и захват вещества и энергии галактических космических лучей. Зачатие сводится к цикличности овуляции, к моменту времени готовности яйцеклетки к образованию зиготы, к цикличности моментов времени обра-

зования «закрытого или открытого окна» вторжения и захвата энергии ионизирующих лучей, к моменту времени образования зиготы с последующей плацентацией. Момент времени образования зиготы может соответствовать циклами образования яйцеклетки и циклами предотвращения вторжения вещества и энергии галактических лучей, а может и не соответствовать. Момент времени образования зиготы является волевым актом, дарованным Природой только мужчине. Делается вывод о том, что используя преимущество, дарованное Природой мужской особи волевого манёвра моментом времени зачатия, человечество может избавиться от рождения детей с пороками развития.

Ключевые слова: здоровые, талантливые, пороки развития, мутагенез, законы астрофизики, механизмы патогенеза, благоприятные и неблагоприятные условия, цифровые модели, волевое управление образованием зиготы.

Astrophysics in modeling traditional customs of reproductive behavior

M.I. Grintsov, MD, Penza Medical Institute of PSU;

V.M. Grintsova, resident of the railway hospital in Moscow.

Abstract. The article presents the results of a scientific analysis of symmetrical, multidirectional clinical and social events: on the same day, both healthy children are born, who later become talented and brilliant, and their peers are born with various developmental defects and low intelligence. The study, conducted through the prism of the mechanisms of the Ovsyannikov-Barsukov-Fortov unified theory of carcinomuta genesis, shows that in the processes of terrestrial mutagenesis, flows of matter and ionizing forms of radiation energy of galactic cosmic rays, invading from space to Earth and biota, take part. Attracting the laws of matter and energy flows within the Solar system reveals mechanisms explaining such vague clinical and social categories as «favorable or unfavorable» moments of conception. From the point of view of astrophysics laws, favorable moments are represented by such astrophysical configurations of planets on the ecliptic that prevent the invasion and capture by the In such cases, healthy and talented children are born. The mutation process is a consequence of the laws of biota capturing the flows of matter and energy of galactic cosmic rays in the solar system. Unfavorable moments of time and the birth of children with developmental defects are associated with the astrophysical configuration of planets on the ecliptic, which does not prevent the invasion and capture by the genome of gametes of parents or zygote of ionizing forms of energy of galactic cosmic rays, genome of gametes of parents or zygotes of ionizing forms of radiation energy from galactic cosmic rays. The duration of the interval or «capture window width» of ionizing forms of radiation energy is determined by the arc distance of the ecliptic, at which a configuration of planets of the «closed window» type has not formed at a certain

point in time and at certain coordinates of the Earth sphere, preventing the invasion and capture of matter and energy of galactic cosmic rays. Conception is reduced to the cyclic nature of ovulation laws, to the moment of readiness of the egg cell for zygote formation, to the cyclical nature of the moments of formation of a «closed or open window» for the intrusion and capture of ionizing ray energy, to the time of zygote formation with subsequent placentation. The moment of zygote formation may or may not correspond to the cycles of egg cell formation and the cycles of preventing the invasion of matter and energy from galactic rays. The timing of zygote formation is an act of will granted by Nature only to men. It is concluded that using the advantage given by Nature to the male individual of a volitional maneuver with the time of conception, humanity can get rid of having children with developmental disabilities.

Keywords: healthy, talented, developmental disabilities, mutagenesis, astrophysics laws, pathogenesis mechanisms, favorable and unfavorable conditions, digital models, volitional control of zygote formation.

**Человек — прежде житель Космоса, и только затем житель Земли.
Н.К.Перих.**

На практике существует несколько естественных моделей /формул продления рода... Первая носит условное название «модель/формула Тесла». Имеется в виду тот факт, что у четы Георгины Мандич и Милутина Теслы родился Никола Тесла, признанный гением. Вторая формула сформулирована солидным опытом Л.Утесова и звучит так: «Когда Бог на душу положит». Имеются и другие способы продления рода. Модель/формула Тесла следует считать цифровой моделью на том основании, что параметры модели будущего ребёнка учитывают следующие основные= базисные параметры среды: 1—год, 2—месяц, 3—день, 4—час зачатия и рождения, 5—координаты зачатия и 6—рождения (Гринвичская система координат) = 6—северная /южная широта места зачатия и рождения; 7—срок=продолжительность репродуктивного цикла конкретной женщины — от овуляции до овуляции; 8—координаты десяти основных планет/ эфемерид в созвездиях зодиака; (плюс 10 параметров); 19— цикл Солнечной активности с указанием минимума и максимума на интересующие годы зачатия и рождения ребёнка; 20—образование конфигурации «открытого окна» вторжения энергии ГКЛ; 21—образование конфигурации «закрытого окна», предотвращающего вторжение энергии ГКЛ; 22— достоверные факторы земной экологии / риска на территории проживания. Предполагается, что образование зиготы, как правило в норме, должно пройти через 30 тридцать минут «свободного полёта»/перемещения гамет в полости яйцеводов. Согласно выводам Ак. РАН В.Е.Фортова «зигота может получить «мутагенную дозу» ионизирующей энергии всего за 30 тридцать минут. Предполагается, что чета в соматическом и репродуктивном плане здорова и не отягощена хроническими патологическими состояниями, кото рые

способны повлиять на рождение здорового ребёнка. При этом учитывается, что замечание д.м.н. проф. педиатрии Натальи Беловой о том, что «нет человека без патологических генов», является «законом» генетики. Какую модель предпочесть и рекомендовать другим для продления рода?

Цель исследования. Изучить причины появления на свет здоровых и талантливых, а также детей с пороками развития. **Задачи исследования.** 1. Изучить причины образования «окна захвата» ионизирующих форм лучевой энергии; 2. Изучить астрофизические особенности «открытого окна захвата» ионизирующих форм лучевой энергии; 3. Изучить астрофизические особенности / дизайн «закрытого окна захвата» ионизирующих форм лучевой энергии; 4. Изучить основные традиции репродуктивного поведения населения. 5. Изучить возможность волевого регулирования репродуктивным поведением населения. **Методы исследования.**

Применение эклиптической и Гринвичской системы координат на с учетом законов обращения планет Солнечной системы. **Объекты исследования.** 1. Здоровые лица, признанные талантливыми или гениальными – 125 исторических лиц; 2. Лица с врожденными пороками развития – 180 детей и подростков; 3. Контрольную группу составляли студенты медицинского института – 120 студентов. **Дизайн исследований.** Представлен в виде космограмм. **Результаты изучения.** Предложена технология:

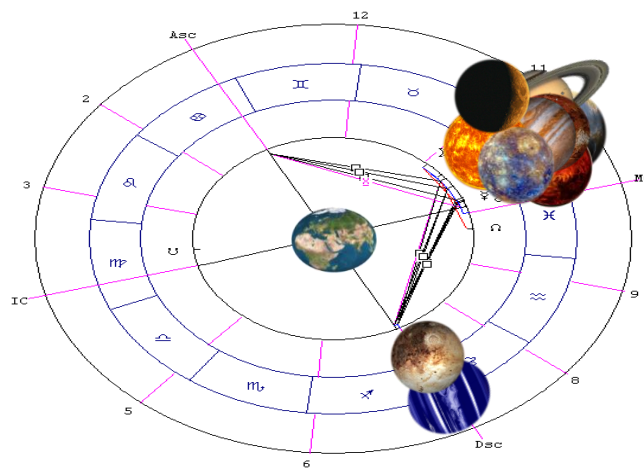
«Моделирование рождения здоровых и талантливых детей и предотвращение рождения детей с пороками развития путём вычисления момента времени зачатия и момента времени рождения в гринвичской системе координат при помощи редактирования эфемерид с учётом законов астрофизики и небесной механики». **Степень готовности технологии по шкале Technology Readines Level.**

Степень готовности предлагаемой технологии «Моделирование рождения здоровых и талантливых детей и предотвращение рождения детей с пороками развития путём вычисления момента времени зачатия и момента времени рождения в гринвичской системе координат при помощи редактирования эфемерид с учётом законов астрофизики и небесной механики» по шкале Technology Readines Level: соответствует той степени разработки, которая означает: — **готов действующий образец, который может быть продемонстрирован в работе.**

Изложение основной идеи исследования. В чем секрет феномена Теслы: это комбинация генов гениальности, или благоприятное совпадение биологических и астрофизических циклов? — Как родить гения? Оказывается, талантливые и гениальные лица к нам приходят «не когда попало», не «где попало», а в соответствии с законами астрофизики и небесной механики. Мать Георгина Джука Тесла (в девичестве Мандич) зачата при следующей эфемеридной конфигурации: в астрономический момент времени зачатия восемь планет Георгины Джуки Мандич были расположены в проекции Северного полюса эклиптики в созвездиях Рыб и Овна в 10-м секторе /поле зодиакального созвездия весьма плотным кластером. Солнце – в 13°18'13" Овна; Луна – 24°28'59" Овна; Меркурий R – 28°25'44" Рыб; Венера – 0°16'41"

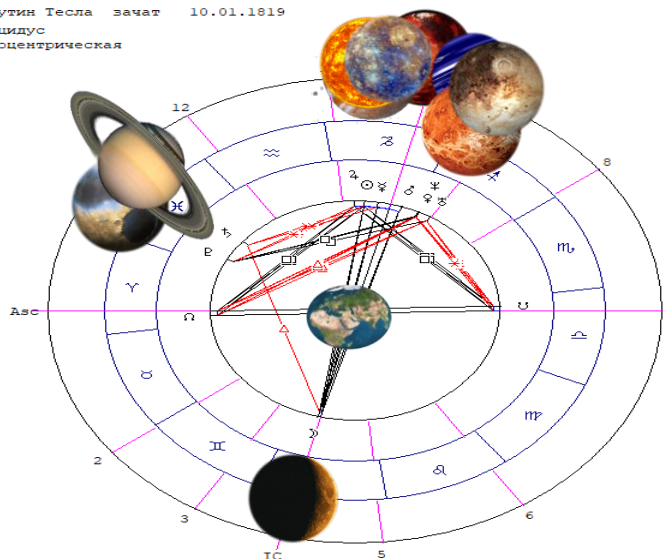
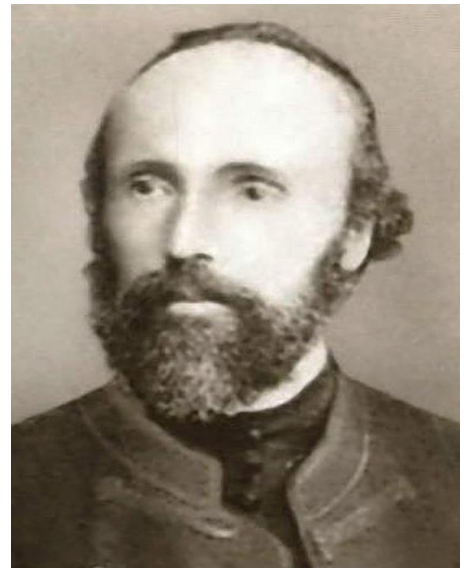
Овна; Марс $-25^{\circ}25'17''$ Рыб; Юпитер $-8^{\circ}1'47''$ Овна; Сатурн $-16^{\circ}5'26''$ Овна. Только Уран и Нептун были расположены в созвездии Козерога. Стрелкой указан кластер планет в созвездиях Рыб и Овна, которое на момент зачатия было спроецировано в сторону Северного полюса эклиптики. Категория «благоприятная эфемеридная конфигурация» =дизайн означает, что большинство планет было расположено плотным кластером на Северном полюсе эклиптики, что соответствует 10-му сектору Зодиака и образовывало «закрытое окно», предотвращающее вторжение вещества и высоких плотностей ионизирующих форм лучевой энергии [1-3, 7, 10,15, 17, 19, 24].

Дата ориентировочного зачатия Георгины Джука Теслы –матери Н.Тесла 3.04.1821г.



Фиг. 1. Астрономическая дата вычисленного зачатия Георгины (Джуки) Теслы –матери Н.Теслы: $\approx 3.04.1821$ г. Георгина Джука Тесла зачата при исключительно благоприятной эфемеридной конфигурации. А теперь разберёмся с астрофизикой зачатия её мужа –Милутином Теслой. Милутин Теста старше Джуки Георгины $\approx$ на три года. Сравниваем их космограммы. См. фиг. 1 и 2.

Милутин Тесла зачат 10.01.1819
Плацидус
Топоцентрическая



Фиг. 2. Милутин (отец) Тесла зачат $\approx 10.01.1819$ г. при исключительно благо приятной эфемеридной конфигурации. Солнце в $19^{\circ}24'22''$ Козерога; R-Меркурий $13^{\circ}50'6''$ Стрельца; Марс $4^{\circ}33'55''$ Козерога; R-Венера $13^{\circ}50'6''$ Козерога; Юпитер $23^{\circ}33'21''$ Козерога; Нептун $27^{\circ}3'14''$ Стрельца; Уран $22^{\circ}2'53''$ Стрельца. И Георгина Джука Мандич и Милутин Тесла были зачаты при исключительно редко встречающейся астрофизической конфигурации. На фиг.3. стрелкой показано, что потоки энергии ГКЛ не могут преодолеть щит из семи планет в момент времени зачатия М.Теслы. Его зигота осталась неповрежденной. Из неповрежденной зиготы и вышел Милутин Тесла. Рис. 3. объясняет теорию мутагенеза Овсянникова-Барсукова-Фортова. Конфигурации = дизайн планет Солнечной системы образуют преграду = щит от вторжения вещества и высоких плотностей ионизирующих видов лучевой энергии галактических космических лучей.



Рис. 4. Искусственный спутник связи в окрестности точки либрации L_2 системы Земля-Луна

Рис. 3. Вид планет Солнечной системы «с ребра» в момент вычисленного астрономического времени зачатия гениальной личности. Предполагаемые причины «высокого интеллекта до степени гениальности» при односторонних парадах планет, какие имелись у четы Тесла, кроются в том, что геномы гамет родителей Николы Теслы и геномы гамет, из которых «вышел» Н.Тесла не были разрушены ионизирующими формами радиации. В тех случаях, когда момент образования зиготы происходит при «закрытом окне» вторжения энергии, то геном зиготы не мог быть разрушен, так как на пути вторжения энергии ГКЛ был образован сгусток планет, который выполнял роль щита, предотвращавшего потоки энергии ГКЛ. (Рис. 3.).

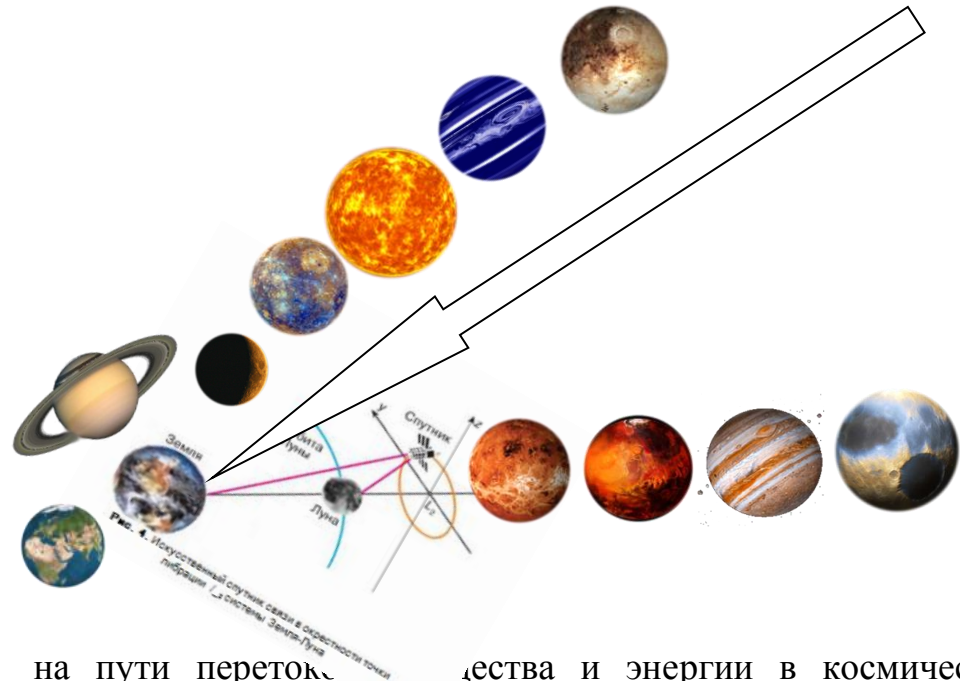
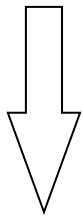


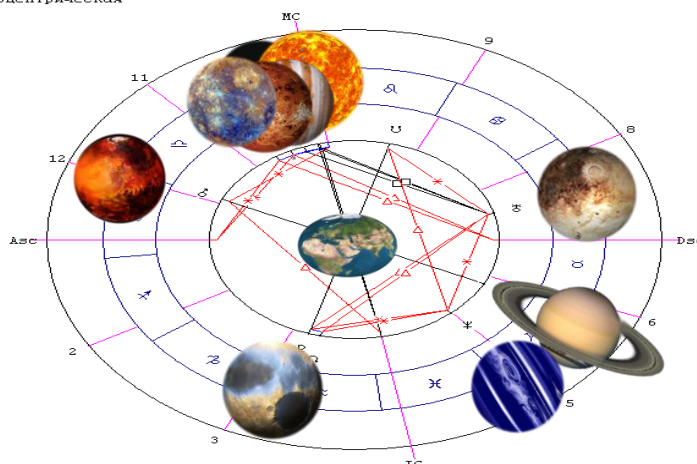
Рис.4. Если на пути перетоков вещества и энергии в космическом пространстве Солнечной системы между планетами появляется Земля с биотой (по законам обращения тел Солнечной системы) и она ничем не экранирована = не защищена от перетоков масс вещества и высоких плотностей энергии. Вещество и энергия преодолевают её магнитный «экран», проникают сквозь атмосферу Земли, достигают её поверхности и разрушают геном гамет и/или зиготы. Схема объясняет что такое «открытое окно» вторжения энергии ГКЛ». При «открытом окне» потоки вещества и энергии галактических космических лучей достигают Земли. Миллионы зигот на Земле повреждаются. Происходят массовые «привычные» выкидыши, а если жизнеспособность зиготы до конца не нарушена, то на свет рождаются дети с пороками развития. Для предотвращения зачатия детей, которым угрожают пороки развития, информированная чета добровольно принимает волевое решение о «репродуктивной изоляции», в результате чего образование зиготы не происходит. По-видимому, в репродуктивной традиции населения только «маневр» моментом образования зиготы может предотвращать зачатие и рождения ребенка, которому угрожает риск иметь врожденные пороки развития. **Обсуждение.** Цифровая модель будущего ребенка требует вычисления момента времени зачатия и рождения с целью согласования биологичес

кого цикла женщины с астрофизическими циклами «закрытого» или «открытого окна» вторжения вещества и энергии ГКЛ, которые регулируются законами обращения планет (эфемерид) на эклиптике. После того, как уточнены и выверены моменты времени овуляции = готовности женской яйцеклетки к восприятию мужского генетического материала на тот момент времени (год), в который чета приняла решение продлить свой род), после того, как «найдено=определено» наиболее благоприятное время зачатия ребенка, после того, как создана цифровая модель будущего ребенка, мы предлагаем чете такую модель для «реализации». —Чету предупреждаем, что если она примет решение о свадебном путешествии, к примеру, в сентябре месяце в Таиланд, то цифровую модель момента времени зачатия следует скорректировать на координаты отдыха в Таиланде и с учетом смены часовых поясов, которые отличаются от часового пояса России, где проживает чета. Пример вычисления момента времени зачатия и рождения ребенка.

1. Чета приняла решение провести свадебное путешествие в Португалию осенью 2027г. и забеременеть во время путешествия. Она и Он здоровы. Лечение не требуется.
2. У женщины сформирован устоявшийся цикл овуляции через 28 дней.
3. На осень 2027г. овуляция ожидается (к примеру) 10-12 сентября 2027г. На июнь 2030г. овуляция ожидается с 20 по 30 июня.
4. Чета поставила перед нами вопрос: если у нас произойдет зачатие 10, 11, 12 сентября 2027г, то будет ли здоровым и талантливым наш ребенок?
5. Цифровая модель зачатия ребенка на координаты Лиссабона ($4^{\circ}30' W.D.$ и $38^{\circ}4' N/Ш$)
Вычисляем:



Оптимальное время для зачатия в Лиссабоне 1 сент. 2027г от 20 до 21:00 .
Плацидус
Топоцентрическая

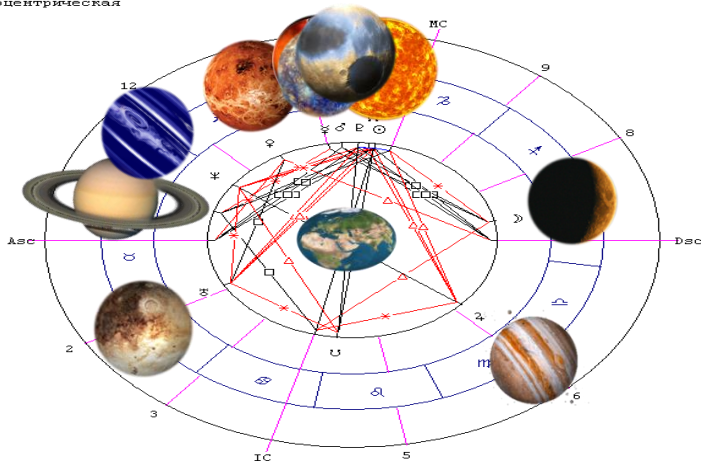


☉	8°50'45" МП	160°27'12" Алк
☿	19°55'37" МП	169°17'4"
♀	26°53'41" МП	177°16'10" Бен
♁	14°28'20" МП	166°14'56"
♂	29°37'32" Ал	207°27'22"
♂	7°57'9" МП	159°57'51" Ту
♂	27°26'19" ♀	26°26'43" Ал
♂	9°52'21" ♀	68°14'28" Ал
♂	5°57'24" ♀	6°2'41"
♂	5°12'54" ≈	308°50'27" Ал
♂	9°57'2" ≈	312°23'42"
♂	9°57'2" Ал	132°23'42"
Asc	23°53'54" МП	231°31'16" Ал
IC	4°25'21" ♀	336°17'29" Фок
Desc	23°53'54" ♀	51°31'16" Фок
MC	4°25'21" МП	156°17'29"

Фиг.5. Цифровая модель зачатия ребенка в г. Лиссабоне 1 сент. 2027г. с 20 до 21:00 по Московскому времени (Московское время переводим на местное время Лиссабона). Заключение: зачатый в предложенный день и час ребёнок должен быть здоровым и талантливым.

Вторая модель. Свадебное путешествие переносится с сентября на январь 2028г. в Португалии.

Оптимальное время для зачатия в Лиссабоне 1 января по 20 января 2028г. с 20:00 до 21:00 по Московскому времени (Московское время переводим на местное время Лиссабона).
Планидус
Топоцентрическая

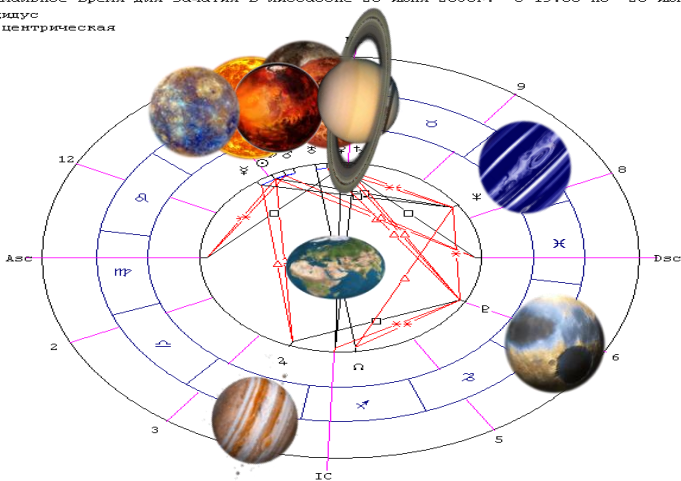


☉	29°56'40" Z	302° 7'25" Ам
☽	20°11' 8" M	226° 2'49" Зуб
☿	18°18'19" ≈	320°39'42"
♀	8°41'36" X	340°50' 0"
♂	13°14'39" ≈	316° 2'23"
♂	27°24'21" M	178° 9'29" Бен
♂	21°42'25" Y	20°59'16"
♂	6°10' 8" II	64°18'26"
♂	4°13'30" Y	4°26'10"
♂	6°33'24" ≈	310°14' 3"
♂	2°29' 4" ≈	304°45'31" Ал
♂	2°29' 4" ≈	124°45'31"
Asc	8°47'56" ≈	36°24'53" Азх
IC	23°24'58" ≈	115°16' 5" Пол
Dsc	8°47'56" M	216°24'53"
MC	23°24'58" Z	295°16' 5"

Фиг.6. Цифровая модель зачатия ребенка в г. Лиссабоне с 1 января по 20 января 2028г. в Лиссабоне с 20:00 по 21:00 по Московскому времени (Московское время переводим на местное время Лиссабона). Заключение: зачатый в вычисленный день и час ребёнок должен быть здоровым и талантливым.

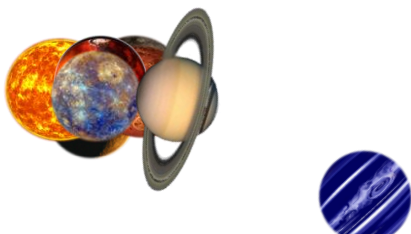
Семейная ситуация поменялась: Свадебное путешествие переносится на июнь 2030 г. Овуляция ожидается с 20 по 30 июня 2030г.

Оптимальное время для зачатия в Лиссабоне 20 июня 2030г. с 19:00 по 20 июня по 20 января 2028г. с 20:00 до 21:00 по Московскому времени (Московское время переводим на местное время Лиссабона).
Планидус
Топоцентрическая



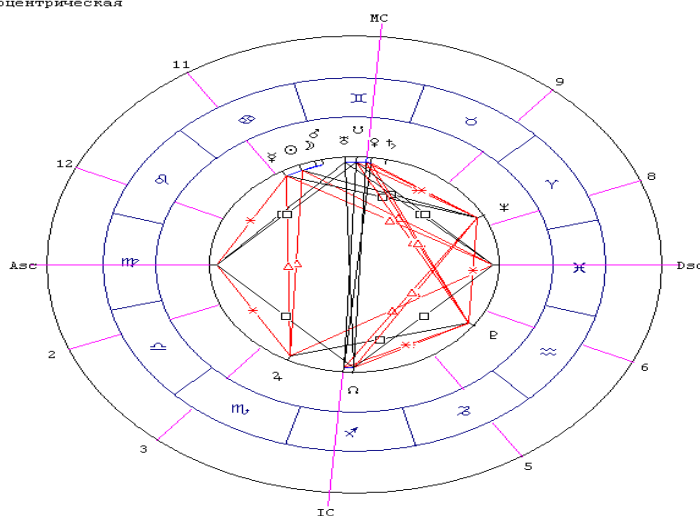
☉	8°41'23" ≈	99°27'26"
☽	3°44'50" ≈	94° 1'41" Пропус
☿	16° 2' 2" ≈	107°37' 3"
♀	9°26'18" II	67°58'50"
♂	29°10'30" II	89° 5'48" Ветельп
♂	18° 5'10" M	225°55'45"
♂	3°35' 3" II	61°56'20"
♂	19°52'56" II	78°59'20" Хедус I
♂	13°18'41" Y	12°50'18" Альдера
♂	11°34'37" ≈	315°53' 5" Альбали
♂	15°15'17" ≈	253°59'40" Сарин
♂	15°15'17" II	73°59'40" Курса
Asc	9°24'21" M	160°58'39" Алиот
IC	6°43'42" ≈	244°53' 7"
Dsc	9°24'21" X	340°58'39" Скат
MC	6°43'42" II	64°53' 7"

Фиг. 7. Цифровая модель зачатия ребенка в г. Лиссабоне с 20 по 30 июня 2030г. в Лиссабоне с 18:00 по 20:00 по Местному времени. Заключение: зачатый в вычисленный день и час ребёнок должен быть здоровым и талан



ТЛИВЫМ.—

Оптимальное время для зачатия в Пензе 20 по 30 июня 2030г. с 16:00 по 18:00
Плацидус
Топоцентрическая



☉	8°34'12"♈	99°19'39"♏
☽	2°6'13"♈	92°15'37"♏
☿	15°46'19"♈	107°19'53"♏
♀	9°17'19"♈	67°49'24"♏
♂	29°5'25"♈	89°0'14"♏
♂♂	18°5'30"♈	225°56'5"♏
♂	3°34'12"♈	61°55'26"♏
♂	19°52'30"♈	78°58'52"♏
♂	13°18'37"♈	12°50'14"♏
♂♂	11°34'45"♈	315°53'13"♏
♂♂	15°15'40"♈	254°0'5"♏
♂♂	15°15'40"♈	74°0'5"♏
♂♂	15°59'47"♈	167°6'40"♏
♂♂	11°18'39"♈	249°45'43"♏
♂♂	15°59'47"♈	347°6'40"♏
♂♂	11°18'39"♈	69°45'43"♏

Фиг. 8. Цифровая модель зачатия ребенка в г. Пензе с 20 по 30 июня 2030г. с 16:00 до 18:00 по Местному времени. Заключение: зачатый в вычисленный день и час ребёнок должен быть здоровым и талантливым.—

Выводы. 1. Человек трудами И.Кеплера и Н.Коперника создал для себя качественно новую экологическую цифровую среду. Предстоит изменить и дodelать ещё очень многое, но в целом информационная структура человека и его окружения создана, развивается и совершенствуется. 2. При создании «цифровой модели» зачатия и рождения здорового и талантливого ребёнка на данном этапе научных данных необходимо учитывать от 20 до 22 переменных, и вычисления проводить не в Декартовой, а в Гринвичской системе координат. 3. Волевой акт «маневра» моментом образования зиготы может решать большое количество проблем дефектологии, педиатрии и репродуктологии. 4. Волевое регулирование рождением только здоровых и талантливых лиц и предотвращение появления на свет детей с пороками развития, является эквивалентом, регулирующим управленческую функцию денег.

Литература

1. Фортон В.Е. Физика высоких плотностей энергии. Москва, Физматлит, 2013г. 710с).
2. Gauquelin M// Astrology and science (1970).
3. Барсуков О.А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2011, 559с.
4. Баранов В.С. Пренатальная диагностика наследственных и врождённых болезней... Реальность и перспективы. Сорос. образоват. ж-л. 1998, 10. С. 32-36.
5. Инге-Вечтомов С.Г. Экологическая генетика. Что это такое? Сорос. образоват. ж-л. 1998, №2, с.59-65.

6. Кудрявцева А.В. Победить рак. В мире науки, 4, 2017г.
7. Киселёв В.И., Пальцев М.А. Регуляция активности генов.... От классической геноцентрической концепции - к эпигенетике». Вестник РАН Июнь 2016 г. с. 514-524.
8. Курцер М.А. «Предиктивные технологии и возможности молекулярной генетики в репродуктивной медицине. Вестник РАН РФ, август 2017 г.).
9. Михельсон Нейл Таблицы эфемерид на 2001-2050 года на полночь.
10. Овсянников В.А.// Энергетическая модель канцерогенеза. Вопросы онкологии. 2005, том 51. № I.
11. Каприн А. Рак больше не приговор. В мире науки, 9/10, 2022, /с. 4-13.
12. Драпкина О. Первый эшелон в борьбе с онкологическими заболеваниями. В мире науки, 9/10, 2022, *С. 14-17.
13. Чехонин В. Знать – значит выжить. В мире науки, 9/10, 2022, /С. 19-23.
14. Пушкарь Д. Онко-урология: история успеха. В мире науки, 9/10, 2022, /с. 30-37.
15. Гринцов М.И., Гринцова В.М. Врождённые пороки развития у детей и подростков. Пенза, 2021, 145с.
16. Инге-Вечтомов С.Г. Экологическая генетика. Что это такое? Сорос. образоват. ж-л. 1998, №2, с.59-65.
17. Кольцов Н.К. Очерки, статьи, документы. Москва, Научный мир. 2021. 598с.
18. Кольцов Н.К. Улучшение человеческой породы. //Русский евгенический журнал 1922, т.1, вып. 1, с18.]
19. Крупнова Е.Г. Физика против рака. В мире науки, 01/02. Январь/февраль 2018.с. 122-123).
20. Свердлов Е.Д. Взгляд на жизнь через окно геном а. Т.2, М. Наука, 2019, 406с
21. Свердлов Е.Д. Газета ПОИСК №50 /15 дек. 2023г.
22. Сопрунова И.В. 2012) // Клинико-эпидемиологические ... аспекты врождённых пороков развития ЦНС на территории Астраханской обл. (2012) Автореф. дисс. канд.
23. Орлов И. О. «Биологические риски как потенциальный фактор космических угроз» Поиск, №3-4 (1545-1546), 25.01.2019г
24. Г.С.Фомин Г.С. и О.Н.Фомина, «ВОЗДУХ», М, 2002, 422с.
25. Федоренко Б.С. Радиобиологические эффекты корпускулярных излучений. М., НАУКА, 2006г, 189с.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ССЫЛОЧНОЙ МАССЫ САЙТА НА ПОЗИЦИИ В ПОИСКОВОЙ ВЫДАЧЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Наталья Юрьевна Скибицкая¹,

Егор Сергеевич Хохлов²

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹ natalia.skibitskaya@yandex.ru

² khokhlov12378@bk.ru

Аннотация. В работе проведён комплексный анализ влияния внешних SEO-показателей на позиции сайтов в поисковой выдаче. С использованием методов машинного обучения, включая регрессионное моделирование и корреляционный анализ, разработана прикладная модель, позволяющая количественно оценивать влияние таких факторов, как авторитетность домена, тематичность, доверие и возраст донорских сайтов. Выполнена стандартизация данных для устранения дисбаланса признаков и повышения точности прогнозов.

Ключевые слова: анализ, регрессионная модель, корреляционная модель, поисковая оптимизация, внешние ссылки, параметры.

**ASSESSMENT OF THE IMPACT OF WEBSITE BACKLINK
PROFILE PARAMETERS ON SEARCH ENGINE RANKINGS
USING STATISTICAL MODELING**

Natalia Yurevna Skibitskaya¹,

Egor Sergeevich Khokhlov²

Abstract. This study presents a comprehensive analysis of the impact of external SEO metrics on website rankings in search engine results. Using machine learning methods, including regression modeling and correlation analysis, an applied model was developed to quantitatively assess the influence of factors such as domain authority, topical relevance, trust, and the age of linking sites. Data standardization was performed to address feature imbalance and improve prediction accuracy.

Keywords: analysis, regression model, correlation model, search optimization, external links, parameters.

Поисковая оптимизация (SEO) — это комплекс мероприятий, направленных на улучшение видимости сайта в поисковых системах за счёт технических и контентных методов. Поисковые системы рассматривают внешние ссылки как индикаторы доверия и авторитета, где качество ссылок важнее их количества. Ссылки с авторитетных и тематически релевантных ресурсов существенно повышают позиции сайта, тогда как ссылки с низкокачественных или спамных сайтов могут нанести вред. [1]

Метрики качества ссылок, такие как уровень доверия, тематическая близость и авторитетность доменов, стали ключевыми инструментами для SEO-аналитики. Они позволяют оценивать ссылочную массу не только количественно, но и качественно, что способствует успешному продвижению сайта.

Классическая модель PageRank иллюстрирует, что вес ссылки зависит от авторитетности ссылающегося ресурса и количества исходящих ссылок на странице. Использование массовых закупок ссылок и спамных ресурсов чревато штрафами, тогда как качественные ссылки способствуют росту

тематического траста, ускорению индексации и улучшению позиций сайта. [1]

Внешняя ссылочная масса существенно влияет на позиции сайта в поисковых системах. Однако для эффективного анализа важно учитывать не только количество ссылок, но и их качество, релевантность и авторитетность источников. Для этого используются специальные метрики, такие как Domain Rating (DR), Domain Authority (DA), Trust Flow (TF) и Citation Flow (CF), которые помогают SEO-специалистам оценивать влияние ссылок на ранжирование сайта. [2]

Регрессионный анализ является основным инструментом для оценки зависимости между различными переменными и позволяет более точно понять, как каждый фактор влияет на результирующую переменную. В контексте поисковой оптимизации линейная регрессия используется для анализа влияния ключевых параметров доменов-доноров на позицию сайта в поисковой выдаче. Позиция сайта, как зависимая переменная, зависит от множества факторов, и регрессионный анализ помогает выявить степень влияния каждого из этих факторов. [3]

Математически линейная регрессия основывается на предположении, что зависимость между переменной, которую мы пытаемся предсказать (в данном случае, позиция сайта в поисковой выдаче), и несколькими независимыми переменными (например, параметрами ссылочной массы) может быть описана линейным уравнением (1).

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \quad (1)$$

где: y – позиция сайта в поисковой выдаче, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – параметры доменов - доноров, β_0 – свободный член, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – коэффициенты, которые показывают, как изменения в каждом из параметров влияют на позицию сайта, ε – случайная ошибка.

Пример реализации линейной регрессии с использованием Python и библиотеки scikit-learn демонстрирует, как все эти математические концепты и методы применяются на практике. В работе представлена простая реализация линейной регрессии, которая анализирует зависимость позиции сайта от среднего значения параметров доменов-доменов доноров.

Результат работы программы представлены в таблице 1:

Коэффициенты регрессии	Свободный член (intercept)	Средняя абсолютная ошибка (MAE)	Среднеквадратич ная ошибка (RMSE)
DR: -0.103			
DA: -0.040			
TF: -0.104	12.965	0.16	0.20
CF: +0.010			
SS: +0.031			

Таблица 1. Реализация линейной регрессии

На рисунке 1 представлено сравнение фактических и предсказанных позиций.

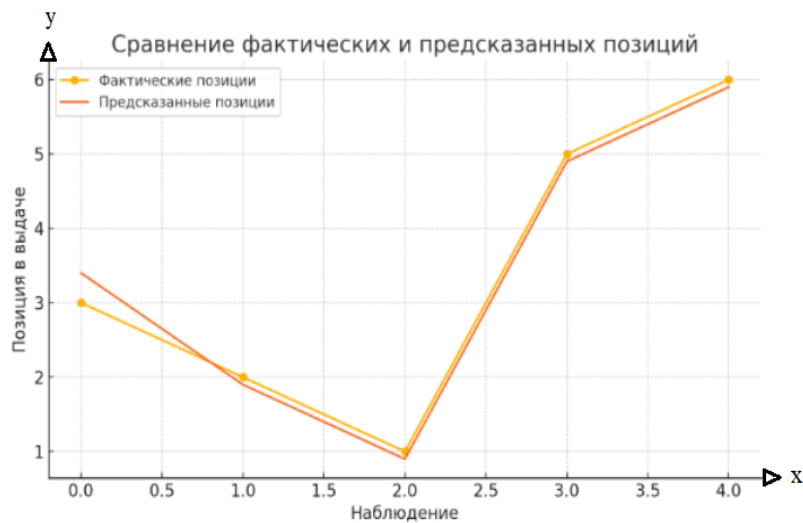


Рисунок 1. Сравнение фактических и предсказанных позиций

Корреляционный анализ представляет собой ключевую технику для выявления взаимосвязей между переменными. В контексте SEO анализа он помогает понять, насколько сильно метрики ссылочной массы коррелируют с позицией сайта в поисковой выдаче. [3]

Корреляция между двумя переменными X и Y вычисляется с помощью коэффициента корреляции Пирсона, который определяется по формуле (2):

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle) \cdot (y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \cdot \sum (y_i - \langle y \rangle)^2}} \quad (2)$$

где: x_i и y_i - значения переменных x и y для каждого наблюдения, $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$ - средние значения переменных x и y . Коэффициент корреляции r принимает значения от -1 до 1.

Когда r близок к 1, это означает, что переменные x и y имеют сильную прямую зависимость, то есть увеличение одной переменной связано с увеличением другой. В случае SEO, если корреляция между метриками доменов-доноров (например, DR или DA) и позицией сайта-акцептора в поисковой выдаче положительная и близка к 1, это может означать, что сайты с более высокими значениями этих метрик у ссылающихся на них площадок имеют более высокие позиции в поиске. [2]

Для практического применения корреляционного анализа в работе используем язык программирования Python и библиотеку `scipy`, которая предоставляет функцию для расчёта коэффициента корреляции Пирсона.

В результат работы программы был вычислен коэффициент корреляции Пирсона, который равен -0,83.

Сравнение фактических и предсказанных позиций представлено на рисунке (2).

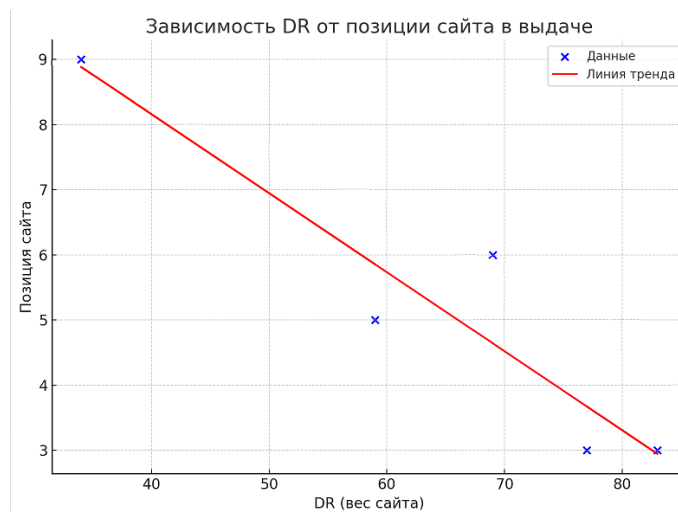


Рисунок 2. Зависимость между значениями DR и позицией сайта в поисковой выдаче

В этом примере анализируется зависимость между DR и позицией сайта в поисковой выдаче. Если коэффициент корреляции близок к 1, это будет свидетельствовать о сильной положительной зависимости: чем выше значения метрики ссылок, тем лучше позиция сайта.

Линейная регрессия и корреляционный анализ могут быть полезными инструментами для выявления зависимостей между различными факторами, влияющими на позиции сайтов в поисковой выдаче. В частности, они позволяют оценить степень влияния качества доменов-доноров на ранжирование сайта по ключевым запросам. [3]

Для более точных прогнозов позиций сайтов по ключевым запросам необходимо учитывать комплексный характер ранжирования и использовать многофакторные модели, включающие различные показатели. Это позволит более точно оценить влияние каждого фактора на позиции сайта и разработать эффективные стратегии оптимизации.

Список литературы:

1. Моисеев, П. В. Влияние внешних ссылок на SEO: теоретические

аспекты и статистическое моделирование / П. В. Моисеев, А. С. Иванов // Журнал поисковой оптимизации. 2020. Т. 15, № 4.

2. Джонсон, К. Влияние показателей качества внешних ссылок на позиции сайта в поисковой выдаче / К. Джонсон, С. Смит // SEO & Интернет-маркетинг. 2018. Т. 9, № 2.

3. Ковалев, Д. А. Основы статистического моделирования в SEO / Д. А. Ковалев // Журнал анализа данных. 2017. Т. 12, № 6.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ БЮДЖЕТЕ

Бузин Валерий Александрович¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹buzin_valera@mail.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Решается задача оптимизации инвестиций в условиях ограниченного бюджета. Для решения задачи используются современные программные средства и динамические методы оценки инвестиций. Показана реализация на примере программы, написанной на языке программирования Python.

Ключевые слова: Инвестиции; ограниченный бюджет; оптимизация; динамические методы.

OPTIMIZING INVESTMENT ON A LIMITED BUDGET

Valerii A. Buzin¹, Tatiana F. Mamedova²,

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Abstract. The problem of optimizing investments in conditions of a limited budget is being solved. Modern software tools and dynamic investment assessment methods are used to solve the problem. The implementation is shown using the example of a program written in the Python programming language.

Key words: Investments; limited budget; optimization; dynamic methods.

©Бузин В.А., Мамедова Т.Ф., 2025

Существуют различные способы для оценки максимальной результативности инвестиционных проектов, степени их успешности и отдачи. Основные группы таких методов это: динамические (с учетом временного фактора) и статические (использующиеся в бухгалтерии).

Постановка задачи. Необходимо оптимизировать распределение инвестиций при ограниченном бюджете.

Компания рассматривает возможность участия в финансировании шести различных фирм, предполагаемые условия реализации которых приведены в таблице. Инвестиционный бюджет компании равен 300 000 д.е.

Исходные данные приведены в Таблице 1. Составить оптимальный портфель инвестиций в этих условиях.

Таблица 1

Проект	Инвестиции Д. е.
Firma1	180 000
Firma2	60 000
Firma3	70 000
Firma4	100 000
Firma5	40 000
Firma6	110 000

Решение задачи.

Обозначим проект «Firma1» через X_1 , проект «Firma2» через X_2 и т.д., Y_1 –npv проекта Firma1, Y_2 –npv проекта Firma2 и т.д.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\max NPV = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

При следующий ограничениях:

$$300\,000 \geq \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

Кроме того, не может быть реализовано отрицательное число проектов, а также конкретный проект более одного раза, поэтому добавляется еще ограничение:

$$0 \leq X_i \leq 1, (i = 1:6)$$

Для решения задачи, была написана программа на языке программирования Python.

Программа имеет следующий интерфейс (рисунок 1):

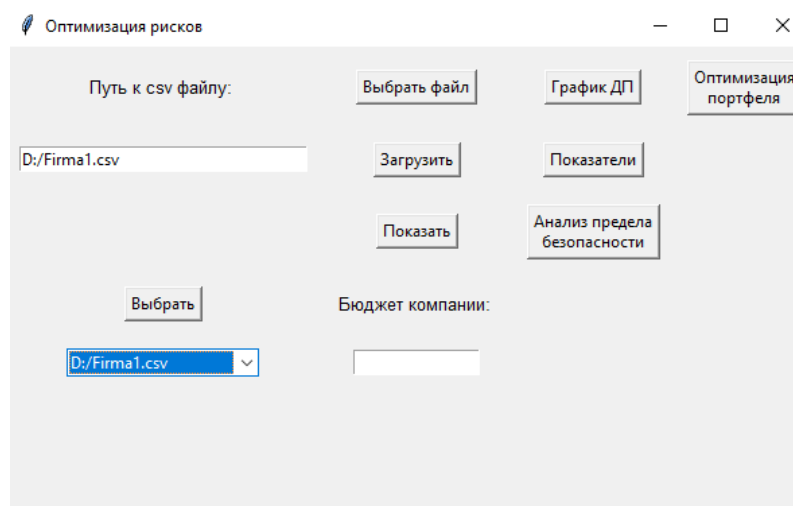


Рисунок 1 Основная страница программы

Входные данные имеют формат csv и выглядят следующим образом для каждого файла (рисунок 2):

	A
1	Cash Flow ID,date,cash flow,discount rate,refinancing rate
2	1,25-01-2015,-180000,10,11
3	1,26-01-2016,39000,10,11
4	1,27-01-2017,32000,10,11
5	1,28-01-2018,34000,10,11
6	1,29-01-2019,54000,10,11
7	1,30-01-2020,49000,10,11
8	1,31-01-2021,45000,10,11
9	1,31-01-2022,32000,10,11
10	1,31-01-2023,55000,10,11

Рисунок 2. Структура входных данных

Для работы программы, на первой странице указываем в текстовое поле путь к файлу с данными, и нажимаем кнопку «Загрузить», файл добавляется в список, из которого его можно будет выбрать повторно при необходимости работы с несколькими файлами. Последовательно загружаем все 6 файлов с данными.

В поле бюджет компании вводим интересующее нас значение «300 000» и нажимаем кнопку «Оптимизация портфеля».

Оптимизация портфеля инвестиций		— □ ×
Бюджет:	300000	Следует инвестировать :
Максимальная чистая современная стоимость:	271228.79	Firma2 Firma3 Firma4 Firma5
Занятый бюджет:	270000.0	
Чистая современная стоимость Firma1:	42233.69	
Чистая современная стоимость Firma2:	84312.52	
Чистая современная стоимость Firma3:	43711.69	
Чистая современная стоимость Firma4:	80623.08	
Чистая современная стоимость Firma5:	62581.5	
Чистая современная стоимость Firma6:	37964.34	

Рисунок 3. Результат работы программы

Производится расчёт показателя прv для каждого инвестиционного проекта (рисунок 3). Максимальная чистая современная стоимость будет равна 271 228 д.е. при инвестировании в фирмы 2, 3, 4 и 5. При это будет задействованы всего 270 000 д.е. из 300 000 доступных. Оставшиеся 30 000 для инвестирования в другие фирмы не хватит т.к. на практике чаще встречаются проекты, которые частично реализовать нельзя.

Таким образом, если бюджет компании составит 300 000 д.е., то инвестиционный портфель должен будет включать проекты Firma2, Firma3, Firma4, Firma5.

Список литературы

1. Сулейманова Д. Ю. Информационные системы управления инновационными процессами : монография / Д. Ю. Сулейманова, Н. Г. Яшина. – М. : РУСАЙНС, 2016. 148 с.
2. Титоренко Г. А. Информационные системы в экономике : учебник / А. Г. Титова. – М. : ИД ФОРУМ: ИНФРА., 2008. 463 с.

Информация об авторах

Валерий Александрович Бузин

buzin_valera@mail.ru

[ORCID 0009-0001-0024-1387](https://orcid.org/0009-0001-0024-1387)

магистр

Татьяна Фанадовна Мамедова,

mamedovatf@yandex.ru

[ORCID 0000-0002-7582-216X](https://orcid.org/0000-0002-7582-216X), доцент, к.ф.-м. наук

Регистрация разнородной диагностической информации на мобильной исследовательской платформе

Михаил Владимирович Вычугжанин

Пензенский государственный университет, Пенза
mikeabf@rambler.ru

Аннотация

Данная статья посвящена вопросу применения мобильных информационных технологий в медицинской и образовательной сферах. Рассмотрен вопрос регистрации разнородных диагностических данных посредством мобильного приложения на примере данных, полученных со смарт часов Lilygo T-Watch-2020 с помощью соответствующих биомедицинских датчиков. Показана актуальность разработки информационных систем для изучения, обобщения и анализа биомедицинских данных.

Ключевые слова: информационные технологии; медицинское образование; биомедицинские данные; акселерометр.

REGISTRATION OF DIFFERENT DIAGNOSTIC INFORMATION ON A MOBILE RESEARCH PLATFORM

Mikhail Vladimirovich Vychugzhanin

Penza State University, Penza
mikeabf@rambler.ru

Abstract

This article is devoted to the application of mobile information technologies in the medical and educational fields. The issue of recording heterogeneous diagnostic data via a mobile application is considered using the example of data obtained from the Lilygo T-Watch-2020 smart watch using the corresponding biomedical sensors. The relevance of the development of information systems for the study, generalization and analysis of biomedical data is shown.

Keywords: information technology; medical education; biomedical data; accelerometer.

Мобильные информационные технологии активно используются во многих областях нашей повседневной жизни. Не обошла данная тенденция медицинскую и образовательную сферы, в том числе благодаря доступности мобильных устройств, таких как смартфоны и планшеты, которые стали

сильными конкурентами персональным компьютерам. Появились новые возможности в исследовательской работе и научной деятельности, многократно упростилась работа с различными источниками информации, анкетирование и презентация итогов аналитической работы.

В образовательной сфере активно внедряются информационные семинары, проводимые через интернет, интерактивное общение между преподавателями и студентами с использованием видеокамеры на смартфоне (планшете), находит практическое применение проведение расчетов при помощи программного калькулятора, запись лекций на диктофон, обеспечение удаленного доступа к онлайн-лекциям, электронное копирование документов при помощи встроенной фотокамеры смартфона.

В настоящее время применение мобильных информационных технологий в медицинской сфере, включающее использование смартфонов (планшетов) и беспроводных технологий, является быстрорастущим направлением по поддержанию здорового образа жизни. Для его реализации разрабатываются программные приложения, которые осуществляют отслеживание двигательной активности человека, анализа циклов его сна. Это происходит (один из наиболее простых и распространенных вариантов) путем анализа датчика трехосевого акселерометра, который встроен практически на всех современных смартфонах и смарт часах [1].

Акселерометры в медицинских исследованиях обеспечивают высокую точность измерений, многофункциональность и возможность интеграции с другими датчиками и технологиями. Это делает их важным инструментом для диагностики, мониторинга и реабилитации пациентов.

Рассмотрим практический вопрос по регистрации в мобильном приложении разнородных диагностических данных, полученных со смарт часов Lilygo T-Watch-2020 с помощью встроенного датчика трехосевого акселерометра BMA423. Данная модель смарт часов собрана на базе микроконтроллера ESP32, оснащенного в своем составе модулями bluetooth/wifi. Кроме этого, платформа является открытой и позволяет запрограммировать эти смарт часы под свои требования: создать собственный пользовательский интерфейс, наладить взаимодействие через bluetooth/wifi модули с периферийными устройствами (в нашем примере к смартфону).

Дополнительно можно отметить, что выбранная мобильная платформа обладает гибкой архитектурой, оснащенной аппаратно-программным комплексом для научных исследований, располагает типовыми программными модулями, которые дают возможность определять набор регистрирующих устройств и конфигурацию оборудования для очередного исследования [2].

Для прошивки этого устройства подходит среда Arduino. Библиотеки и примеры для часов размещаются на странице [github: https://github.com/Xinyuan-LilyGO/TTGO_TWatch_Library](https://github.com/Xinyuan-LilyGO/TTGO_TWatch_Library). Произведем настройку смарт часов Lilygo T-Watch-2020 путем прошивки версией с встроенным bluetooth модулем для работы с периферийными устройствами.

На рис. 1 представлено меню смарт часов для регистрации и передачи данных трехосевого акселерометра ВМА423 на подключенный смартфон.

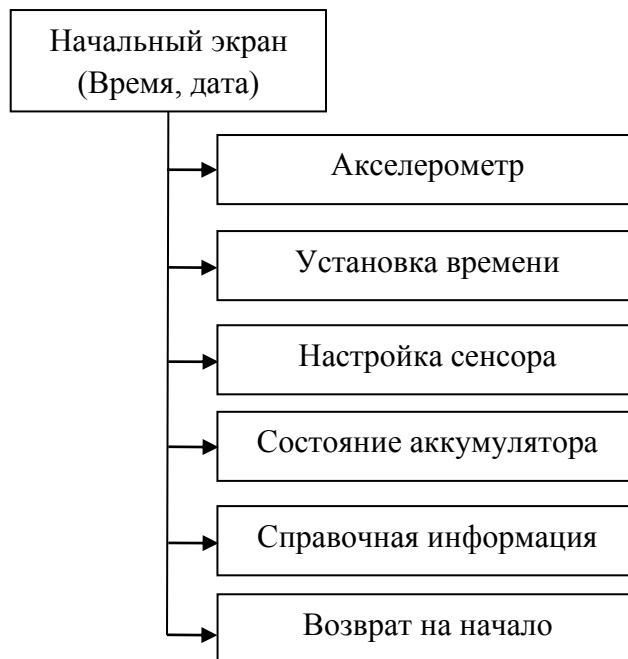


Рис. 1. Меню смарт часов Lilygo T-Watch-2020

Сбор и запись данных с трехосевого акселерометра ВМА423 смарт часов Lilygo T-Watch-2020 осуществляется через bluetooth соединение с помощью мобильного Android приложения, установленного на пользовательский смартфон. Беспроводная связь по bluetooth между часами с акселерометром и смартфоном является необходимым условием их использования. На рис. 2 представлен графический интерфейс смартфона [3].

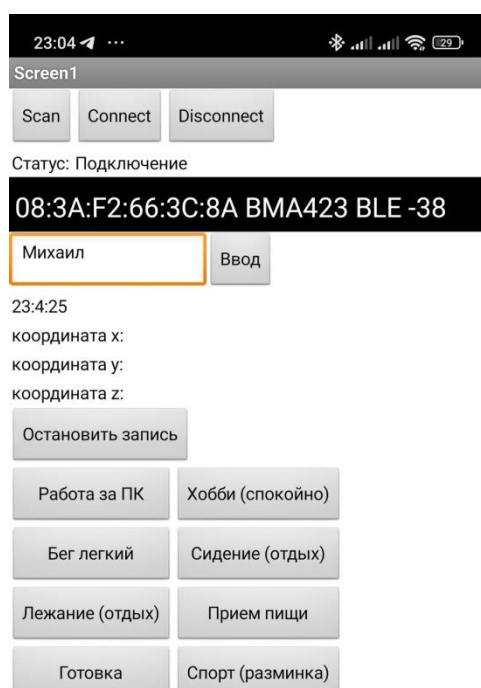


Рис. 2 Графический интерфейс смартфона

В мобильном приложении для систематизации получаемых данных о физической активности человека с трехосевого акселерометра ВМА423 дополнительно введены следующие поля ввода: имя пользователя и вид физической активности (работа за ПК, хобби (спокойно), бег легкий, сидение (отдых), лежание (отдых), прием пищи, готовка, спорт (разминка).

В результате накапливая данных работы трехосевого акселерометра ВМА423 смарт часов Lilygo T-Watch-2020 посредством мобильного Android приложения появляется возможность формирования упорядоченной базы данных из разнородных диагностических записей для их последующей обработки и анализа.

Список литературы

1. Р.М. Рангайян / Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход // Пер. с англ. под ред. А. П. Немирко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 440 с. — ISBN 978-5-9221-0730-3.
2. Mobile ECG Monitoring Device with Bioimpedance Measurement and Analysis / M. Safronov, A. Kuzmin, O. Bodin [et al.] // Conference of Open Innovations Association, FRUCT. – 2019. – No. 24. – P. 375-380. – DOI 10.23919/FRUCT.2019.8711944.
3. Д.И. Прусс, Е.П. Рябова, М.И. Сафронов, А.В. Кузьмин Формирование базы данных сигналов акселерометра для мониторинга физической активности человека // Перспективные информационные технологии, Самара. — 2022. — с. 279–283.

**ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ЗНАЧИМОСТИ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ ПРИ
ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ ЭКГ**

**SELECTION OF PARAMETERS FOR ANALYZING THE
STATISTICAL SIGNIFICANCE OF DIAGNOSTIC FEATURES IN ECG
SIGNAL PROCESSING**

Буданов Константин Михайлович

Пензенский государственный университет, кафедра «Информационно-
вычислительные системы»

ул. Красная, 40, г. Пенза, Россия

Budanov Konstantin Mikhailovich

Penza State University, the department of information and computing systems

40, Krasnaya street, Penza, Russia

ko13bud@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о выборе параметров для анализа статистической значимости диагностических признаков при обработке сигналов ЭКГ. Предлагается статистический критерий для оценки чувствительности полученных параметров к изменению сигнала ЭКГ у здоровых людей и у людей с той или иной патологией сердечно-сосудистой системы.

Abstract. The issue of choosing parameters for analyzing the statistical significance of diagnostic features in ECG signal processing is being considered. A statistical criterion is proposed to assess the sensitivity of the obtained parameters to changes in the ECG signal in healthy people and in people with a particular pathology of the cardiovascular system.

Ключевые слова: статистическая значимость, обработка сигнала ЭКГ, статистический критерий

Keywords: statistical significance, ECG signal processing, statistical criterion

Среди методов диагностики сердечно-сосудистых заболеваний в настоящее время наибольшее применение находят методы, связанные с применением средств вычислительной техники. При этом появляется возможность повышения точности результатов и одновременного снижения затрат времени и уменьшения вероятности ошибок за счет человеческого фактора.

При анализе ЭКГ используются следующие группы методов:

1) статистические – позволяют оценить вариабельность сердечного ритма (ВСР) как последовательности кардиоциклов за определенный промежуток времени [1];

2) временные – направлены на изучение статистических свойств и взаимосвязей последовательных интервалов RR синусового ритма; при этом для анализа рекомендуется использовать фрагменты записи ЭКГ длительностью не менее суток, поскольку результативность анализа прямо зависит от длины сигнала [2];

3) геометрические – основаны на преобразовании последовательности кардиоинтервалов в геометрическую структуру с целью оценки ВСР [3];

4) частотные – основаны на спектральном анализе, целью которого является определение цикличности в серии смены интервалов и количественный анализ напряжения компонентов автономной системы; согласно рекомендациям Европейского общества кардиологов, частотный анализ проводится по коротким записям ЭКГ (длительность – 5 минут);

5) нелинейные – основаны на оценке нерегулярных свойств биосигналов и направлены на выявление определенных состояний и патологий по данным ЭКГ.

Существует статистический метод анализа ЭКГ, основанный на получении гистограмм распределения плотности вероятности для амплитуд сигнала ЭКГ [4].

Пусть сигнал ЭКГ представлен набором значений x_i^j , где $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$; n – число отсчетов в каждом отведении; k – число отведений. Таким образом, общее число значений сигнала во всех отведениях равно nk .

Для проведения исследования значения в каждом отведении сигнала ЭКГ нормируются по формуле

$$x_{i(\text{норм})}^j = \frac{x_i^j - x_{\min}^j}{x_{\max}^j - x_{\min}^j}$$

где x_i^j – фактическое значение сигнала в отведении j , $x_{\min}^j$ – минимальное значение сигнала в отведении j , $x_{\max}^j$ – максимальное значение сигнала в отведении j .

В результате нормирования диапазон значений сигнала переходит в промежуток от 0 до 1. Это обеспечивает сравнимость данных как по отдельным отведениям одного сигнала ЭКГ, так и по отведениям различных сигналов.

Далее диапазон нормированных значений каждого отведения сигнала разбивается на заранее заданное число интервалов и определяется число нормированных значений сигнала, попадающих в каждый интервал. При оптимальном выборе числа интервалов можно более точно определить форму распределения сигнала.

Для обеспечения сравнимости данных по сигналам с различным числом отсчетов можно перейти к относительным частотам как статистическим аналогам вероятности попадания значений сигнала в тот или иной интервал.

Рассмотрим задачу оценки возможности применения данного метода к диагностике (классификации состояний).

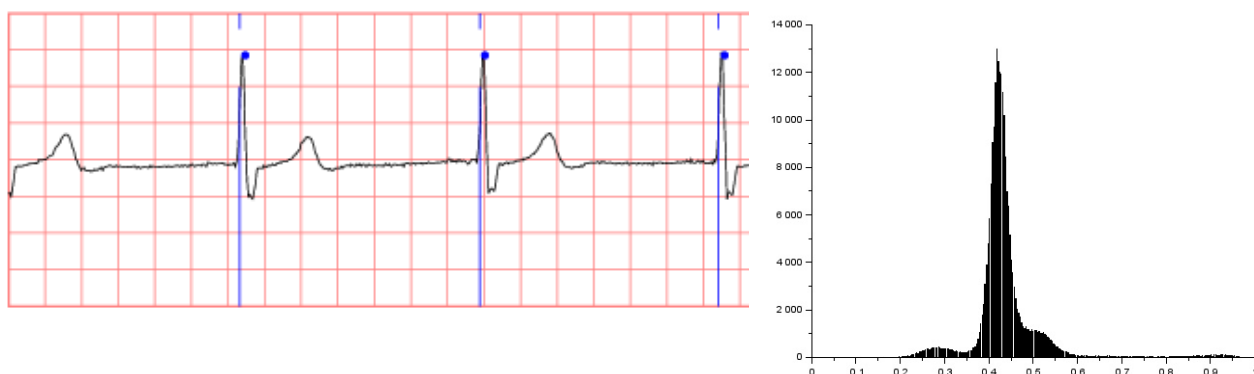
Для этого на основе принятых в медицине статистических мер необходимо выбрать критерий, который позволил бы оценить статистическую значимость представленного метода и спланировать вычислительный эксперимент.

Пусть имеются два множества сигналов – ЭКГ здоровых людей и ЭКГ людей с патологией сердечно-сосудистой системы (ССС).

В каждом из множеств для каждого сигнала построим гистограмму нормированных значений с одинаковым количеством интервалов. Далее построим усредненную гистограмму относительных частот по каждому множеству (в качестве относительных частот в ней будем использовать средние значения, вычисленные на основе относительных частот каждой из гистограмм множества).

При исследовании медицинских явлений чаще всего проверяются гипотезы о статистической значимости различий между эмпирическими выборками. Достаточно часто с этой целью применяются критерий Стьюдента и метод дисперсионного анализа [4]. Основным ограничением при использовании данных методов является нормальность распределения исследуемых выборок.

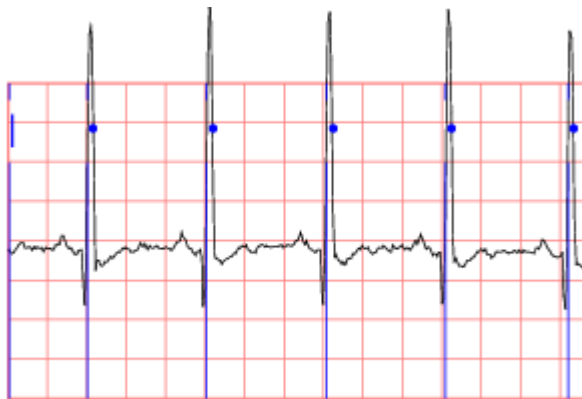
Однако распределения значений сигналов ЭКГ здоровых людей и людей с патологиями ССС, полученные описанным выше способом, отличаются от нормальных.



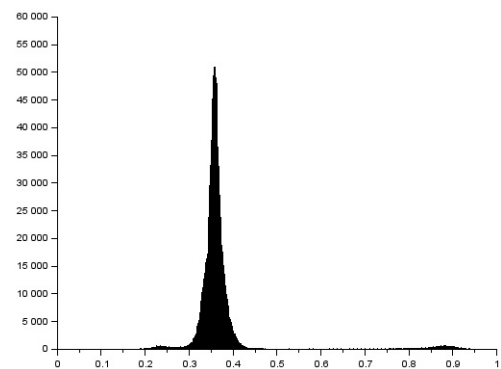
а)

б)

Рисунок 1 – Сигнал ЭКГ человека с аритмией
а) в виде кардиосигнала; б) в виде гистограммы распределения
нормированных значений оцифрованного сигнала



а)



б)

Рисунок 2 – Сигнал ЭКГ здорового человека
а) в виде кардиосигнала; б) в виде гистограммы распределения
нормированных значений оцифрованного сигнала

Критерий Пирсона [5] относится к группе непараметрических критериев (не зависящих от формы распределения выборок) и позволяет проверить значимость различий между абсолютными (или относительными) частотами по двум заданным выборкам.

Применение критерия предполагает формулировку нулевой гипотезы об отсутствии различий между двумя заданными выборками. В данном исследовании предполагается отсутствие различий между усредненными гистограммами распределений сигналов ЭКГ множества здоровых людей и множества людей с патологиями.

Далее вычисляется статистика критерия

$$\chi^2_{\text{расч}} = \sum \frac{(w_{\text{пат}} - w_{\text{здор}})^2}{w_{\text{здор}}}$$

где $w_{\text{здор}}$ – относительные частоты усредненной гистограммы здоровых людей, $w_{\text{пат}}$ – относительные частоты усредненной гистограммы людей с патологиями. Использование относительных частот связано с тем, что

гистограммы могут быть построены на основе сигналов различного объема ($n_1 k_1 \neq n_2 k_2$).

Выбирается критическое значение для принятого уровня значимости критерия α и числа степеней свободы $df = m - 1$, где m – число интервалов гистограммы. Далее выполняется сравнение расчетного значения критерия с критическим. Если расчетное значение превысит критическое, то нулевая гипотеза должна быть отвергнута. В противном случае гипотеза об отсутствии различий между гистограммами множеств здоровых людей и людей с патологиями принимается.

Таким образом, предложенный статистический критерий Пирсона, не требующий нормального распределения выборки, можно использовать для оценки чувствительности полученных параметров к изменению сигнала ЭКГ у здоровых людей и у людей с той или иной патологией ССС.

В дальнейшем планируется определить наиболее эффективную ширину скользящего временного окна для анализа сигнала с целью повышения чувствительности выбранных параметров.

Список литературы.

1. Анализ variability сердечного ритма при использовании электрокардиографических систем. Методические рекомендации Баевский Р.М., Иванов Г.Г., Чирейкин Л.В. Вестник аритмологии. 2001. № 24. С. 65-87.
2. Task force of the european society of cardiology and the north american society of Pacing and electrophysiology. Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. European heart journal (1996) 17, P. 354-381
3. Бокерия Л. А., Бокерия О. Л., Волковская И. В. Variability сердечного ритма: методы измерения, интерпретация, клиническое использование // Анналы аритмологии: журнал. – 2009. – № 4. – С. 21–32.
3. Патент № 2827482 РФ С1. СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАРИАТИВНОСТИ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИЧЕСКОГО СИГНАЛА: А61В 5/352 (2024.01): заявл. 27.10.2023: опубл. 27.09.2024 / Кузьмин А.В. - 14 с.
4. С. Гланц. Медико-биологическая статистика. Пер. с англ. – М., Практика, 1998. – 459 с.
5. Статистические методы в медицине / А.Н. Мамаев, Д.А. Кудлай. – М.: Практическая медицина, 2021 – 136 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Иван Романович Бастрыгин¹

Светлана Валентиновна Самуйлова²

¹²*Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия*

¹ivan-bas@bk.ru, ²s_v_samuylova@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются некоторые возможности применения теории вероятностей для анализа экономических процессов. Демонстрируются примеры решения экономических задач с использованием комбинаторного анализа, цепей Маркова и других методов теории вероятностей.

Ключевые слова: теория вероятностей, экономическое моделирование, комбинаторика, вероятностные модели, случайные процессы, сочетания.

THE APPLICATION OF PROBABILITY THEORY TO THE SOLUTION OF SOME ECONOMIC PROBLEMS

Ivan Romanovich Bastrygin¹

Svetlana Valentinovna Samuilova²

¹²*Penza State University, Penza, Russia*

¹ivan-bas@bk.ru, ²s_v_samuylova@mail.ru

Abstract. Some possibilities of applying probability theory to the analysis of economic processes are considered. Examples of solving economic problems using combinatorial analysis, Markov chains and other methods of probability theory are demonstrated.

Keywords: probability theory, economic modeling, combinatorics, probabilistic models, random processes, combinations.

© Бастрыгин И.Р., Самуйлова С.В. 2025 г.

Теория вероятностей – это раздел математики, который, используя формализацию таких понятий как случайные события, вероятности и случайные величины, обеспечивает математическую основу для изучения случайных явлений. В экономических моделях, теория вероятностей выступает как мощный инструмент для диагностики и анализа случайных процессов и факторов, влияющих на экономические системы. Применение теории вероятностей позволяет оценивать риски, прогнозировать спрос и

предложение, а также оптимизировать экономические решения в условиях неполной информации.

При условии постоянно меняющейся экономической среды, характеризующейся высокой степенью неопределенности и риска, применение теории вероятностей становится центральным инструментом для построения экономических моделей, принятия обоснованных решений и прогнозирования будущих тенденций.

Данная статья исследует применение теории вероятностей для решения ряда экономических задач, акцентируя внимание на анализе и моделировании случайных явлений и процессов.

Задача 1. Инвестор хочет составить портфель из m различных акций, осуществляя выбор из n имеющихся акций. Однако, некоторые акции коррелированы друг с другом, и инвестирование в тесно связанные акции может увеличить риск портфеля. Каждая акция сильно коррелирована ровно с двумя из предлагаемого набора акций, так что в итоге акции могли бы образовать циклический граф с количеством вершин n , где ребра означают плохую совместимость акций в портфеле. Нужно найти вероятность того, что при случайном формировании портфеля сильно коррелированные акции не войдут в него.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться классическим определением вероятности [1]. Вероятность события, которое нас интересует, можно найти по формуле $P(A) = \frac{M}{N}$, где $N = C_n^m$ – количество всех сочетаний из n элементов по m , M – количество сочетаний из не соседних элементов в циклическом графе по m .

Заметим, что циклический граф отличается от ряда только соседством первого и последнего элемента. В линейном случае задача решается методом разделения элементов на две категории:

1. m элементов, которые не должны быть соседями («не соседи»),
2. $n-m$ элементов, обозначаемых как «х», которые могут занимать любые позиции.

При расположении заполнителей в ряд вида $_x_x_..._x_$, между ними образуется $(n-m+1)$ промежутков, в которые могут быть размещены «не соседи». Количество способов выбора m позиций из $(n-m+1)$ определяется биномиальным коэффициентом:

$$C_{n-m+1}^m$$

Для вычисления комбинации, в которых участвуют совместно первый и последний элементы, зафиксируем их. Оставшиеся $m-2$ «не соседей» должны быть размещены в оставшихся $n-2$ позициях, исключая соседние с первым и последним элементами. Это эквивалентно задаче размещения $m-2$ элементов в линейной цепочке из $n-4$ позиций:

$$C_{n-(m-2)+1-4}^{m-2} = C_{n-m-1}^{m-2}$$

Таким образом, в итоге число способов выбрать m элементов из «не соседей» в циклическом графе равно.

$$M = C_{n-m+1}^m - C_{n-m-1}^{m-2}$$

Тогда искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{C_{n-m+1}^m - C_{n-m-1}^{m-2}}{C_n^m}$$

Заметим, что для вычисления значения M можно использовать другой способ. Он состоит в следующем.

Найдем количество не соседних сочетаний в ряду, с количеством элементов $n-1$, то есть при исключенном первом элементе. Прибавим к этому числу количество сочетаний при выбранном первом элементе и исключенном последнем, т.е.

$$M = C_{n-3-(m-1)+1}^{m-1} + C_{n-1-m+1}^m = C_{n-m-1}^{m-1} + C_{n-m}^m.$$

Справедливость равенства $C_{n-m+1}^m - C_{n-m-1}^{m-2} = C_{n-m-1}^{m-1} + C_{n-m}^m$ можно доказать непосредственно, используя формулы для вычисления числа сочетаний [2].

Задача 2. Некоторая компания занимается разработкой сложного программного обеспечения (ПО). Перед началом каждого проекта проводится оценка рисков. Выделены три основных типа рисков, которые могут повлиять на успешное и своевременное завершение проекта:

- А: Текучесть квалифицированных специалистов.
- В: Внезапные изменения требований заказчика.
- С: Технические проблемы с интеграцией разработанного ПО.

Необходимо оценить вероятность того, что какой-нибудь из этих рисков произойдет в течение реализации проекта, если известно, что:

- Риски В и А независимы;
- Риски В и С независимы;
- $P(A) = 0.12$;
- $P(B) = 0.11$;
- $P(C) = 0.07$;
- $P(A \cap C) = 0.03$;
- $P(A \cap B \cap C) = 0.01$.

Для решения данной задачи следует использовать принцип включения-исключения для трех событий [3]. Принцип включения-исключения позволяет вычислить вероятность объединения нескольких событий, учитывая вероятности их пересечений.

Так как события В и А, а также В и С независимы, их пересечения вычисляются как:

$$P(B \cap A) = P(B) \times P(A) = 0.11 \times 0.12 = 0.0132$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = 0.11 \times 0.07 = 0.0077$$

Для трех событий А, В и С принцип включения-исключения выражается следующей формулой [2]:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Подставив заданные вероятности в формулу, можно получить:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 0.12 + 0.11 + 0.07 - 0.0132 - 0.03 - 0.0077 + 0.01 \\ &= 0.2591 \end{aligned}$$

Задача 3. Для реализации проекта и испытания готового продукта необходима закупка энергоресурсов. Рынок энергоресурсов может находиться в одном из трех состояний, отличающихся ценой продукта Z_i . Состояния обозначаются номерами 1, 2, 3. Переход от одного состояния к другому происходит случайно, в соответствии со схемой (рис. 1):

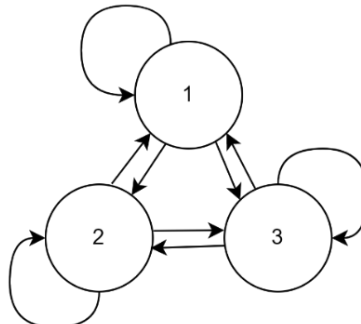


Рис. 1 – Схема перехода состояний

Пусть $p_{i,j}$ - вероятности перехода из i -го состояния в j -е.

Матрица переходных вероятностей P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

В момент времени $t=0$ рынок находится в состоянии 1, необходимо найти наиболее вероятную цену, по которой будут закуплены ресурсы в момент времени 2.

Для решения данной задачи воспользуемся свойствами цепей Маркова [4]. Цепь Маркова – это стохастический процесс, в котором будущее состояние системы зависит только от текущего состояния и не зависит от ее прошлых состояний. Пусть q_i^t – вероятность того, что в момент времени t , рынок будет находиться в состоянии i . Тогда q^t - вектор финальных вероятностей состояний рынка в момент времени t .

Поскольку в начальный момент времени рынок находится в состоянии 1, вектор начальных вероятностей q^0 имеет вид:

$$q^0 = (1, 0, 0)$$

Чтобы найти вектор вероятностей q^1 для момента времени $t = 1$, необходимо умножить вектор начальных вероятностей на матрицу переходных вероятностей:

$$q^1 = q^0 * P = (0.2, 0.5, 0.3)$$

Аналогично, чтобы найти вектор вероятностей q^2 для момента времени $t = 2$, необходимо умножить вектор вероятностей q^1 на матрицу переходных вероятностей:

$$q^2 = q^1 * P = (0.23, 0.54, 0.23)$$

Наиболее вероятной ценой энергоресурсов в момент времени $t = 2$ будет цена, соответствующая состоянию с наибольшей вероятностью. В данном случае, наибольшая вероятность соответствует состоянию 2 (вероятность

0.54). На основе проведенного анализа, наиболее вероятной ценой закупки энергоресурсов будет Z_2 .

Рассмотренные задачи демонстрируют возможности теории вероятностей как инструмента для решения ряда экономических задач. Сфера применения теории вероятностей в различных областях науки и техники очень широка и всегда связана с поиском закономерностей в случайных явлениях.

Список литературы

1. Шкляев, А. В. Теория вероятностей. Семинары / А. В. Шкляев. – 2020 – URL: <https://teach-in.ru/file/methodical/pdf/probability-theory-seminars-shklyaev-M.pdf> – (Дата обращения: 22.02.2025).
2. Райгородский, А. М. Комбинаторика: конспект лекций / А. М. Райгородский. – 2019 – URL: <https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/combinatorics-M.pdf>. – (Дата обращения: 23.02.2025).
3. Шкляев, А. В. Теория случайных процессов: конспект лекций / А. В. Шкляев. – 2020 – URL: <https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/theory-of-random-processes-shklyaev-MKv0.pdf> – (Дата обращения: 22.02.2025).
4. Зорин, А. В. Введение в общие цепи Маркова: учебно-методическое пособие / А. В. Зорин, В. А. Зорин, Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.

**Крупные инвестиционные проекты Пензенской области:
важность и необходимость**

Ангелина Денисовна Яковлева¹, Татьяна Вячеславовна Черушева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹ gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация. Неоспоримым фактом является то, что поступательное развитие экономики страны в условиях рыночных отношений не может обойтись без инвестиций, инструментом которых является инвестиционный проект. Неотъемлемой частью экономического развития региона является укрепление межрегиональных связей. В статье рассматриваются перспективы инновационного развития водного транспорта в сфере речных туристических перевозок, а также определяются масштабы потенциального инновационного транспортного проекта.

Ключевые слова: инвестиционная деятельность, инвестиционный проект, экономическое развитие, Пензенская область.

Large investment projects in the Penza region: importance and necessity

Angelina D. Yakovleva¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹ gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ² tank1100@yandex.ru

Abstract. It is an indisputable fact that the progressive development of the country's economy in the conditions of market relations cannot do without investments, the instrument of which is an investment project. Strengthening inter-regional ties is an integral part of the economic development of the region. The article examines the prospects for the innovative development of water transport in the field of river tourism transportation, and also defines the scope of a potential innovative transport project.

Keywords: investment activity, investment project, economic development, Penza region.

Введение

Сегодня социальная инфраструктура занимает ключевое место в социально-экономическом развитии страны и ее субъектов, является важнейшей составляющей повышения уровня и качества жизни населения, а вопросы ее развития являются приоритетными направлениями государственной политики. Роль и значение социальной инфраструктуры в современном мире заметно увеличивается.

Высокая инвестиционная активность является необходимым условием экономического развития Пензенской области. Регион нуждается в новых

инвестиционных проектах, направленных на развитие и улучшение уже имеющихся социально-экономических ресурсов.

3. Инвестиции в очищение русла реки Суры

Река Сура – главная водная артерия Пензенской области, способная объединить в себе весь возможный потенциал региона и стать необходимым толчком для социально-экономического развития нашего региона.

Река Сура является крупнейшим правобережным притоком Волги [1]. Общая протяженность р. Суры – 841 км, она протекает по Приволжской возвышенности через Пензенскую область (344 км), Республику Мордовия (120 км), Ульяновскую область (160 км), Республику Чувашия (230 км), Республику Марий Эл (25 км) и Нижегородской области (160 км). На ряде участков река Сура является границей между этими регионами. Кроме того, из-за вырубki лесов и осушения истоков на землях села Сурские Вершины Ульяновской области, в настоящее время река Сура формируется ниже – в Кузнецком районе Пензенской области на территории заповедника «Приволжская лесостепь» [2-3]. В любом случае, протяженность реки в Пензенской области составляет 41% от общей протяженности водотока. Доля его водосборного бассейна в регионе еще больше – 47% от общей площади водосборного бассейна (67 500 км²) или 31 490 км².

Судоходство по рекам Пензенской области было освоено еще в средние века. В XIII веке по реке Мокша сплавлялись материалы (камень, древесина) для строительства поселка Мохши (на территории современного Наровчата). В конце XVII века мачтовые бревна из заповедных пензенских лесов сплавлялись по рекам Пензенского края на Воронежскую верфь для строительства первых судов российского флота. Интенсивное судоходство по Суре и Мокше и, в меньшей степени, по Инзе и Тешняру получило развитие в XVIII веке. Сура от Пензы до Васильсурска была сплавно-судоходной: от верховьев до Пензы она была сплавной, а от Пензы до Волги – судоходной. До строительства железнодорожной системы Пензенской области Сура служила каналом для транспортировки товаров и сырья. Для строительства в Пензе и степных уездах Пензенской области с верховьев р. Суры древесина доставлялась плотами. В 1786 году личная флотилия князя А.Б. Куракина отправилась по Суре к Чирковской пристани. На слиянии рек Пензы и Суры находилась пристань (в 1851 году ее обслуживали 1539 рабочих), к которой примыкали лесопильные заводы и мельницы купца П.В. Сергеева, складские амбары купцов А.Н. Муравьева и Ненюковых. Кроме Пензенской на Суре существовали Вазерская, Екатерининская, Шукшинская и другие пристани. Для обеспечения судоходства по Суре купец А.Н. Муравьев построил канатную фабрику в Проказне Мокшанского района [4].

Таким образом, Сура может связать водным путем Пензенский регион с Ульяновской и Нижегородской областями, Республиками Мордовия, Марий Эл и Чувашия.

Но для этого необходимо проект по расчистке русла реки, нуждающийся в инвестировании.

Стоит отметить, за последние 10 лет происходили сильные колебания уровня воды в Сурском водохранилище (рис. 1). В 2024 году объем воды уменьшился на 23,2 млн куб. м. относительно 2023 года.



Рис. 1. Динамика изменения объема воды в Сурском водохранилище, млн куб. м.

В 2018 году Министерство природных ресурсов и экологии Российской Федерации запустило национальный проект "Экология" по восстановлению и улучшению экологической ситуации в стране. Проект работает по пяти направлениям: отходы, вода, воздух, биоразнообразие и технологии.

Очистка русла реки предусматривает удаление илистых отложений, остатков древесной и кустарниковой растительности, затонувших деревьев, пней, бревен и других предметов, загрязняющих, засоряющих реку. Все процессы должны быть механизированы.

Дрова сделали практически непроходимыми десятки рек-притоков крупных водных артерий – Каму и Волгу, Обь и Иртыш, Енисей. Между тем, подъем древесины, лежащей на дне, решил бы не только проблему водного транспорта, но и дал бы промышленности огромное количество сырья.

Если со дна водоемов поднять весь топляк, то можно не только расширить лесосырьевую базу, но и улучшить условия для водного транспорта и судовых перевозок. Но такая сложная работа требует больших денежных и физических затрат. Необходимо провести тщательные геолого-разведывательные работы, составить карты мест массового скопления топляка [5].

Расчистка русла р. Суры – это крупный масштабный инвестиционный проект, реализация которого придаст новый импульс развитию Пензенской области. Любой проект направлен на получение выгоды и требует инвестиционного вмешательства. Ориентировочная стоимость проекта по расчистке русла реки общей протяженностью 3 километра – 60 миллионов рублей.

Итог данного инвестиционного проекта – улучшение экологической ситуации в регионе, но не только это.

Расчистка русла Суры, на территории Пензенской области, приведет к следующим результатам:

- укреплению водных транспортных связей с регионами, на территории которых находится водный бассейн р. Суры;
- переработки поднятых затонувших деревьев, пней, коряг в следующие виды продукции: поставка в круглом виде на целлюлозно-бумажные предприятия для производства целлюлозы; производство технологической щепы для изготовления древесных плит, арболита и т.д.; использование свежеподнятой древесины в качестве сырья для производства пиломатериалов; производство биотоплива – «пеллета», сжигание одной капсулы которого приравнивается к сжиганию килограмма угля [6];
- свободному заходу рыб на нерест, а потом и беспрепятственному скату молоди; кроме того, после расчистки улучшается и лучше формируется кормовая база рыбы.

Пензенский регион имеет огромный потенциал и обладает всеми необходимыми ресурсами для дальнейшего развития в традиционно сложившихся отраслевых сферах и для создания новых. Необходимо лишь грамотно воспользоваться возможными ресурсами и реализовать свой потенциал.

Очистка русла Суры – это и стимул для более активного привлечения туристов в Пензенский регион. Реализация проекта по очистке Суры послужит развитию малого водного транспорта, который свяжет Пензенскую область с регионами, на территории которых находится водный бассейн реки.

4. Создание производства малогабаритных судов

В настоящее время в условиях реформирования экономики страны, транспорта, в том числе речного, либерализации внешнеэкономических связей, функционирования многочисленных судовладельческих компаний с различной формой собственности необходимы новые решения в области повышения эффективности речных туристских перевозок.

Одним из направлений экономического развития, обозначенных в Транспортной стратегии Российской Федерации на период до 2030 года с прогнозом до 2035 года (далее – Стратегия) является развитие системы пассажирских перевозок, включая внутренний водный транспорт, с обеспечением необходимой транспортной инфраструктуры. Согласно целям Стратегии, к 2035 году мобильность населения должна увеличиться как минимум на 80%, а доля поездок на общественном транспорте должна увеличиться с 54% до 69% при одновременном снижении доли пассажиров, пользующихся личным транспортом. При этом в Стратегии четко обозначена задача внедрения инноваций на всех видах транспорта в целях повышения эффективности их работы и обеспечения экологической безопасности.

Благодаря богатым природно-климатическим условиям, внутренний туризм в нашей стране лучше всего осуществлять с использованием внутреннего водного транспорта. Следует отметить, что с появлением новых технологий обновляется и водный транспорт, который становится более экономичным, более экологичным и более комфортным для пассажиров.

При этом следует отметить, что для обеспечения доступности речного транспорта для пассажиров на всем протяжении реки Суры необходимо создание всей необходимой инфраструктуры речного транспорта (дебаркадеры, причалы, порты, пристани). Тем не менее, инвестиции государства (или государства и частного бизнеса) в создание такой инфраструктуры и развитие речных туристических перевозок обеспечат возрождение малых городов и сельской местности и дадут новый толчок в развитии экономики страны. Поскольку рост товарооборота на туристических маршрутах приведет к увеличению производства продукции местных производителей и созданию новых рабочих мест, а, следовательно, и к росту налоговых поступлений, как в бюджеты муниципальных образований, так и в федеральный и региональный бюджеты [7].

Среди множества выпускаемых сегодня морских и речных кораблей, катер считается наиболее популярным, универсальным водным транспортным средством. Он объединяет множество разновидностей маломерных судов и может использоваться для различных целей.

По области применения катера можно подразделить на несколько групп:

- 1) *Прогулочные или экскурсионные катера.* Предназначены для комфортных и недолгих водных прогулок.
- 2) *Катера повышенной комфортности.* Подходят для длительных многодневных путешествий, оснащены всем необходимым для комфортного проживания людей на воде.
- 3) *Рыболовные катера.* Имеют специальное оборудование для рыбной ловли и предназначены для любого типа рыбалки. Обладают высокой скоростью и хорошей проходимостью.
- 4) *Спортивные катера.* Используются в водных видах спорта, обладают высокой скоростью и маневренностью.
- 5) *Пассажирские катера.* Имеют большие размеры и обеспечивают много посадочных мест, используются для перевозки пассажиров.
- 6) *Грузовые катера.* Предназначены для перевозки грузов, оснащены вместительными палубами и трюмами для размещения грузов.
- 7) *Охранные или патрульные катера.* Оснащены специальным оборудованием и используются для охраны и патрулирования объектов на воде или берегу.

Таким образом, катер может быть универсальным водным транспортным средством, так как его можно использовать для разных задач и целей.

Примерное расположение нового производства представлено на рис. 2.

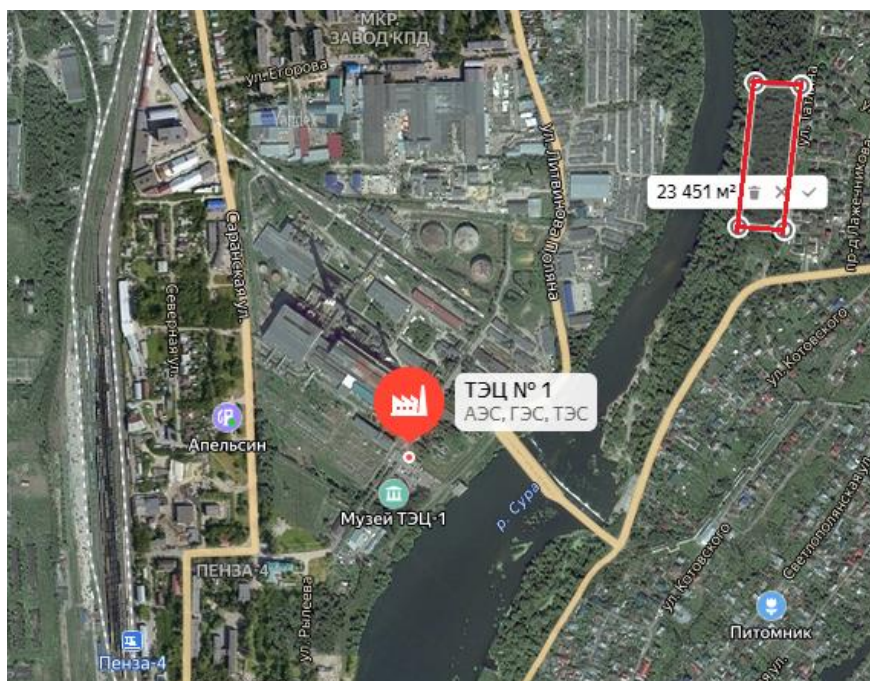


Рис. 2. Примерное расположение производства малогабаритных судов

Предпосылки создания производства малогабаритных судов:

1. Близкое расположение ТЭЦ-1, крупнейшей тепловой электростанции, входящей в состав Пензенского филиала ПАО «Т Плюс». ТЭЦ-1 поставляет электрическую энергию и мощность на оптовый рынок электрической энергии и мощности. Является основным источником тепловой энергии для системы централизованного теплоснабжения Пензы. Установленная электрическая мощность – 310 МВт, тепловая – 805 Гкал/час.
2. Общая площадь земельного участка – 23 451 м².
3. Имеются подъездные пути – асфальтированная дорога, прямой выход к р. Сура, узловая железнодорожная станция, Пенза-4.
4. Реализуемая продукция – суда малой вместимости: прогулочные и экскурсионные катера и катера повышенной комфортности.

Примерная стоимость данного инвестиционного проекта составляет 40 млн руб.

Реализуемая продукция и предоставляемое обслуживание:

- 1) Катер алюминиевый (грузоподъемность – 500 кг, масса лодки с оборудованием и снабжением (без мотора) – 230 кг, массовое водоизмещение – 0,7 тонн, пассажироместность – 5 чел.) – 200 шт./год, цена за единицу продукции: 500 тыс. руб./шт.;
- 2) Техническое обслуживание судов (в том числе. круглогодичное тестирование судов) – 30 шт./год, средняя цена за единицу услуги: 100 тыс. руб./шт.

Расчетный период проекта – 9 лет.

Финансово-экономические показатели:

- 1) Финансовые показатели: выручка – более 800 млн руб., финансовый результат – 180 млн руб., чистая прибыль – 120 млн руб.;

- 2) Ключевые инвестиционные показатели: чистый дисконтированный доход – 40 млн руб., срок окупаемости проекта – 4,5 года, дисконтированный срок окупаемости – 5 лет.

Заключение

Пензенский регион имеет огромный потенциал и обладает всеми необходимыми ресурсами для дальнейшего развития традиционно сложившихся отраслевых сфер, а также для успешного формирования новых направлений. Необходимо лишь грамотно воспользоваться возможными ресурсами и реализовать свой потенциал.

Список литературы

3. Асанов, А.Ю. Водные биологические ресурсы Пензенской области, река Сура / А.Ю. Асанов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: рыбное хозяйство. – 2016. – № 2. – С. 7-14.
4. Янкин, А.В. Особенности ихтиофауны верхнего течения реки Суры / А.В. Янкин, Д.Г. Янов, В.Ю. Ильин // Изв. Пенз. гос пед. ун-та им. В. Г. Белинского. Естественные науки. – 2006. – №. 1 (5). – С. 89–92.
5. Добролюбов, А.Н. Государственный природный заповедник «Приволжская лесостепь»: физико-географическая характеристика и биологическое разнообразие природных комплексов / А.Н. Добролюбов, И.П. Лебяжинская, А.Ю. Кудрявцев, Т.В. Горбушина, Т.В. Добролюбова, В.В. Осипов // Тр. Гос. заповедника «Приволжская лесостепь». Пенза. – 2013. – Вып. 4. – 70 с.
6. <https://penzanews.ru/region/encyclopedia/9990-2009>
7. Гудаева, Е.А. Проблема утилизации топляковой древесины / Е.А. Гудаева, Н.О. Шункова // Хвойные бореальной зоны. – 2020. – Т. XXXVIII. – № 1-2. – С. 24-27.
8. Михеевская, М.А. Затопленная древесина и ее использование в условиях промышленных предприятий Республики Коми / М.А. Михеевская, Н.Н. Бажуков // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2014. – Т. 2. – № 3-2 (8-2). – С. 134-137.
9. Пумбрасова, Н.В. Инновации в экономическом развитии речного туризма как основа мультипликативного эффекта в развитии малых городов / Н.В. Пумбрасова, Е.В. Упадышева // Научные проблемы водного транспорта. – 2022. – №. 71 (2). – С. 133–146.

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЫНОЧНЫХ ТРЕНДОВ

*Аюпова Алися Саубьяновна,
Мойко Наталья Валентиновна*

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
alisya.ayupova.2013@mail.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается применение фрактального анализа к задаче прогнозирования рыночных трендов. Показано, что фрактальная размерность может выступать в качестве индикатора текущего состояния рынка. Реализована торговая стратегия, основанная на фрактальных признаках для выявления фаз тренда и неопределённости.

Ключевые слова: фрактальный анализ, фрактальная размерность, рыночные тренды, временные ряды

FRACTAL ANALYSIS FOR FORECASTING MARKET TRENDS

Alisya S. Ayupova, Natalia V. Moiko

Penza State University, Penza, Russia
alisya.ayupova.2013@mail.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru

Abstract. The application of fractal analysis to the problem of forecasting market trends is considered. It is shown that fractal dimension can act as an indicator of the current state of the market. A trading strategy based on fractal features for identifying trend phases and uncertainty is implemented.

Keywords: fractal analysis, fractal dimension, market trends, time series

Введение

Финансовые рынки представляют собой нелинейные, динамичные системы, поведение которых не всегда возможно описать с помощью классических стохастических моделей. Одним из подходов к моделированию и анализу рыночных процессов является фрактальный анализ. В динамике цен можно обнаружить фрактальные свойства: самоподобие, масштабируемость и нерегулярность [1].

Цель данного исследования состоит в изучении фрактальных характеристик финансовых временных рядов и построении модели для определения рыночного тренда на основе фрактальной размерности.

Теоретические основы фрактального анализа

Фрактал — это множество, обладающее свойством самоподобия, при котором структура объекта повторяется на различных масштабах.

Фрактальная размерность — количественная характеристика, отражающая сложность структуры и степень её заполнения пространства. Она может принимать нецелые значения и определяется как:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

где $N(\varepsilon)$ - число ячеек размера ε , необходимых для покрытия множества.

Математические модели применяются для анализа и прогнозирования финансовых процессов. Классические подходы не всегда корректно описывают реальную рыночную динамику, особенно в условиях высокой волатильности [2]. В данной работе подробнее остановимся на методе Хигучи, широко используемый для оценки фрактальной размерности в финансовом анализе.

Он заключается в вычислении длины кривой на различных масштабах с помощью отрезков временного ряда с шагом k . Для каждого значения k определяется усреднённая длина $L(k)$, после чего фрактальная размерность вычисляется как наклон линии регрессии:

$$D = \frac{d \log L(k)}{d \log(k)}$$

Применение фрактального анализа к финансовым временным рядам

Финансовые временные ряды характеризуются нелинейностью и не стационарностью, что обосновывает применение фрактальной размерности для их анализа [3].

В исследовании были проанализированы временные ряды акций компании Tesla. Расчёты производились на основе метода Хигучи на каждом временном интервале заданной длины.

Основываясь на распределение фрактальной размерности (рис. 1), а также анализа ее поведения на исследуемом периоде (рис. 2), были установлены пороговые значения: фаза тренда $D < 1,45$; фаза высокой волатильности $D > 1,60$.

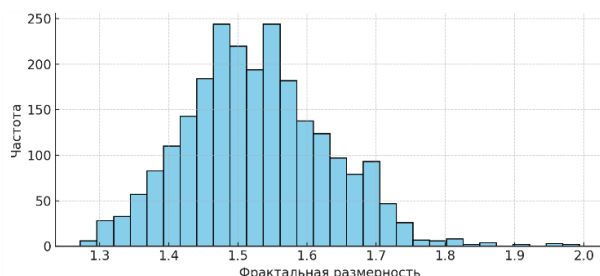


Рис. 1. Распределение фрактальной размерности (метод Хигучи)

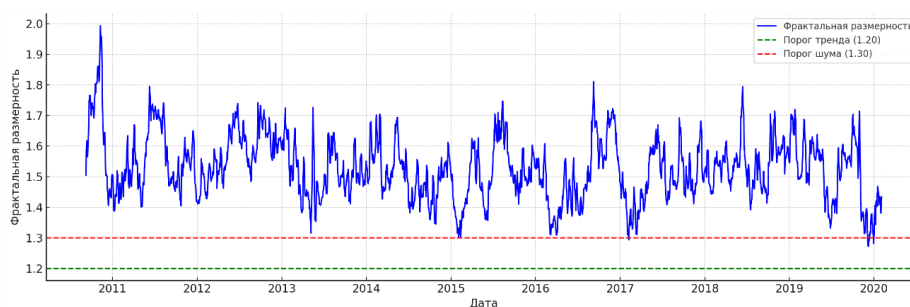


Рис. 2. Динамика фрактальной размерности акций Tesla во времени

Полученные результаты показали, что фрактальная размерность изменяется во времени и может интерпретироваться как индикатор текущего рыночного состояния.

Построение торговой стратегии на основе фрактальной размерности

На основе результатов фрактального анализа был разработан алгоритм принятия торговых решений, использующий фрактальную размерность в качестве индикатора рыночного состояния [3]. Цель стратегии — осуществлять вход в позицию в фазе тренда и избегать рыночной неопределённости.

На основе фрактальной размерности использовалась следующая логика формирования сигналов:

- при $D < 1,45$ — открытие позиции;
- при $D > 1,60$ — закрытие позиции;
- при $1,45 \leq D \leq 1,60$ — удержание позиции или остается закрытой.

Торговля моделировалась с использованием начального капитала в размере \$10,000. При возникновении сигнала на вход весь доступный капитал направлялся на покупку акций по рыночной цене, при этом приобреталось целое число лотов. Выход из позиции осуществлялся полной продажей акций.

Оценка эффективности стратегии и интерпретация результатов

Моделирование стратегии на исторических данных показало высокую степень её прибыльности. При начальном капитале в размере \$10,000 итоговая стоимость портфеля составила \$60,998, что соответствует доходности:

$$ROI = \frac{60998 - 10000}{10000} \cdot 100\% = 509,98\%$$

На рисунке 3 представлена кривая капитала, демонстрирующая стабильный рост с незначительными фазами снижения. Это указывает на устойчивость стратегии к локальным рыночным колебаниям и её способность избегать участия в неэффективных фазах рынка.

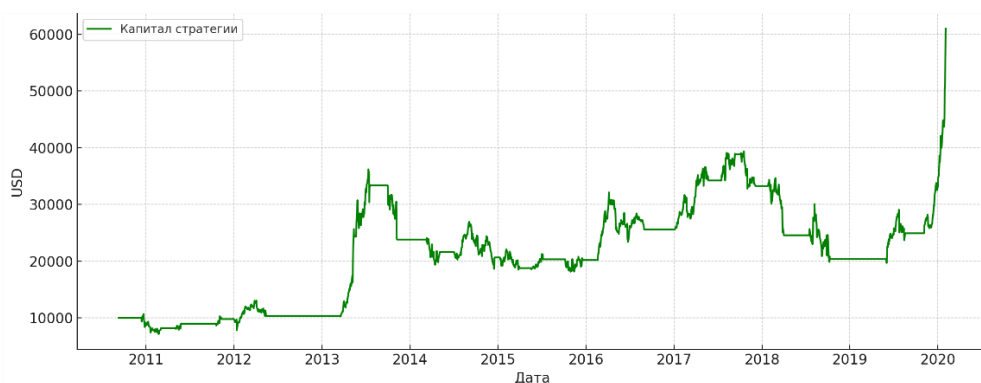


Рис. 3. Кривая капитала стратегии

Кроме того, графическая интерпретация сигналов (рисунок 4) демонстрирует, что стратегия успешно определяла моменты начала тренда и своевременно завершала сделки до перехода рынка в нестабильное состояние. Это свидетельствует о корректности выбора пороговых значений фрактальной размерности и подтверждает применимость метода Хигучи для классификации рыночных фаз.



Рис. 4. Сигналы стратегии

Заключение

Проведён фрактальный анализ временного ряда акций Tesla с использованием метода Хигучи. Установлено, что фрактальная размерность позволяет различать трендовые и хаотичные фазы рынка. Разработанная на этой основе торговая стратегия показала высокую доходность и устойчивость. Метод Хигучи подтвердил свою эффективность в задачах классификации рыночных состояний.

Список литературы

1. Мойко, Н. В. Фрактальный анализ в инвестиционном портфеле: теория и практика / Н. В. Мойко, Н. В. Зверовщикова, И. М. Мойко // Наука и инновации: исследование и достижения : Сборник статей VIII Международной научно-практической конференции, Пенза, 25–26 октября 2023 года. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2023. – С. 138-143.

2. Мойко, Н. В. Применение математических моделей в финансовой сфере: аналитические и численные подходы / Н. В. Мойко, П. М. Антонова // Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы : Сборник статей по материалам XI Всероссийской научно-практической конференции, г. Пенза, 13 марта 2024 года. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2024. – С. 58-60.

3. Зверовщикова, Н. В. Анализ временных рядов и его применение в экономике и финансах / Н. В. Зверовщикова, И. М. Мойко, В. С. Шатов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (АЧМ-2023) : Сборник статей по материалам XVIII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции с конкурсом научно-исследовательских работ для обучающихся, посвященной 80-летию Пензенского государственного университета и 80-летию кафедры "Высшая и прикладная математика". В 2-х частях, Пенза, 06–10 ноября 2023 года. – Пенза: Пензенский государственный университет, 2023. – С. 165-172.

5. Математические модели в физике и технологиях

УДК 519.876.5

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ДИЗАЙНЕ ПЛАВАТЕЛЬНЫХ КОСТЮМОВ

Захар Романович Бедин¹

Барсукова Оксана Юрьевна²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза,
Россия

¹zahar.bedin@gmail.com

²kuzya_7@mail.ru

Аннотация. Дизайн современных плавательных костюмов представляет собой сочетание моды, физики и математики. Используя математические расчеты и компьютерное моделирование, дизайнеры создают хорошо сидящий гидрокостюм, который повышает производительность, позволяет улучшить аэродинамические качества. В данной статье рассматривается роль математического аппарата в дизайне плавательных костюмов, основываясь на принципах гидродинамики и компьютерного моделирования. Приводятся примеры из реализованных плавательных костюмов и соответствующие формулы, чтобы показать, как математика способствует инновациям в этой области.

Ключевые слова: костюм для плавания, гидродинамика, компьютерное моделирование.

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING IN SWIMWEAR DESIGN

Zahar Romanovich Bedin¹

Barsukova Oksana Yurevna²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹zahar.bedin@gmail.com

²kuzya_7@mail.ru

Abstract. The design of modern swimming suits is a combination of fashion, physics and math. Using mathematical calculations and computer modeling, designers create a well-fitting wetsuit that enhances performance, allows for improved aerodynamic qualities. This paper discusses the role of mathematical apparatus in swim suit design based on the principles of fluid dynamics, material science, and computer modeling. Examples from realized swimming suits and corresponding formulas are presented to show how mathematics contributes to innovation in this field.

Keywords: swimming suit, fluid dynamics, computer modeling.

Дизайн плавательных костюмов значительно продвинулся за последние годы, превратившись в высокотехнологичное снаряжение. Спрос на гидрокостюмы постепенно растет. Использование математического моделирования стало незаменимым для оптимизации дизайна плавательных костюмов с целью минимизации сопротивления, максимизации эффективности и улучшения общей производительности. Качество и эксплуатационные характеристики гидрокостюмов требуют значительного улучшения по целому ряду направлений. Одной из целей цель дизайна плавательных костюмов - снижение сопротивления, которое возникает при движении пловца в воде. Сопротивление определяется двумя основными факторами:

Давленческое сопротивление: обусловлено разницей давления между передней и задней частью пловца.

Трение поверхности: Возникает из-за взаимодействия тела пловца с водой.

Сила сопротивления тела, движущегося в воде (F) определяется в вид.

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_d \quad (1.1)$$

ρ — плотность жидкости (воды) (кг/м^3), v — скорость тела (м/с), C_d — коэффициент сопротивления (безразмерный параметр, зависящий от формы тела и его скорости), S — площадь поперечного сечения тела, контактирующая с водой (м^2).

Для минимизации сопротивления дизайнеры стремятся уменьшить C_d и S . Это достигается за счет обтекаемых форм,

гладких поверхностей и стратегического сжатия. Для совершенствования процесса проектирования гидрокостюма рассматривается текстура поверхности плавательных костюмов, которая играет ключевую роль в управлении турбулентностью и снижении трения. Используя текстуры с углублениями или ребрами, дизайнеры могут влиять на обтекаемость воды вокруг пловца.

Для прогнозирования режимов потока используется число Рейнольдса (Re) — безразмерная величина.

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (1.2)$$

ρ — плотность жидкости среды (кг/м^3), v — характерная скорость потока, (м/с), L — характерный линейный размер (м), μ — динамическая вязкость жидкости ($\text{Па}\cdot\text{с}$).

Проводя оптимизацию текстуры поверхности, дизайнеры могут влиять на число Рейнольдса и управлять переходом между ламинарным и турбулентным потоком, снижая общее сопротивление [1, 4].

Современные плавательные костюмы изготавливаются из передовых материалов, таких как полиуретан и эластан, которые обеспечивают компрессию и уменьшают вибрацию мышц. Компрессия помогает сделать тело более обтекаемым, уменьшая площадь поверхности, контактирующей с водой. в уравнении сопротивления. Современные материалы отталкивают воду, что дополнительно снижает трение.

Ключевым фактором при выборе материала является жесткость, количественным критерием которого является модуль Юнга (E) материал [4], E — это постоянная величина зависящая только от материала, его физического состояния.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.3)$$

σ — напряжение, приложенное к материалу, ϵ — деформация материала.

Дизайнеры используют материалы с оптимальными значениями E , чтобы обеспечить баланс между гибкостью и компрессией, гарантируя, что плавательный костюм плотно прилегает к телу, не ограничивая движения.

С помощью компьютерного моделирования дизайнеры симулируют и анализируют производительность плавательных костюмов в различных условиях. Вычислительная гидродинамика (CFD) — это мощный инструмент, используемый для визуализации и оптимизации потока жидкости вокруг пловца. CFD решает уравнения Навье-Стокса, которые описывают движение жидкости [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 u + f \quad (1.4)$$

u — вектор скорости жидкости (м/с), p — давление (Па), μ — вязкость жидкости (Па·с), f — внешние силы. $\nabla^2 u$ — оператор Лапласа от скорости (м/с·м²), ∇p — градиент давления (Па/м).

Производя расчеты уравнения (1.4) и применяя компьютерное моделирование, проведено тестирование различных моделей виртуально, это привело к экономии время и ресурсов. В работе была рассмотрена модель Speedo LZR Racer гидрокостюма. Она была представлена на Олимпиаде 2008 года. Данный образец снизил сопротивление на 25% по сравнению с предыдущими моделями. Модель была создана с использованием компрессионных панелей и сварных швов, которая обеспечила и позволила минимизировать шероховатость поверхности гидрокостюма [2].

В модели Arena Powerskin Carbon Ultra: Используются вставки из углеродного волокна для улучшения компрессии мышц и снижения сопротивления [3].

Произведен анализ моделей плавательных костюмов за последние 34 года, представлена зависимость снижения сопротивления воды от внедрения новых технологий. График иллюстрирует как с 1990-го года по 2024-ый инженерные решения позволили увеличить эффективность гидрокостюмов от простой гладкой поверхности ранних образцов до бесшовных конструкций, углеродных вставок и ИИ-оптимизации в новейших разработках, сократив сопротивление воды на 40%, что стало возможным с

использованием интеграции компьютерного моделирования, передовых материалов и новых технологий.

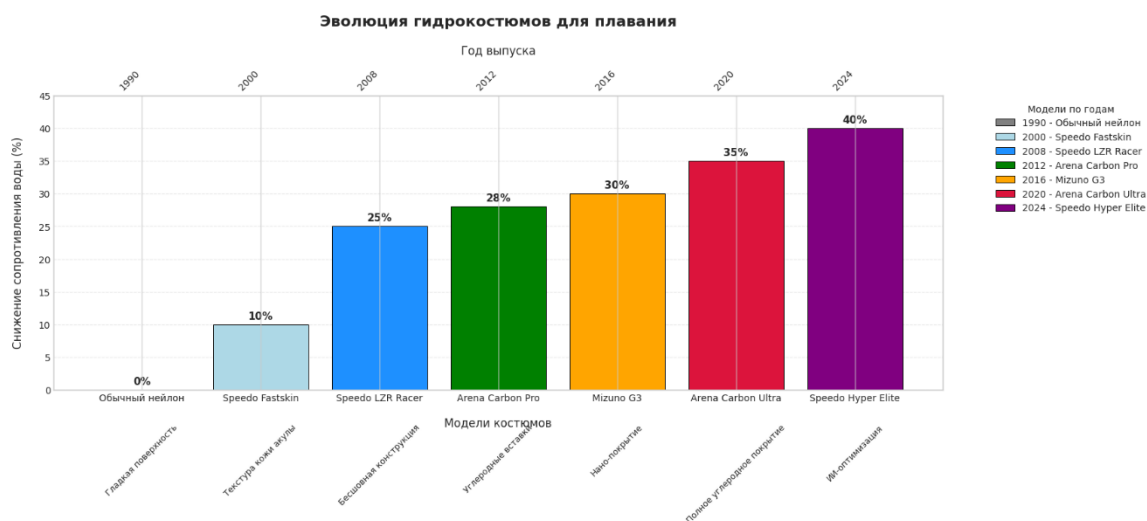


Рис. 1. Эволюция гидрокостюмов для плавания

Математические методы играют ключевую роль в создании высокопроизводительных плавательных костюмов. Применяя принципы гидродинамики, материаловедения и компьютерного моделирования, дизайнеры могут создавать плавательные костюмы, которые минимизируют сопротивление и повышают спортивные результаты. С развитием технологий интеграция математического аппарата и компьютерного моделирования будет продолжать двигать инновации в дизайне купальников, расширяя границы человеческих возможностей в водных видах спорта.

Список литературы

1. Павловский В. А., Никущенко Д. В. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 368 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Speedo International. (2008). *Наука behind LZR Racer*.
3. Arena. (2020). *Powerskin Carbon Ultra: Дизайн и производительность*.
4. Фиодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб.- 10-е изд., перераб. и доп.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592с.

Применение метода сжимающих отображений для описания некоторых физических моделей.

Ирина Анатольевна Мартыненко¹, Татьяна Вячеславовна Черушева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹ martia@rambler.ru, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается вопрос применения метода Пикара для разрешения систем дифференциальных уравнений с начальными условиями. [1]

Полученные результаты дают возможность применить этот метод для задач с исходно не Липшицевыми матрицами.

Ключевые слова: метод Пикара, система дифференциальных уравнений, начальные условия, сжимающие отображения.

Application of the method of contraction mappings to describe some physical models.

Irina Anatolyevna Martynenko¹, Tatyana Vyacheslavovna Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ martia@rambler.ru, ² tank1100@yandex.ru

Abstract

The paper considers the issue of applying the Picard method to resolve systems of differential equations with initial conditions. The results obtained make it possible to apply this method to problems with initially non-Lipschitz matrices.

Keywords: Picard method, system of differential equations, initial conditions, contracting mappings.

Введение.

Для описания множества физических задач используются математические модели в виде систем дифференциальных уравнений с краевыми или начальными условиями. Одним из базовых численных методов решения подобных задач является метод Пикара - метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основа для большинства численных методов. [2,3] Метод удобен. Его применение показывает разрешимость системы. В общем случае дифференциальные операторы не всегда являются операторами сжатия, тем не менее на небольших участках возможно пронормировать матрицы.

Применим метод сжимающих отображений для решения системы дифференциальных уравнений для описания следующей модели. Шарик массой m на пружине длины l совершает свободные колебания. (рис.1)

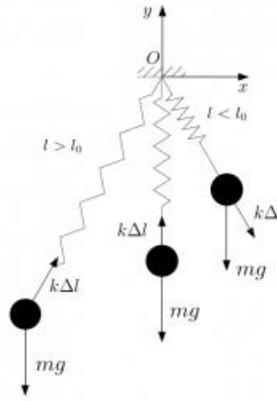


Рис. 1

Колебания описываются системой из двух уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} mx'' = -\frac{kx(\sqrt{x^2+y^2}-l_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lambda x' \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ my'' = -\frac{ky(\sqrt{x^2+y^2}-l_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lambda y' \sqrt{x'^2 + y'^2} - mg \end{cases} \quad (1)$$

Для приведения ее к системе первого порядка выполним 3 простых шага:

1) следует заменить переменные соответствующим образом.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2) Далее следует преобразовать уравнение с учетом замены. Таким образом, мы имеем систему из четырёх дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} x'_1 = 0 * x_1 + 0 * x_2 + x_3 + 0 * x_4 \\ x'_2 = 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + x_4 \\ x'_3 = -\frac{kx_1(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 0 * x_2 - \frac{\lambda x_3 \sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{m} + 0 * x_4 \\ x'_4 = 0 * x_1 - \frac{kx_2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 0 * x_3 - \frac{\lambda x_4 \sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{m} - g \end{cases} \quad (2)$$

где $m = 5\text{ кг}$, $k = 150\text{ Н/м}$ коэффициент Гука или коэффициент упругости пружины, $l_0 = 1\text{ м}$ - удлинение пружины, $\lambda = 1\text{ кг}$ линейная плотность

Запишем эту систему в формальном виде

$$X' = AX - B, [4, 2]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} \end{pmatrix}$$

$$k_{31} = -\frac{k(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, k_{33} = -\frac{\lambda\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{m}, k_{42} = k_{31}, k_{44} = k_{33}$$

Запишем начальные условия

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Следующим шагом необходимо показать, является ли оператор А липшицевым отображением [2,3], т.е. выполняется ли условие

$$\|Ax - Ay\| \leq \|A\| * \|x - y\|. \|A\| < 1$$

Воспользуемся следующим определением нормы матрицы, а именно $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$. [4] Для оценки нормы оператора, а соответственно нормы матрицы А, необходимо провести оценку следующих ее коэффициентов: 0,1,

$$k_{31} = -\frac{k(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, k_{33} = -\frac{\lambda\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{m}.$$

$$\text{Оценим сначала коэффициент } k_{31} = -\frac{k(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Преобразуем его:

$$k_{31} = -\frac{k(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{m\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$$

$$\text{и рассмотрим отношение } \frac{k}{m} = \frac{G * d_D^4}{m * 8 * n * d_F^3},$$

где: G- модуль сдвига (для обычной [стали](#) $G \approx 80$ ГПа, для [пружинной стали](#) $G \approx 78.5$ ГПа, для меди ~ 45 ГПа). d_F -диаметр намотки (измеряемый от оси проволоки); n-число витков; d_D -диаметр проволоки

Вернемся к оценке

$$|k_{31}| = \left| -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \right| = \left| -\frac{G \cdot d_D^4}{m \cdot 8 \cdot n \cdot d_F^3} \right| * \left| 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| < 1 \quad (3)$$

Исходя из физического смысла поставленной задачи, варьируя показателями модуля сдвига, диаметра намотки, числа витков и диаметра проволоки мы всегда можем сделать так, чтобы неравенство (3) выполнялось. Оценим остальные коэффициенты A , и очевидно, что элементы матрицы $k_{33} = -\frac{\lambda \sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{m}$ могут быть нормированы на каждом (первом) шаге процесса. Для этого все уравнения системы мы разделим на 5, и таким образом получим

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ \overline{k_{31}} & 0 & \overline{k_{33}} & 0 \\ 0 & \overline{k_{42}} & 0 & \overline{k_{44}} \end{pmatrix}$$

$$\overline{k_{31}} = -\frac{k(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - l_0)}{5 \cdot m \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \overline{k_{33}} = -\frac{\lambda \sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{5 \cdot m}, \overline{k_{42}} = \overline{k_{31}}, \overline{k_{44}} = \overline{k_{33}}$$

После преобразований к полученной системе уравнений можно применить метод последовательных приближений, или метод Пикара.

Разделим период времени $t \in [0, 15]$ на отрезки длиной 0.1 и начнем с начальных условий

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проведя 150 итераций, на каждой из которых мы решаем систему на отрезке $[0.1i, 0.1(i+1)]$, где i - номер отрезка мы получаем решение системы дифференциальных уравнений.

График этого решения-представлен на рисунке 2.

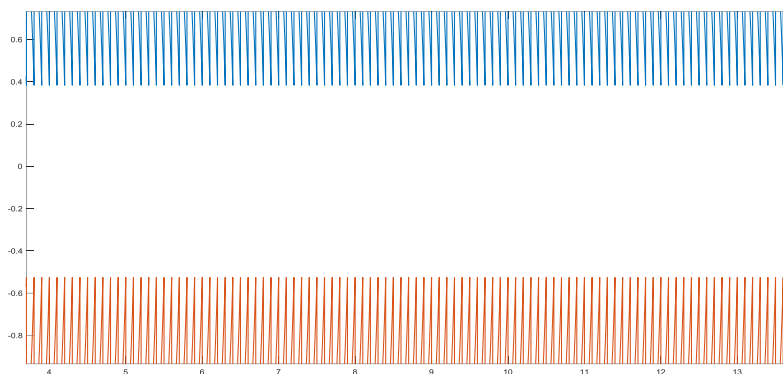


Рис.2.

Таким образом, предлагаемый метод Пикара в совокупности с методом сжимающих отображений дает устойчивое решение

.

Список литературы

1. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Перевод с нем Москва. Издательство иностранной литературы.1953.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы-8-е издание./Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков-Москва:Лаборатория знаний, 2015.-639 стр.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. /Колмогоров А. Н., Фомин С. В.-Москва :Наука. 1976-544 с.
4. Черушева, Т. В. Алгебра матриц: учеб. пособие/Т.В. Черушева.- Пенза:Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007.-48 с.

Математическое моделирование динамики трубопроводных систем с учетом запаздывания реакции и демпфирования вязкоупругих связей.

Петр Александрович Вельмисов¹,

Павел Михайлович Абрашкин²,

Григорий Андреевич Анкилов³,

Алексей Викторович Ликанин⁴.

^{1, 2, 3, 4}Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск,
Россия

¹velmisov@ulstu.ru, ²abrashkinpm@gmail.com, ⁴lexavik@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются математические модели динамики трубопроводных систем с учетом эффектов вязкоупругости, включая запаздывание реакции и демпфирования опорных элементов. Актуальность исследования обусловлена широким применением трубопроводов в энергетике, нефтегазовой, химической и других отраслях, где точность моделирования динамических процессов критически важна для обеспечения надежности и безопасности эксплуатации. Предложены и проанализированы модели в виде дифференциальных уравнений, описывающие поведение трубопровода при различных воздействиях, включая внешние и внутренние демпфирующие силы, инерционные эффекты, а также нелинейные составляющие внешней нагрузки. Построены функционалы для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений, проведен спектральный анализ с учетом запаздывания, предложены аналитические и численно – аналитические методы оценки устойчивости. Полученные результаты позволяют углубить понимание влияния запаздывания и вязкоупругих свойств на динамику трубопроводных систем и могут быть использованы для совершенствования методов их проектирования и расчета.

Ключевые слова: трубопровод, динамика, запаздывание, уравнения с частными производными, устойчивость, функционал, метод Галеркина.

Mathematical modeling of the dynamics of pipeline systems, taking into account the reaction delay and damping of viscoelastic bonds.

Peter A. Velmisov¹, Pavel M. Abrashkin², Grigory A. Ankilov³, Alexey V. Likanin⁴.

Abstract. The paper considers mathematical models of the dynamics of pipeline systems, taking into account the effects of viscoelasticity, including reaction delay and damping of support elements. The relevance of the research is due to the widespread use of pipelines in the energy, oil and gas, chemical and other industries, where the accuracy of dynamic process modeling is critically important to ensure reliability and safety of operation. Models in the form of differential equations describing the behavior of the pipeline under various influences, including external and internal damping forces, inertial effects, as well as nonlinear components of the external load, are proposed and analyzed. Functionals for studying the stability of solutions of differential equations are constructed, spectral analysis is performed taking into account the delay, analytical and numerical analytical methods for assessing stability are proposed. The results obtained make it possible to deepen the understanding of the effect of delay and viscoelastic properties on the dynamics of pipeline systems and can be used to improve their design and calculation methods.

Keywords: pipeline, dynamics, delay, partial differential equations, stability, functional, Galerkin method.

Современные трубопроводные системы, играющие ключевую роль в транспортировке жидкостей и газов в энергетике, нефтегазовой, химической промышленности и других отраслях, представляют собой сложные инженерные сооружения, функционирование которых подвержено различным динамическим нагрузкам. В вязкоупругих материалах, часто используемых в уплотнительных, опорных и компенсационных элементах трубопроводов, процессы демпфирования и запаздывания играют критически важную роль в формировании отклика системы на динамические возмущения. Разработка математических моделей, учитывающих данные эффекты, позволяет значительно повысить точность инженерных расчетов, надежность эксплуатации и эффективность проектирования трубопроводных систем. Ранее подобные задачи рассматривались в работах [1] – [7].

Рассмотрим несколько математических моделей динамики трубопровода с учетом запаздывания реакции и демпфирования опоры.

Первая модель (нелинейная), учитывающая только поперечные деформации, описывается уравнением

$$Dw'''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_*U^2)w'' + 2Um_*\dot{w}' + \xi^*\dot{w}(x, t) + \theta^*w(x, t) + \\ + \xi\dot{w}(x, t - \tau) + \theta w(x, t - \beta) + \psi\dot{w}'''' - \varphi\ddot{w}'' - w'' \left[k \int_0^l (w')^2 dx + 2\alpha \int_0^l w'\dot{w} dx \right] = \quad (1) \\ = G(x, t, w(x, t), \dot{w}(x, t), w(x, t - \beta), \dot{w}(x, t - \tau)).$$

Коэффициенты m_0 , m_* , D вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0 \pi (R_*^2 - R_0^2), \quad m_* = \rho_* \pi R_0^2, \quad D = \frac{\pi E}{4} (R_*^4 - R_0^4), \quad R_* = R_0 + h_0.$$

Вторая нелинейная модель учитывает как поперечную, так и продольную деформации трубопровода, и определяется системой двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' + M\ddot{u} + \psi_0 \dot{u}'' + \xi_0^* \dot{u}(x, t) + \theta_0^* u(x, t) + \xi_0 \dot{u}(x, t - \tau_0) + \\ + \theta_0 u(x, t - \beta_0) = H(x, t, u(x, t), \dot{u}(x, t), u(x, t - \beta_0), \dot{u}(x, t - \tau_0)), \\ \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' + EJw'''' + M\ddot{w} + m_* V^2 w'' + 2m_* V \dot{w}' + \\ + \xi_1^* \dot{w}(x, t) + \theta_1^* w(x, t) + \xi_1 \dot{w}(x, t - \tau_1) + \theta_1 w(x, t - \beta_1) + \psi_1 \dot{w}'''' - \\ - \phi \ddot{w}'' = G(x, t, w(x, t), \dot{w}(x, t), w(x, t - \beta_1), \dot{w}(x, t - \tau_1)), \end{array} \right. \quad (2)$$

Третья модель является линейной и описывается уравнением

$$L(w) \equiv Dw'''' + (m_0 + m_*) \ddot{w} + (N + m_* U^2) w'' + 2Um_* \dot{w}' + \psi w'''' - \\ - \phi \ddot{w}'' + \sum_{k=0}^n \theta_k \dot{w}(x, t - \tau_k) + \sum_{k=0}^m \xi_k w(x, t - \beta_k) = 0. \quad (3)$$

В формулах (1), (2), (3) $w(x, t)$ – поперечная деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t ; $u(x, t)$ – продольная деформация; D – изгибная жесткость трубы; E – модуль упругости, U , m_* , ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_* , R_0 , h_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода и толщина, θ – коэффициент жёсткости основания; m_0 , ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и его плотность; N – сжимающая (растягивающая) сила; ξ , ψ – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент ϕ учитывает инерцию вращения сечений, τ , β , τ_0 , β_0 , τ_1 , β_1 , τ_k , β_k – параметры запаздывания демпфирования и реакции основания или какого-либо другого внешнего воздействия; F – площадь поперечного сечения стержня; EJ – изгибная жёсткость стержня; V – скорость жидкости; G , H – нелинейные составляющие внешних воздействий. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные, точка сверху обозначает производную по времени t , а штрих – производную по координате x .

Разработаны два метода исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными (1), (2), (3). Первый метод (аналитический) состоит в построении функционалов

Ляпунова [2], он использован для некоторых частных случаев уравнений (1), (2), (3).

Второй метод (численно – аналитический) основан на методе Галеркина. Рассмотрим его применение для модели (3). Решение уравнения (3) будем искать в виде $w(x, t) = g(x)e^{wt}$, тогда для $g(x)$ получим однородное дифференциальное уравнение

$$(D + \psi\omega)g'''' + (N + m_*U^2 - \varphi\omega^2)g'' + 2Um_*\omega g' + \left[(m_0 + m_*)\omega^2 + \omega \sum_{k=0}^n \theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=0}^m \xi_k e^{-\omega\beta_k} \right] g = 0 \quad (4)$$

Добавляя граничные условия для функции $g(x)$, получим задачу на собственные значения ω .

Решение уравнения (4) находится в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \quad (5)$$

где $\{f_k(x)\}_1^\infty$ – полная система функций на отрезке $[0, l]$ удовлетворяющая граничным условиям.

Предполагая, например, что концы трубопровода закреплены шарнирно ($g(0) = g''(0) = 0$, $g(l) = g''(l) = 0$), и полагая в качестве примера $n=2$, представим $g(x)$ в виде

$$g(x) = a_1 \sin(\lambda_1 x) + a_2 \sin(\lambda_2 x), \quad \lambda_k = \pi k/l, \quad (k=1, 2).$$

Тогда, используя метод Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений для a_1, a_2

$$\begin{cases} \left[(D + \psi\omega) \frac{\pi^4}{2l^3} - (N + m_*U^2 - \varphi\omega^2) \frac{\pi^2}{2l} + \left[(m_0 + m_*)\omega^2 + \omega \sum_{k=0}^n \theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=0}^m \xi_k e^{-\omega\beta_k} \right] \frac{l}{2} \right] a_1 - \frac{8}{3} Um_* \omega a_2 = 0 \\ \left[(D + \psi\omega) \frac{8\pi^4}{l^3} - (N + m_*U^2 - \varphi\omega^2) \frac{2\pi^2}{l} + \left[(m_0 + m_*)\omega^2 + \omega \sum_{k=0}^n \theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=0}^m \xi_k e^{-\omega\beta_k} \right] \frac{l}{2} \right] a_2 + \frac{8}{3} Um_* \omega a_1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из условия существования не нулевого решения СЛАУ (6) (то есть равенства нулю определителя системы (6)) получим нелинейное алгебраическое уравнение для нахождения собственных значений ω , которые определяют характер колебаний трубопровода, в том числе частоту колебаний, а также поведение амплитуды колебаний с ростом времени.

Аналогичная методика может быть использована в случае, когда в левую часть исходного уравнения (3) входит слагаемое, учитывающее внутреннее демпфирование в материале трубопровода

$$\sum_{k=1}^l \psi_k \dot{w}''''(x, t - \gamma_k), \quad (7)$$

где γ_k – запаздывания.

Укажем также ещё один приближенный способ исследования устойчивости решений уравнения

$$L(w) + \sum_{k=0}^l \psi_k \dot{w}''''(x, t - \gamma_k) = 0 \quad (8)$$

в случае, когда запаздывания τ_k , β_k , γ_k являются малыми величинами (при этом в уравнении (3) следует положить $\psi = 0$, чтобы избежать повторения слагаемого $\psi \dot{w}''''$). Проводя разложения по степеням этих параметров и оставляя линейные или квадратичные члены, получим уравнение

$$Dw'''' + M\ddot{w} + (N + m_*U^2)w'' + 2Um_*\dot{w} + \psi \dot{w}'''' - \gamma \ddot{w}'''' + \theta \dot{w} + \xi w = 0. \quad (9)$$

Здесь функция w и все ее производные зависят от x, t , а коэффициенты имеют вид

$$M = m_0 + m_* - \sum_{k=0}^n \theta_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \xi_k \beta_k^2, \quad (10)$$

$$\psi = \sum_{k=0}^l \psi_k, \quad \gamma = \sum_{k=0}^l \psi_k \gamma_k, \quad \xi = \sum_{k=0}^m \xi_k, \quad \theta = \sum_{k=0}^n \theta_k - \sum_{k=0}^m \xi_k \beta_k.$$

Исследование устойчивости решения уравнения (9) можно провести, используя выше рассмотренную методику, основой которой является метод Галеркина, а также применяя методику, основанную на построении функционалов Ляпунова.

Если в разложениях оставлять более высокие степени τ_k , β_k , γ_k , то в уравнении (8) будут добавляться производные соответствующих порядков по времени.

Список литературы

1. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник УлГТУ. – 2004. – №4. – С. 26–29.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В. Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев // Вестник УлГТУ. – 2014. – №4. – С. 29–36.

3. Вельмисов, П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование вязкоупругих свойств конструкций дифференциальными уравнениями с запаздыванием // Вузовская наука в современных условиях: сборник материалов 52-й научно-технической конференции, Ульяновск, 29 января – 3 февраля 2012 года. Том Часть 2. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2018. – С. 163-168.

4. Вельмисов П. А., Ходзицкая Ю. В. О динамике трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды международной конференции КЛИН – 2003. Ульяновск: УлГТУ, 2003. – Т 5. – С. 35-39.

5. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. О некоторых математических методах исследования динамики трубопровода с учетом запаздывания реакции и демпфирования внешней связи // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Труды международной конференции КЛИН – 2004. Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т 7. – С. 59-61.

6. Vel'misov P.A., Garfneska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time. J. "Rev.Mat.Estat.", v. 19, p.159 - 178, 2001. Sao Paulo, Brazil.

7. Vel'misov P.A., Garfneska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the stability of the solution of the equation of oscillations of an axis or a plate with delay in time of the reaction and friction forces. Applications of Mathematics in Engineering. 1999, p.83 -88. B.I.Cheshankov and M.D.Todorov, Eds. Heron Press, Sofia, Bulgaria.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕДИЦИНСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ МАННА-УИТНИ

Мария Андреевна Кутыркина¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

[¹mariahkutyorkina@yandex.ru](mailto:mariahkutyorkina@yandex.ru), [²mamedovatf@yandex.ru](mailto:mamedovatf@yandex.ru)

Аннотация. В данной работе представлены результаты анализа медицинских экспериментов с использованием критерия Манна-Уитни. Установленная зависимость позволяют сформировать обоснованные научные выводы о действии лекарственных препаратов и возможностях их использования в клинической практике.

Ключевые слова: статистические методы, критерий Манна-Уитни, эмоксипин, цитохром

ANALYSIS OF MEDICAL EXPERIMENTS RESULTS USING THE MANN-WHITNEY CRITERION

Maria A. Kutyorkina¹, Tatiana F. Mamedova²,

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

[¹mariahkutyorkina@yandex.ru](mailto:mariahkutyorkina@yandex.ru), [²mamedovatf@yandex.ru](mailto:mamedovatf@yandex.ru)

Abstract. This paper presents the results of the analysis of medical experiments using the Mann-Whitney criterion. The established dependence allows us to form well-founded scientific conclusions about the action of drugs and the possibilities of their use in clinical practice.

Keywords: statistical methods, Mann-Whitney test, emoxipin, cytochrome

© Кутыркина М.А., Мамедова Т.Ф., 2025

Статистический анализ играет ключевую роль в интерпретации данных медицинских исследований, особенно когда речь идет о клинической эффективности лекарственных препаратов.

Постановка задачи. Оценить влияние двух препаратов — эмоксипина (25 мг/кг) и цитохрома С (20 мг/кг) — на интактные и экспериментальные группы крыс в условиях окклюзии сонных артерий [1-2].

Исходные данные представлены в формате Excel, где каждый из семи листов отражает временные интервалы, начиная с 0 минут и заканчивая 60 минутами. Каждый лист включает данные трех групп: интактная группа (7 наблюдений); опытная группа (5 наблюдений) и контрольная группа (5 наблюдений). На каждом временном листе зафиксированы значения таких параметров, как QTd (разница между максимальным и минимальным QT) и QTcd (интервал QT, скорректированный на частоту сердечных сокращений, ЧСС). Данные собирались для анализа физиологических изменений, наблюдаемых у крыс в зависимости от времени и воздействия препаратов, в условиях ишемии головного мозга. Данные представлены в таблице 1 и таблице 2.

Важно учитывать размер выборки. В ситуациях, когда число наблюдений меньше 30, следует отдавать предпочтение непараметрическим тестам, таким как тест Манна-Уитни, чтобы избежать недостатков параметрических методов. Например, при изучении изменений средней продолжительности одного эпизода перемежающейся ишемической митральной регургитации использование t-теста Стьюдента для недостаточно больших групп может привести к ненадежным выводам. Поэтому для данного исследования использовался критерий Манна-Уитни.

Таблица 1. Изменения параметров QTd

Время после перевязки	QTd, мс			
	Интактные, n = 7	Контрольные, n = 5	Эмоксипин 25 мг/кг, n = 5	Цитохром С 25 мг/кг, n = 5
Исходные показатели	8,4 ± 0,93	9,2±0,49	9,2±0,86	8,8±0,58
1	8,8±0,96	10,4±0,4	9,6±0,25	9,6±0,25
5	9±1	11±1	11,2±0,97	9,8±0,2
10	9,5±0,5	15,4±2,06	12,2±1,96	10±0,63
30	10,55±0,25	19,6±0,4	14,2±1,8	14±1,87
40	10±0	23±2	14,4±1,69	14±2,45
60	10,55±0,28	21,4±2,73	14,2±0,97	11±1

Таблица 2. Изменения параметров QTcd

Время после перевязки	QTcd, мс			
	Интактные, n = 7	Контрольные, n = 5	Эмоксипин 25 мг/кг, n = 5	Цитохром С 20 мг/кг, n = 5
Исходные показатели	0,392±0,014	0,385±0,012	0,581±0,091	0,535±0,086
1	0,477±0,091	0,635±0,068	0,708±0,072	0,623±0,093
5	0,595±0,199	0,688±0,014	1,086±0,177	0,755±0,012
10	0,589±0,197	1,296±0,349	1,135±0,051	0,739±0,014
30	0,647±0,127	1,178±0,037	1,074±0,161	0,795±0,113
40	0,551±0,138	1,404±0,143	0,932±0,182	0,802±0,183
60	0,647±0,127	1,247±0,148	1,267±0,074	0,769±0,14

На рисунке 1 представлен график изменения средних значений параметра QTd с течением времени для интактной, контрольной и опытной групп под влиянием эмоксипина.

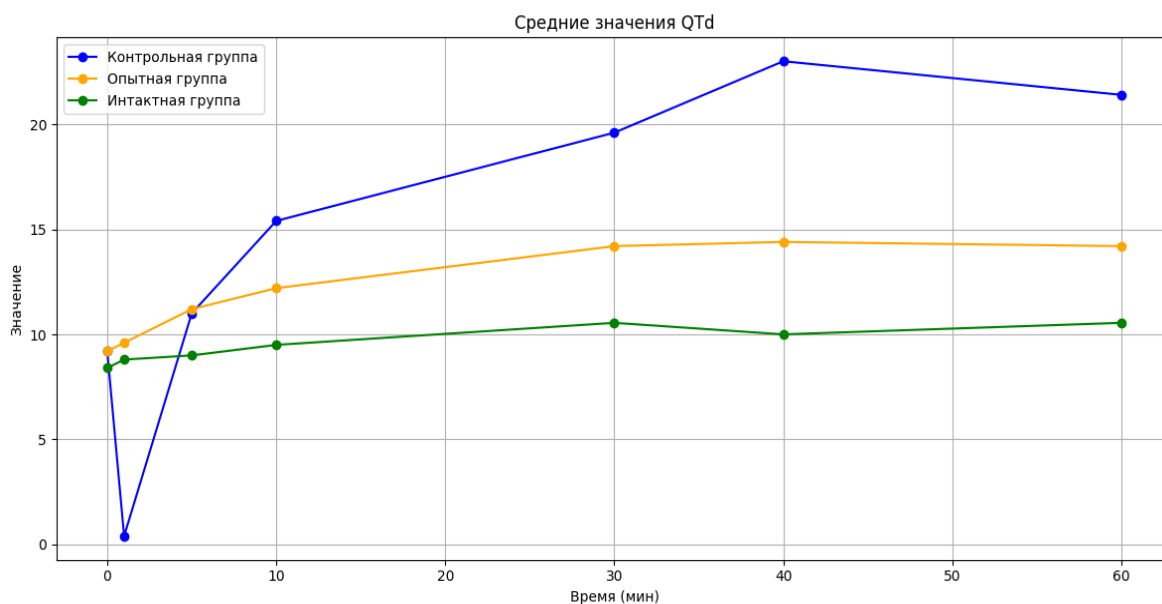


Рисунок 1 - График изменения средних значений QTd под влиянием эмоксипина

Показатели интактной группы постепенно растут с увеличением времени, но не значительно. Контрольная группа показывает заметное увеличение значений QTd, особенно между 10 и 40 минутами, что свидетельствует о значительном влиянии условий окклюзии сонных артерий. Для значений QTcd также прослеживается положительная динамика. Опытная группа под воздействием препаратов демонстрирует умеренное увеличение показателей по сравнению с контрольной группой.

Значимость данного исследования заключается в оценке безопасности и эффективности лекарственных препаратов при патологических состояниях, а также в анализе механизмов, влияющих на сердечно-сосудистые изменения, вызванные дефицитом кислорода в головном мозге в различные временные интервалы. Установленные зависимости позволяют сформировать обоснованные научные выводы о действии лекарственных препаратов и возможностях их использования в клинической практике.

Список литературы

1. Методы статистической обработки медицинских данных: Методические рекомендации для ординаторов и аспирантов медицинских учебных

заведений, научных работников / сост.: А.Г. Кочетов, О.В. Лянг., В.П. Масенко, И.В.Жиров, С.Н.Наконечников, С.Н.Терещенко – М.: РКНПК, 2012 – 42 с.

2. Методы статистического анализа в медицине: учебно-методическое пособие для студентов медицинских вузов / сост. С.Б. Петров, Б.А. Петров, Д.С. Симкин. – 2-е издание, переработанное и дополненное. – Киров: ФГБОУ ВО Кировский ГМУ Минздрава России, 2020. – 99 с.

Информация об авторах

Мария Андреевна Кутыркина

mariahkutyrkina@yandex.ru

ORCID [0000-0001-0571-9204](https://orcid.org/0000-0001-0571-9204)

аспирант

Татьяна Фанадовна Мамедова,

mamedovatf@yandex.ru

[ORCID 0000-0002-7582-216X](https://orcid.org/0000-0002-7582-216X)

доцент, к.ф.-м. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА ТЕРРИТОРИИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Салават Фаильевич Сайфетдинов¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹ssayfetdinov@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. В данной работе для исследования развития сердечно-сосудистых заболеваний используется метод Е.В. Воскресенского. Создано специальное программное обеспечение для автоматизации исследований по этому алгоритму. Представлена графическая интерпретация полученных результатов.

Ключевые слова: разделенные разности, метод Рунге-Кутты, python, конус решений, метод Е.В. Воскресенского.

INVESTIGATION OF THE PROGRESSION OF CARDIOVASCULAR DISEASES IN THE RUSSIAN FEDERATION

Salavat F. Saifetdinov¹, Tatiana F. Mamedova²,

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹ssayfetdinov@gmail.com, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. In this Paper, the method of E.V. Voskresensky is used to study the development of cardiovascular diseases. Special software has been created to automate research using this algorithm. A graphical interpretation of the obtained results is presented.

Keywords: separated differences, Runge-Kutta method, python, cone of solutions, method of E.V. Voskresensky.

© Сайфетдинов С.Ф., Мамедова Т.Ф., 2025

Для эффективной и точной диагностики сердечно-сосудистых заболеваний принципиально важным является разработка методов, которые позволяют проводить анализ медицинских данных, выявлять патологии и адекватно прогнозировать развитие заболеваний.

Традиционные методики диагностики сердечно-сосудистых заболеваний, к которым в первую очередь относятся классические статистические методы обработки данных, полученных из электрокардиографии (ЭКГ), ультразвуковых исследований (УЗИ), лабораторных анализов и других источников, не позволяют выявлять заболевания на ранних стадиях, зависимы от субъективности врача и имеют большие временные затраты на обработку данных и постановку диагноза.

Для ускорения обработки статистических данных и получения более точного прогноза вместо классических методов применим метод предложенный Воскресенским Е.В.[1,2].

Задача. Исследовать процесс развития сердечно-сосудистых заболеваний в Российской Федерации за последние 8 лет и дать прогноз их развития на будущее.

Исходные данные по сердечно-сосудистым заболеваниям были получены из федеральной службы государственной статистики [3]. И они представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Статистические данные

Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
2015	39408	35330	38721	36075	36500	34644
2016	40125	33986	35353	33807	35783	34518
2017	39563	32800	33967	33003	34072	32719
2018	35639	31692	37722	35460	34174	33451
2019	37164	32670	34314	32155	33533	31583
2020	33553	30694	32285	31780	36111	35101
2021	39478	30211	31367	28899	30352	33394
2022	39877	40418	36918	29159	30139	27955
Год	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
2015	34192	34009	33227	35345	33860	35290
2016	34014	34050	33251	34822	33686	37102
2017	32962	32143	31788	33998	31438	33511
2018	32967	31962	31499	32919	31402	33326
2019	31915	31618	31691	32865	31433	33327
2020	36771	33683	34543	44975	47627	48545
2021	38712	37004	36153	47194	42939	36932

2022	27834	29105	30940	30814	29077	34783
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Для автоматизации метода Воскресенского Е.В. была написана программа на языке python. Были использованы следующие библиотеки: pandas - для анализа и обработки данных, matplotlib - для построения графиков, numpy - для работы с массивами и проведения математических операций над ними.

Согласно алгоритма используемого метода, предварительно находим разделенные разности и берем это значение по модулю. Для этого воспользуемся следующим кодом:

```
df_long['Разность'] = df_long['Смерти'].diff()
df_long['Разность'] = abs(df_long['Разность'])
```

Следующим шагом находим полиномы для $\psi(t)$ и $\phi(z)$. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов. Оптимальная степень многочлена находится с помощью функции:

```
def sigma0(a, m, x, y):
    y_pred = np.polyval(a[::-1][:m+1], x)
    mse = np.mean((y_pred - y)**2)
    return np.sqrt(mse / (n - m))
```

Таким образом, для $\psi(t)$ она равна 3, а для $\phi(z)$ равна 0. И коэффициенты для $\psi(t)$: $a_0 = 2449.903$, $a_1 = -88.311$, $a_2 = 2.480$, $a_3 = -0.016$. Для $\phi(z)$: $a_0 = 2331.322$.

Теперь мы можем определить и найти $\lambda(t,z)$:

```
def lambda(t, z):
    rows_t, rows_z = len(t), len(z)
    res = np.zeros((rows_z, rows_t))
    for i in range(rows_z):
        for j in range(rows_t):
            mx1 = psi(t)
            mx2 = phi(z)
            res[i, j] = min(mx1, mx2)
    return res
```

С помощью метода Рунге-Кутты находим решения дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z), \frac{dz}{dt} = -\lambda(t, z).$$

И строим график полученных решений (рисунок 1) с помощью следующего кода:

```
plt.figure()

plt.plot(t_plus, z_plus, label='z+(t)')

plt.plot(t_minus, z_minus, label='z-(t)')

plt.xlabel('t')

plt.ylabel('z')

plt.title('Решения методом Рунге-Кутты')

plt.legend()

plt.grid(True)

plt.show()
```

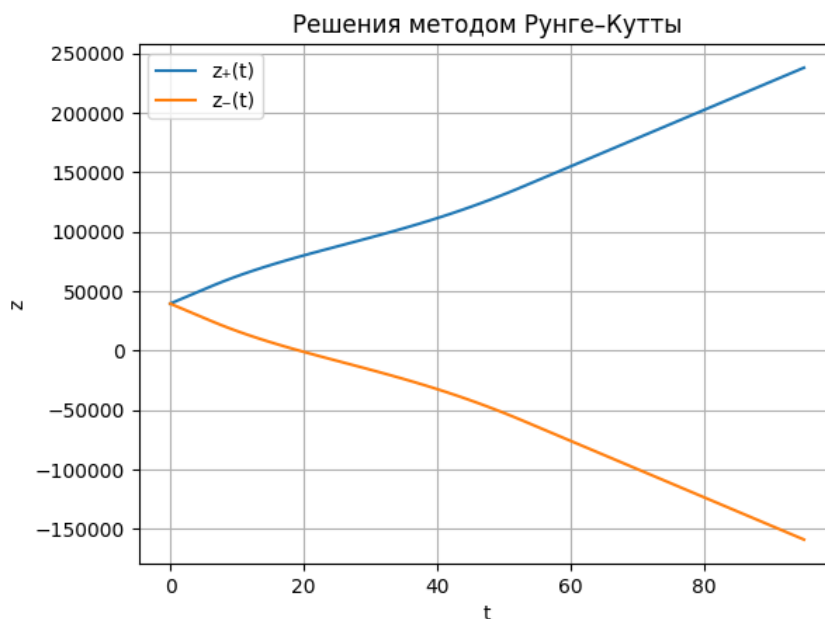


Рисунок 1. График конуса решений

Результат, полученный методом Воскресенского Е.В., согласуется с реальными данными на 2022 год. Далее предполагается прогнозировать дальнейшее развитие сердечно-сосудистых заболеваний этим методом. И исследовать возможность управлять этим процессом.

Список литературы

1. Е.В. Воскресенский, «Асимптотические методы: теория и приложения», — Саранск: СВМО, 2000. — 300 с.

2. Е.В. Воскресенский «Метод сравнения в нелинейном анализе», Сиб. мат. журн., 5 (1991), 2-11.
3. Федеральная служба государственной статистики : офиц. сайт. — URL: <https://rosstat.gov.ru/>.

Информация об авторах

Салават Фаильевич Сайфетдинов

ssayfetdinov@gmail.com

ORCID [0009-0006-9300-1548](https://orcid.org/0009-0006-9300-1548)

аспирант

Татьяна Фанадовна Мамедова,

mamedovatf@yandex.ru

ORCID [0000-0002-7582-216X](https://orcid.org/0000-0002-7582-216X)

доцент, к.ф.-м. наук

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИМИТИВ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ СВОБОДНЫХ ФОРМ

SPIN: 7960-7865

AuthorID: 1256109

ORCID: 0009-0005-5364-3258

АБУБЕКЕРОВ Динар Рашидович,

Пензенский государственный университет

(Россия, Пенза, улица Красная, 40, email: ofjordan@yandex.ru)

Аннотация. Предлагается геометрический примитив для параметрической интерполяции и визуализации плоских кривых, заданных множеством характерных (опорных) точек. Особенностью примитива является возможность визуального соединения нескольких опорных точек.

Ключевые слова: опорные точки, интерполяция, геометрический примитив, смешивающая функция, схема расчета-визуализации, среднеквадратическая погрешность, расстояние Хаусдорфа, программный эксперимент.

GEOMETRIC PRIMITIVE FOR INTERPOLATION AND VISUALIZATION OF FLAT CONTOURS OF FREE SHAPES

ABUBEKEROV Dinar Rashidovich,

Penza State University

(Russia, Penza, Krasnaya Street, 40, email: ofjordan@yandex.ru)

Abstract. A geometric primitive is proposed for parametric interpolation and visualization of plane curves defined by a set of characteristic (reference) points. A special feature of the primitive is the ability to visually connect several reference points.

Keywords: reference points, interpolation, geometric primitive, blending function, calculation-visualization scheme, standard error, Hausdorff distance, software experiment.

Во многих предметных областях - от инженерных чертежей и архитектурных проектов до медицинской визуализации и создания виртуальных моделей – требуется точное преобразование криволинейных объектов в их цифровые аналоги. В качестве примеров можно назвать цифровое представление изолиний, графиков экспериментальных данных, зон покрытия мобильной связи,

областей распределения полезных ископаемых или осадков, границ географических регионов и других объектов.

Один из вариантов задания формы кривых – множество характерных (опорных, контрольных) точек. В этом случае для реконструкции всей кривой требуется интерполяция. Методов интерполяции много, следовательно, при решении конкретной прикладной задачи возникает проблема выбора метода. Однако процесс перевода реальных кривых в цифровую форму сталкивается с рядом ограничений известных решений. Аппроксимирующая кусочно-линейная функция не является гладкой. Вычислительная сложность интерполяционного многочлена зависит от числа узлов сетки. Степень функциональных коэффициентов сплайна напрямую связана с количеством вершин в массиве и растет при его увеличении, а при добавлении в массив хотя бы одной вершины возникает необходимость полного пересчета параметрических уравнений. Для многих методов интерполяции характерно возникновение выбросов (феномена Рунге). Возникает задача исследования и выбора интерполяторов для цифровизации и визуализации криволинейных контуров.

В рамках данного исследования показан новый геометрический примитив для параметрической кусочно-аналитической интерполяции кривых, обладающий рядом полезных характеристик [1]. Визуально отображаемый сегмент кривой соединяет сразу несколько опорных точек, причем их количество может динамически изменяться в зависимости от требуемой точности интерполяции. Для обеспечения гладкости результирующей кривой предлагается использовать пересечение начальных и конечных областей соседних отсеков. Визуально представляется центральная часть каждого отсека, в связи с чем вводится понятие схемы расчета-визуализации $N \rightarrow M$, где N – общее количество опорных точек, участвующих в вычислении текущего сегмента, M – количество точек, формирующих визуально отображаемую часть сегмента. Эта схема обеспечивает гибкое управление точностью и ресурсоемкостью интерполяции: выбор рационального соотношения N и M позволяет получить гладкую кривую, ограничить погрешность интерполяции, снизить количество отсеков кривой.

Интерполянт на основе предлагаемого геометрического примитива задается в параметрической форме, что особенно важно для работы с многозначными контурами и замкнутыми кривыми. Отсек интерполянта строится как взвешенная сумма смешивающих функций (СФ), центрированных в опорных точках:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(r_i), \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(r_i), \quad (2)$$

где: N - количество учитываемых опорных точек;

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$ - коэффициенты влияния i -й опорной точки;

$\phi(r_i)$ - значение смешивающей функции;

$r_i = |t - t_i|$ – параметрическое расстояние от текущей точки до i -й опорной точки.

Коэффициенты λ находятся из условия точного прохождения отсека через опорные точки, что приводит к системе линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(|t_j - t_i|) = x_j,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(|t_j - t_i|) = y_j,$$

где $j = 1..N$, а (x_j, y_j) - координаты опорных точек.

В работе рассматриваются несколько типов СФ, приведенных в таблице 1 [2 – 5]. Для обеспечения гладкости в точках стыка отсеков используется перекрытие отсеков на 2-3 общие точки, выбрана равномерная параметризация.

Интерполяционные свойства предложенного примитива исследованы путем сравнения результата интерполяции с эталонной кривой. Предполагается, что, если интерполянт хорошо воспроизводит известную аналитическую кривую, то он будет эффективен и для реальных задач цифровизации. В принципе, для привязки к реальным кривым можно создать библиотеку тестовых кривых различных форм.

Таблица 1. Разновидности смешивающих функций

Наименование СФ	Математическое описание СФ
Биквадратная функция (Biquadrate)	$\phi(r) = (r^2 - 1)^2$
Инверсный мультиквадрик (Inverse Multiquadric)	$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4r^2}}$
Бигармоническая функция Треффца (Trefftz)	$\phi(r) = 2r^2 \ln r + (1 - r^2)$
Обратная функция Менандро (Menandro)	$\phi(r) = -\frac{4}{1 + r^3} + \frac{6}{1 + r^2}$
Функция Вендланда (Wendland)	$\phi(r) = (1 - r)^3(3r + 1)$

В качестве эталона выбирается тестовая параметрически заданная аналитическая функция. На тестовой кривой вручную расставляются опорные точки. В данном исследовании для простоты использована равномерная параметризация. Далее по опорным точкам вычисляются коэффициенты влияния $(\lambda_{xi}, \lambda_{yi})$ через решение СЛАУ. Они подставляются в выражения (1), (2), в результате получается интерполянт.

Для количественной оценки совпадения тестовой кривой и кривой интерполянта вводятся метрики погрешности:

- Нормализованное среднеквадратическое отклонение (Normalized Root Mean Square Deviation - NRMSD)

$$NRMSD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K ((x_{Ti} - x_{Ii})^2 + (y_{Ti} - y_{Ii})^2)}{K((x_{max} - x_{min})^2 + (y_{max} - y_{min})^2)}},$$

где K – число промежуточных точек, рассчитанных в процессе интерполяции;

$x_{Ti}, y_{Ti}, x_{Ii}, y_{Ii}$ – декартовы координаты сравниваемых точек с номером i , причем индекс Т относится к точкам тестовой кривой, а индекс И относится к точкам интерполированной кривой;

$x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}$ – минимальные и максимальные значения декартовых координат тестовой кривой.

- Метрика Хаусдорфа ($\vec{d}_H$) [6]

$$\vec{d}_H(A, B) = \max\{\vec{d}_H(A, B), \vec{d}_H(B, A)\},$$

где $\vec{d}_H$ направленное расстояния Хаусдорфа.

Эта метрика оценивает максимальное локальное расхождение между кривыми.

Отсчеты параметров s и t могут не совпадать, поэтому необходимо установить соответствие между ними. В работе используется выражение:

$$s = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (s_{i+1} - s_i) + s_i,$$

где $s_i, s_{i+1}, t_i, t_{i+1}$ – параметрические координаты двух соседних опорных точек тестовой кривой в системах отсчета этой кривой и интерполянта.

Для комплексного анализа интерполяционных возможностей предложенного примитива создана специализированная программа. Ее ключевая задача - обеспечить удобную платформу для экспериментального исследования всех аспектов работы нового интерполянта, начиная от визуализации и заканчивая количественной оценкой результатов. Программа разработана в среде MATLAB и состоит из нескольких ключевых модулей. Программа поддерживает различные методы интерполяции (через *InterpolationMethodsEnum.m*) и рассчитывает две ключевые метрики точности: нормализованное среднеквадратичное отклонение и нормализованное дискретное расстояние Хаусдорфа. Выбор MATLAB в качестве языка разработки позволил эффективно реализовать математические вычисления и матричные операции. Гибкая архитектура позволяет легко расширять функционал - добавлять новые тестовые кривые, методы интерполяции или метрики оценки. Интерактивный интерфейс упрощает процесс исследования и сравнения разных подходов к параметрической интерполяции.

Для проверки работоспособности метода были выбраны две тестовые кривые, исходя из разнообразия формы и кривизны их фрагментов. Кривые описываются однозначными функциями и для приведения к параметрической форме записи у них параметр s сопоставляется с аргументом x . Описания кривых имеют следующий вид.

Кривая 1:

$$\begin{aligned} x(s) &= s, \\ y(s) &= \arctan((10x - 5)^3) + \frac{1}{2} \arctan((10x - 8)^3), \quad s = 0.1, 0.01, 0.02, \dots, 11, \end{aligned}$$

кривая 2:

$$\begin{aligned} x(s) &= s, \\ y(s) &= 0.08 \cdot (e^{(10x-6)} \cdot \sin((5x-2)^2) + (3x-1)^3), \quad s = -0.6, -0.59, \dots, 1.2. \end{aligned}$$

Для интерполяции выбраны смешивающие функции, принципиально отличающиеся друг от друга формой записи. Они показаны в таблице 1. Также для количественной оценки возможностей предложенного примитива рассчитаны метрики погрешности интерполяции.

На рисунке 1 показаны результаты интерполяции кривой 1 с применением биквадратной координатно-линейной функции. Использована схема расчета-визуализации 7→5. Видно, что тестовая кривая (цифра 1) и кривая-интерполянт (цифра 2) практически совпадают. В то же время визуальная часть одного отсека интерполянта соединяет 5 опорных точек, то есть число рассчитываемых отсеков составной кривой по сравнению, например, со сплайн-интерполяцией может быть уменьшено в 4 раза. Погрешность NRMSD в этом случае равна 0.34009%, а погрешность Хаусдорфа - 0.8104%.



Рисунок 1 — Результат интерполяции тестовой кривой с использованием биквадратной координатно-линейной функции

На рисунке 2 показаны результаты интерполяции кривой 2 с применением функции инверсного мультиквадрика. Использована схема расчета-визуализации 7→3. Видно, что тестовая кривая (цифра 1) и кривая-интерполюант (цифра 2) практически совпадают. Число отсеков составной кривой в этом случае может быть уменьшено в два раза, что неплохо для кривой с такими большими перепадами ординат опорных точек. Погрешность NRMSD равна 0.8061%, а погрешность Хаусдорфа - 0.743%.

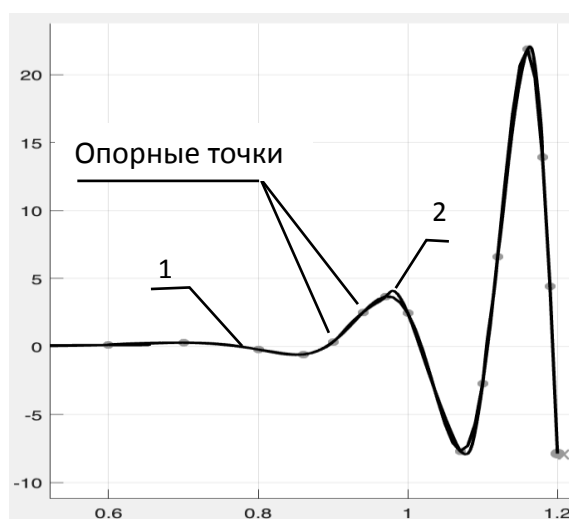


Рисунок 2 — Результат интерполяции тестовой кривой с использованием функции инверсного мультиквадрика

В ходе проведенного исследования разработан новый геометрический примитив для параметрической интерполяции и визуализации кривых свободных форм, который имеет существенные преимущества перед традиционными сплайновыми методами. Это, прежде всего, значительное сокращение количества интерполяционных отсеков - в 3-5 раз по сравнению с классическими подходами, при этом сохраняется высокая точность интерполяции. Это особенно важно для практических задач цифровизации сложных контуров, где требуется баланс между точностью воспроизведения формы и вычислительными затратами. Предложенный метод отличается гибкостью: свойства примитива могут настраиваться в широких пределах за счет выбора различных смешивающих функций, схем расчета-визуализации и типов параметризации (равномерной, хордовой или центростремительной).

Для практической реализации и исследования возможностей нового интерполянта создан специализированный программный инструмент в среде MATLAB. Этот инструмент предоставляет

удобную платформу для интерактивного тестирования различных комбинаций параметров, визуальной оценки качества интерполяции и количественного сравнения результатов через объективные метрики точности. Инструментарий также позволяет сравнить эффективность разных методов интерполяции.

Проведенные исследования демонстрируют, что предложенный геометрический примитив открывает новые возможности для решения широкого круга прикладных задач, связанных с цифровизацией и визуализацией кривых свободных форм.

Список литературы

1. Косников Ю.Н., Абубекеров Д.Р. Визуализация плоских кривых с использованием смешивающих функций, действующих вдоль оси параметрической системы координат: альтернатива сплайнам // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2024. – Т. 13. – № 4(68). – С. 12-19. <https://elibrary.ru/item.asp?id=79508287>.
2. Buhmann, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations / M. D. Buhmann. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003. – 259 p. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:266576008>.
3. Piltner R. Exploring New Options for Data Interpolation with Radial Basis Functions // Workshop on Environmental Health and Air Pollution. – 2018. – P. 1 – 4. Doi: 10.4108/eai.21-6-2018.276666.
4. Menandro , F.C.M. Two new classes of compactly supported radial basis functions for approximation of discrete and continuous data // Engineering Reports. – 2019; Vol.1 doi: 10.1002/eng2.12028.
5. Skala, V.; Mourycova, E. Meshfree Interpolation of Multidimensional Time-Varying Scattered Data // Computers 2023. – Vol. 12. – №12. – P. 243 – 261. Doi: 10.3390/computers12120243.
6. Zhang Y., Liu X., Wang H. Deep Learning for Polygonal Mesh Reconstruction from Point Clouds // ACM Transactions on Graphics. – 2022. – Vol. 41, No. 4. – P. 1–15.

Сила Максвелла в расталкивании диамагнитных кусков льда и магнитная анизотропная аккреция в происхождении видимых плотных колец Сатурна

Черный Владимир Викторович¹, Институт современной науки, Москва. chernyv@bk.ru. Капранов Сергей Викторович², Институт биологии Южных морей имени А.О. Ковалевского РАН, Россия. sergey.v.kapranov@yandex.ru.

Аннотация. Измерения Cassini показывают, что ледяные тела видимых плотных колец Сатурна обладают диамагнитными свойствами. Недавно орбитальный телескоп Уэбб подтвердил существование воды вокруг формирующихся планет и показал, что магнитное поле играет важную роль в формировании планет. Из этого следует, что видимые плотные кольца Сатурна могли возникнуть из ледяных тел протопланетного облака радиусом предела Роша под совместным действием диамагнитной силы выталкивания, создаваемой магнитным полем Сатурна, вместе с действием гравитационных и центробежных сил Сатурна. В результате орбиты Кеплера ледяных тел протопланетного облака смещаются в плоскость экватора Сатурна и создают сильно сжатую устойчивую систему видимых плотных колец с отдельными индивидуальными ледяными телами.

При одинаковой ориентации магнитного момента ледяных тел их отталкивание и разделение происходит из-за их намагничивания магнитным полем Сатурна. Ледяные тела также притягиваются друг к другу из-за собственной гравитации. При балансе обеих сил ледяные тела остаются на равновесном расстоянии между собой. Это дает важное доказательство характера открытия Дж. К. Максвелла в 1856 году, что видимые плотные кольца Сатурна не являются сплошными, а состоят из отдельных тел.

Эта теория может дать объяснение происхождения видимых плотных колец Сатурна и их структуры, наблюдавшейся зондом Кассини в 2004-2017 годах. Она также могла бы улучшить чисто гравитационные модели происхождения видимых плотных колец Сатурна, которые могут только показать, как дополнительный лед мог проникнуть в видимые плотные кольца, но не могут убедительно объяснить их происхождение и структуру.

Ключевые слова: происхождение видимых плотных колец Сатурна, диамагнетизм льда в космосе, сила Максвелла в расталкивании кусков льда в кольцах Сатурна.

Maxwell repulsion force of diamagnetic ice bodies of Saturn's visible dense rings and magnetic anisotropic accretion in the origin of Saturn's visible dense rings

Vladimir V. Tchernyi¹, Modern Science Institute, Moscow. chernyv@bk.ru

Sergey V. Kapranov², AO Kovalevsky Institute of Biology of the Southern Seas, Russian Academy of Sciences, Russia. sergey.v.kapranov@yandex.ru

Abstract. Cassini measurements suggest that ice bodies of Saturn's visible dense rings have diamagnetic properties. Recently, JWST confirmed the existence of water around forming planets and showed that the magnetic field plays an important role in the formation of planets. It follows that Saturn's visible dense rings could arise from the ice bodies of a protoplanetary cloud the radius of the Roche limit under the mutual action of a diamagnetic expulsion force created by Saturn's magnetic field, together with the action of Saturn's gravitational and centrifugal forces. As a result, the Kepler's orbits of the ice bodies of the protoplanetary cloud move into the plane of Saturn's equator and origin highly compressed stable system of the visible dense rings with separate individual ice bodies. With the same orientation of magnetic moment of ice bodies, their repulsion and separation occur due to their magnetization by Saturn's magnetic field. Ice bodies are also attracted to each other due to their own gravity. At the balance of the both forces, the ice bodies remain at an equilibrium distance between them. This provides important evidence of the nature of J. C. Maxwell's discovery in 1856 that the visible dense rings of Saturn are not continuous, but composed of individual bodies. This theory can provide an explanation of the origin of Saturn's visible dense rings and their structure observed by Cassini probe in 2004-2017. It could also improve purely gravitational models of the origin of Saturn's visible dense rings, which can only show how additional ice could penetrate the visible dense rings, and cannot explain convincingly their origin and structure.

Key words: origin of visible dense Saturn's rings, diamagnetism of ice in space, Maxwell's repulsion force of ice bodies in Saturn's visible dense rings.

1. Введение

Существующие чисто гравитационные модели происхождения видимых плотных колец Сатурна не способны убедительно объяснить их происхождение и наблюдаемые особенности [1]-[10]. К ним относятся их стабильность и сильная плоскостность на экваторе Сатурна, их тонкая структура и равновесное разделение ледяных тел в пределах всей их системы. Измерения Кассини пришли к выводу, что ледяные тела видимых плотных колец обладают диамагнитными свойствами [11, 12], а соотношение изотопов дейтерия и водорода в них такое же, как и для льда Земли [13]. Недавно орбитальный телескоп Уэбб (JWST) подтвердил существование воды вокруг формирующихся планет [14] и показал, что магнитное поле играет важную роль в формировании планет [15].

Отсюда следует, что видимые плотные кольца могли возникнуть из ледяных тел протопланетного облака размером с предел Роша под совместным действием силы диамагнитного выталкивания, создаваемой магнитным

полем Сатурна, совместно с действием его гравитационных и центробежных сил. В результате кеплеровские орбиты ледяных тел протопланетного облака смещаются в плоскость экватора Сатурна и порождают устойчивую систему видимых плотных колец с отдельными индивидуальными ледяными телами. Это дает важные доказательства характера открытия Дж. К. Максвелла в 1856 году, что кольца Сатурна не являются сплошными, а состоят из отдельных тел. Эта теория дает объяснение происхождения сильно сжатого диска видимых плотных колец Сатурна на его экваторе и их структуры, наблюдаемой зондом Кассини в 2004-2017 годах. Она также может улучшить существующие чисто гравитационные модели происхождения видимых плотных колец Сатурна, которые могут только показать, как дополнительный лед мог проникнуть в видимые плотные кольца, и не могут убедительно объяснить их происхождение и структуру.

2. Магнитная анизотропная аккреция как дополнительный процесс к гравитационной аккреции в происхождении видимых плотных колец Сатурна на его экваторе. Эффект Черного-Капранова

G. Kuiper предположил, что тела видимых плотных колец состоят из льда. Космический зонд Кассини обнаружил, что они на 90% - 95% состоят из водяного льда [8, 9]. Измерения Кассини установили, что соотношение тяжелых и легких изотопов водорода во льде видимых плотных колец такое же, как и во льду на Земле [13]. Тогда близким по свойствам льду в кольцах может быть, например, земной лед XI, который стабилен ниже 73К и является диамагнитным [11, 12]. Сатурн имеет сферически-симметричное гравитационное поле и осесимметричное магнитное поле с магнитным экватором. Для Сатурна магнитный экватор совпадает с географическим [16]. В области расположения видимых плотных колец магнитное поле Сатурна стабильно и преобладает его дипольная составляющая [17].

Поскольку телескоп Уэбб подтвердил существование воды вокруг формирующихся планет [14], то можно использовать классическую теорию малой туманности В. Сафронова [1] для изучения процесса происхождения видимых плотных колец Сатурна. Вклад магнитного поля Сатурна с помощью действия диамагнитной силы выталкивания в происхождение колец мы называем магнитной анизотропной аккрецией (эффект Черного-Капранова) [18, 22]. Он работает вместе с гравитационной аккрецией в происхождении видимых плотных колец.

Взаимодействие магнитного поля Сатурна с диамагнитными ледяными телами протопланетного облака происходит с помощью силы диамагнитного выталкивания. Под действием этой силы совместно с действием силы тяготения Сатурна и центробежной силы все орбиты ледяных тел начинают смещаться к плоскости магнитного экватора, где суммарная энергия диамагнитных ледяных тел минимальна из-за минимального значения их магнитной энергии.

В результате все орбиты ледяных тел в протопланетном облаке с радиусом предела Роша, смещаются к плоскости экватора Сатурна, и за счет взаимного действия гравитации Сатурна и его магнетизма образуется сильно сжатая плоская структура видимых плотных колец. Этот процесс представлен на рисунке 1.

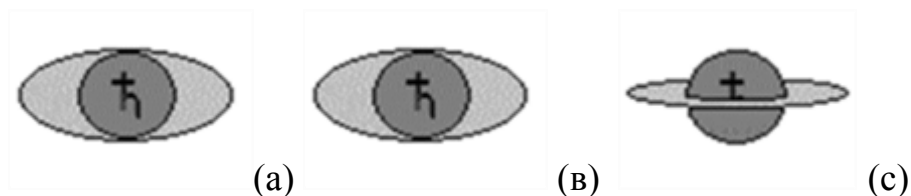


Рис. 1. Коллапс протопланетного облака Сатурна, имеющего радиус предела Роша и заполненного диамагнитными ледяными телами, в диск из видимых плотных колец после совместного воздействия гравитационного и магнитного полей Сатурна на ледяные тела протопланетного облака: от (а) к (b) и к (с).

В результате все ледяные тела оказываются внутри трехмерной магнитной ямы в плоскости магнитного экватора Сатурна, совпадающей с географическим экватором [16]. Ледяные тела образуют сильно сжатую плоскую дисковидную структуру видимых плотных колец Сатурна. Для движущихся по орбите ледяных тел действующая на них сила гравитации уравнивается центробежной силой и силой диамагнитного выталкивания.

Решена динамическая задачи движения одиночного диамагнитного сферического ледяного тела в гравитационном и магнитном полях [18, 22]. При постоянном радиусе орбиты решение свелось к уравнению для азимутального угла θ движения ледяного тела:

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \cot \theta - (A + B \cos^2 \theta) \cot \theta = 0 \quad (1)$$

где A и B — константы, связанные с гравитационными и магнитными силами соответственно. В также включает фактор Клаузиуса-Моссотти для магнитных сфер, который зависит от окружения ледяного тела. Важно то, что сила Кориолиса не действует на экваторе планеты.

Аналитическое решение (1), равное $\theta = \pi/2$, показывает, что все устойчивые орбиты ледяных тел оказываются захваченными в экваториальной плоскости. Гравитационная сила, действующая на вращающееся ледяное тело, уравнивается центробежной силой и силой диамагнитного выталкивания. Этот факт был экспериментально установлен в ходе нескольких исследовательских миссий к Сатурну.

3. Разделение ледяных тел в видимых плотных кольцах Сатурна, предсказанное Максвеллом в 1856 г.

Дж. К. Максвелл в 1856 году доказал, что видимые плотные кольца вдоль орбиты не являются сплошными, а состоят из отдельных тел [23]. В магнитном поле Сатурна тела диамагнитного льда приобретают собственную намагниченность, противоположную по знаку магнитному полю Сатурна. Это приводит к их расталкиванию и разделению за счет диамагнитной силы. В тоже время тела притягиваются друг к другу за счет силы тяготения. При равенстве силы тяготения и силы магнитного отталкивания выражение для равновесного расстояния r_0 между ледяными телами имеет вид [24] [25]:

$$r_0 = \left(\frac{R}{r_{Sp}} \right)^3 \frac{m_s}{M_p} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \sqrt{\frac{3\mu_0}{4\pi G}}$$

где μ и μ_0 - магнитные проницаемости материала ледяного тела и свободного пространства соответственно; R - радиус ледяного тела, r_{Sp} - радиальное расстояние между центрами Сатурна и сферического ледяного тела, M_p - масса ледяного тела с магнитным моментом, m_p - величина магнитного момента Сатурна, G - гравитационная постоянная. Схематически это показано на рисунке 2.

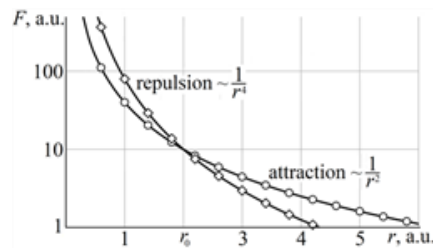


Рисунок 2. Зависимость сил расталкивания и притяжения ледяных тел от расстояния между ними.

4. Выводы

В предлагаемой теории нет отрицания различных гравитационных и любых других теорий происхождения видимых плотных колец Сатурна. Мы рассмотрели лишь дополнительный вклад магнетизма Сатурна в процесс образования видимых плотных колец за счет диамагнетизма ледяных тел и попытались применить его к объяснению особенностей, наблюдаемых Кассини в видимых плотных кольцах.

Показано, что намагничивание диамагнитных ледяных тел протопланетного облака и эффект процесса магнитной анизотропной аккреции (эффект Черного-Капранова) с действием силы диамагнитного выталкивания, а также расталкивание диамагнитных кусков льда в кольцах расширяют наши знания о природе происхождения видимых плотных колец Сатурна. Это также может дополнить гравитационные модели, которые в принципе не способны объяснить разделение ледяных тел в видимых плотных кольцах.

Основоположник теории электромагнетизма Дж. К. Максвелл был близок к решению проблемы происхождения видимых плотных колец Сатурна, когда в 1856 году доказал, что орбиты колец не непрерывны, а состоят из отдельных тел. Однако он не смог определить силу, удерживающую тела в видимых плотных кольцах отдельно друг от друга, поскольку в его время не было известно, что кольца в основном состоят из льда и что лед обладает диамагнитными свойствами. Зонд «Кассини» получил информацию о том, что отдельные тела видимых плотных колец состоят в основном из диамагнитного льда, лишь спустя 150 лет во время своей миссии вокруг Сатурна в 2004-2017 годах.

Теперь ясно, что рассуждения о возрасте колец Сатурна будут обоснованы только в том случае, если изначально будут учитываться не только влияние гравитации Сатурна, но и роль магнитного поля Сатурна. Это позволяет объяснить явления в видимых плотных кольцах, наблюдаемых зондом Кассини, такие как происхождение их стабильной, сильно сжатой плоской структуры на экваторе Сатурна, а также рассчитать равновесное расстояние между ледяными телами в плотных кольцах.

Принимая во внимание магнетизм Сатурна, можно предположить, что возраст видимых плотных колец может быть почти таким же, как возраст магнитного поля Сатурна. Это совпадает с выводом [10] о том, что видимые плотные кольца Сатурна могут быть такими же старыми, как и вся система Сатурна.

Авторы выражают благодарность Г.С. Макеевой и М. В. Белодедову за полезные дискуссии.

Список литературы

1. Safronov, S.V. (1972) Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and Planets. Israel Program for Scientific Translation, 206.
2. Fridman, A.M. and Gor'kavyi, N.N. (1999) Physics of Planetary Rings: Celestial Mechanics of Continuous Media. Springer, 437.
3. Charnoz, S., Morbidelli, A., Dones, L. and Salmon, J. (2009) Did Saturn's Rings Form during the Late Heavy Bombardment? *Icarus*, 199, 413-428. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2008.10.019>
4. Canup, R.M. (2010) Origin of Saturn's Rings and Inner Moons by Mass Removal from a Lost Titan-Sized Satellite. *Nature*, 468, 943-946. <https://doi.org/10.1038/nature09661>
5. Wisdom, J., Dbouk, R., Militzer, B., Hubbard, W.B., Nimmo, F., Downey, B.G., et al. (2022) Loss of a Satellite Could Explain Saturn's Obliquity and Young Rings. *Science*, 377, 1285-1289. <https://doi.org/10.1126/science.abn1234>

6. Teodoro, L.F.A., Kegerreis, J.A., Estrada, P.R., Cuk, M., Eke, V.R., Cuzzi, J.N., et al. (2023) A Recent Impact Origin of Saturn's Rings and Mid-Sized Moons. *The Astrophysical Journal*, 955, Article 137.
<https://doi.org/10.3847/1538-4357/acf4ed>
7. Crida, A. and Charnoz, S. (2010) Recipe for Making Saturn's Rings. *Nature*, 468, 903-905. <https://doi.org/10.1038/nature09738>
8. Cuzzi, J.N., Burns, J.A., Charnoz, S., Clark, R.N., Colwell, J.E., Dones, L., et al. (2010) An Evolving View of Saturn's Dynamic Rings. *Science*, 327, 1470-1475. <https://doi.org/10.1126/science.1179118>
9. Esposito, L.W. (2010) Composition, Structure, Dynamics, and Evolution of Saturn's Rings. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 38, 383-410. <https://doi.org/10.1146/annurev-earth-040809-152339>
10. Crida, A., Charnoz, S., Hsu, H. and Dones, L. (2019) Are Saturn's Rings Actually Young? *Nature Astronomy*, 3, 967-970.
<https://doi.org/10.1038/s41550-019-0876-y>
11. Hemley, R.J. (2000) Effects of High Pressure on Molecules. *Annual Review of Physical Chemistry*, 51, 763-800.
<https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.51.1.763>
12. Tchernyi, V.V. and Kapranov, S.V. (2021) To the Problem of the Properties of Saturn's Rings' Ice. *Research Notes of the AAS*, 5, Article 255.
<https://doi.org/10.3847/2515-5172/ac348c>
13. Clark, R.N., Brown, R.H., Cruikshank, D.P. and Swayze, G.A. (2019) Isotopic Ratios of Saturn's Rings and Satellites: Implications for the Origin of Water and Phoebe. *Icarus*, 321, 791-802.
<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.11.029>
14. Perotti, G., Christiaens, V., Henning, T., Tabone, B., Waters, L.B.F.M., Kamp, I., et al. (2023) Water in the Terrestrial Planet-Forming Zone of the PDS 70 Disk. *Nature*, 620, 516-520. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06317-9>
15. Deng, H., Mayer, L. and Helled, R. (2021) Formation of Intermediate-Mass Planets via Magnetically Controlled Disk Fragmentation. *Nature Astronomy*, 5, 440-444. <https://doi.org/10.1038/s41550-020-01297-6>
16. Dougherty, M., Cao, H., Khurana, K.K., et al. (2018) Saturn's Magnetic Field Revealed by the Cassini Grand Finale. *Science*, 362, eaat5434.
17. André, N., Blanc, M., Maurice, S., Schippers, P., Pallier, E., Gombosi, T.I., et al. (2008) Identification of Saturn's Magnetospheric Regions and Associated Plasma Processes: Synopsis of Cassini Observations during Orbit Insertion. *Reviews of Geophysics*, 46, RG4008.

<https://doi.org/10.1029/2007rg000238>

18. Tchernyi, V.V. and Kapranov, S.V. (2020) Contribution of Magnetism to the Origin of Saturn's Rings. The Astrophysical Journal, 894, Article 62. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab8475>
19. AAS Journal Author Series: Vladimir Tchernyi on 2020ApJ...894...62T. <https://www.scirp.org/journal/journalarticles?journalid=786>
20. Tchernyi, V.V. and Kapranov, S.V. (2021) How Saturn Could Create Rings by Itself. The Third Force of Diamagnetic Expulsion and the Mechanism of the Magnetic Anisotropic Accretion of the Origin of Saturn's Rings. arXiv: 2104.03967.
21. Tchernyi, V.V., Kapranov, S.V.A. and Pospelov, Y. (2021) Role of Electromagnetism in the Origin of Saturn's Rings Due to Diamagnetism of Their Ice Particles: J. C. Maxwell Had Almost Solved the Rings Origin Problem. URSI Radio Science Letters, 3.
22. Tchernyi, V.V. and Kapranov, S.V. (2023) Modeling of the Origin of Saturn's Dense (Visible) Rings Taking into Account Gravitational and Magnetic Fields. The Tchernyi-Kapranov Effect. Optics and Spectroscopy, 131, 327-333. <https://doi.org/10.1134/s0030400x24700085>
23. Maxwell, J.C. (1859) On the Stability of the Motion of Saturn's Rings; an Essay Which Obtained the Adams' Prize for the Year 1856, in the University of Cambridge. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 19, 297-304. <https://doi.org/10.1093/mnras/19.8.297>
24. Tchernyi, V.V. and Kapranov, S.V. (2024) J.C. Maxwell Had Almost Solved the Rings Origin Problem, But in His Time, There Was No Data on Particles. Space Research Today. 219, 80-85.

Информация об авторах

Черный В.В. доктор физико-математических наук. Институт современной науки, Москва, 121614. Осенний бульвар, 20-2-702. 8(977)285-9071. Капранов С. В., кандидат физико-математических наук. Институт биологии Южных морей имени А.О. Ковалевского РАН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Елена Николаевна Самылкина¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹samyalkinal@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. В данной работе представлены результаты моделирования исследований нейронной активности головного мозга. Для этого были применены четыре метода: Ходжкина-Хаксли, ФитцХью-Нагумо, Моррис-Лекара, Хиндмарш-Роуза. Представлены результаты работы специального программного обеспечения для моделирования данного процесса.

Ключевые слова: динамическая модель, нейронная активность, стационарные точки.

MODELING THE STUDY OF THE NEURAL ACTIVITY OF THE BRAIN

Elena N. Samylkina¹, Tatiana F. Mamedova²,

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹samyalkinal@yandex.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. This paper presents the results of modeling studies of the neural activity of the brain. Four methods were used for this: Hodgkin-Huxley, Fitzhugh-Nagumo, Morris-Lecar, Hindmarsh-Rose. The results of the work of special software for modeling this process are presented.

Keywords: dynamic model, neural activity, stationary points.

©Самылкина Е.А., Мамедова Т.Ф., 2025

Моделирование нейронной активности — это мощный инструмент для исследования работы мозга, недоступный для прямого наблюдения. С помощью моделей ученые могут изучать взаимодействие между отдельными нейронами и целыми нейронными сетями, что необходимо для понимания когнитивных функций и патологий.

В связи с этим актуальным является автоматизация процесса исследования нейронной активности головного мозга. Для этого было создано специальное программное обеспечение на языке Python с использованием таких библиотек, как графическая библиотека Tkinter, Matplotlib, для рисования графиков, NumPy и SciPy для математических вычислений.

Для автоматизации процесса исследования были использованы четыре модели: Ходжкина-Хаксли, ФитцХью-Нагумо, Моррис-Лекара, Хиндмарш-Роуза.

Заставка программы представлена на рисунке 1.

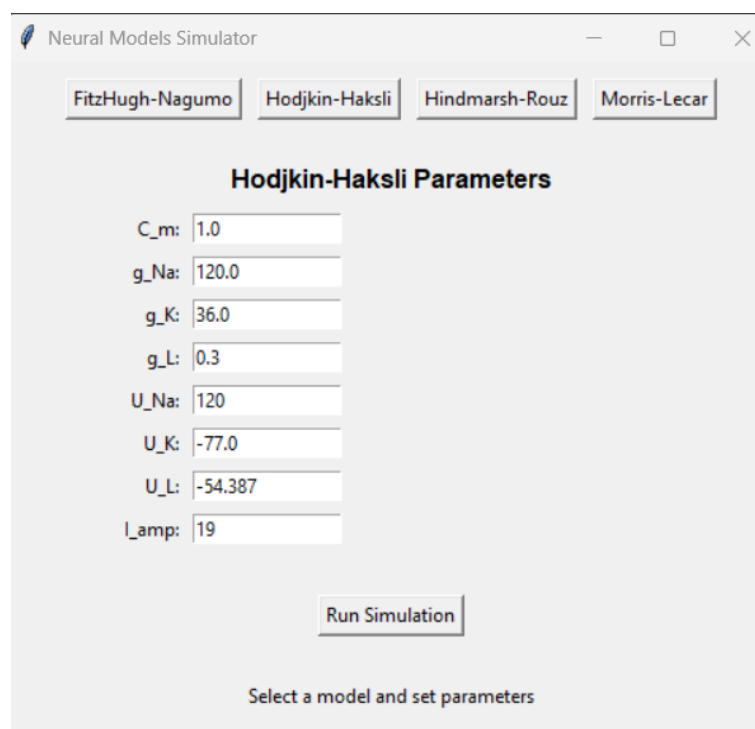


Рисунок 1- Заставка программы

Для каждого из перечисленных методов представлена возможность ввода различных исходных данных для моделирования процессов нейронной активности.

Рассмотрим моделирование нейронной активности на примере модели ФитцХью-Нагумо [1,2]. Пусть исходные данные имеют вид: $I = 0.5$, $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\tau = 12.5$, $v_0 = 1.0$, $w_0 = 0.1$.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений был реализован классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования $h = 0.01$.

После запуска программы получаем следующий результат:

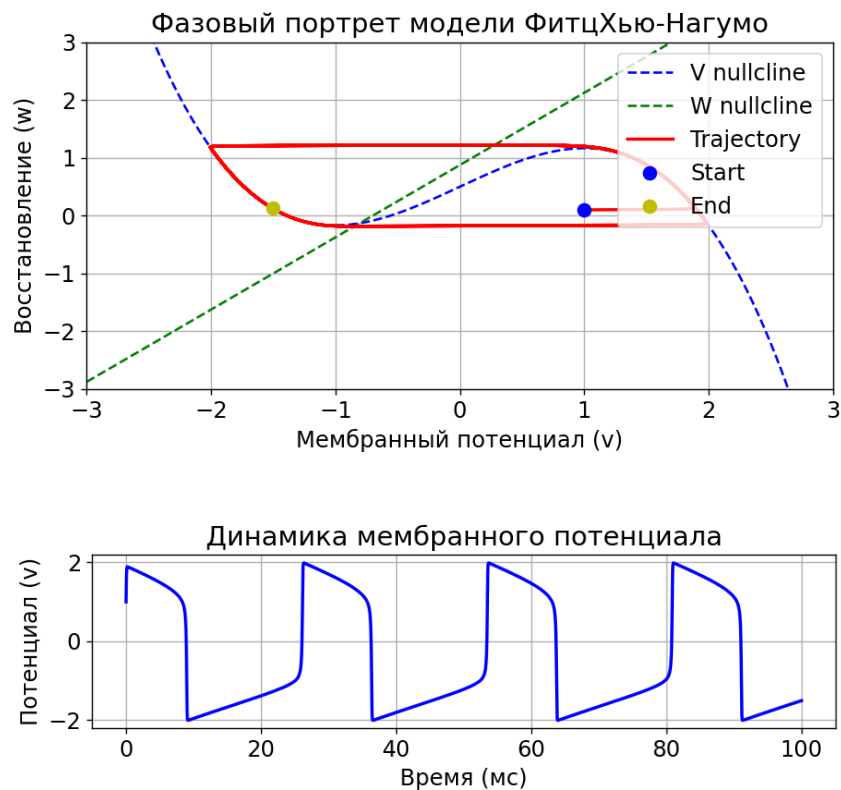


Рисунок 2 - Пример фазового портрета и динамики мембранного потенциала

Точки пересечения нуль-изоклин на фазовом портрете определяют равновесное состояние системы, также называемые стационарными точками. Когда мембранный потенциал увеличивается, траектория на фазовом портрете быстро смещается вправо. Последующий быстрый спад мембранного потенциала обусловлен активацией восстановительной переменной w . Далее, колебания затухают медленно, поскольку система движется вдоль -нульклины, постепенно приближаясь к точке покоя.

Используя программное обеспечение, исследователь имеет хорошие возможности для оценки активности нейронов головного мозга.

Список литературы

1. FitzHugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. FitzHugh // Biophys J, 1961. – P. 445. Текст : непосредственный.
2. FitzHugh R. Thresholds and plateaus in the Hodgkin–Huxley nerve equations/ R. FitzHugh // J Gen Physiol, 1960. – P. 867. Текст : непосредственный.

Информация об авторах

Елена Николаевна Самылкина

samylkinal@yandex.ru

[ORCID 0009-0001-5445-496X](https://orcid.org/0009-0001-5445-496X)

студент

Татьяна Фанадовна Мамедова,

mamedovatf@yandex.ru

[ORCID 0000-0002-7582-216X](https://orcid.org/0000-0002-7582-216X)

доцент, к.ф.-м. наук

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОУЛА-КОУЛА В СРЕДЕ SCILAB

Рябов Дмитрий Павлович,

Константин Михайлович Буданов

Пензенский государственный институт

dim.ryabov@mail.ru,

ko13bud@rambler.ru

SOLVING A DIRECT PROBLEM FOR THE COLE-COLE EQUATION IN THE SCILAB ENVIRONMENT

Ryabov Dmitry Pavlovich,

Konstantin Mikhailovich Budanov

Penza State University

Аннотация. Рассматривается решение прямой задачи Коула-Коула в среде SciLab. Представлены результаты построения графиков при различных значениях части комплексной диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: SciLab, моделирование, уравнение Коула-Коула

Annotation. The solution of the direct Cole-Cole problem in the SciLab environment is considered. The results of plotting graphs for different values of the complex dielectric constant part are presented.

Keywords: SciLab, modeling, Cole-Cole equation

© Д.П. Рябов, К.М. Буданов, 2025

Одним из важнейших свойств любого материал является его диэлектрическая проницаемость. Особый интерес этот параметр представляет в неоднородных материалах, полимерах и биологических материалах. Исследование диэлектрических свойств позволяет получить нужную информацию об исследуемых материалах. К примеру, анализ биоимпеданса позволяет определить состав тела человека [1], [4] – [6].

Характеристикой поляризуемости среды является комплексная диэлектрическая проницаемость, состоящая из действительной и мнимой частей. При этом действительная часть выражает способность среды к поляризации (смещению связанных зарядов под действием электрического

поля), а мнимая часть характеризует потерю энергии электромагнитного поля, обусловленную поглощением.

Таким образом, задача состоит в определении вида частотной зависимости действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Первая теория частотной зависимости диэлектрической проницаемости полярных диэлектриков была разработана Дебаем [2]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau}$$

где ω – круговая частота, τ – время релаксации, ε_{∞} – значение проницаемости при $\omega \rightarrow \infty$, ε_s – значение проницаемости при $\omega \rightarrow 0$;

В дальнейшем изучением данного вопроса занялись братья Коул, ими была предложена модель [3]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}}$$

В этом случае, компоненты комплексной диэлектрической проницаемости будут иметь вид:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}$$

$$\varepsilon_2 = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}$$

где величина параметра α зависит от свойств материала и температуры, при этом $0 \leq \alpha < 1$;

Ниже представлены графики зависимости компонент диэлектрической проницаемости при заданных параметрах $\varepsilon_s = 5400$, $\varepsilon_D = 50$, $\tau = 4 \cdot 10^{-7}$, $\alpha = 0,3$ на интервале частот $\omega = [10^{-2}; 10^2]$ (Рисунки 1-2).

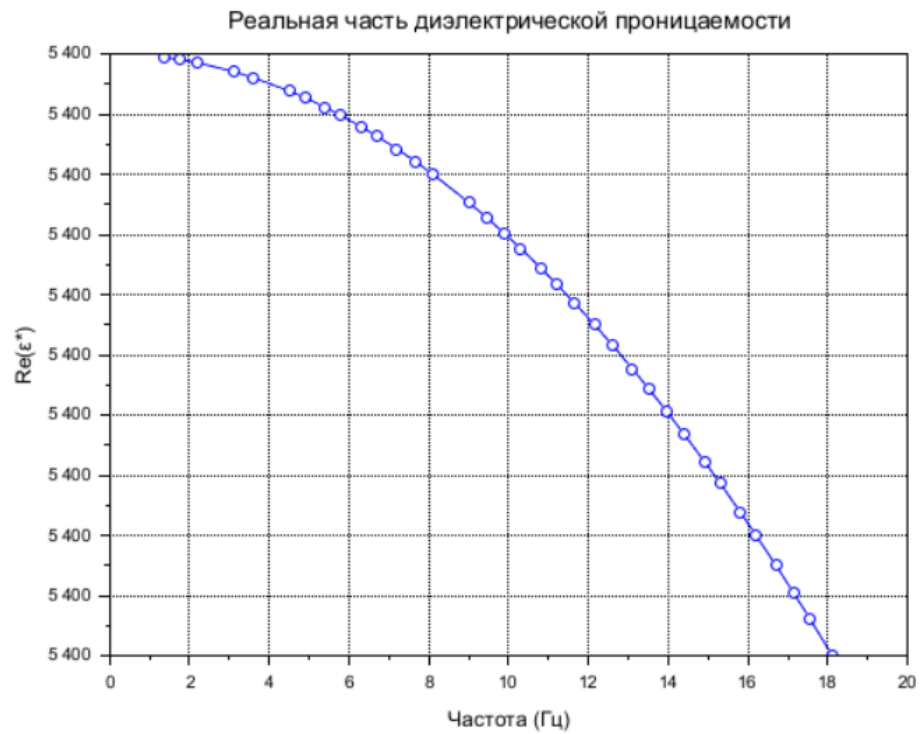


Рисунок 1- График зависимости ϵ_1 от частоты ω

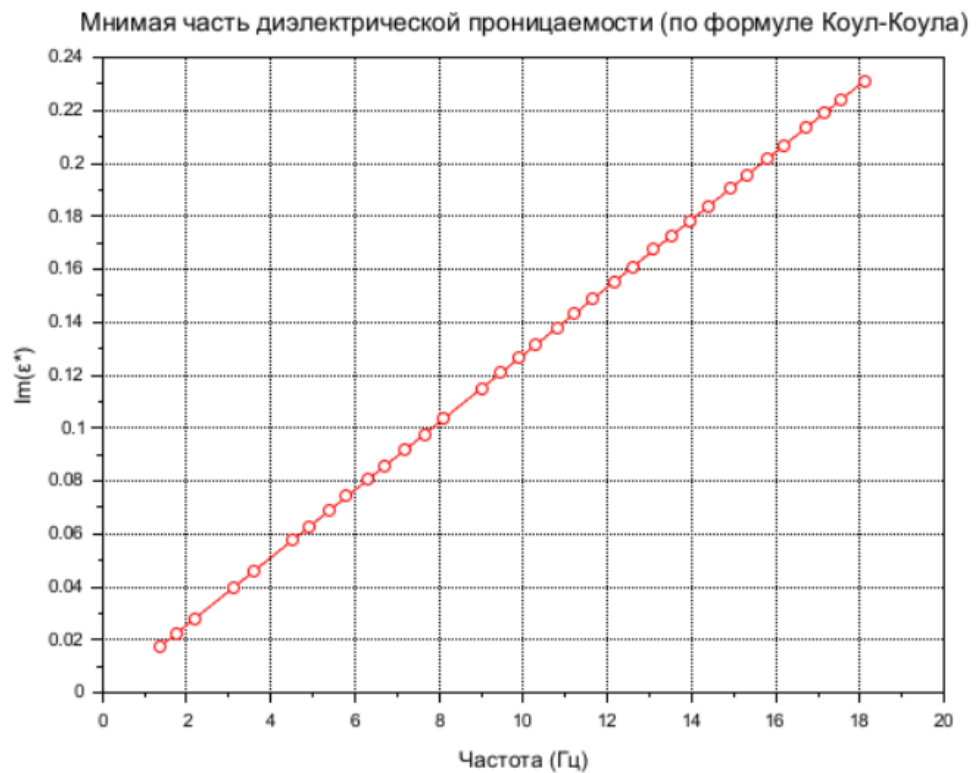


Рисунок 2 - График зависимости ϵ_2 от частоты ω

Как видно из рисунков, графики получились достаточно наглядными и представлены в формате диэлектрического спектрометра.

Для решения задачи были использованы стандартные операторы SciLab. Искомые переменные (действительная и мнимая части комплексной

диэлектрической проницаемости) возвращаются в качестве массива, содержащего множество решений задачи на заданном отрезке частоты ω , и далее выводятся в виде графика.

Список литературы

1. Николаев Д.В., Смирнов А.В., Бобринская И.Г., Руднев С.Г. Биоимпедансный анализ состава тела человека. М.: Наука, 2009. 392 с.
2. Дебай П. Полярные молекулы. М.-Л.: ГНТИ, 1931. 241 с.
3. Cole K.S., Cole R.H. // J. Phys. Chem. 1941. V. 9. P. 341.
4. Surowiec A.J. et al. Dielectric properties of breast carcinoma and the surrounding tissues // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1988. Vol. 35, № 4. P. 257–263.
5. Смирнов, Ю. Г. Решение обратной задачи для модели Гаврильяка - Негами при обнаружении новообразований молочной железы методом импедансной спектроскопии / Ю. Г. Смирнов, А. В. Кузьмин, В. А. Баранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2024. – № 2(70). – С. 3-12.
6. Kuzmin A., Baranov V., Pushkareva A. Signal Processing in the Problem of Breast Tumors Detection by Impedansometry Method Based on Havriliak-Negami Model, 2024 26th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russian Federation, 2024, pp. 1-5

УДК 681.586.773.088.8

621.317

АЛГОРИТМЫ ИЗМЕРЕНИЯ СВЗС

Першенков Пётр Петрович, Грозная Елена Владимировна
Пенза, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»

peter_bmw@mail.ru, kedrel@mail.ru

Аннотация. В докладе рассматриваются вопросы преобразования и измерения средневывпрямленного значения переменного напряжения, проводится сравнительный анализ различных алгоритмов, в том числе с использованием весовых функций. Даются рекомендации по выбору оптимальной структуры измерительного преобразователя.

Ключевые слова: измерение, преобразование, электрический сигнал, алгоритм, весовая функция, переменное напряжение.

ALGORITHMS FOR MEASURING SVZS

Pershenkov Petr Petrovich, Groznaya Elena Vladimirovna
Penza, Penza State University

peter_bmw@mail.ru, kedrel@mail.ru

Abstract. The issues of transformation and measurement of the medium -rectified value of alternating voltage are considered, comparative recommendations for the analysis of various algorithms are carried out, including using weight functions. Recommendations are given on choosing the optimal structure of the measuring converter.

Key words: measurement, conversion, electrical signal, algorithm, weight function, alternating voltage.

Измерение средневывпрямленного значения сигнала (СВЗС) может быть получен путем реализации одного из трех видов математических зависимостей

$$y(t) = \int_0^t |u_x(\tau)| h(t - \tau) d\tau; \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t |u_x(t)| g(t) dt; \quad (2)$$

$$y(T_x) = \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} u_x(t) g(t) dt; \quad (3)$$

Как видно, при реализации зависимостей (1) и (2) первым этапом измерения является нелинейное преобразование вида $z(t) = |u_x(t)|$, т.е. операция выпрямления, осуществляемая одним из известных выпрямительных измерительных преобразователей [1,2]. При этом формула (1) соответствует выделению постоянной составляющей сигнала $|u_x(t)|$ с помощью фильтра, имеющего импульсную переходную функцию $h(t)$. Т.е. в данном случае измерительный преобразователь (ИП) представляет собой последовательно соединенные выпрямительный преобразователь и фильтр. Импульсная переходная функция $h(t)$ имеет теоретически бесконечную длительность, что и определяет основной недостаток подобного ИП - низкое быстродействие, особенно при измерении СВЗС В диапазоне низких и инфранизких частот.

Формула (2) соответствует выделению постоянной составляющей с помощью интегрирующего цифрового средства измерения (ЦСИ), имеющего финитную весовую функцию (ВФ) $g(t)$, т.е. последняя определена на конечном интервале $[0, T]$. Известно, что понятия ВФ и импульсной переходной функции тождественны, если ВФ $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$g(t) = g(t - \tau) \quad (4)$$

или

$$g(t) = -g(t - \tau) \quad (5)$$

т.е. если ВФ является четно- или нечетно-симметричной функцией относительно середины интервала, на котором она определена. Следовательно, в этом случае ВФ, так же как и импульсная переходная функция, определяет амплитудно-частотную характеристику устройства, в котором она реализуется. Т.е. , выбирая надлежащим образом вид ВФ $g(t)$ реализуемой в интегрирующем ЦСИ, можно до минимума сократить время T , необходимое для выделения с заданной точностью постоянной составляющей сигнала $|u_x(t)|$. Известно также [2], что при произвольном (некратном периоде T_x) значении T практический предел уменьшения интервала T обеспечивает ВФ Дольфа-Чебышева, т.е. она является

оптимальной с точки зрения минимума времени измерения при прочих равных условиях. Однако на данном этапе развития элементной базы реализация ВФ Дольфа-Чебышева с требуемой точностью невозможна.

Удовлетворительная точность воспроизведения ВФ достигается в интегрирующих ЦСИ только для одного подкласса ВФ - так называемых ступенчатых весовых функций (СВФ). В связи с этим важной задачей теории и техники измерения СВЗС (и, как далее будет показано, вообще интегральных ППС) является синтез ступенчатой весовой функции (СВФ), приближающихся к оптимальной по критерию минимума времени усреднения сигнала $|u_x(t)|$.

Формула (3) соответствует измерению СВЗС с помощью интегрирующего ЦСИ, имеющего финитную весовую функцию вида

$$g(t) = \operatorname{sgn} u_x(t) \quad (6)$$

Т.е

$$g(t) = \begin{cases} I, & \text{если } u_x(t) > 0 \\ -I, & \text{если } u_x(t) < 0 \end{cases}$$

Подставляя в (6) в (3), получим

$$y(T_x) = \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} \operatorname{sgn} u_x(t) dt = \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} u_x(t) dt \quad (7)$$

что совпадает с известным выражением для определения СВЗС. Т.е. действительно, при реализации в ЦСИ ВФ вида (6) результат преобразования пропорционален СВЗС.

Таким образом, в последнем случае ИПП, как таковой, отсутствует, входной сигнал подается непосредственно на интегрирующий ЦСИ с весовой функцией (6). При этом достигается предельно возможное быстродействие, время измерения равно периоду T входного сигнала. Другим достоинством рассматриваемого метода измерения является то, что отпадает необходимость выполнения операции выпрямления сигнала, так сказать, в чистом виде (с использованием нелинейных элементов). Эта операция или, что то же самое, реализация ВФ (6) выполняется в данном случае цифровыми средствами, т.е. обеспечивается потенциально наиболее высокая точность преобразования $z(t) = |u_x(t)|$. Более того, как известно, при реализации в интегрирующем ЦСИ весовой функции (6) полностью устраняется погрешность от дрейфа нуля ЦСИ.

Вместе с тем, нельзя не отметить и присущего алгоритму (3) недостатка, состоящего в необходимости выполнения операции деления на T_x при измерении СВЗС в диапазоне частот.

В двух ранее рассмотренных вариантах такая необходимость отпадает, поскольку в случае алгоритма (2) реализуется "скользящее" усреднение, а в случае алгоритма (3) интервал T является фиксированным на каждом из поддиапазонов частот переменного сигнала.

Рассмотрим далее два возможных варианта реализации алгоритмов (3) и (4) в интегрирующих ЦСИ. Первый из них предполагает промежуточное преобразование сигнала $u_x(t)$ в частоту, второй - в интервал времени.

Второй вариант ЦСИ представляется предпочтительным, так как случае промежуточного частотного преобразования рабочий диапазон частот существенно ограничен сверху, поскольку при высокой частоте входного сигнала требуется соответственно высокое значение выходной частоты преобразователя напряжения в частоту (ПНЧ), используемого в составе ЦСИ. Например, при необходимости преобразования СВЗС с погрешностью 0,1% выходная частота ПНЧ должна на три десятичных порядка превосходить частоту входного сигнала. На пути создания высокочастотных ПНЧ стоят серьезные технические трудности, порождаемые ограниченной полосой пропускания операционных усилителей, используемых в составе интегратора.

При промежуточном временном преобразовании можно обеспечить существенно более высокое значение верхнего предела частотного диапазона, но и здесь возникают свои проблемы. Так, при использовании метода разновременного интегрирования входного и опорного напряжений в преобразователе напряжения в интервал времени (ПНВ), т.е. реализации двухтактного интегрирования, воспроизведение ВФ вида (6) невозможно, так как при этом необходимо получение интегральных значений сигнала за примыкающие интервалы времени. Применение двух параллельно включенных и поочередно работающих ПНВ усложняет схему. Кроме того, при этом учитывается то отмеченное выше ценное свойство весовой функции (6), что в реализации исключает влияние дрейфа нуля ПНВ на точность измерения СВЗС.

При использовании в ПНВ алгоритма одновременного интегрирования входного и опорного напряжений получение интегральных значений сигнала за примыкающие интервалы времени возможно, но при преобразовании сигналов относительно высокой частоты становится существенной так называемая погрешность от краевых эффектов. Однако, как показали исследования [4,5.7],

это препятствие вполне преодолимо использованием специальных мер в ПНВ, ориентирующих на применение для измерения СВЗС.

В заключение следует отметить, что реализация зависимостей (3) и (4) предполагает интегрирование сигнала по времени (т.е. по Римену) [6]. Возможно получение информации о СВЗС и путем интегрирования по напряжению (т.е. по Лебегу). Например, в работе [7] приводится формула численного интегрирования по Лебегу.

$$U_x \approx \frac{2\Delta U}{T_x} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad (8)$$

Где ΔU – ступень квантования $u_x(t)$ по уровню Δt_i ; Δt_i – интервал времени, в течении которого модуль преобразуемого напряжения превышает уровень $i\Delta U$; $n = \frac{U_m}{\Delta U}$ – целое число.

Реализуется зависимость (8) достаточно просто путем заполнения квантуемыми импульсами интервалов Δt_i , получаемых компарированием сигнала $u_x(t)$ и линейно изменяющегося в пределах от $-U_m$ до $+U_m$ напряжения, причем период линейно-изменяющейся развертки существенно превышает период сигнала $u_x(t)$.

Недостатком соответствующего ЦСИ является возможность накопления погрешности квантования, поскольку речь идет об измерении численно-импульсным методом суммы непримыкающих интервалов времени.

Список литературы

1. Волгин Л.И. Измерительные преобразователи переменного напряжения в постоянное. – М.: Сов. радио. 1977. – 240 с..
2. Вишенчук И.М. Выполнение операции усреднения в измерительных приборах методом весовых функций // Измерение, контроль, автоматизация – 1980. – №3-4. – с.17-22.
3. Мартяшин А.И., Шахов Э.К., Шляндин В.М. Преобразователи электрических параметров для систем контроля и измерения // М.: Энергия, 1976. – 392 с.
4. Першенков П.П., Шахов С.Б., Шахов Э.К., Шляндин В.М. Фоточувствительный интегрирующий преобразователь напряжения в код // Оpubл. в Б.И. – 1989. – №12.
5. Першенков П.П. Преобразователь средне-выпрямленного значения напряжения в интервал времени. // Методы и средства преобразования

электрических величин в частотно- временные сигналы и их применение в цифровых средствах измерения. Тез. докл. науч.-техн. конфер. – Пенза. – 1980. – с.48-49.

6.А.с.222734(СССР) Э.И.Тургиев Преобразователь переменного напряжения в код/.- 1968. - Бюллетень изобретений № 23.

7. Першенков П.П. Использование весового интегрирования при измерении параметров переменных сигналов. / В кн. «Надежность и качество».- Труды международного симпозиума. - Издательство ПГУ. - 2010г. - с. 444-445

УДК 621.371

Метод нелинейных автономных блоков с каналами Флоке в моделировании нелинейных СВЧ-устройств с распределенным взаимодействием

Макеева Галина Степановна

Пензенский государственный университет
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Разработан декомпозиционный подход к математическому моделированию нелинейных СВЧ-устройств с распределенным взаимодействием на основе дескрипторов нелинейных автономных блоков с каналами Флоке (НАБФ) в виде нелинейных уравнений, связывающих амплитуды падающих и отраженных волн на входных сечениях каналов Флоке. Разработан итерационный метод рекомпозиции НАБФ на основе линеаризации их дескрипторов. С помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом НАБФ, получены результаты математического моделирования нелинейной дифракции и взаимодействия микроволн с нелинейными проводящими и диэлектрическими включениями в полосковых линиях.

Ключевые слова: нелинейный автономный блок, каналы Флоке, матрица рассеяния, итерационный метод, рекомпозиция

Method of nonlinear autonomous blocks with Floquet channels in modeling the nonlinear microwave devices with distributed interaction

Galina S. Makeeva

Penza State University
radiotech@pnzgu.ru

A decomposition approach to mathematical modeling of nonlinear microwave devices with distributed interaction has been developed based on descriptors of nonlinear autonomous blocks with Floquet channels (NABFs) in the form of nonlinear equations that relate the amplitudes of incident and reflected waves at the input cross-sections of Floquet channels. An iterative method for recomposing NABFs based on the linearization of their descriptors has been developed. Using the computational algorithm developed by the NABF method, the results of mathematical modeling of nonlinear diffraction and interaction of microwaves with nonlinear conducting and dielectric inclusions in strip lines were obtained.

Key words: nonlinear autonomous block, Floquet channels, scattering matrix, iterative method, recomposition

1. Математические модели

Формулировка граничной электродинамической задачи для нелинейных СВЧ-устройств с распределенным взаимодействием состоит в следующем: необходимо решить нестационарные нелинейные уравнения Максвелла [1]

$$\text{rot}\vec{H}(t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{E}(t))}{\partial t} + \vec{J}(\vec{E}(t)); \quad \text{rot}\vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{H}(t))}{\partial t}, \quad (1)$$

с электродинамическими граничными условиями, где $\vec{E}(t) = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{H}(t) = \vec{H}(x, y, z, t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}(\vec{E}(t))$ – вектор электрической индукции, $\vec{B}(\vec{H}(t))$ – вектор магнитной индукции, $\vec{J}(\vec{E}(t))$ – вектор плотности электрического тока, зависящие от векторов напряженности полей.

Для изотропной нелинейной среды заполнения зависимости $\vec{D}(\vec{E}(t))$, $\vec{B}(\vec{H}(t))$, $\vec{J}(\vec{E}(t))$ определяются выражениями:

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon(|\vec{E}(t)|) \vec{E}(t), \quad \vec{B}(t) = \mu_0 \mu(|\vec{H}(t)|) \vec{H}(t), \quad \vec{J}(t) = \sigma(|\vec{E}(t)|) \vec{E}(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$, $\mu(|\vec{H}(t)|)$ – нелинейные диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\sigma(|\vec{E}(t)|)$ – нелинейная электропроводность; ε_0 , μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

Зависимости $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$, $\mu(|\vec{H}(t)|)$, $\sigma(|\vec{E}(t)|)$ аппроксимируются многочленами

$$\varepsilon(|\vec{E}(t)|) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\vec{E}(t)| + \varepsilon_3 |\vec{E}(t)|^2 + \dots + \varepsilon_n |\vec{E}(t)|^{n-1}; \quad (3)$$

$$\mu(|\vec{H}(t)|) = \mu_1 + \mu_2 |\vec{H}(t)| + \mu_3 |\vec{H}(t)|^2 + \dots + \mu_n |\vec{H}(t)|^{n-1}; \quad (4)$$

$$\sigma(|\vec{E}(t)|) = \sigma_1 + \sigma_2 |\vec{E}(t)| + \sigma_3 |\vec{E}(t)|^2 + \dots + \sigma_n |\vec{E}(t)|^{n-1}, \quad (5)$$

где коэффициенты многочленов определяются из эксперимента.

Представим $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$, $|\vec{E}(t)|$, $|\vec{H}(t)|$ в виде рядов по комбинационным частотам:

$$\vec{E}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad \vec{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \quad (6)$$

$$|\vec{E}(t)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad |\vec{H}(t)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\omega_m) \exp(i\omega_m t),$$

где индекс m определен на множестве индексов $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, здесь r – число источников гармонических полей.

Внося (2) – (5) в (1), с учетом (6) получаем систему стационарных нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах:

$$\text{rot}\vec{H}(\omega_m) = i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \vec{E}(\omega_m) + \vec{J}(\omega_m); \quad \text{rot}\vec{E}(\omega_m) = -i\omega_m \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{H}(\omega_m) + \vec{Z}(\omega_m), \quad (7)$$

где

$$\vec{J}(\omega_m) = i\omega_m \varepsilon_0 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_2(\omega_m) \vec{E}(\omega_k) E(\omega_n) \gamma_{kn} + \right. \quad (8)$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_3(\omega_m) \vec{E}(\omega_k) E(\omega_n) E(\omega_j) \gamma_{knj} + \dots +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_n(\omega_m) \vec{E}(\omega_k) E(\omega_n) E(\omega_j) \dots E(\omega_l) \gamma_{knj\dots l} \Big),$$

$$\begin{aligned}
\vec{Z}(\omega_m) = & i\omega_m\mu_0 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_2(\omega_m) \vec{H}(\omega_k) H(\omega_n) \gamma_{kn} + \right. \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_3(\omega_m) \vec{H}(\omega_k) H(\omega_n) H(\omega_j) \gamma_{knj} + \dots + \\
& \left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mu_n(\omega_m) \vec{H}(\omega_k) H(\omega_n) H(\omega_j) \dots H(\omega_l) \gamma_{knj\dots l} \right), \\
\dot{\varepsilon}_k(\omega_m) = & \varepsilon_k(\omega_m) - i \frac{\sigma_k(\omega_m)}{\varepsilon_0 \omega_m}, \quad k=1,2,\dots,n; \quad \gamma_{knj\dots l} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_k + \omega_n + \omega_j + \dots + \omega_l \neq \omega_m, \\ 1, & \text{если } \omega_k + \omega_n + \omega_j + \dots + \omega_l = \omega_m. \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}$$

2. Дескриптор нелинейного автономного блока с каналами Флоке

Дескрипторы автономных блоков (АБ) в виде многоканальных многомодовых матриц рассеяния $\mathbf{S}$, проводимости $\mathbf{Y}$, сопротивления $\mathbf{R}$ и разработанные методы их рекомпозиции [2, 3] могут быть использованы только для АБ, заполненных линейной или слабонелинейной средой.

Нелинейный АБ, представляющий собой прямоугольный параллелепипед (рис. 1), заполненный средой с сильной степенью нелинейности, и с виртуальными каналами Флоке (НАБФ), рассматриваем как волноводный трансформатор (ВТ) [2]. Канал Флоке (КФ) - это прямоугольный волновод с периодическими граничными условиями на стенках [4]:

$$\vec{E}(0,y) = \vec{E}(a,y); \quad \vec{H}(0,y) = \vec{H}(a,y); \quad \vec{E}(x,0) = \vec{E}(x,b); \quad \vec{H}(x,0) = \vec{H}(x,b), \tag{10}$$

где a, b - размеры волновода.

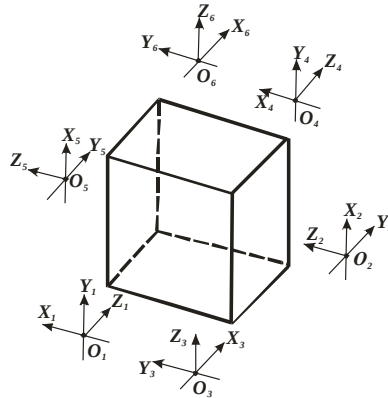


Рис. 1. Нелинейный автономный блок с виртуальными каналами Флоке

Для НАБФ связь между амплитудами падающих $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$ и отраженных $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ волн устанавливается при помощи системы нелинейных уравнений:

$$c_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+), \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad k = 1, 2, \dots, N_\alpha; \quad m = \pm 1, 2, \dots, \pm M, \tag{11}$$

где N_α - число учитываемых собственных волн в КФ α , M - число учитываемых комбинационных частот; c^+ - аргумент, который определен на множестве $\{c_{1(1)}^+(\omega_1), c_{1(2)}^+(\omega_1), \dots, c_{n(\beta)}^+(\omega_l), \dots, c_{N_\beta(6)}^+(\omega_M)\}$.

Подобная связь между амплитудами падающих $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$ и отраженных $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ волн для ВТ с линейными средами описывается матрицей рассеяния

S [5]. В отличие от этого функции $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ описывают нелинейную трансформацию волн в НАБФ и могут рассматриваться в качестве дескриптора НАБФ [4].

Основой построения вычислительного алгоритма для определения дескриптора $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ НАБФ является простая итерация [6]. На каждой итерации необходимо решить нелинейные уравнения Максвелла (7) с условиями неасимптотического излучения [7] на гранях НАБФ:

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m) + \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}(\omega_m)) d\vec{s}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^+(\omega_m) R_{k(\alpha)}(\omega_m), \quad (12)$$

где $\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m)$, $\vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)$ – поперечные компоненты электрического и магнитного полей собственных волн КФ [8], $R_{k(\alpha)}(\omega_m)$ – коэффициент нормировки.

Известными на каждой итерации являются амплитуды $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ падающих волн в КФ и токи $\vec{J}(\omega_m)$ (6), $\vec{Z}(\omega_m)$ (7); неизвестными – амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных волн в КФ. Решение уравнений Максвелла, линеаризованных на каждой итерации, с граничными условиями (12) будем искать в виде

$$C^- = C_\Sigma^- + SC^+, \quad (13)$$

где S – эквивалентная матрица рассеяния АБФ с линейной средой заполнения (элементы S -матрицы АБФ получены в [4]); C_Σ^- – вектор, появление которого связано с наличием возбуждающих токов $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$; C^+ , C^- – векторы с элементами $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ и $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$.

Из решения задачи возбуждения АБФ токами $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$ методом, разработанным в [9], получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения элементов векторов C_Σ^- :

$$(I + Y^T) C_\Sigma^- = f, \quad (14)$$

где I – единичная матрица, Y^T – транспонированная матрица проводимости Y линеаризованного АБФ [3], f – вектор, элементы которого определяются следующим образом:

$$f_{k(\alpha)}(\omega_m) = - \int_V (\vec{J}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(\alpha)}(\omega_m) + \vec{Z}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(\alpha)}(\omega_m)) dV.$$

Таким образом, на данной итерации определены амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$. При переходе к следующей итерации необходимо вновь определить токи $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$, которые вычисляются по формулам (8), (9), для чего необходимо знать поля $\vec{E}(\omega_m)$, $\vec{H}(\omega_m)$ в полости параллелепипеда (рис. 1).

Поля $\vec{E}(\omega_m)$, $\vec{H}(\omega_m)$ определим из решения граничной электродинамической задачи (уравнений Максвелла (7) с условиями неасимптотического излучения (12)) для параллелепипеда с КФ (рис. 1), применив проекционный метод [10]. Представим искомые поля в виде:

$$\vec{E}_q(\omega_m) = \sum_{n=1}^q a_n(\omega_m) \vec{E}_n^M; \quad \vec{H}_q(\omega_m) = \sum_{n=1}^q b_n(\omega_m) \vec{H}_n^\Xi, \quad (15)$$

где $\vec{E}_n^M$, $\vec{H}_n^M$ и $\vec{E}_n^\ominus$, $\vec{H}_n^\ominus$ – поля собственных колебаний прямоугольного резонатора с магнитными и электрическими стенками; $a_n(\omega_m)$, $b_n(\omega_m)$ – неизвестные коэффициенты.

Используя проекционный метод [10], получаем следующую СЛАУ для определения коэффициентов $a_n(\omega_m)$, $b_n(\omega_m)$:

$$\begin{cases} A^{aa}a + A^{ab}b = F^a, \\ A^{ba}a + A^{bb}b = F^b, \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{где } F^a = f^a - A^{ac}c^-, F^b = f^b - A^{bc}c^-, A_{kn}^{aa}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \delta_{lm} \int_V \vec{E}_n^M \cdot \vec{E}_k^M dV;$$

$$A_{kn}^{ab}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} (i\omega_k^M \mu_0 \int_V \vec{H}_n^\ominus \cdot \vec{H}_k^M dV - \int_{S_\Sigma} (\vec{H}_n^\ominus \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s});$$

$$A_{kj(\beta)}^{ac}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\beta} (\vec{h}_{j(\beta)}(\omega_l) \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s}; A_{kn}^{ba}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_k^\ominus \varepsilon_0 \delta_{lm} \int_V \vec{E}_n^M \cdot \vec{E}_k^\ominus dV;$$

$$A_{kn}^{bb}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_m \mu_0 \mu_1(\omega_m) \delta_{lm} \int_V \vec{H}_n^\ominus \cdot \vec{H}_k^\ominus dV; A_{kj(\beta)}^{bc}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\beta} (\vec{e}_{j(\beta)}(\omega_l) \times \vec{H}_k^\ominus) \cdot d\vec{s};$$

$$A_{i(\alpha)n}^{ca}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\alpha} (\vec{E}_n^M \times \vec{h}_{i(\alpha)}(\omega_m)) \cdot d\vec{s}; A_{i(\alpha)n}^{cb}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{i(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_n^\ominus) \cdot d\vec{s};$$

$$f_k^a(\omega_m) = \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{n=1}^{N_\alpha} c_{n(\alpha)}^+(\omega_m) \int_{S_\alpha} (\vec{h}_{n(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s} - \int_V \vec{J}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^M dV; f_{i(\alpha)}^c(\omega_m) = 2c_{i(\alpha)}^+(\omega_m) R_{i(\alpha)}(\omega_m);$$

S_Σ – поверхность граней параллелепипеда; $\omega_k^\ominus$, ω_k^M – собственные частоты прямоугольного резонатора с электрическими и магнитными стенками, соответственно; $\delta_{lm} = \begin{cases} 0, \text{если } l \neq m \\ 1, \text{если } l = m \end{cases}$.

3. Реконпозиция НАБФ. Эквивалентная матрица рассеяния

Предложен итерационный метод реконпозиции НАБФ на основе линеаризации их дескрипторов [11]. На каждом шаге НАБФ в декомпозиционной схеме заменяются на линеаризованные АБФ с дескрипторами в виде эквивалентных матриц рассеяния S_H , а затем осуществляется реконпозиция АБФ.

Нелинейные функции $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ в (11) разложим в ряд Тейлора

$$c_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+) + \sum_{l=1}^M \sum_{\beta=1}^L \sum_{n=1}^{N_\beta} \frac{\partial F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)}{\partial c_{n(\beta)}^+(\omega_l)} (c_{n(\beta)}^+(\omega_l) - c_{n(\beta)}^{+0}(\omega_l)) + \dots \quad (17)$$

где M – число учитываемых комбинационных частот; L – число КФ; N_β – число типов собственных волн, учитываемых в КФ β .

Учитывая в разложении (6) члены до первых частных производных включительно, линеаризуем нелинейную зависимость амплитуд $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ и $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$, представив ее в следующем виде:

$$C^- = C_\Sigma^- + S_H C^+, \quad (18)$$

где $C_\Sigma^- = C_0^- - S_H C_0^+$.

Векторы C_0^+ , C_0^- , C^+ , C^- составлены, соответственно, из элементов $\{c_{n(\beta)}^{+0}(\omega_l)\}$, $\{F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)\}$, $\{c_{n(\beta)}^+(\omega_l)\}$, $\{c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)\}$. Эквивалентная матрица рассеяния

S_H скомпонована по комбинационным частотам, входным КФ, типам волн; ее элементы вычисляются следующим образом:

$$S_{kn}^{\alpha\beta}(\omega_m, \omega_l) = \frac{\partial F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)}{\partial c_{n(\beta)}^+(\omega_l)} . \quad (19)$$

Вектор C_{Σ}^- состоит из элементов $\{c_{\Sigma k(\alpha)}^-(\omega_m)\}$ и скомпонован таким же образом, как и векторы C^+ , C_o^- .

Итерационный процесс рекомпозиции НАБФ состоит в следующем. Задав начальные приближения для c_0^+ , определяем из (19) элементы матрицы S_H и вектора C_{Σ}^- для всех НАБФ. Объединяя в декомпозиционной схеме дескрипторы линеаризованных АБФ в виде матриц S_H , получаем S-матрицу ВТ на первой итерации. Зная амплитуды $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ во входных КФ ВТ и элементы вектора C_{Σ}^- , определяем амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ в КФ ВТ и элементы векторов C^+ , C^- в КФ ВТ.

Если значения элементов векторов C^+ и C^- удовлетворяют с заданной точностью нелинейным уравнениям (11), то вычислительный процесс заканчивается. Если не удовлетворяют, то переходим к следующей итерации, на которой элементы матрицы S_H и вектора C_{Σ}^- определяем при начальном приближении $C_0^+ = C^+$ из (18), (19), и процесс рекомпозиции линеаризованных АБФ в декомпозиционной схеме повторяется. На последней итерации вычисленные амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ в КФ ВТ являются решением исходной нелинейной задачи дифракции для уравнений Максвелла (7) с граничным условием (12).

3. Результаты математического моделирования

С помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом НАБФ, проведено моделирование нелинейной дифракции на распределенных нелинейных проводящих и диэлектрических пленочных включениях в симметричных полосковых линиях (СПЛ). Нелинейные зависимости $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$ и $\sigma(|\vec{E}(t)|)$ аппроксимируются многочленами (3) и (5), соответственно.

На рис. 3 показана СПЛ с нерегулярностью, содержащей нелинейно проводящую пленку (область 4), к которой приложено поле смещения $\vec{E}_0$ ($E(\omega_0) = 100$ В/мм в точке наблюдения 7). Пусть на сечение S_1 падают две волны основного (нечетного) типа СПЛ с частотами $f_1 = 18,0$ ГГц, $f_2 = 18,36$ ГГц и амплитудами $c_{1(1)}^+(\omega_1) = 100$ В/мм, $c_{1(1)}^+(\omega_2) = 0,1$ В/мм (в точке наблюдения 6).

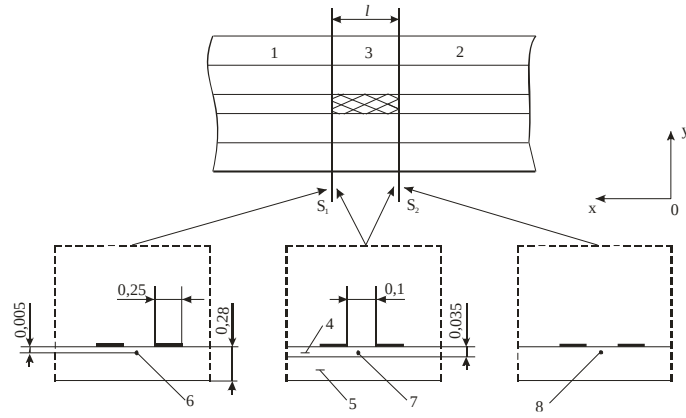


Рис. 3. СПЛ с нерегулярностью, содержащей включение нелинейно проводящей пленки: 1, 2 – отрезки регулярных СПЛ; 3 – нерегулярность; 4 – пленка с нелинейной проводимостью G , $\varepsilon = 12,5$; 5 – диэлектрическая подложка ($\varepsilon = 12,5$; $4,5 - \mu = 1$); 6 - 8 – точки наблюдения электрического поля

Нелинейную зависимость проводимости G нелинейно проводящей пленки от напряженности электрического поля E аппроксимируем редуцированным многочленом

$$G(|\vec{E}|) = 8,16 \cdot 10^{-6} |\vec{E}| + 2,784 \cdot 10^{-15} \cdot |\vec{E}|^3. \quad (20)$$

Результаты электродинамического расчета амплитуд $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных (на сечениях S_1 , S_2) волн разностной ω_3 (кривые 5, 6) и удвоенной ω_4 (кривые 7, 8) комбинационных частот в зависимости от длины взаимодействия l в нелинейно проводящем пленочном включении приведены на рис. 3, где для сравнения представлены также зависимости (кривые 1 - 4) амплитуд отраженных (на сечениях S_1 , S_2) волн с частотами ω_1 и ω_2 .

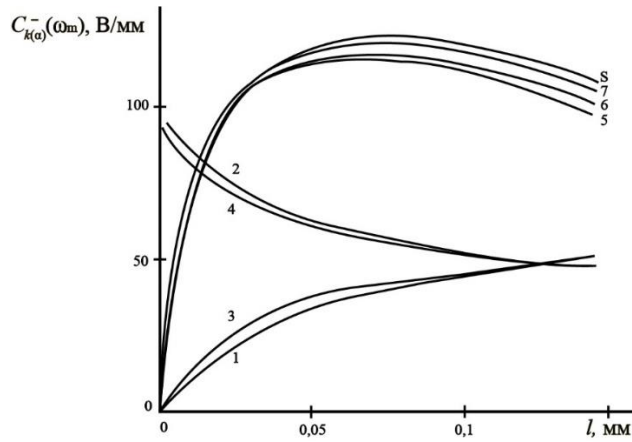


Рис. 4. Эффективность преобразования частоты на нелинейности проводящей пленки в СПЛ на разностной ω_3 и удвоенной ω_4 комбинационных частотах в зависимости от длины взаимодействия l : кривая 1 - $C_{1(1)}^-(\omega_1)$; 2 - $C_{1(2)}^-(\omega_1)$; 3 - $10^{-3} \cdot |C_{1(1)}^-(\omega_2)|$; 4 - $10^{-3} \cdot |C_{1(2)}^-(\omega_2)|$; 5 - $2 \cdot 10^{-4} \cdot |C_{1(1)}^-(\omega_3)|$; 6 - $2 \cdot 10^{-4} \cdot |C_{1(2)}^-(\omega_3)|$; 7 - $10^{-1} \cdot |C_{1(1)}^-(\omega_4)|$; 8 - $10^{-1} \cdot |C_{1(2)}^-(\omega_4)|$; $C_{1(1)}^+(\omega_1) = 100$ В/мм; $C_{1(1)}^+(\omega_2) = 0,1$ В/мм; $E(\omega_0) = 100$ В/мм

Из графиков (рис. 5) следует, что при $l < 0,05$ мм, когда напряженность электрического поля E на частоте ω_1 внутри нелинейно проводящей пленки достаточно велика, происходит эффективное нелинейное преобразование

частоты и возбуждение волн на разностной ω_3 (кривые 5, 6) и удвоенной ω_4 (кривые 7, 8) комбинационных частотах.

На рис. 5 показана СПЛ с нерегулярностью в виде пленки нелинейного диэлектрика, к которому через токопроводящие полоски СПЛ приложено поле смещения $\vec{E}_0$ ($E(\omega_0) = 100$ В/мм в точке наблюдения 3). На сечение S_1 нелинейного диэлектрика падает волна основного типа СПЛ с частотой $f = 15$ ГГц и амплитудой $c_{1(l)}^+(\omega_1)$.

Нелинейную зависимость $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$ аппроксимируем редуцированным многочленом:

$$\varepsilon(|\vec{E}|) = 1250 + 12,5 \cdot |\vec{E}|. \quad (21)$$

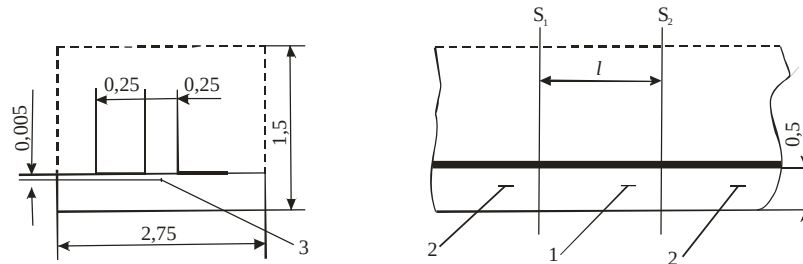


Рис. 5. СПЛ с нерегулярностью, содержащей включение нелинейного диэлектрика: 1 - пленка нелинейного диэлектрика $\mu = 1$; $\sigma = 4,2$ сим/м; 2 - диэлектрик $\mu = 1$, $\varepsilon = 1250$; 3 - точка наблюдения электрического поля

Результаты электродинамического расчета относительных амплитуд $c_{1(l)}^-(\omega_2)/c_{1(l)}^+(\omega_1)$ отраженных (на сечениях S_1 , S_2) волн второй гармоники по отношению к амплитуде $c_{1(l)}^+(\omega_1)$ падающей (на сечение S_1) волны первой гармоники в зависимости от длины взаимодействия l в нелинейном диэлектрическом пленочном включении при различных амплитудах $c_{1(l)}^+(\omega_1)$ показаны на рис. 6.

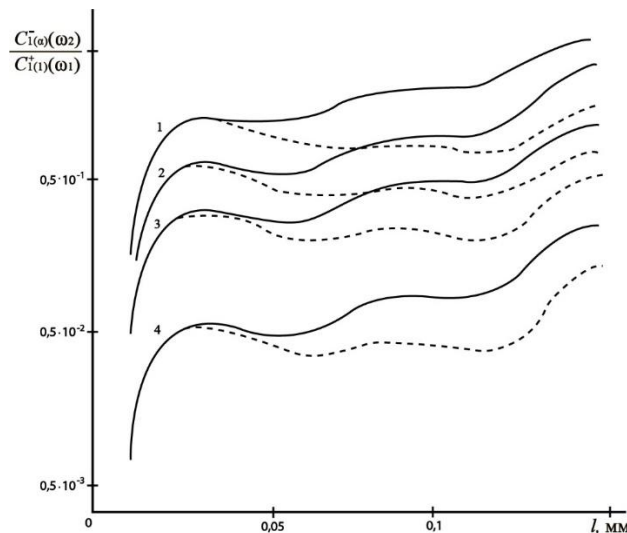


Рис. 6. Эффективность умножения частоты на нелинейности диэлектрика в СПЛ в зависимости от длины взаимодействия l и амплитуды $c_{1(l)}^+(\omega_1)$ падающей волны: кривые 1 - $C_{1(l)}^+(\omega_1) = 100$ В/мм; 2 - $C_{1(l)}^+(\omega_1) = 50$ В/мм; 3 - $C_{1(l)}^+(\omega_1) = 25$ В/мм; 4 - $C_{1(l)}^+(\omega_1) = 5$ В/мм; --- $\alpha = 1$; _____ $\alpha = 2$

Из графиков (рис. 6) следует, что умножение частоты наиболее эффективно при максимальном значении амплитуды падающей волны $c_{1(1)}^+(\omega_1)=100$ В/мм.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Голованов О.А., Макеева Г.С. Методы теории бифуркаций в решении нелинейных задач дифракции для устройств сверхвысоких частот с нелинейными средами. Пенза. ПАИИ. 2007.
2. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983.
3. Голованов О.А. Макеева Г.С. Электродинамический анализ устройств и систем сверхвысоких частот на основе универсальных автономных блоков с каналами Флоке. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2005, Т. 8, N 4, С. 10-18.
4. О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.А. Туманов. Построение дескрипторов нелинейных универсальных автономных блоков с каналами Флоке итерационным методом на основе проекционной модели. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. 2006. N. 5 (26). С. 157-166.
5. О.А. Голованов. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики Радиотехника и электроника. 2006. Т.51. N .12 С.1423-1430.
6. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: наука, 1973.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632с.
8. Голованов О.А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами. Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N 9. С. 1853-1863.
9. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М. Советское радио. 1957.
10. Никольский В.В. Проекционные методы в электродинамике: Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М.: Высшая школа, 1977. С. 4.
11. О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.А. Туманов. Декомпозиция и рекомпозиция нелинейных устройств СВЧ на основе нелинейных универсальных автономных блоков с каналами Флоке. Современные технологии безопасности, 2006. N 3-4 (18-19). С. 41-44.

**Электродинамическое моделирование взаимодействия
электромагнитных волн с нелинейным распределенным
полупроводниковым включением в полосково-щелевой структуре**

Макеева Галина Степановна

Пензенский государственный университет
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Проведено электродинамическое моделирование взаимодействия микроволн с нелинейным распределенным полупроводниковым включением (диод Ганна планарной геометрии) в полосково-щелевой структуре на основе решения нелинейной 3D задачи дифракции (уравнений Максвелла совместно с уравнением движения носителей заряда в полупроводнике) с помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом поперечных сечений. Используя метод нелинейных автономных блоков с каналами Флоке, получены результаты электродинамического расчета амплитуд отраженных (на входных сечениях планарного диода Ганна) волн основного типа первой и трех высших гармоник в зависимости от продольного размера полупроводникового включения в полосково-щелевой линии.

Ключевые слова: уравнение движения носителей заряда в полупроводнике, численный метод нелинейных автономных блоков с каналами Флоке

Electrodynamic modeling of the interaction of electromagnetic waves with a nonlinear distributed semiconductor inclusion in a strip-slot structure

Galina S. Makeeva

Penza State University
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. Electrodynamic modeling of the interaction of microwaves with a nonlinear distributed semiconductor inclusion (a Gunn diode of planar geometry) in a strip-slot structure was carried out based on the solution of a nonlinear 3D diffraction problem (the Maxwell's equations together with the equation of motion of charge carriers in a semiconductor) using a computational algorithm developed by the cross-section method. Using the method of nonlinear autonomous blocks with Floquet channels, the results of electrodynamic calculation of the amplitudes of reflected (at the input cross-sections of the planar Gunn diode) waves of the fundamental type of the first and three higher harmonics depending on the longitudinal size of the semiconductor inclusion in a strip-slot line were obtained.

Key words: equation of motion of charge carriers in a semiconductor, numerical method of nonlinear autonomous blocks with Floquet channels

Постановка граничной 3D задачи электродинамики для волноведущих структур (ВС), содержащих полупроводниковые включения, состоит в

следующем: необходимо решить уравнения Максвелла совместно с уравнением движения носителей заряда в полупроводнике [1]:

$$\vec{j} = e \left(n \cdot \vec{V}_{др}(\vec{E}) - D_F \cdot \text{grad} n \right), \quad (1)$$

где учтены дрейфовая и диффузионная компоненты тока, $\vec{V}_{др}$ – дрейфовая скорость свободных носителей заряда, n – концентрация электронов, e – заряд электрона, D_F – коэффициент диффузии.

Тогда для ВС с нелинейными полупроводниковыми включениями нестационарные нелинейные уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + e \left(n \cdot \vec{V}_{др}(\vec{E}) - D_F \cdot \text{grad} n \right), \quad \text{rot} \vec{E} = - \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{D} = e(n - N_D), \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

где $\vec{E}, \vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ – вектор электрической индукции; N_D – концентрация легирующей примеси, ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости полупроводника; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В рамках феноменологического подхода применима следующая математическая модель: нелинейность полупроводника описывается зависимостью $V_{др}(\vec{E})$ дрейфовой скорости $\vec{V}_{др}$ от напряженности электрического поля $\vec{E}$, которая аппроксимируется многочленом вида [2]:

$$|\vec{V}_{др}| = a_1 \cdot |\vec{E}| + a_2 \cdot |\vec{E}|^2 + \dots + a_n \cdot |\vec{E}|^n, \quad (3)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – коэффициенты аппроксимации, определяемые из эксперимента [1]. Учитывая коллинеарность векторов $\vec{V}_{др}$ и $\vec{E}$, запишем вместо скалярной зависимости (3) ее векторный аналог:

$$\vec{V}_{др}(\vec{E}) = \left(a_1 + a_2 \cdot |\vec{E}| + a_3 \cdot |\vec{E}|^2 + \dots + a_n \cdot |\vec{E}|^{n-1} \right) \cdot \vec{E}. \quad (4)$$

Представляя функции $\vec{E}(t), \vec{H}(t), \vec{D}(t), |\vec{E}(t)|, n(t)$ в виде рядов по комбинационным частотам

$$\vec{E}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_m) \cdot \exp(i\omega_m t), \quad \vec{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_m) \cdot \exp(i\omega_m t),$$

$$\vec{D}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{D}(\omega_m) \cdot \exp(i\omega_m t), \quad |\vec{E}(t)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\omega_m)| \cdot \exp(i\omega_m t), \quad n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} n(\omega_m) \cdot \exp(i\omega_m t),$$

и внося эти ряды в (1), учитывая при этом (3), получаем системы стационарных нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах:

$$\text{rot} \bar{H}(\omega_m) - i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{E}(\omega_m) = \bar{J}(\omega_m) - \bar{Z}(\omega_m), \quad \text{rot} \bar{E}(\omega_m) + i\omega_m \mu_0 \mu(\omega_m) \bar{H}(\omega_m) = 0,$$

$$\text{div} \bar{D}(\omega_m) = e(n(\omega_m) - N_D), \quad D(\omega_m) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{E}(\omega_m),$$

$$\bar{J}(\omega_m) = e(a_1 \sum_{i=-M}^M \sum_{l=-M}^M n(\omega_i) \bar{E}(\omega_i) \gamma_{il} + a_2 \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \sum_{l=-M}^M n(\omega_m) E(\omega_j) E(\omega_l) \gamma_{ijl} + \dots$$

$$+ a_n \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \sum_{K=-M}^M \dots \sum_{l=-M}^M n(\omega_i) E(\omega_j) E(\omega_K) \dots E(\omega_l) \gamma_{ijk\dots l})$$

$$\bar{Z}(\omega_m) = eD_F \text{grad } n(\omega_m), \quad m=0, 1, 2, \dots, M,$$

где ω_m – комбинационные частоты ($\omega_m > 0, \omega_m = -\omega_m, \omega_0 = 0$), M – число учитываемых комбинационных частот; $\bar{E}(-\omega_i) = \bar{E}^*(\omega_i)$, $\bar{H}(-\omega_i) = \bar{H}^*(\omega_i)$;

$$\gamma_{ijk\dots l} = \begin{cases} 0, \text{если } -\omega_i + \omega_j + \omega_K + \dots + \omega_l \neq \omega_m \\ 1, \text{если } -\omega_i + \omega_j + \omega_K + \dots + \omega_l = \omega_m \end{cases}.$$

Рассмотрим 3D задачу дифракции электромагнитной волны на нелинейном распределенном полупроводниковом включении (диоде Ганна планарной геометрии) между сечениями S_1, S_2 в полосково-щелевой линии (ПЩЛ) (рис. 1)).

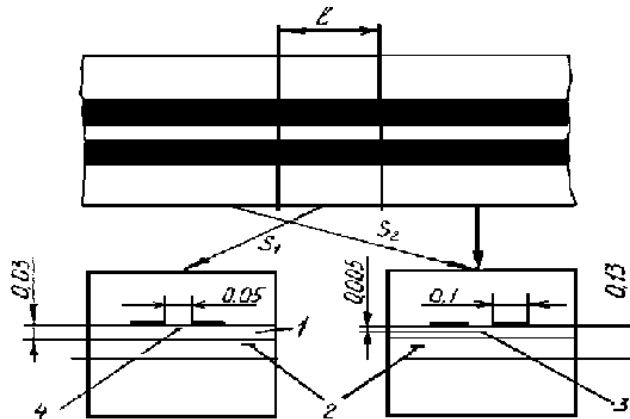


Рис. 1. ПЩЛ, содержащая нелинейное распределенное полупроводниковое включение (планарный диод Ганна): 1 – эпитаксиальный слой полупроводника n-GaAs ($\varepsilon = 12,5$; $\mu = 1$, $D_F = 200 \text{ см}^2/\text{с}$; $n_0 = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ 1/см}^3$); 2 – подложка GaAs ($\varepsilon = 12,5$; $\mu = 1$); 3, 4 – точки наблюдения электрического поля; $d = 0,05 \text{ мм}$

На входные сечения S_1, S_2 распределенного полупроводникового включения (рис. 1) падают прямые волны основного и высших типов ПЩЛ с амплитудами $C_{n(\beta)}^+(\omega_1)$ ($\beta=1,2; n=1,2,\dots,N$), где β – номера сечений, n – индексы собственных волн ВС. Требуется определить амплитуды $C_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ ($\alpha=1,2; k=1,2,\dots,N; m=0,1,2,\dots,M$) отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн комбинационных частот, в том числе высших гармоник с умноженными

частотами $\omega_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1$, где m – индекс комбинационных частот. На сечениях S_1, S_2 введены локальные системы координат [3].

Приближенное решение 3D задачи дифракции для ВС с нелинейным полупроводниковым включением будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{E}^N(\omega_m) &= \sum_{n=1}^N a_n^t(\omega_m) \bar{e}_n^t(\omega_m) + a_n^z(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m), \quad \bar{H}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N b_n^t(\omega_m) \bar{h}_n^t(\omega_m) + b_n^z(\omega_m) \bar{h}_n^z(\omega_m) \\ n^N(\omega_m) &= \sum_{n=1}^N n_n^z(\omega_m) \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{E}(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m) \bar{z}_0, \quad m=0, 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (6)$$

где N – число учитываемых типов волн собственных ВС; $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $n_n^z(\omega_m)$ – неизвестные функции продольной координаты z [4]; $\bar{e}_n^t(\omega_m)$, $\bar{h}_n^t(\omega_m)$, $\bar{e}_n^z(\omega_m)$, $\bar{h}_n^z(\omega_m)$ – поперечные и продольные компоненты собственных волн ВС.

Подставляя (5) в (4) и проектируя $\bar{E}^N$, $\bar{H}^N$ на базисы $\bar{e}_k(\omega_m)$, $\bar{h}_k(\omega_m)$, $\bar{e}_k^z(\omega_m)$, $\bar{h}_k^z(\omega_m)$, получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $n_n^z(\omega_m)$:

$$\begin{aligned} \frac{db_k^t(\omega_m)}{dz} &= -i\Gamma_k b_k^z(\omega_m) - Y_k^t(\omega_m) + \sum_{n=1}^N (i\omega_m A_{kn}^t(\omega_m) b_n^z(\omega_m) - i\omega_m B_{kn}^t(\omega_m) a_n^t(\omega_m) - G_{kn}(\omega_m) n_n^z(\omega_m)) \\ \frac{da_k^t(\omega_m)}{dz} &= -i\Gamma_k a_k^z(\omega_m) + \sum_{n=1}^N (i\omega_m C_{kn}^t(\omega_m) a_n^z(\omega_m) - i\omega_m D_{kn}^t(\omega_m) b_n^t(\omega_m)), \\ \frac{dn^z(\omega_m)}{dz} &= \varphi_k^z(\omega_m), \quad \frac{da_n^z(\omega_m)}{dz} = \psi_k^z(\omega_m), \end{aligned} \quad (7)$$

решаемых совместно с системами нелинейных алгебраических уравнений (АУ)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (i\omega_m A_{kn}^z(\omega_m) b_n^t(\omega_m) - i\omega_m B_{kn}^z(\omega_m) a_n^z(\omega_m) - eD_F A_{kn}^z(\omega_m) \varphi_n^z(\omega_m)) &= Y_k^z(\omega_m), \\ \sum_{n=1}^N (D_{kn}^z(\omega_m) b_n^z(\omega_m) - C_{kn}^z(\omega_m) a_n^t(\omega_m)) &= 0, \\ \sum_{n=1}^N (i\omega_m \Gamma_n(\omega_m) B_{kn}^z(\omega_m) a_n^t(\omega_m) + A_{kn}^z(\omega_m) \psi_n^z(\omega_m)) - eA_{kn}^z(\omega_m) n_n^z(\omega_m) &= -F_k(\omega_m), \end{aligned} \quad (8)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N,$$

здесь $\Gamma_k(\omega_m)$ – постоянные распространения собственных волн ВС,

$$A_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \bar{e}_n(\omega_m) \bar{e}_k(\omega_m) ds, \quad B_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{e}_n(\omega_m) \bar{e}_k(\omega_m) ds,$$

$$A_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m) \bar{e}_k^z(\omega_m) ds, \quad B_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m) \bar{e}_k^z(\omega_m) ds,$$

$$C_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds, D_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds,$$

$$C_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds, D_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds,$$

$$Y_k^t(\omega_m) = \frac{1}{R_K(\omega_m)} \int_S \vec{J}_{\Sigma n}(\omega_m) \vec{e}_k(\omega_m) ds, Y_k^z(\omega_m) = \int_S \vec{J}_{\Sigma n}(\omega_m) \vec{e}_k^z(\omega_m) ds,$$

$$G_{kn}(\omega_m) = \frac{eD_F}{R_K(\omega_m)} \int_S \text{grad}(\varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{e}_n^z(\omega_m) \vec{z}_0) \vec{e}_k(\omega_m) ds, R_k(\omega_m) = \delta_{m0} \int_S N_D \vec{e}_k^z(\omega_m) \vec{z}_0 ds,$$

где S – поперечное сечение ВС, δ_{m0} – символ Кронекера, $R_k(\omega_m)$ – коэффициент нормировки:

$$\int_S (\vec{e}_k(\omega_m) \times \vec{h}_n(\omega_m)) ds = \delta_{kn} R_k(\omega_m),$$

здесь $\varepsilon_1(\omega_m)$, $\mu_1(\omega_m)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды заполнения ВС. Величина $\vec{J}_{\Sigma n}(\omega_m)$ определяется путём подстановки $\vec{E}^N(\omega_m)$ в формулы для токов $\vec{J}(\omega_m)$ (4).

Сформулируем граничные условия для стационарных нелинейных уравнений Максвелла (4). Задавая условия неасимптотического излучения [3]

$$\int_{S_\alpha} ((\vec{E}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)) + (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}(\omega_m))) d\vec{s}_\alpha = 2C_{k(\alpha)}^+ R_{k(\alpha)}(\omega_m),$$

$$\alpha = 1, 2; k = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, M,$$

и учитывая электродинамические граничные условия непрерывности тангенциальных компонент $\vec{E}_\tau(\omega_m)$, $\vec{H}_\tau(\omega_m)$ и нормальной компоненты $D_n(\omega_m)$ на сечениях S_1 и S_2 , получаем искомые граничные условия:

$$C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) + C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = a_{k(\alpha)}^t(\omega_m), C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) - C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = b_{k(\alpha)}^t(\omega_m),$$

$$\sum_{n=1}^N B_{kn}^z(\omega_m) (C_{n(\alpha)}^+(\omega_m) - C_{n(\alpha)}^-(\omega_m)) = \sum_{n=1}^N A_{kn}^z(\omega_m) a_{n(\alpha)}^z(\omega_m), \quad (9)$$

$$\alpha = 1, 2; k, n = 1, 2, \dots, N; m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Вычислительный алгоритм решения стационарных нелинейных уравнений Максвелла (5) разработан на основе метода поперечных сечений [4]. Численным методом решения системы нелинейных ОДУ (7) с граничными условиями (9) является метод “пристрелки” [5], который позволяет свести краевую задачу к серии задач Коши с варьируемыми начальными условиями относительно $C_{k(1)}^-(\omega_m)$, $n_{k(1)}^z(\omega_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $m = 0, 1, 2, \dots, M$).

Рассчитаны комплексные амплитуды $\dot{C}_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных (в локальных системах координат на сечениях S_1 , S_2) волн (основного типа ПЩЛ) высших гармоник с умноженными частотами $\omega_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_1$, если на

сечение S_1 (рис. 1) падает монохроматическая волна основного (нечетного) типа ПЦЛ с частотой ω_1 и комплексной амплитудой $\dot{C}_{1(1)}^+(\omega_1)$.

Постоянные распространения и поля собственных волн регулярной ПЦЛ рассчитывались методом автономных блоков с каналами Флоке (АБФ) [6]. Число базисных функций в методе АБФ [6] выбрано равным 25, что обеспечивает высокую точность расчета постоянных распространения собственных волн ПЦЛ.

Зависимость дрейфовой скорости электронов от напряженности электрического поля (3) для активного слоя полупроводника (область 1 на рис. 1) аппроксимировалась многочленом пятой степени [7]:

$$|\bar{V}_{dp}| = a_1 \cdot |\bar{E}| + a_2 \cdot |\bar{E}|^2 + \dots + a_5 \cdot |\bar{E}|^5, \quad (10)$$

где коэффициенты аппроксимации определялись на основе экспериментальных результатов работы [8].

Для решения электродинамической задачи принято $E_0(\omega_0) = 1000$ В/мм (E_0 в точке наблюдения 4 (рис. 1)), $|C_{1(1)}^+(\omega_1)| = 1000$ В/мм ($\dot{C}_{1(\alpha)}^+(\omega_m)$ и $\dot{C}_{1(\alpha)}^-(\omega_m)$ волн в точке наблюдения 3 (рис. 1)). Вычислительный алгоритм решения нелинейной 3D задачи дифракции оформлен в виде нелинейного АБФ [9, 10]. Число учитываемых типов собственных волн ПЦЛ в методе нелинейных АБФ выбрано равным $N=5$, число учитываемых комбинационных частот $M=5$, шаг интегрирования системы ОДУ в методе Рунге – Кутты $h=0.01$ мм [5].

Результаты электродинамического расчета амплитуд $|C_{1(\alpha)}^-(\omega_m)|$ отраженных (на сечениях S_1 , S_2) волн основного (нечетного) типа ПЦЛ первой гармоники (с частотой $f=30$ ГГц) и трех высших гармоник в зависимости от длины взаимодействия l в активном слое полупроводника в планарном диоде Ганна приведены на рис. 2.

$$|C_{1(\alpha)}^-(\omega_m)|$$

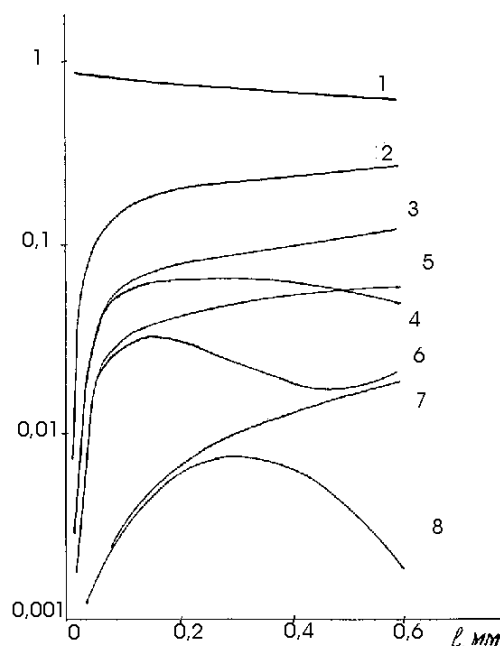


Рис. 2. Зависимость амплитуд $C_{1(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн основного типа первой и трех высших гармоник от длины взаимодействия l в планарном диоде Ганна в ПЩЛ: кривая 1 – $|C_{1(2)}^-(\omega_1)|$; 2 – $|C_{1(1)}^-(\omega_1)|$; 3 – $|C_{1(2)}^-(\omega_2)|$; 4 – $|C_{1(1)}^-(\omega_2)|$; 5 – $|C_{1(2)}^-(\omega_3)|$; 6 – $|C_{1(1)}^-(\omega_3)|$; 7 – $|C_{1(2)}^-(\omega_4)|$; 8 – $|C_{1(1)}^-(\omega_4)|$; $\omega_m = 2\pi mf_1$, $f_1 = 30$ ГГц

Как следует из результатов (рис. 2), нелинейное взаимодействие волн в планарном диоде Ганна определяется не только локальной нелинейностью полупроводниковой среды, но и протяженностью области взаимодействия. При выполнении условия фазового синхронизма для волн в ПЩЛ в заполненной диспергирующей полупроводниковой среде распределенном включении амплитуды $|C_{1(\alpha)}^-(\omega_m)|$ отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн высших гармоник поначалу возрастают пропорционально пройденному волной расстоянию (кривые 3 - 8, рис. 2). На оптимальной длине, при которой достигаются максимумы (рис. 2) амплитуд $|C_{1(\alpha)}^-(\omega_m)|$, перекачка энергии волны (основного типа ПЩЛ) первой гармоники в энергию высших гармоник значительна (рис. 2).

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Голованов О.А., Макеева Г.С. Методы теории бифуркаций в решении нелинейных задач дифракции для устройств сверхвысоких частот с нелинейными средами. Пенза. ПАИИ. 2007.
2. Левинштейн М. Е., Пожела Ю.К. Шур М.С. Эффект Ганна. М.: Сов радио, 1975.

3. Голованов О.А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами. Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N 9. С.1853-1863.
4. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле. Доклады АН СССР. 1969. Т. 184. №1. С. 139-143.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
6. О.А. Голованов. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. N 12. С. 1423-1430.
7. G.S. Makeeva, O.A. Golovanov, M. Pardavi-Horvath. Numerical Simulation of Nonlinear and Parametric Oscillations in a Semiconductor Resonator Structure. Proceed. of PIERS, 26 - 29 March 2006, Cambridge, USA, 2006, pp. 416-420.
8. Rees H.D. Hot electron effects at microwave frequencies in GaAs // Solid-State Commun. 1969. V.7. N 2. pp. 267-269.
9. Г.С. Макеева, О.А. Голованов, А.А. Туманов. Электродинамическое моделирование интегральных устройств СВЧ с распределенными полупроводниковыми элементами методом нелинейных универсальных блоков с каналами Флоке. Надежность и качество. Труды международ. симпоз. Пенза. 2006. Изд-во Пенз. гос. ун-та. Т. 2., С. 322-324.
10. G.S. Makeeva, O.A. Golovanov, M.Pardavi-Horvath. Using Nonlinear Universal Blocks with Floquet Channels for Accurate Electromagnetic Modeling of Nonlinear Microwave Semiconductor and Ferrite Devices. Proceed. of PIERS, 2 - 5 Aug. 2006, Tokyo, Japan. 2006. p. 419.

Математическое моделирование дифракции электромагнитных волн на нелинейной гиромагнитной неоднородности в волноведущей структуре

Макеева Галина Степановна

Пензенский государственный университет

radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. На основе решения нелинейной 3D задачи дифракции (уравнений Максвелла совместно с уравнением движения вектора намагниченности в ферромагнетике) с помощью вычислительного алгоритма, разработанного методом поперечных сечений, проведено математическое моделирование дифракции и взаимодействия микроволн с нелинейным гиромагнитным (феррит) включением в полосково-щелевой линии. Используя метод нелинейных автономных блоков, получены результаты электродинамического расчета амплитуд отраженных (на входных сечениях нелинейной гиромагнитной неоднородности) волн второй гармоники в зависимости от продольного размера ферритового включения при различных амплитудах падающей волны (основного типа) первой гармоники.

Ключевые слова: нелинейная задача дифракции, метод нелинейных автономных блоков, гиромагнитная неоднородность, ферритовое включение

Mathematical modeling of diffraction of electromagnetic waves on a nonlinear gyromagnetic discontinuity in a waveguiding structure

Galina S. Makeeva

Penza State University

radiotech@pnzgu.ru

Abstract. Based on the solution of a nonlinear 3D diffraction problem using a computational algorithm developed by the cross-section method mathematical modeling of diffraction and interaction of microwaves with a nonlinear gyromagnetic (ferrite) discontinuity in a strip-slot line was carried out. By using a method of nonlinear autonomous blocks the results of electrodynamic calculation of the amplitudes of reflected (at the input cross-sections of the nonlinear gyromagnetic discontinuity) waves of the second harmonic depending on the longitudinal size of the ferrite inclusion at various amplitudes of the incident wave (fundamental type) of the first harmonic were obtained.

Key words: nonlinear diffraction problem, method of nonlinear autonomous blocks, nonlinear gyromagnetic discontinuity, ferrite inclusion

Формулировка граничной 3D задачи электродинамики для волноведущих структур (ВС), содержащих включения нелинейных гиромагнитных сред, состоит в следующем: необходимо решить уравнения Максвелла [1]

$$\text{rot}\bar{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad \text{rot}\bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}(\bar{H})}{\partial t}, \quad (1)$$

совместно с уравнением движения вектора намагниченности в ферромагнетике [2]

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\gamma(\bar{M} \times \bar{H}) + \omega_r(\chi_0 \bar{H} - \bar{M}), \quad (2)$$

$$\bar{M} = \bar{B} - \mu_0 \bar{H},$$

где $\bar{E}, \bar{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\bar{B}(\bar{H})$ – вектор магнитной индукции; ε – относительная диэлектрическая проницаемость; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; $\bar{M}$ – вектор намагниченности; γ – гиромагнитное отношение; ω_r – частота релаксации; $\chi_0 = M_0/H_0$ – статическая магнитная восприимчивость.

Представляя поля $\bar{E}(t), \bar{H}(t)$ и намагниченность $\bar{M}(t)$ в виде рядов по комбинационным частотам

$$\bar{E}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{E}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad \bar{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{H}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad \bar{M}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{M}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad (3)$$

и подставляя эти ряды в уравнения (1), (2), получаем системы стационарных нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах:

$$\text{rot}\bar{H}(\omega_m) = i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \bar{E}(\omega_m), \quad (4)$$

$$\text{rot}\bar{E}(\omega_m) = -i\omega_m \mu_0 \bar{H}(\omega_m) - i\omega_m \mu_0 \bar{M}(\omega_m),$$

$$-i\omega_m \mu_0 \bar{M}(\omega_m) = \omega_r(\chi_0 \bar{H}(\omega_m) - \bar{M}(\omega_m)) - \gamma \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \gamma_{ij} (\bar{M}(\omega_i) \times \bar{H}(\omega_j)),$$

где ω_m – комбинационные частоты ($\omega_m > 0, \omega_{-m} = -\omega_m, \omega_0 = 0$); $H_0 = |\bar{H}(\omega_0)|$; $M_0 = |\bar{M}(\omega_0)|$; $m=0, 1, 2, \dots, q, q$ – число учитываемых комбинационных частот; $\bar{E}(\omega_m), \bar{H}(\omega_m), \bar{M}(\omega_m)$ – амплитудные коэффициенты в рядах (3); $\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_i + \omega_j \neq \omega_m \\ 1, & \text{если } \omega_i + \omega_j = \omega_m \end{cases}$.

Рассмотрим нелинейную 3D задачу дифракции электромагнитных волн на нелинейной гиромагнитной (феррит) неоднородности в полосково-щелевой линии (ПЩЛ) (рис. 1)). Пусть на сечения S_1, S_2 нелинейной гиромагнитной неоднородности падают прямые волны основного и высших типов ВС с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и амплитудами $C_{k(\alpha)}^+(\omega)$, где α – номера входных сечений, k – индексы собственных волн ВС. Требуется определить

амплитуды $C_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных волн на сечениях S_1, S_2 , где m – индекс комбинационных частот (на сечениях S_1, S_2 вводятся локальные системы координат).

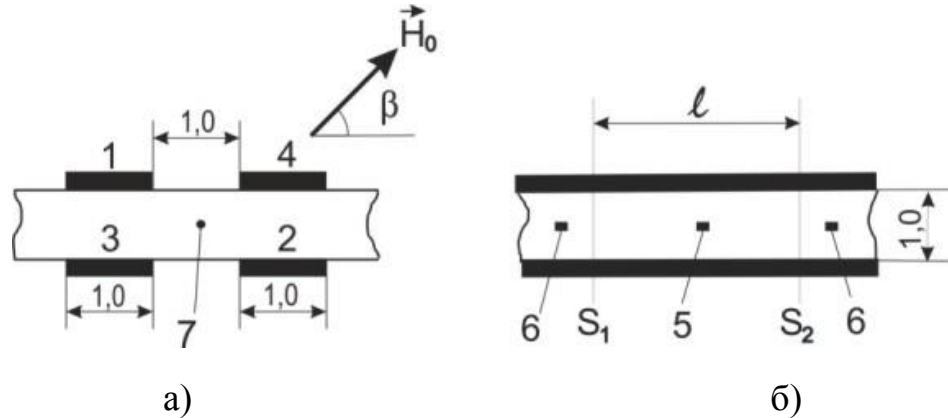


Рис. 1. ПЩЛ, содержащая нелинейную гиромagnetную неоднородность: а) поперечное сечение ПЩЛ; б) гиромagnetное включение между сечениями S_1, S_2 ; 1, 2, 3, 4 – проводники ПЩЛ; 5 – нелинейный феррит ($\varepsilon=9$; $H_0=278$ А/мм; $M_0/\mu_0 = 160$ А/мм; $\omega_r = 3 \cdot 10^9$ с; $\beta = 45^\circ$); 6 – регулярные связанные полосковые линии (СПЛ) на диэлектрической подложке ($\varepsilon=9$; $\mu=1$); 7 – точка наблюдения поля

Приближенное решение нелинейной 3D задачи дифракции будем искать в виде редуцированных рядов:

$$\bar{E}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N a_n^t(\omega_m) \bar{e}_n^t(\omega_m) + a_n^z(\omega_m) \bar{e}_n^z(\omega_m), \quad \bar{H}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N b_n^t(\omega_m) \bar{h}_n^t(\omega_m) + b_n^z(\omega_m) \bar{h}_n^z(\omega_m),$$

$$\bar{M}^N(\omega_m) = \sum_{n=1}^N \mu_0 \mu_1(\omega_m) (d_n^t(\omega_m) \bar{h}_n^t(\omega_m) + d_n^z(\omega_m) \bar{h}_n^z(\omega_m)), \quad m=0, 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

где N – число учитываемых собственных волн ВС; $a_n^t(\omega_m)$, $b_n^t(\omega_m)$, $a_n^z(\omega_m)$, $b_n^z(\omega_m)$, $d_n^t(\omega_m)$, $d_n^z(\omega_m)$ – неизвестные функции продольной координаты z ; $\bar{e}_n^t(\omega_m)$, $\bar{h}_n^t(\omega_m)$, $\bar{e}_n^z(\omega_m)$, $\bar{h}_n^z(\omega_m)$ – поперечные и продольные компоненты собственных волн ВС, заполненной линейной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon_1(\omega_m)$, $\mu_1(\omega_m)$.

Подставляя (3) в (2) и проектируя $\bar{E}^N$, $\bar{H}^N$ на базисы $\bar{e}_k(\omega_m)$, $\bar{h}_k(\omega_m)$, $\bar{e}_k^z(\omega_m)$, $\bar{h}_k^z(\omega_m)$, получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{db_k^t(\omega_m)}{dz} = -i\Gamma_k(\omega_m) b_k^z(\omega_m) + i\omega_m \sum_{n=1}^N (A_{kn}^t(\omega_m) b_n^z(\omega_m) - B_{kn}^t(\omega_m) a_n^t(\omega_m))$$

$$\frac{da_k^t(\omega_m)}{dz} = -i\Gamma_k(\omega_m) a_k^z(\omega_m) + i\omega_m \sum_{n=1}^N (C_{kn}^t(\omega_m) (a_n^z(\omega_m) - d_n^t(\omega_m)) - D_{kn}^t(\omega_m) b_n^t(\omega_m)), \quad (6)$$

решаемых совместно с системами нелинейных алгебраических уравнений (АУ)

$$\sum_{n=1}^N (B_{kn}^z(\omega_m) a_n^z(\omega_m) - A_{kn}^z(\omega_m) b_n^t(\omega_m)) = 0, \sum_{n=1}^N (C_{kn}^z(\omega_m) (a_n^t(\omega_m) - d_n^z(\omega_m)) - D_{kn}^z(\omega_m) b_n^z(\omega_m)) = 0$$

$$, \sum_{n=1}^N (\alpha_r D_{kn}^z(\omega_m) b_n^z(\omega_m) - \beta_r C_{kn}^z(\omega_m) d_n^z(\omega_m)) = 0, \sum_{n=1}^N (\alpha_r D_{kn}^t(\omega_m) b_n^t(\omega_m) - \beta_r C_{kn}^t(\omega_m) d_n^t(\omega_m) -$$

$$- \gamma \sum_{i=-q}^q \sum_{j=-q}^q \gamma_{ij} (X_{kn}(\omega_i, \omega_j) d_n^t(\omega_i) b_n^z(\omega_j) + Y_{kn}(\omega_i, \omega_j) d_n^z(\omega_i) b_n^t(\omega_j)) = 0,$$

где $m=0, 1, 2, \dots, q$; $k, n=1, 2, \dots, N$, $\alpha_r = \frac{\omega_r \chi_0}{\mu_0}$, $\beta_r = \omega_r + i\omega_m$, $\Gamma_k(\omega_m)$ - постоянные распространения собственных волн ВС,

$$A_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) \vec{e}_k(\omega_m) ds, B_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) \vec{e}_n(\omega_m) ds,$$

$$C_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds, A_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \vec{e}_n^z(\omega_m) \vec{e}_k^z(\omega_m) ds,$$

$$B_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_m) \vec{e}_n^z(\omega_m) \vec{e}_k^z(\omega_m) ds, D_{kn}^t(\omega_m) = \frac{1}{R_k(\omega_m)} \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n(\omega_m) \vec{h}_k(\omega_m) ds,$$

$$C_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds, D_{kn}^z(\omega_m) = \int_S \mu_0 \mu(\omega_m) \vec{h}_n^z(\omega_m) \vec{h}_k^z(\omega_m) ds,$$

$$X_{kn}(\omega_i, \omega_j) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) ((\vec{h}_n(\omega_i) \times \vec{h}_n^z(\omega_j)) \cdot \vec{h}_k(\omega_m)) ds,$$

$$Y_{kn}(\omega_i, \omega_j) = \int_S \mu_0 \mu_1(\omega_m) ((\vec{h}_n^z(\omega_i) \times \vec{h}_n(\omega_j)) \cdot \vec{h}_k(\omega_m)) ds,$$

здесь S – поперечное сечение ВС, $R_k(\omega_m)$ – коэффициент нормировки:

$$\int_S (\vec{e}_k(\omega_m) \times \vec{h}_n(\omega_m)) ds = \delta_{kn} R_k(\omega_m),$$

где δ_{kn} - символ Кронекера.

Сформулируем граничные условия для стационарных нелинейных уравнений Максвелла (4). Задавая условия неасимптотического излучения [3]

$$\int_{S_\alpha} ((\vec{E}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)) + (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}(\omega_m))) d\vec{s}_\alpha = 2C_{k(\alpha)}^+ R_{k(\alpha)}(\omega_m), \quad (8)$$

где $d\vec{s}_\alpha$ - векторный элемент поверхности сечения α , $\alpha=1,2$; $k=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, q$, и учитывая электродинамические граничные условия непрерывности тангенциальных компонент $\vec{E}_\tau(\omega_m), \vec{H}_\tau(\omega_m)$ на сечениях S_1, S_2 , получаем искомые граничные условия:

$$C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) + C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = a_{k(\alpha)}^t(\omega_m), C_{k(\alpha)}^+(\omega_m) - C_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = b_{k(\alpha)}^t(\omega_m), \quad (9)$$

$$\alpha=1, 2; k, n=1, 2, \dots, N; m=0, 1, 2, \dots, q.$$

Решение нелинейной 3D задачи дифракции сведено к решению системы нелинейных ОДУ (6) совместно с системами нелинейных АУ (7) с

граничными условиями (9). Вычислительный алгоритм решения стационарных нелинейных уравнений Максвелла (4) разработан на основе метода поперечных сечений [4]. Систему нелинейных ОДУ (6) с граничными условиями (9) решаем численным методом “пристрелки” [5], что позволяет свести краевую задачу к серии задач Коши с варьируемыми начальными условиями относительно $C_{k(1)}^-(\omega_m)$ ($\alpha=1, 2; k=1, 2, \dots, N; m=0, 1, 2, \dots, q$).

Пусть на входное сечение S_1 падает волна основного типа ПЦЛ с частотой ω_1 и амплитудой $C_{1(1)}^+(\omega_1)$. Нелинейность гиромангнитной среды приводит к появлению волн комбинационных частот, в том числе высших гармоник с умноженными частотами $\omega_m = 2m \omega_1$, где $m=0, 1, 2, \dots, q$ [6, 7]. Волны с частотой сигнала ω_1 распространяются в СПЛ с проводниками 3, 4, волны с удвоенной частотой ω_2 - в СПЛ с проводниками 1, 2. Рассчитаны амплитуды $\dot{C}_{1(\alpha)}^-(\omega_2)$ отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн (основного типа ПЦЛ) второй гармоники.

Задачи Коши для системы нелинейных ОДУ (6) решены методом Рунге-Кутты [5], шаг выбран $h=0.02$ мм. Решение системы нелинейных АУ (7) находим методом Ньютона [5]. Постоянные распространения, поперечные и продольные компоненты полей собственных волн ПЦЛ, необходимые для построения вычислительного алгоритма, рассчитываем методом многомодовых автономных блоков (МАОБ) [8]. Число базисных функций в методе МАОБ выбираем равным $W = 25$, что обеспечивает высокую точность определения постоянных распространения собственных волн ПЦЛ. Вычислительный алгоритм решения нелинейной 3D задачи дифракции оформлен в виде нелинейного АБ [8, 9].

Результаты электродинамического расчета амплитуд $|\dot{C}_{1(\alpha)}^-(\omega_2)|$ отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн второй гармоники в зависимости от продольного размера l ферритового включения при различных амплитудах $C_{1(1)}^+(\omega_1)$ падающей волны (основного типа ПЦЛ) первой гармоники с частотой $f=10$ ГГц приведены на рис. 2.

Результаты получены при числе учитываемых типов собственных волн в ПЦЛ $N=14$ и числе учитываемых комбинационных частот $q=6$. Для численного эксперимента величина поля подмагничивания $H_0=278$ А/мм выбрана так, что частота ферромагнитного резонанса равна частоте ω_1 .

Как следует из результатов, приведенных на рис. 2, эффективность нелинейного взаимодействия зависит от амплитуды $C_{1(1)}^+(\omega_1)$ падающей волны. Нелинейные эффекты накапливаются пропорционально пройденному волной расстоянию в нелинейном ферритовом включении, и суммарный нелинейный эффект за счет протяженности области взаимодействия значителен, даже если коэффициент локальной нелинейности гиромангнитной среды мал при малых амплитудах $C_{1(1)}^+(\omega_1)$ волны первой гармоники.

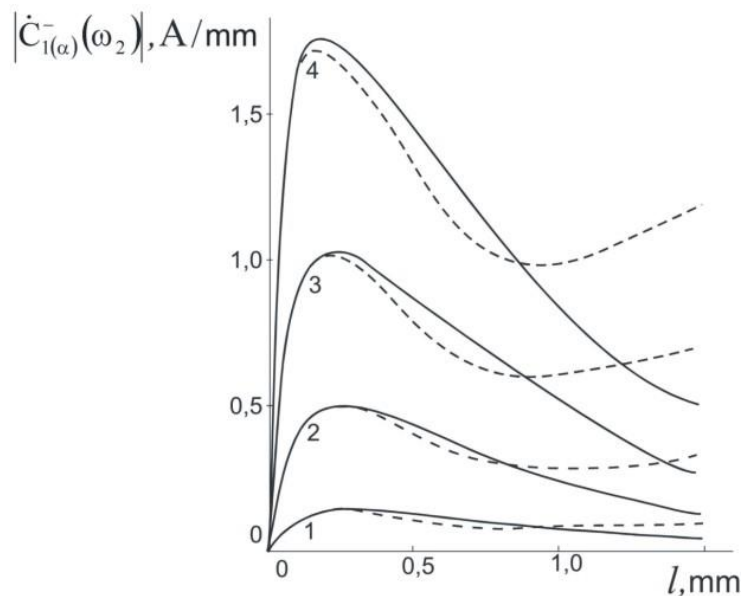


Рис. 2. Зависимости амплитуд $|\dot{C}_{1(\alpha)}^-(\omega_2)|$ отраженных (на сечениях S_1, S_2) волн второй гармоники от продольного размера l ферритового включения в ПЦЛ при различных амплитудах падающей волны: кривые 1 - 4 соответствуют $C_{1(1)}^+(\omega_1) = 4, 6, 8, 10$ А/мм; сплошная линия - $\alpha = 1$; пунктирная - $\alpha = 2$; $\omega_1 / 2\pi = 10$ ГГц; $\beta = 45^\circ$

Оптимальная длина ($l = 0.24$ мм), при которой достигается максимум (рис. 2) амплитуды второй гармоники $C_{1(2)}^-(\omega_2)$, определяется протяженностью области эффективного взаимодействия первой и второй гармоник в условиях синхронизма и зависит от дисперсии волн и диссипации гиромангнитной среды [6, 7]. При $l > 0.24$ мм (рис. 2) перекачка энергии волны из первой во вторую гармонику незначительна из-за нарушения фазового синхронизма вследствие дисперсии волн в ПЦЛ.

Соавтором в части, касающейся разработки вычислительного метода и реализующего его алгоритма, являлся Голованов Олег Александрович.

The co-author regarding the development of the computational method and the algorithm that implements it was Oleg A. Golovanov.

Список литературы

1. Голованов О.А., Макеева Г. С. Методы теории бифуркаций в решении нелинейных задач дифракции для устройств сверхвысоких частот с нелинейными средами. Пенза. ПАИИ. 2007.
2. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматиз, 1970.
3. Голованов О.А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами. Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. N 9. С.1853-1863.
4. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле. Доклады АН СССР. 1969. Т. 184. №1. С. 139-143.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.

6. G.S. Makeeva, O.A. Golovanov, M. Pardavi-Horvath. An Efficient Nonlinear Frequency Multiplication Mechanism in Ferrite Loaded Waveguide Structures, IEEE Transaction on Magnetics. 2005, V. 41. N10, pp. 3559-3561.
7. G.S. Makeeva, O.A. Golovanov, M. Pardavi-Horvath. Mathematical Modeling of Nonlinear Waves and Oscillations in Gyromagnetic Structures by means of Bifurcation Theory Methods. JEMWA, 2006, V.20, N 11, pp.1503-1510.
8. Никольский В.В., Голованов О.А. Метод автономных многомодовых блоков и его применение для исследования полосковой линии. Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24. №6. С. 1070.
9. Голованов О.А. Нелинейные автономные блоки и их применение при исследовании нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами. Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. №7. С.793.
10. Макеева Г.С., Голованов О.А. Математическое моделирование нелинейного преобразования волн в волноведущих структурах с нелинейными гиромагнитными включениями. Известия вузов. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2005. N6 (21). С.144-153.

ДИНАМИКА ЗАМКНУТЫХ КОНТАКТНЫХ СИСТЕМ ВАКУУМНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОММУТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

*Дмитрий Владимирович Артамонов¹, Александр Николаевич Литвинов²,
Александр Александрович Акимов³*

Пензенский государственный университет. Пенза, Россия,
¹ dmitrartamon@yandex.ru, ² fzopgu@mail.ru, ³ Akimers@mail.ru

Аннотация. Предложен алгоритм расчета собственных частот замкнутых контактных систем (КС) вакуумных высокочастотных устройств (ВВКУ) с промежуточными упругими опорами в виде сильфонов или мембран. Численно исследовано влияние параметров КС на их собственные частоты. Результаты исследований представлены в безразмерной форме, удобной для практического применения и анализа динамического поведения КС широкого класса приборов. Показана возможность применения научно обоснованных конструкторско-технологических решений на ранних стадиях проектирования и модернизации ВВКУ, позволяющих повысить их виброустойчивость в широком частотном диапазоне эксплуатационных внешних воздействий. Особую актуальность это приобретает при проведении работ по импортозамещению широкого класса ВВКУ для аппаратуры различного применения.

Ключевые слова: вакуумные высокочастотные устройства, контактные системы, динамическое воздействие, виброустойчивость, дребезг.

DYNAMICS OF CLOSED CONTACT SYSTEMS VACUUM HIGH-FREQUENCY SWITCHING DEVICES

Dmitry V. Artamonov¹, Alexander N. Litvinov², Alexander A. Akimov³

Penza State University. Penza, Russia,
¹ dmitrartamon@yandex.ru, ² fzopgu@mail.ru, ³ Akimers@mail.ru

Annotation. An algorithm for calculating natural frequencies of closed contact systems (CS) of vacuum high-frequency devices (HFSSD) with intermediate elastic supports in the form of bellows or membranes is proposed. The influence of the CS parameters on their natural frequencies is numerically investigated. The research results are presented in a dimensionless form convenient for practical application and analysis of dynamic behaviour of CS of a wide class of devices.

The possibility of application of scientifically substantiated design and technological solutions at the early stages of designing and modernisation of HFSSD, allowing to increase their vibration stability in a wide frequency range of operational external influences, is shown. It becomes especially urgent when carrying out works on import substitution of a wide class of HFSSD for equipment of various applications.

Key words: vacuum high-frequency devices, contact systems, dynamic impact, vibration resistance, bounce.

Анализ отказов вакуумных высокочастотных устройств (ВВКУ) [1, 2] показывает, что виброустойчивость ВВКУ в основном определяется виброустойчивостью их контактных систем (КС). Так как современные ВВКУ используются в широком спектре радиоэлектронной и иной аппаратуры различного назначения, которая эксплуатируется в широком частотном диапазоне внешних динамических воздействий. Особый интерес представляет математическое моделирование динамического состояния КС при вибрационном воздействии. Это позволяет на ранних этапах проектирования КС принимать научно обоснованные конструкторско-технологические решения, обеспечивающие виброустойчивость ВВКУ в эксплуатационном частотном диапазоне. В тех случаях, когда эксплуатационный частотный диапазон является достаточно широким, например, для авиационной аппаратуры частотный диапазон составляет от 20 до 2500 Гц, в КС ВВКУ могут возникать резонансные явления, приводящие к самопроизвольному размыканию, дребезгу КС и отказам ВВКУ в целом [3].

Рассмотрим КС, находящуюся в замкнутом (рабочем) состоянии. Анализ существующих типов КС ВВКУ показал, что в качестве обобщенной модели для динамического расчета можно принять расчетную схему, представленную на рис.1.

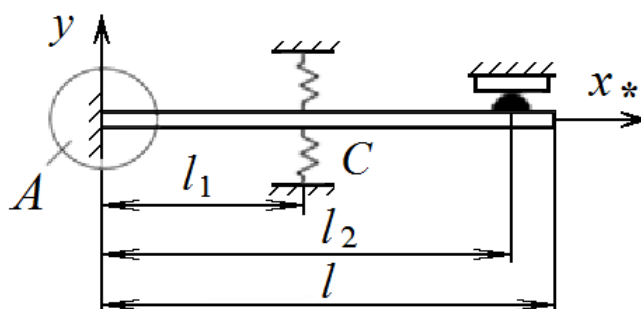


Рисунок 1 – Расчетная схема КС

Балка КС имеет длину l . На расстоянии l_1 расположена упругая опора жесткостью C , на расстоянии l_2 расположена масса контакта M . Материал балки характеризуется модулем упругости E , а ее поперечное сечение моментом инерции J . Введение промежуточной упругой опоры обусловлено тем, что в большинстве ВВКУ имеются мембраны или сильфоны, разделяющие вакуумную и газонаполненную среды, через которые проходит балочный элемент КС. Промежуточная упругая опора имеет жесткость

мембраны (сильфона) в плоскости перемещения балки КС. В замкнутом состоянии конструктивно при сборке КС обеспечивается контактное усилие P_0 . Введем следующие безразмерные параметры КС: $x = x_*/l$ – координата, изменяющаяся в пределах $0 \leq x \leq 1$; $\beta = l_1/l$ – координата расположения упругой опоры; $c = Cl^3/EJ$ – относительная жесткость упругой опоры; $n = M/M_0$ – относительная масса контакта, где M_0 – масса контактной балки; $\mu = l_2/l$ – безразмерная координата расположения массы контакта M , ($\beta < \mu \leq 1$). Введение безразмерных параметров позволяют создать обобщенную модель КС.

Способы закрепления КС в зоне A (см.рис.1) могут быть различным, что определяется видом привода контактной балки КС в замкнутое и разомкнутое состояние.

Уравнение для форм собственных колебаний $\varphi(x)$ балки КС в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\alpha^4 \varphi(x)}{\alpha x^4} - \alpha^4 \cdot \varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где α_j – безразмерные частотные коэффициенты, определяющие собственные частоты ω_j балки КС, соответствующие j -ой форме колебаний:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c^{-1}), \quad (2)$$

где $m = M_0/l$; $j = 1, 2, 3, \dots$ – номер формы колебаний, а частотные коэффициенты α_j являются функциями безразмерных параметров β , μ , n , c КС.

Для балок КС постоянного сечения решение уравнения (1) запишем через функции Крылова S , T , U , V в виде

$$\varphi(x) = C_1 S(\alpha x) + C_2 T(\alpha x) + C_3 U(\alpha x) + C_4 V(\alpha x), \quad (3)$$

где C_i – постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий для КС ($i = 1, 2, 3, 4$), которые формулируются для конкретного способа закрепления балки КС. При решении задачи используем свойства функций Крылова и их производных [4].

При воздействии вибрации фактическое контактное усилие P будет переменным. Для обеспечения гарантированного контакта должно выполняться условие $0 < P \leq P_0$, что соответствует выполнению условия $\varphi(\mu) = 0$.

Остальные граничные условия для всех вариантов КС в замкнутом состоянии приведены в табл.1, где введены следующие обозначения для производных: $\varphi' = d\varphi/dx$, $\varphi'' = d^2\varphi/dx^2$, $\varphi''' = d^3\varphi/dx^3$ и безразмерная жесткость опоры $c_0 = C_0 l^3/EJ$.

Граничные условия при $x = 1$ для всех вариантов КС имеют вид:

$$\varphi''(1) = \varphi'''(1) = 0. \quad (4)$$

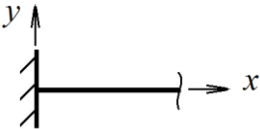
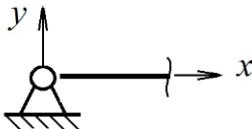
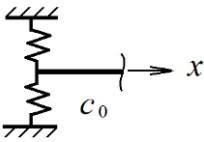
Уравнения неразрывности решения имеют вид

$$\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta); \quad \varphi_2(\mu) = 0, \quad (5)$$

где $\varphi_i(x)$ – выражение для формы колебаний, которые в зависимости от варианта КС записывается на каждом i -ом участке балки КС ($i = 1, 2, 3$).

Таблица 1

Варианты КС

Вариант	Закрепление КУ (А, с рис.1)	Граничные условия при $x = 0$	Значение постоянных C_i
I		$\varphi(0) = 0$ $\varphi'(0) = 0$	$C_1 = C_2 = 0$
II		$\varphi(0) = 0$ $\varphi''(0) = 0$	$C_1 = C_3 = 0$
III		$\varphi''(0) = 0$ $\varphi''' = \frac{c_0}{EJ} \varphi(0)$	$C_3 = 0$ $C_4 = \frac{c_0}{\alpha^3} C_1$

Удовлетворяя граничным условиям (табл.1), (4) и условиям неразрывности (5), получим систему однородных линейных уравнений в виде

$$A \cdot X = 0. \quad (6)$$

Здесь $A = [\alpha_{jk}]$ – матрица коэффициентов; $X = \{x_j\}$ – вектор неизвестных при $j, k = 1, 2, 3, 4$. При этом коэффициенты α_{jk} выражаются через функции Крылова и зависят от варианта исполнения КС (табл.1).

В частности для варианта I КС (см.табл.1) на каждом участке форма собственных колебаний φ_i определяется выражениями

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = C_3 U(\alpha x) + C_4 V(\alpha x), & \text{при } 0 \leq x \leq \beta; \\ \varphi_2(x) = \varphi_1(\alpha x) - (c/\alpha^3) \cdot \varphi(\beta) V[\alpha(x-\beta)], & \text{при } \beta \leq x \leq \mu; \\ \varphi_3(x) = \varphi_2(x) + (Pl^2/\alpha^3 EJ) \cdot V[\alpha(x-\mu)], & \text{при } \mu \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Неизвестными в (6) являются: $x_1 = C_3$; $x_2 = C_4$; $x_3 = \varphi(\beta)$; $x_4 = P$. Из условия нетривиальности решения системы уравнений (6) с учетом (7) получим частотное уравнение

$$|a_{jk}| = 0; \quad j, k = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

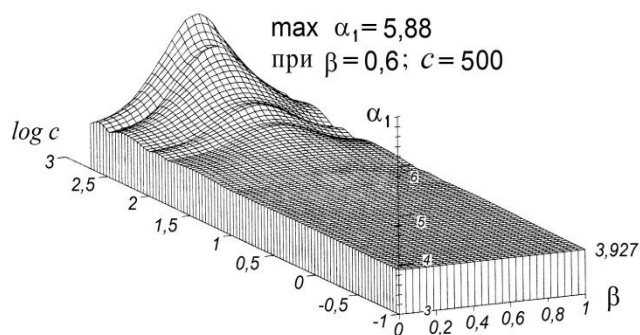
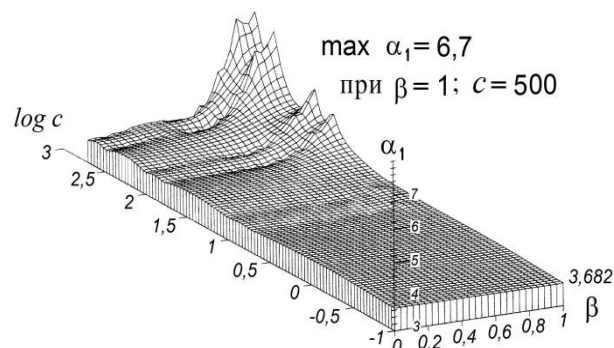
которое после раскрытия определителя с учетом свойств функций Крылова приводит к трансцендентному нелинейному уравнению относительно частотных коэффициентов α_j , определяющих собственные частоты ω_j (2), на которых возможно самопроизвольное размыкание и дрейзг КС, приводящее к отказам ВВКУ. В силу громоздкости эти уравнения в развернутом виде не приводятся. Частотные уравнения (9) решаются численными методами с погрешностью не более 0,1 %. В качестве начального значения α_0 для определения низшего частотного коэффициента α_1 принимается $\alpha_0 = 0,1$, а при определении частотных коэффициентов α_j (при $j = 2, 3, \dots$) для более высоких частот ω_j в качестве начального значения принимается $\alpha_{0j} = \alpha_{j-1} + 0,1$.

Численное моделирование динамики КС проводилось в широком диапазоне изменения основных безразмерных параметров, соответствующих практически всем типоразмерам КС современных ВВКУ:

$$\beta \in [0; 1]; \quad \mu \in [0,4; 1]; \quad c \in [0; 1000]; \quad n \in [0; 20].$$

Результаты проведенных численных исследований показали, что при относительной жесткости промежуточной упругой опоры $c = 1000$, ее можно считать абсолютно жесткой, т.е. разделительная мембрана (сильфон) в этом случае практически не деформируется.

Некоторые результаты численных исследований для I схемы КС приведены на рис.2.



а)

б)

Рисунок 2 – Зависимость коэффициента α_1 от β и c :

а – при $\mu = 1$; б – при $\mu = 0,6$

Анализ полученных результатов показывает, что при прочих равных условиях, в замкнутых КС при расположении массы контакта на конце балки ($\mu=1$) упругую разделительную мембрану следует устанавливать на расстоянии $\beta=0,6$. В этом случае частотный коэффициент α_1 является максимальным, что позволяет существенно повысить минимальную собственную частоту КС и в ряде случаев исключить резонансные явления, дребезг КС и отказы ВВКУ в эксплуатационном диапазоне внешних воздействий.

Численные исследования, проведенные для более высоких частот и форм колебаний КУ, показали, что зависимости частотных коэффициентов для более высоких частот имеют аналогичные нелинейные зависимости от основных параметров КС.

Для остальных вариантов (II и III) конструктивного исполнения КС были получены аналогичные результаты и выводы.

Предложенную методику расчета собственных частот балочных КУ рекомендуется применять на ранних этапах проектирования ВВКУ, что позволяет принимать научно обоснованные конструкторско-технологические решения по обеспечению виброустойчивости ВВКУ и сокращает сроки и экономические затраты при разработке новых и модернизации существующих ВВКУ. Кроме того, эту методику можно применять при анализе и установлении причин отказа ВВКУ в условиях динамического воздействия и при динамических испытаниях, а также при разработке режимов технологической тренировки и испытаний ВВКУ в производственных условиях[5].

Список литературы

1. Акимов, А.А. Перспективы разработки вакуумных высокочастотных коммутирующих устройств в рамках их импортозамещения / А.А. Акимов, А.Н. Литвинов // Надежность и качество. Труды междунар. симп. в 2-х томах. – Пенза: Изд-во ПГУ, т.1, 2019. – С.10-13.
2. Акимов, А.А. Конструкторско-технологические аспекты проектирования высоконадежных вакуумных высокочастотных коммутирующих устройств / А.А. Акимов // Надежность и качество. Труды междунар. симп. в 2-х томах. – Пенза: Изд-во ПГУ, т.2, 2020. – С.318-321.
3. Кузьмин, Э. Н. Обеспечение виброударопрочности оборудования и аппаратуры / Э. Н. Кузьмин. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ. – 2003. – 320 с.
4. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
5. Артамонов, Д.В. Моделирование динамических процессов и обеспечение виброустойчивости изделий приборостроения: монография/ Д.В. Артамонов, Г.В. Гуральник, А.Н. Литвинов, М.А. Литвинов. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2023. – 368 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАТ ЭЛЕКТРОННЫХ БЛОКОВ, ЗАЛИТЫХ ПОЛИМЕРНЫМИ КОМПАУНДАМИ

Александр Николаевич Литвинов

Пензенский государственный университет. Пенза, Россия, fzopgu@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы повышения виброустойчивости плат электронных блоков, залитых полимерными компаундами. На основании проведенных экспериментальных исследований для залитых плат построены уравнения регрессии, позволяющие теоретически прогнозировать резонансные частоты и величину максимального коэффициента динамичности залитых плат в зависимости от толщины материала и кажущейся плотности заливки. Полученные результаты позволяют на ранних этапах проектирования плат электронных блоков принимать научно обоснованные конструкторско-технологические решения, позволяющие обеспечить требуемую виброустойчивость электронных блоков в условиях их эксплуатации для широкого класса приборов различного назначения.

Ключевые слова: электронный блок, плата, компаунд, заливка, динамические характеристики, резонансные частоты, коэффициент динамичности.

MODTLING OF CHARACTERISTICS OF ELECTRONIC BLOK BOARDS FILLED WITH POLYMER COMPOUNDS

Alexander N. Litvinov

Penza State University. Penza, Russia, fzopgu@mail.ru

Annotation. The questions of increasing vibration resistance of electronic unit boards poured with polymer compounds are considered. On the basis of the conducted experimental researches, regression equations are constructed for the poured boards, which allow theoretically predicting the resonance frequencies and the value of the maximum dynamic coefficient of the poured boards depending on the material thickness and apparent density of filling. The obtained results allow at the early stages of design of boards of electronic units to make scientifically grounded design and technological decisions, allowing to provide the required vibration resistance of electronic units in the conditions of their operation for a wide class of devices for various purposes.

Keywords: electronic unit, board, compound, casting, dynamic characteristics, resonant frequencies, dynamic coefficient.

Вопросы обеспечения виброустойчивости изделий приборостроения и отдельных электронных блоков приобретают важное значение при разработке новых и модернизации существующих конструкций в процессе проведения конструкторско-технологических работ по импортозамещению большой номенклатуры электронных блоков изделий приборостроения различного назначения [1].

Одним из этапов разработки вибростойких изделий является математическое моделирование динамического состояния элементов конструкций и электронных блоков при действии на изделия внешних эксплуатационных воздействий и выбор обоснованных конструкторско-технологических решений, обеспечивающих их эффективную виброзащиту и обеспечение тактико-технических характеристик изделия.

В серийном производстве электронных блоков изделий приборостроения для этого широко применяется заливка электронных блоков полимерными компаундами [3]. Этот способ имеет как достоинства, так и недостатки, которые выражаются в неремонтопригодности залитых блоков и возникновении в них остаточных напряжений, которые могут явиться причиной снижения метрологических характеристик электронных блоков после их заливки.

Существенной особенностью залитого электронного блока является то, что существующие модели для аналитического моделирования его динамического состояния [3] неприменимы, так как этот блок является сложной гетерогенной структурой. Поэтому в настоящей работе применяются методы регрессионного анализа [4], позволяющего на основании статистической обработки экспериментальных данных получить уравнения регрессии, прогнозирующие требуемые динамические характеристики залитого электронного блока.

Экспериментальные исследования динамических характеристик проводились на моделях печатных плат из двухстороннего фольгированного стеклотекстолита СФ-2 размерами (125×77×1) мм; (125×55×1) мм; (77×77×1) мм. В качестве заливочного компаунда применялся пенополиуретан ППУ-305А, который имеет широкое практическое применение в блоках приборов автоматики. Всего испытывались 124 платы. Заливка плат производилась по технологии предприятия.

В качестве основных параметров, характеризующих динамическое состояние прямоугольных в плане плат, были приняты низшая (первая) резонансная частота f (в Гц) и безразмерный максимальный коэффициент динамичности платы без заливки и с заливкой пенополиуретаном с различной кажущейся плотностью и разной высотой заливки.

В качестве безразмерных независимых переменных приняты:

$x_1 = a/b$, где a и b – размеры пластины в плане (при $a > b$);

$x_2 = H/H_0$, где H и H_0 – толщина слоя заливки и толщина платы соответственно;

$x_3 = \rho/\rho_0$ – безразмерная плотность компаунда, где ρ_0 – плотность материала платы; ρ – кажущаяся плотность материала заливки после его полимеризации.

Основные безразмерные независимые переменные изменялись в следующих диапазонах:

$$x_1 = 1, \dots, 2; \quad x_2 = 3, \dots, 15; \quad x_3 = 0,1 \dots 0,4$$

Для удобства исследования была введена безразмерная резонансная частота залитого блока $\bar{f} = f/f_0$, где f и f_0 – резонансные частоты залитой и незалитой платы соответственно.

Предварительно были экспериментально определены резонансные частоты и коэффициенты динамичности для исследуемых плат без заливки. Значения этих характеристик приведены в табл.1.

Таблица 1

Значения f_0 и β для незалитых плат

Динамические характеристики	Размеры платы, мм		
	125×77×1	125×55×1	77×77×1
f_0 , Гц	265	315	575
β	160	133	162

Динамические испытания проводились в соответствии с ГОСТ 20.57.406-81 методом 100-1 при плавном изменении частоты гармонических колебаний.

Обработка экспериментальных данных проводилась методами дисперсионного и регрессивного анализа [4, 5]. Уравнения регрессии для безразмерной частоты $\bar{f}$ и максимального коэффициента динамичности β для плат, залитых пенополиуретаном ППУ-305А, применялись в виде:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^3 b_j x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^3 b_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^3 b_{jj} x_j^2, \quad (1)$$

где коэффициенты b_0, b_{ij}, b_{jj} в функции отклика y для $\bar{f}$ и β определялись по результатам экспериментов методом регрессивного анализа с применением критериев для оценки значимости коэффициентов уравнения регрессии при уровне значимости $q = 0,05$.

После применения регрессионного анализа и перехода к натуральным значениям исследуемых факторов уравнения регрессии получены в следующем виде:

- для максимального коэффициента динамичности
$$\beta = -8,77 - 17,76x_1 + 8,51x_2 + 80,16x_3 - 1,82x_1x_2 + 218x_1x_3 - 23,9x_2x_3; \quad (2)$$
- для безразмерной резонансной частоты

$$\bar{f} = -0,917 + 1,21x_1 + 0,087x_2 + 4,25x_3 + 0,033x_1x_2 - 0,405x_1x_3 + 0,25x_2x_3 - 0,43x_1^2 - 0,004x_2^2 - 5,7x_3^2. \quad (3)$$

Коэффициенты b_{11} , b_{22} и b_{33} в (2) оказались незначимыми.

Анализ полученных уравнений показывает, что основным фактором, определяющим динамические характеристики β и $\bar{f}$, является кажущаяся плотность пенополиуретана. Повышенная плотность снижает эффективность демпфирования, но повышает резонансную частоту за счет увеличения жесткости конструкции. Увеличение толщины заливки приводит к повышению эффективности демпфирования, которое оказывается существенным при низкой кажущейся плотности материала заливки.

На рис.1 и 2 приведены зависимости β и $\bar{f}$ от плотности заливки ρ при $a/b=1,6$ и $H/H_0=10$, которые прогнозируются по полученным уравнениям регрессии (2) и (3) соответственно. Кружочками показаны экспериментально полученные значения соответствующих параметров.

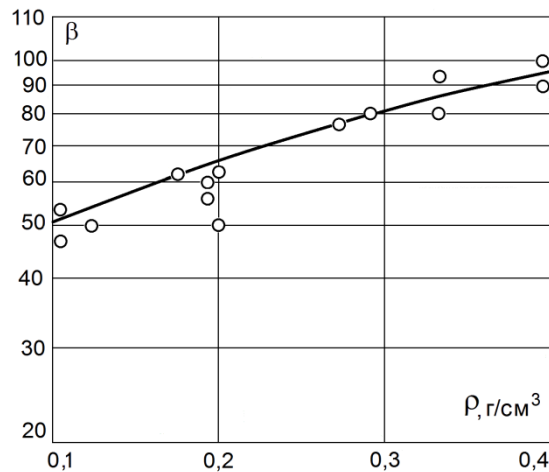


Рисунок 1. Максимальный коэффициент динамичности залитой платы

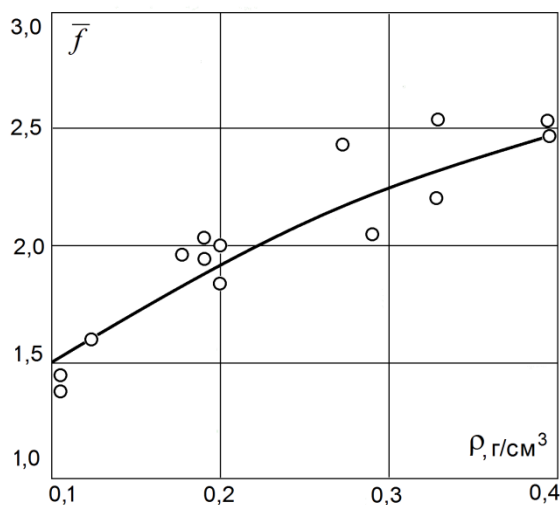


Рисунок 2. Зависимость резонансной частоты от плотности заливки

Анализ представленных результатов показывает, что уравнения регрессии (2) и (3) для исследуемых диапазонов изменения основных параметров адекватно прогнозирует значения динамических характеристик β

и f . По сравнению с результатами испытаний максимальная погрешность коэффициента динамичности β не превышает 23 %, а резонансной частоты f – 14 %. Такая погрешность прогнозирования динамических характеристик залитых блоков с помощью уравнений регрессии (2), (3) считается приемлемой для практических расчетов [6].

Представленные результаты показывают, что полученные уравнения регрессии с допустимой погрешностью позволяют прогнозировать основные динамические характеристики залитых плат на ранних этапах принятия конструкторско-технологических решений и отработке технологического процесса заливки для обеспечения требуемой виброустойчивости электронных блоков в условиях их эксплуатации.

Список литературы

1. Кузьмин, Э. Н. Обеспечение виброударопрочности оборудования и аппаратуры / Э. Н. Кузьмин. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ–ВНИИТФ. – 2003. – 320 с.
2. Зеленов, Ю.В. Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными композитами / Ю.В. Зеленов, А.А. Кирилин, Э.Б.Слободник, Е.Н. Талицкий. Под ред. Ю.В. Зеленева. – М.: Радио и связь, 1984. – 120 с.
3. Литвинов, М.А. Анализ моделей для исследования вибростойкости изделий приборостроения / М.А. Литвинов, А.Н. Литвинов // Труды междунар. симп. «Надежность и качество». – 2023, Т.1. – С.60-65.
4. Статистические методы в инженерных исследованиях / Под ред. Г.К. Круга. – М.: Высшая школа, 1983. – 216 с.
5. Налимов, В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.Д. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.
6. Абрамов О.В. Прогнозирование состояния и планирование эксплуатации систем ответственного назначения // Надежность и качество сложных систем. – 2020. №3. – С.5-14.

6. Нейроматематика и нейрокомпьютеры

УДК 004.032.26

Реализация в PyTorch физически-информированной нейронной сети радиальных базисных функций

Александр Олегович Майоров¹, Владимир Иванович Горбаченко²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹maiorov-aleksand@mail.ru, ²gorvi@mail.ru

Аннотация. Разработано расширение фреймворка PyTorch, позволяющее реализовать физически информированные сети радиальных базисных функций с настройкой не только весов, но и параметров радиальных базисных функций. На примере решения уравнения Пуассона показано существенное преимущество разработанной сети радиальных базисных функций перед традиционно применяемыми физически информированными полносвязными сетями: за одинаковое количество эпох обучения сеть радиальных базисных функций достигла среднеквадратической невязки 10^{-6} , а полносвязная сеть — только 10^{-4} . При этом сеть радиальных базисных функций обеспечила лучшую форму решения.

Ключевые слова: физически-информированные нейронные сети, сеть радиально-базисных функций, дифференциальные уравнения в частных производных, PyTorch.

Implementation of physics-informed radial basis function neural network in PyTorch

Alexander Olegovich Mayorov¹, Vladimir Ivanovich Gorbachenko²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹maiorov-aleksand@mail.ru, ²gorvi@mail.ru

Abstract. An extension of the PyTorch framework is developed that allows to implement physically informed networks of radial basis functions with tuning not only the weights but also the parameters of radial basis functions. The example of the Poisson equation solution shows the significant advantage of the developed radial basis function network over the traditionally used physically informed fully connected networks: for the same number of training epochs, the radial basis

function network achieved a mean square error of 10^{-6} , while the fully connected network achieved only 10^{-4} . In this case, the radial basis function network provided the best solution form.

Keywords: physically informed neural networks, radial basis functions networks, partial differential equations, PyTorch.

Физически-информированные нейронные сети (PINN — Physically Informed Neural Networks) — это класс моделей машинного обучения, который объединяет методы глубокого обучения с принципами физики. В этих сетях функция потерь использует математическая модель физического процесса [1]. PINN находят решение уравнения или системы уравнений, описывающих краевую задачу, а не обучаются на примерах, как другие нейронные сети. PINN обладают преимуществами перед традиционными численными методами: являются бессеточными, то есть не требуют построения сетки для решения плохо обусловленных систем сеточных уравнений высокой размерности; неявно реализуют приближенное аналитическое решение задачи (функция, описывающая выход сети является приближенным аналитическим решение задачи); являются устойчивыми при решении задач с жесткими граничными условиями и неоднородностями.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} F(u(x); \gamma) &= f(x) \quad x \in \Omega, \\ B(u(x)) &= g(x) \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

определенную на $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ с границей $\partial\Omega$, где $x = [x_1, \dots, x_{d-1}, t]$ — n -мерный вектор координат, u — неизвестное решение, f — функция, определяющая данные задачи, F — дифференциальный оператор, γ — параметры задачи, B — оператор краевых условий, g — граничная функция [2].

Точное решение u аппроксимируется с помощью нейронной сети (PINN), заданной вектором параметров θ . В процессе обучения нейронной сети вектор параметров θ находится путем минимизации функции потерь, которая зависит от дифференциального оператора и краевых условий

$$\theta^* = \operatorname{argmin}_{\theta} (\alpha_F \operatorname{Loss}_F + \alpha_B \operatorname{Loss}_B), \quad (1)$$

где $\operatorname{Loss}_F = \frac{1}{N_F} \sum_{i=1}^{N_F} \left(F(u(x_i)) - f(x_i) \right)^2$, $\operatorname{Loss}_B = \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \left(B(u(x_i)) - g(x_i) \right)^2$, N_F , N_B — число пробных точек для уравнения и краевых условий соответственно, α_F , α_B — весовые коэффициенты, регулирующие вклад разных составляющих в функцию потерь.

Обычно для реализации PINN используют полносвязные нейронные сети. Перспективным направлением является применение физически информированных сетей радиальных базисных функций [3], которые содержат всего два слоя и проще обучаются, чем полносвязные сети.

Радиальная базисная функция — это функция, вида $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|)$, где $\mathbf{c}$ — некоторая точка, называемая центром. В качестве нормы могут быть использованы различные метрики.

В описываемой реализации сети радиально-базисных функций используется функция Гаусса $\varphi(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2}{2a^2}\right)$, где $\mathbf{c}$ – центр функции, a – параметр формы.

Сеть радиальных базисных функций — искусственная нейронная сеть, выход которой описывается выражением

$$RBF(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{RBF}} \omega_i \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где n_{RBF} — количество радиальных базисных функций, ω_i — вес i -го нейрона, $\varphi_i(\mathbf{x})$ — значение радиальной базисной функции в точке $\mathbf{x}$.

Во время обучения нейронной сети вектор параметров рассматривается как

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, \mathbf{a}],$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_{RBF}}, c_{x1}, c_{x2}, \dots, c_{x, n_{RBF}}, c_{y1}, c_{y2}, \dots, c_{y, n_{RBF}}, a_1, a_2, \dots, a_{n_{RBF}}],$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор значений весов радиальных базисных функций, $\mathbf{c}_x$ — вектор координат по оси абсцисс центров радиальных базисных функций, $\mathbf{c}_y$ — вектор координат по оси ординат центров радиальных базисных функций, $\mathbf{a}$ — вектор параметров формы радиальных базисных функций.

Наш подход [3] отличается от известных настройкой в процессе обучения сети не только весов, но и параметров радиальных базисных функций, что существенно сокращает время обучения. Физически информированные нейронные сети реализуются с использованием фреймворков TensorFlow или PyTorch и автоматического дифференцирования для вычисления градиентов в алгоритмах обучения сетей. Наши сети [3, 4] реализованы в MATLAB и TensorFlow как с аналитическим вычислением градиентов, так и с помощью автоматического дифференцирования. В то же время в таком популярном фреймворке как PyTorch отсутствуют реализации физически информированных сетей радиальных базисных функций с настройкой как весов, так и параметров радиальных базисных функций. В известных работах, например, в [5] настраиваемыми являются только веса. Поэтому было принято решение разработать расширение PyTorch, реализующее пользовательской слой радиальных базисных функций с настройкой параметров радиальных базисных функций. Для этого в PyTorch реализован пользовательский слой настраиваемых радиальных базисных функций [6].

Сравнение сети радиальных базисных функций с настройкой весов и параметров радиальных базисных функций и полносвязной нейронной сети проведено на примере решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Phi(x, t),$$

$$\Phi(x, t) = -\sin(\pi x^2) \sin(\pi t^2),$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, u(x, 1) = 0, t \in [0, 1],$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, x \in [0, 1].$$

Для решения уравнения Пуассона было взято 500 равномерно распределенных пробных точек внутри области решения, а также по 500 равномерно распределенных точек на каждой из границ области решения. Кроме того, в ходе обучения сетей вклад соответственных ошибок был равен $\alpha_F = 1, \alpha_B = 2$ (1).

Для реализации сети радиальных базисных функций использован разработанный пользовательский слой радиальных базисных функций с 100 радиально-базисными функциям (рис. 1). В качестве радиальных базисных функций использован Гауссиан, в качестве нормы — евклидова норма. Перед обучением сети радиальных базисных функций значения весов и центров радиальных базисных функций инициализировались случайно с равномерным распределением, значения параметров формы — с нормальным распределением.

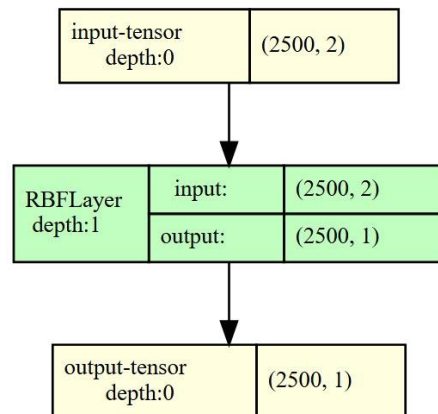


Рисунок 1 – Структура сети радиальных базисных функций

Реализованная полносвязная сеть состоит из 5 скрытых линейных слоев, каждый из которых содержит по 10 нейронов (рис. 2). В качестве функции активации используется сигмоида.

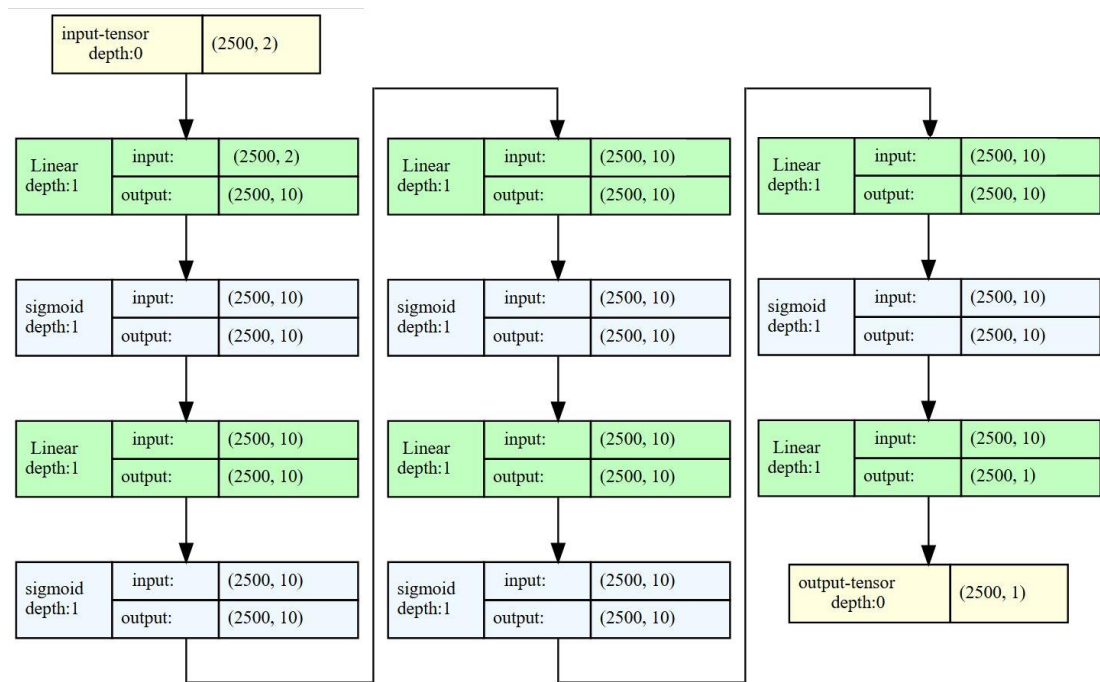


Рисунок 2 – Структура полносвязной сети

Обучение сетей проводилось при помощи бесплатного облачного сервиса Google Colab (или Google Colaboratory) с применением графического ускорителя NVIDIA Tesla T4. При обучении использовался Adam в качестве оптимизатора и среднеквадратичная ошибка (MSELoss) в качестве функции потерь. За 20000 эпох обучения было достигнуто значение функции потерь равное 10^{-4} с помощью полносвязной сети и 10^{-6} с помощью сети радиально-базисных функций (рис. 3). Обучение полносвязной сети продолжалось в течение 330 с., сети радиально-базисных функций – в течение 338 с.

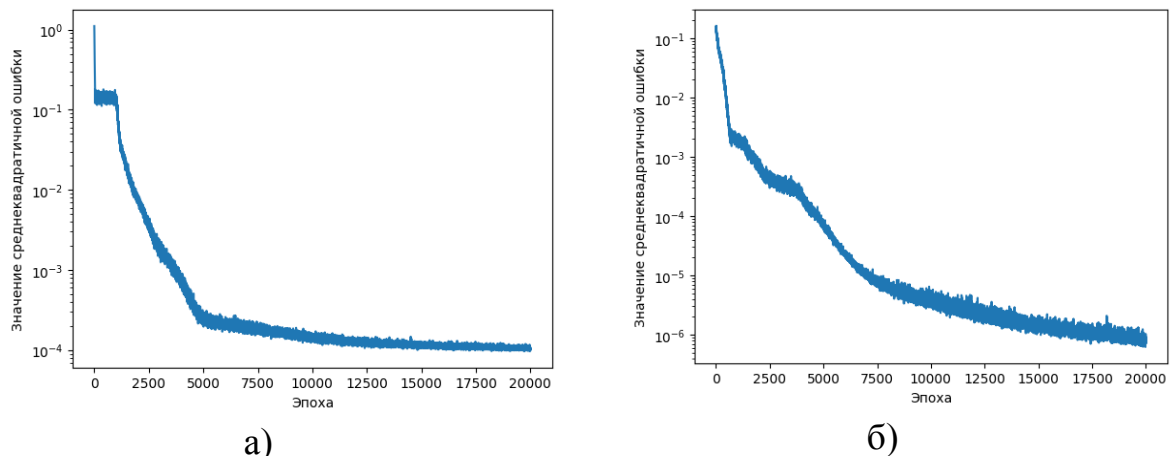


Рисунок 3 – Значение среднеквадратичной ошибки в зависимости от эпохи: а) полносвязная сеть; б) сеть радиальных базисных функций

Таким образом, сеть радиальных базисных функций с настройкой в процессе обучения как весов, так и параметров радиальных базисных

функций позволила за одинаковое количество эпох обучения достичь на два порядка большей точности, чем полносвязная сеть.

Изменения центров и ширины радиальных базисных функций в ходе обучения сети представлено на рис. 4.

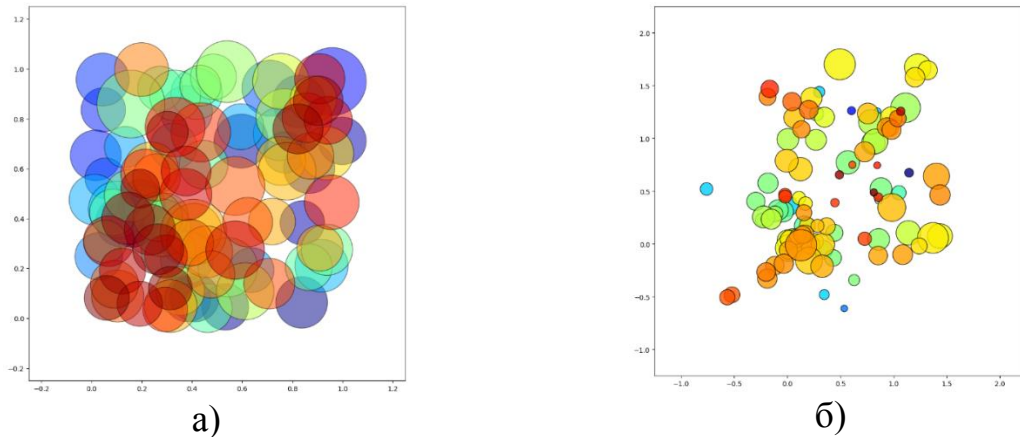


Рисунок 4 – Радиальные базисные функции: а) до обучения сети; б) после обучения сети

Полученные при обучении сетей приближенные решения уравнения Пуассона представлены на рис. 5.

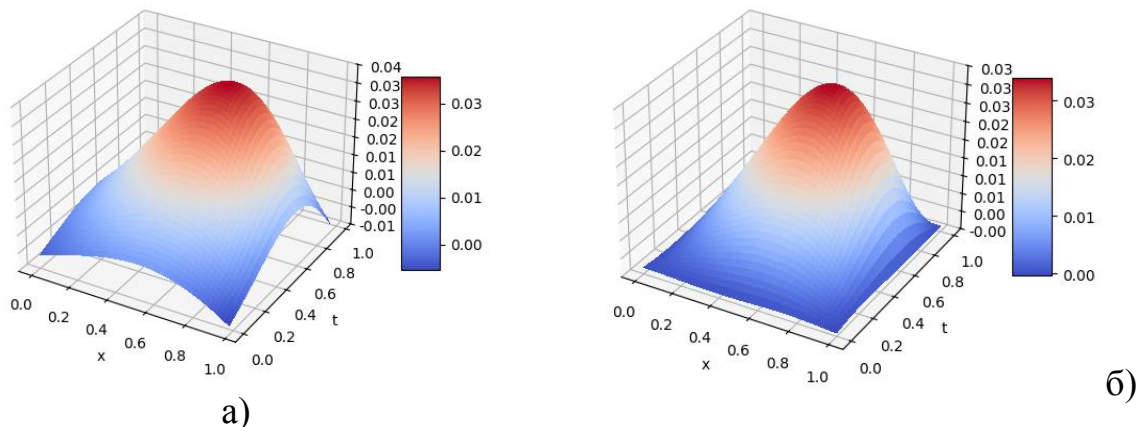


Рисунок 5 – Решение уравнения Пуассона с помощью: а) полносвязной сети; б) сети радиальных базисных функций

Как видно на рис. 5, решение, полученное с помощью сети радиальных базисных функций, имеет лучшую форму, чем решение, полученное на полносвязной сети.

Таким образом, использование физически информированной сети радиально-базисных функций с настройкой как весов, так и параметров радиальных базисных функций показало явное преимущество по сравнению с полносвязной сетью.

Дальнейшие исследования предполагают разработку пользовательских оптимизаторов, реализующих градиентные алгоритмы обучения второго порядка, и расширение классов решаемых задач.

Список литературы

1. Raissi M, Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019, vol. 378. P. 686–707.
2. Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's next / S. Cuomo, V. S. D. Cola, F. Giampaolo, G. Rozza, M. Raissi, F. Piccialli // Journal of Scientific Computing. 2022, Vol. 92. Article number: 88. 62 p.
3. [Stenkin D., Gorbachenko V. Mathematical Modeling on a Physics-Informed Ra-dial Basis Function Network // Mathematics. 2024, Vol. 12. no 2. Article number: 241.](#)
4. [Stenkin D. A., Gorbachenko V. I. Solving Problems of Mathematical Physics on Radial Basis Function Networks. Moscow University Physics Bulletin. 2024, Vol. 79, Suppl. 2. P. S706–S711.](#)
5. [Wang Z., Minxin Chen M., Che J. Solving multiscale elliptic problems by sparse radial basis function neural networks // Journal of Computational Physics. 2023, Vol. 492, 112425.](#)
6. [Russo A. Pytorch RBF Layer - Radial Basis Function Layer. \[Электронный ресурс\]. URL: https://github.com/rssalessio/PytorchRBFLayer \(дата обращения 19.05.2025\).](#)

Оценка качества открытых больших языковых моделей (LLM)

Целаев Даниил Олегович, Романова Елена Геннадьевна

ПГУ (Пенза, Россия)

tselaev03@mail.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются методы оценки качества работы генеративного искусственного интеллекта, включая большие языковые модели (LLM). Авторы анализируют существующие подходы к оценке, такие как автоматические метрики (перплексия, BLEU, ROUGE) и специализированные бенчмарки (LAMBADA, WinoGrande, HellaSwag, AI2 ARC, MMLU, HumanEval, GPQA). Особое внимание уделяется сложностям объективной оценки LLM из-за их способности генерировать разнообразные и контекстно-зависимые ответы. Статья подчеркивает необходимость комплексных методов тестирования для измерения различных аспектов качества моделей, включая логическое рассуждение, эрудицию и генерацию кода.

Ключевые слова: большие языковые модели, LLM, оценка качества, генеративный ИИ, перплексия, бенчмарки, машинное обучение, искусственный интеллект, автоматические метрики, логическое рассуждение.

©Целаев Д.О. 2025

Evaluation of Open-Source Large Language Models (LLM)

Tselaev Daniil Olegovich, Romanova Elena Gennadevna

Penza State University

tselaev03@mail.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Annotation

The article explores methods for evaluating the performance of generative artificial intelligence, including large language models (LLMs). The authors analyze existing evaluation approaches, such as automatic metrics (perplexity, BLEU, ROUGE) and specialized benchmarks (LAMBADA, WinoGrande, HellaSwag, AI2 ARC, MMLU, HumanEval, GPQA). Special attention is given to the challenges of objectively assessing LLMs due to their ability to generate diverse and context-dependent responses. The article emphasizes the need for comprehensive testing methods to measure various aspects of model quality, including logical reasoning, knowledge breadth, and code generation.

Keywords: large language models, LLMs, performance evaluation, generative AI, perplexity, benchmarks, machine learning, artificial intelligence, automatic metrics, logical reasoning.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большие языковые модели (LLM) стали основой многих приложений обработки текста и речи. Их возможности впечатляют – современные LLM генерируют связный текст, отвечают на вопросы, пишут программный код. Однако с ростом применения таких моделей остро встал вопрос объективной оценки их качества. Без надежных методик оценки сложно понять, насколько модель действительно “умна” и пригодна для практического использования. С развитием все более мощных моделей необходимость комплексных бенчмарков для измерения их характеристик возрастает как никогда[1].

Оценивать качество LLM существенно труднее, чем решать классические задачи вроде классификации изображений или текста. В традиционном машинном обучении метрика точности дает ясное представление об успехе модели: есть правильные и неправильные ответы, и можно просто подсчитать долю верных прогнозов. В случае же с языковыми моделями ситуация сложнее: модель генерирует разнообразные тексты, и может быть несколько верных способов ответить на один и тот же запрос. К примеру, две фразы могут иметь одинаковое значение, но быть сформулированы по-разному – простая метрика совпадения слов посчитает их разными, хотя по сути ответ верный. Нет и универсальной автоматической метрики, которая охватывала бы все аспекты качества работы LLM[3]. Метрики вроде перплексии (показывающей, насколько модель “удивляется” тестовому набору данных; чем ниже перплексия, тем лучше предсказательные способности модели) широко применяются для языкового моделирования, но измеряют лишь вероятность текста, а не смысловую корректность ответа. Аналогично, метрики из машинного перевода и суммаризации (BLEU, ROUGE и др.) позволяют автоматически сравнить с эталонными ответами, но могут не учитывать логическую связность и фактическую точность сгенерированного текста[2]. Все это затрудняет оценку LLM: требуется учёт множества факторов – грамматической связности, соответствия фактам, умения рассуждать, отсутствия токсичности и пр.

1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ

Подходы к оценке LLM можно разделить на автоматические метрики и контрольные наборы задач (бенчмарки). Автоматические метрики, как отмечалось, включают перплексию – показатель, отражающий способность модели предсказывать текст. Например, более совершенная модель присваивает тестовому корпусу более высокие вероятности и в итоге имеет

низкую перплексию (т.е. меньше "удивляется" новым данным). Также используются метрики вроде BLEU и ROUGE для сравнения с эталонным ответом, особенно в задачах машинного перевода или суммаризации. Однако все такие показатели дают лишь приближенное суждение о качестве генерации и не покрывают всей сложности языка. В связи с этим ключевую роль играют специальные бенчмарки – наборы заданий, по которым модель должна выдать определенный результат (текст, вариант ответа или решение задачи). Ниже рассмотрены наиболее популярные бенчмарки для LLM – от относительно простых до комплексных, – а также их цели и ограничения.

LAMBADA. Одним из первых наборов для оценки понимания контекста моделью стал датасет LAMBADA. Задача в LAMBADA состоит в угадывании последнего слова в данном тексте-повествовании[4]. Таким образом, чтобы успешно решить задачу LAMBADA, модель должна учитывать широкий контекст повествования, а не полагаться лишь на локальные подсказки. При создании этого бенчмарка оказалось, что ни одна из моделей того времени не была способна достоверно решать такие задачи (точность лучших моделей не превышала 1%[4]).

WinoGrande. Для оценки здравого смысла и языкового понимания в ситуациях с разрешением неоднозначностей широко используется бенчмарк WinoGrande[5]. Он основан на известной задаче Winograd Schema Challenge, где модель должна из контекста определить, к какому из двух упоминаемых персонажей или объектов относится местоимение.[6]. WinoGrande (2020), изначально был сложным тестом для языковых моделей, теперь решается современными LLM с высокой точностью, став базовым тестом на логическую согласованность.

HellaSwag. Еще один сложный набор на коммонсенс-рассуждение – HellaSwag (Zellers и др., 2019). Он представляет собой задачу на логическое продолжение ситуации: модели дается описание контекста (например, начало сценария из видеоролика), и необходимо выбрать правильное продолжение из четырех предложенных вариантов[5]. HellaSwag оказался очень прост для людей (средний человек угадывает правильный вариант с точностью ~95%[5]), но первоначально был крайне сложен для моделей (случайный выбор дал бы 25%, а лучшие алгоритмы показывали меньше 50% точности[5]).

AI2 ARC (Reasoning Challenge). Для оценки научных знаний и умения рассуждать у моделей был предложен набор ARC (AI2 Reasoning Challenge, 2018) – сборник вопросов из школьных естественно-научных экзаменов США[7]. В сумме ARC содержит 7787 вопросов по физике, биологии, химии и другим наукам уровня примерно 8-го класса школы[7]. Особенность этого бенчмарка в том, что он разделен на два уровня: ARC-Easy и ARC-Challenge. В Challenge входят только такие вопросы, с которыми не справились два простых алгоритма (поиск ответа в текстах и статистический метод) [7].

Таким образом, Challenge-набор содержит именно трудные вопросы, требующие не поверхностного совпадения с известными фактами, а комбинирования знаний и логических выводов. Постепенно нейросети научились искать и комбинировать факты, улучшив результат, но ARC по-прежнему ценен как проверка умения рассуждать вне типичных датасетов.

MMLU. Massive Multitask Language Understanding (MMLU)[5]. Он был предложен Хендриксом в 2020 году как способ измерить общий уровень эрудиции и навыков решения задач у языковой модели[5]. MMLU объединяет задания по 57 различным предметам, от элементарной математики и истории до юриспруденции и медицины[5]. Каждому предмету соответствует ряд вопросов четырех уровней сложности – начиная от школьного и заканчивая профессиональным. Формат заданий – как правило, вопрос с четырьмя вариантами ответа (множественный выбор). Так, базовая GPT-3 давала относительно средние результаты (около 43% верных ответов), а более совершенный GPT-4 достиг ~86% – что сопоставимо с уровнем экспертов[8]. Сильные стороны MMLU – широкое покрытие областей знаний и единая методология тестирования. На сегодняшний день MMLU остается одним из наиболее всеобъемлющих испытаний для LLM на сегодняшний день.

HumanEval. Помимо понимания естественного языка, современные LLM демонстрируют способность генерировать программный код по описанию задачи. Для оценки качества таких используют набор HumanEval[9]. Модель должна сгенерировать тело функции, которое соответствует заданному описанию. Правильность решения автоматически проверяется с помощью набора unit-тестов, написанных для каждой задачи[9]. Итоговая метрика – процент задач, для которых сгенерированное программное решение прошло все тесты. Первые эксперименты показали, что эта задача крайне сложна: оригинальная GPT-3 справлялась менее чем с 1% задач, модель Codex (специализированная на коде) решила ~28% функций[10]. Сейчас HumanEval является основным ориентиром для “кодогенераторов”.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В качестве языка программирования для оценки качества работы искусственного интеллекта был выбран язык Python, потому что он обладает богатыми библиотеками для машинного обучения, простым синтаксисом и активным сообществом разработчиков.

Для проверки качества была выбрана среда разработки Colaboratory (Colab), так как сервис предоставляет облачные мощности для ускорения вычислений без необходимости иметь собственный мощный ПК.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

3.1. Описание экспериментальных данных

При проведении эксперимента были отобраны статьи и специализированные текстовые материалы, посвященные автомобильной тематике. Например, история компании Ford, новые модели Toyota, статья о RажeroSport и др. Данные материалы содержат различную информацию, включающую технические описания, характеристики транспортных средств, обзоры моделей.

3.2. Цель эксперимента

Целью данного исследования являлась разработка автоматизированной системы, способной объективно оценивать качество работы моделей применительно к конкретным текстовым данным. В рамках эксперимента были проведены сравнительный анализ различных подходов к оценке, а также выявлены наиболее эффективные метрики для определения точности и адекватности моделей.

3.3. Методология обработки данных

Для обеспечения структурированности и удобства обработки информации было принято решение ограничить модель определенным форматом представления данных. В качестве основного формата был выбран JSON (JavaScript Object Notation), благодаря его гибкости, читаемости и широкой поддержке в современных вычислительных системах. Поскольку исследуемые тексты относились к автомобильной тематике, использование JSON позволило эффективно систематизировать данные. А также перейти от оценки качества текста, что является крайне обширной и нетривиальной задачей, к простому сравнению результата работы модели с эталонным фактом из обрабатываемого текста.

```
Ответ [0] : ``json
{
  "car_mark": ["Toyota"],
  "car_model": ["Land Cruiser 200"]
}
```

Рисунок 1 – Ответ модели формата JSON.

```
json
{
  "car_mark": ["Toyota"],
  "car_model": ["Land Cruiser 200"]
}
```

Рисунок 2 – Эталонный вариант ответа.

Таким образом, экспериментальная часть исследования основывается на структурированных данных в формате JSON, что обеспечивает единообразие обработки и последующего сравнения результатов работы моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценка качества больших языковых моделей – многогранная задача, требующая комбинации методов. Простые метрики вроде перплексии полезны для базового сравнения моделей по “общей языковой подготовке”, но не отражают способность модели решать практические проблемы. Поэтому сейчас главную роль играют разноплановые бенчмарки: от узконаправленных (проверяющих отдельные навыки, как LAMBADA или WinoGrande) до объединяющих множество областей знаний (MMLU) и близких к реальным прикладным задачам (HumanEval для программирования). Ни один отдельный тест не способен полностью охарактеризовать “интеллект” модели, однако совокупность результатов на различных бенчмарках дает достаточно объективную картину ее сильных и слабых сторон. Эта область активно развивается: с появлением новых моделей придумываются и новые способы их испытать. Таким образом, система оценки качества LLM постоянно совершенствуется, оставаясь ключевым инструментом как для исследований, так и для внедрения больших языковых моделей в реальную жизнь

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Introduction to LLM Benchmarks – URL: <https://www.pythian.com/blog/technical-track/introduction-to-llm-benchmarks>
2. The Challenges of Evaluating Large Language Models | by Mattafrank | Medium – URL: https://medium.com/@Matthew_Frank/the-challenges-of-evaluating-large-language-models-ec2eb834a349
3. LLM Evaluations: Techniques, Challenges, and Best Practices | Label Studio – URL: <https://labelstud.io/blog/llm-evaluations-techniques-challenges-and-best-practices/>
4. The LAMBADA dataset: Word prediction requiring a broad discourse context - URL: <https://arxiv.org/abs/1606.06031>
5. AI Benchmarks and Datasets for LLM Evaluation – URL: <https://arxiv.org/html/2412.01020v1>
6. WinoGrande Dataset | Papers With Code – URL: <https://paperswithcode.com/dataset/winogrande>
7. Think you have Solved Question Answering? Try ARC, the AI2 Reasoning Challenge – URL: <https://arxiv.org/abs/1803.05457>

8. What is GPT-4? | IT Pro – URL: <https://www.itpro.com/technology/artificial-intelligence-ai/368288/what-is-gpt-4>
9. HumanEval benchmark – URL: <https://www.bracai.eu/post/humaneval-benchmark>
10. Evaluating Large Language Models Trained on Code – URL: <https://arxiv.org/abs/2107.03374>

Математические модели искусственного интеллекта в задаче идентификации представителей фауны по акустической информации.

Максим Александрович Усачев

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
u.m.a.2014@yandex.ru

Аннотация. Цифровая обработка звуковых сигналов уже долгие годы является объектом активного исследования. С развитием искусственного интеллекта область применения аудиообработки выросла в разы: на основе шумов сердца можно с большой точностью предсказать существующие или возможные патологии. Анализ звуковых сигналов приборов и машин помогает отследить и вовремя устранить неисправности. Искусственный интеллект, в свою очередь, помогает быстрее и точнее находить определенные закономерности и паттерны, что помогает значительно улучшить производительность тех или иных отраслей. В статье рассматривается один из подходов к идентификации животных по их звукам.

Ключевые слова: искусственный интеллект, машинное обучение, нейронные сети, звук, фауна, классификация, генерация.

Mathematical Models of Artificial Intelligence in the Task of Identifying Fauna Representatives through Acoustic Information

Maxim Alexandrovich Usachev

Penza State University, Penza, Russia
u.m.a.2014@yandex.ru

Abstract. Digital processing of sound signals has been an object of active research for many years. With the development of artificial intelligence, the field of audio processing has expanded significantly: based on heart sounds, it is possible to predict existing or potential pathologies with high accuracy. Analyzing the sound signals of devices and machines helps to track and promptly eliminate malfunctions. Artificial intelligence, in turn, aids in finding specific patterns and regularities more quickly and accurately, which significantly improves the productivity of various industries. This article discusses one approach to identifying animals by sound.

Keywords: artificial intelligence, machine learning, neural networks, sound, fauna, classification, generation.

Введение

На сегодняшний день неоспоримым фактом является то, что искусственный интеллект – это мощный механизм для нахождения закономерностей, обработки информации, предсказания и т.п. Вопрос об идентификации животных по их звуку несет прежде всего научный характер, так как может стать сильным инструментом в исследовании окружающей среды.

1. Анализ звуковых сигналов

Для того, чтобы звуковой сигнал нес для человека прикладную полезную информацию, необходимо для начала его проанализировать. Инструментов для анализа звука достаточно много: спектральный анализ, временной анализ, а также амплитудный, фазовый и ряд других. В современной теории обработки сигналов выделяют ряд частотных характеристик, позволяющих наиболее точно сделать выводы о происхождении и принадлежности звуковых сигналов. К таким характеристикам относятся, например, спектр, кепстр, мел-кепстральные частотные коэффициенты, спектральный центроид, спектральный спад и их производные[1].

Спектр – это совокупность гармонических колебаний, на которую раскладывается волна. Он отражает частотный состав звука, то есть частоты и степень их появления в звуковой волне. Алгоритм построения спектра тесно связан с дискретным преобразованием Фурье, которое выглядит следующим образом:

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} nk},$$

Где $X(n)$ – выходной сигнал, $x(k)$ – входной сигнал

Графическое представление сигнала называется спектральной плоскостью. Удобным инструментом для спектрального анализа является спектрограмма – двумерное графическое отображения спектра сигнала, изменяющегося во времени.

Следующим инструментом анализа звуковых сигналов является кепстр, показывающий периодичности, которые присутствуют в сигнале и вычисляется как обратное преобразование Фурье к натуральному комплексному логарифму прямого преобразования Фурье:

$$\hat{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log[X(e^{jw})] e^{jwn} dw$$

Практическая значимость заключается в получении так называемых мел-частотных кепстральных коэффициентов, основная идея которых заключается в построении огибающей спектра голосового тракта.

Кроме перечисленных выше в ходе анализа звуков применялись также такие характеристики как спектральный центроид, спектральный спад и их среднеквадратичные отклонения, и средние значения.

2. Искусственный интеллект

В ходе выполнения задачи была создана база данных в формате csv-файла, где были определены мел-частотные коэффициенты, их среднее значение и стандартное отклонение, спектральный спад, спектральный центроид и их стандартные отклонения. Модель обучения с учителем [2] подразумевает под собой наличие размеченных данных, поэтому в качестве зависимой переменной в обучении была пометка с указанием вида животных, а в качестве независимых переменных – частотные характеристики. Для решения поставленной задачи был выбран метод опорных векторов [3] с модификациями на небинарную классификацию. Кроме того, были рассмотрены различные значения функций ядра [4]:

1. Линейная $K(x, y) = x \cdot y$
2. Радиальная $K(x, y) = e^{-(\gamma \|x - y\|^2)}$
3. Сигмоидная $K(x, y) = \tanh(\gamma \cdot x^T y + r)$
4. Полиномиальная $K(x, y) = (x \cdot y + c)^d$

В качестве меры точности рассчитывались следующие характеристики:

1. Точность в привычном ее понимании, как отношение верно предсказанных событий ко всем событиям:

$$A = \frac{T}{N},$$

Где T – верно предсказанные события, N - общее число событий

2. Оценка F1 - гармоническое среднее между точностью и полнотой

$$F1 = \frac{2TP}{2TP + FP + FN},$$

Где TP - правильно предсказанные положительные случаи. FP - неправильно предсказанные положительные случаи. TN - правильно предсказанные негативные случаи, FN - неправильно предсказанные негативные случаи.

На рисунке 1 представлены результаты работы машинного обучения.

```

Результаты предсказаний:
Реальные тестовые значения: ['корова' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'корова'
'лягушки' 'лягушки']
Предсказанные (Полиномиальная функция): ['корова' 'лягушки' 'овца' 'корова' 'лягушки' 'овца'
'лягушки' 'корова'
'лягушки' 'лягушки']
Предсказанные (RBF-функция): ['корова' 'лягушки' 'овца' 'корова' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'корова'
'лягушки' 'лягушки']
Предсказанные (Сигмоида): ['лягушки' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'корова'
'лягушки' 'лягушки']
Предсказанные (Линейная функция): ['лягушки' 'лягушки' 'овца' 'лягушки' 'лягушки' 'овца' 'лягушки'
'корова'
'лягушки' 'лягушки']

```

Рисунок 1 – Результаты предсказанных данных

А в таблице 1 представлены оценки точности модели.

Функция ядра	Параметры	Точность, %	Мера F1, %
Полиномиальная	C=1.0, coef0=0.5, degree=2, gamma ='scale'	87.00	87.51
RBF-функция	C = 1.0, gamma ='scale'	88.00	88.23
Сигмоидальная	C=100.0, coef0=0.0, gamma=0.001	84.00	83.80
Линейная	C=0.1, max_iter=1000	85.00	84.79

Таблица 1 – Оценка точности модели

Большое влияние на точность предсказания оказывает оптимальный набор параметров для каждой ядерной функции. В ходе выполнения работы параметры высчитывались программно при помощи метода перекрестной проверки: данные делятся на k случайно выбранных подмножеств (или наборов) примерно одинакового размера. Одно подмножество используется для тестирования модели, обученной на остальных наборах данных. Этот процесс повторяется k раз, так что каждое подмножество используется для проверки ровно один раз.

Большой трудностью для получения качественных результатов является наличие достаточно количества данных, что в свою очередь

зачастую бывает весьма трудоемко. Проблемой при разработке нейронной сети является отсутствие качественного набора данных, что в свою очередь негативно сказывается на конечном результате. Если при работе с изображениями можно внести в них коррективы в виде поворота, отражения и других перспективных преобразований, то со звуковыми файлами дела обстоят несколько сложнее. Самым доступным методом для расширения набора является нарезка на более короткие фрагменты длинных аудиодорожек.

Заключение

В ходе выполнения работы был рассмотрен один из механизмов искусственного интеллекта, а именно машинное обучение с учителем. Главной задачей было научить модель с достаточной точностью идентифицировать представителей фауны по издаваемым ими звукам. Результаты и оценка точности показывают, что при верном подборе параметров ядерной функции, можно добиться достаточно большого числа верно распознанных звуков.

Список источников

1. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов. — М.: Связь, 1979. — 416 с.
2. Кристофер М. Бишоп. Распознавание образов и машинное обучение. — Великобритания: Springer Science+Business Media, LLC, 2006.
3. Нефедов А. Машины опорных векторов: простой учебник. — 2016.
4. Томас Хофман, Бернхард Шёлькопф, Александр Дж. Смола. Ядерные методы в машинном обучении // Анналы статистики. — 2007.

References

1. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. Digital Signal Processing / Translated from English / Edited by S. Ya. Shatz. — Moscow: Svyaz, 1979. — 416 p.
2. Christopher M. Bishop Pattern Recognition and Machine Learning. - U.K.: Springer Science+Business Media, LLC, 2006
3. A.Nefedov Support Vector Machines: A Simple Tutorial. – 2016
4. Thomas Hofmann, Bernhard Scholkopf, Alexander J. Smola. Kernel Methods in Machine Learning // The Annals of Statistics. — 2007.

7. Информационные технологии в образовании

УДК 517.3

Применение средств Maple при изучении некоторых разделов математического анализа

Касимова Ксения Дмитриевна

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

kkasimova633@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена изучению инструментов пакета символьной математики Maple, в частности библиотек LimitTutor и IntTutor. Эти библиотеки предназначены для помощи в решении задач, связанных с пределами и интегралами, и предоставляют пользователям интерактивные средства для анализа и визуализации математических функций. В статье рассматриваются основные функции и возможности данных библиотек, а также приводятся примеры их использования, что позволяет наглядно продемонстрировать эффективность инструментов для обучения и решения математических задач.

Ключевые слова: Maple, LimitTutor, IntTutor, пределы, интегралы, математический анализ

The application of Maple tools in the study of certain sections of mathematical analysis.

Kasimova Ksenia Dmitrievna

Penza State University, Penza, Russia

kkasimova633@gmail.com

Abstract. This work is dedicated to the study of the tools in the symbolic mathematics package Maple, specifically the LimitTutor and IntTutor libraries. These libraries are designed to assist in solving problems related to limits and integrals, providing users with interactive means for analyzing and visualizing mathematical functions. The article discusses the main features and capabilities of these libraries, as well as provides examples of their use, which allows for a clear demonstration of the effectiveness of these tools for learning and solving mathematical problems.

Keywords: Maple, LimitTutor, IntTutor, Limits, Integrals, Mathematical Analysis

Введение

Математический анализ, являясь основой для понимания непрерывных процессов, зачастую представляется сложной дисциплиной, требующей значительных усилий в освоении теоретических основ и выполнении рутинных вычислений. Ключевые понятия, такие как пределы и интегралы, играют важную роль в математическом моделировании и решении задач в различных областях науки и техники. Однако, традиционные методы изучения, ориентированные на ручное выполнение этих вычислений, могут затруднять понимание сути аналитических процессов и ограничивать возможности исследования сложных математических моделей.

Системы компьютерной алгебры (СКА), такие как Maple, предоставляют принципиально новые возможности для изучения математического анализа. Maple выделяется среди прочих инструментов благодаря сочетанию мощного вычислительного ядра, интуитивно понятного интерфейса и широкого набора инструментов для символьных вычислений, что делает его особенно удобным для работы с аналитическими выражениями. Эта СКА позволяет не только автоматизировать трудоемкие вычисления пределов и интегралов, но и визуализировать математические объекты, проверять правильность ручных решений, а также экспериментировать с различными подходами к решению задач.

В данной статье мы рассмотрим практическое применение Maple при изучении пределов и интегралов – двух центральных концепций математического анализа. Мы продемонстрируем, как с помощью Maple можно легко вычислять сложные пределы, находить аналитические решения для интегралов, которые трудно или невозможно получить вручную. Мы подчеркнем, что удобство Maple заключается в его способности освободить пользователя от рутинных вычислений, позволяя сосредоточиться на анализе полученных результатов, интерпретации математических концепций и развитии аналитического мышления, что делает процесс изучения математического анализа более эффективным и увлекательным. Наша цель - показать, что Maple - это не просто инструмент для автоматизации вычислений, а мощный помощник в исследовании и понимании математических идей, расширяющий возможности для более глубокого и интуитивного освоения материала.

Описание библиотеки

1. Библиотека LimitTutor: Библиотека LimitTutor в Maple представляет собой мощный интерактивный инструмент, разработанный для облегчения процесса изучения и понимания концепции пределов. Она предлагает пошаговое решение задач, что позволяет студентам и исследователям отслеживать каждый этап вычислений и углублять свои знания о различных методах нахождения пределов.

1.1. Функциональность LimitTutor. LimitTutor предоставляет ряд полезных функций:

Пошаговое решение: Основной функцией является предоставление подробного пошагового решения для заданного выражения предела. Каждый шаг решения отображается четко, начиная с исходного выражения и заканчивая конечным результатом. Это позволяет пользователям понять, как именно применяются различные методы вычисления пределов. LimitTutor поддерживает широкий спектр методов вычисления пределов, включая простую подстановку значения переменной в выражение; преобразование выражения для упрощения вычисления предела; устранение иррациональности в числителе или знаменателе; правило Лопиталья (L'Hôpital's Rule) для вычисления пределов неопределенностей; преобразование выражений: использование тригонометрических тождеств, логарифмических свойств и т.д.

Интерактивность: Пользователи могут влиять на процесс решения, выбирая конкретные методы для применения на определенном шаге. Это позволяет экспериментировать с различными подходами к решению задачи.

Объяснения: К каждому шагу решения прилагаются подробные объяснения, которые описывают, почему был выбран тот или иной метод и как он применяется. Это способствует более глубокому пониманию процесса вычисления пределов.

1.2. Использование LimitTutor:

Для начала работы с LimitTutor необходимо сначала загрузить пакет Student[Calculus1] в Maple. Затем, можно использовать LimitTutor для вычисления предела, указав выражение и точку, к которой стремится переменная. При выполнении этой команды откроется интерактивное окно, в котором будет отображено пошаговое решение предела. Пользователи могут перемещаться по шагам, выбирать методы и просматривать объяснения.

2. Библиотека IntTutor: Освоение интегралов шаг за шагом

IntTutor – еще один мощный инструмент, предлагаемый Maple, который призван облегчить процесс изучения и понимания интегрального исчисления. Он предоставляет пользователям интерактивную среду для пошагового решения интегралов, позволяя глубже понять различные методы интегрирования.

2.1. Функциональность IntTutor аналогична LimitTutor, но ориентирована на решение задач по интегрированию:

Пошаговое решение: IntTutor отображает каждый шаг процесса интегрирования, начиная с исходного интеграла и заканчивая окончательным решением. Каждый шаг четко объясняется, что помогает понять логику

применяемых методов. IntTutor поддерживает множество методов интегрирования, включая: Интегрирование по частям (Integrate by parts): Метод решения интегралов, содержащих произведение функций. Замена переменной (u-substitution): Метод упрощения интеграла путем замены переменной. Разложение на простейшие дроби (Partial fraction decomposition): Метод для интегрирования рациональных функций. Тригонометрические подстановки (Trigonometric substitution): Метод, используемый для упрощения интегралов, содержащих квадратные корни.

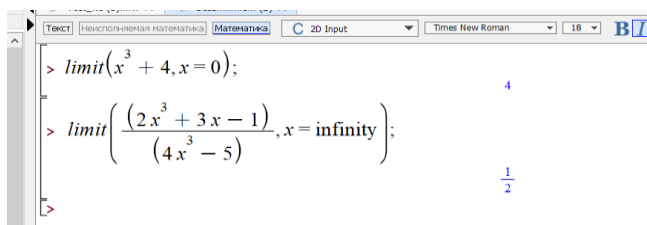
Интерактивность: Пользователи могут выбирать методы интегрирования для применения на каждом шаге, что способствует экспериментированию и лучшему пониманию процесса.

Объяснения: К каждому шагу решения прилагаются подробные объяснения, описывающие, почему был выбран тот или иной метод и как он применяется.

2.2. Использование IntTutor: Для работы с IntTutor также требуется загрузка пакета Student[Calculus1]. Далее, можно использовать IntTutor для решения интеграла, указав интегральное выражение и переменную интегрирования. Эта команда откроет интерактивное окно, в котором будет отображено пошаговое решение.

Примеры использования

1. Мы можем вычислять пределы следующим образом и получать сразу ответ:



Однако, если мы хотим посмотреть на шаги решения, то используем LimitTutor

Calculus 1 - Limit Methods

Документ Редактировать Rule Definition Apply Rule Understood Rules Помощь

Enter a function

Function $-x^3+2$ Variable x at 2 Direction $\downarrow$ Start

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} -x^3 + \lim_{x \rightarrow 2} 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} -x^3 + 2$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2$$

$$= -\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^3 + 2$$

$$= -6$$

☒ Show Hints Get Hint

Constant Identity
 Constant Multiple

Sum Difference
 Product Quotient

Power Change
 l'Hôpital's Rule Divide by zero
 Множитель Переписать

Exponential Natural Logarithm
 <trig> <hyperbolic>
 <arctrig> <archyperbolic>

Отменить Следующее действие Все шаги Закрыть

Calculus 1 - Limit Methods

Документ Редактировать Rule Definition Apply Rule Understood Rules Помощь

Enter a function

Function $(x - \arctan(x))/x^3$ Variable x at 0 Direction $\downarrow$ Start

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{3 \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{3 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 0} 1}$$

$$= \frac{1}{3 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

☒ Show Hints Get Hint

Constant Identity
 Constant Multiple

Sum Difference
 Product Quotient

Power Change
 l'Hôpital's Rule Divide by zero
 Множитель Переписать

Exponential Natural Logarithm
 <trig> <hyperbolic>
 <arctrig> <archyperbolic>

Отменить Следующее действие Все шаги Закрыть

2. Мы можем вычислять интегралы следующим образом и получать сразу ответ:

$$\int (3 - 2x + x^3, x);$$

$$\int \left(\frac{(x - \sqrt{x})}{x}, x = 1..4 \right);$$

$$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x$$

1

Однако, если мы хотим посмотреть на шаги решения, то используем IntTutor:

Calculus 1 - Integration Methods

Документ Редактировать Rule Definition Apply Rule Understood Rules Помощь

Enter a function
Function Variable from to

$$\int e^x \sin(x) dx$$

$$= -e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

$$= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx$$

$$= -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x)$$

Cannot apply the difference rule. No rule is applicable for this problem.

☒ Show Hints

Constant	Identity
Constant Multiple	Sum
Difference	Power
Области	Partial Fractions
Change	Revert
Решить	Переписать
Exponential	Natural Logarithm
<trig>	<hyperbolic>
<arctrig>	<archyperbolic>

Calculus 1 - Integration Methods

Документ Редактировать Rule Definition Apply Rule Understood Rules Помощь

Enter a function
Function Variable from to

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 4\sqrt{e^2} - 2\sqrt{e} - \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 4\sqrt{e^2} - 2\sqrt{e} - 2 \int_1^2 x^{-1/2} dx$$

$$= 4\sqrt{e^2} - 2\sqrt{e} - 2 \int_1^2 2 du$$

$$= 2\sqrt{e}$$

☒ Show Hints

Constant	Identity
Constant Multiple	Sum
Difference	Power
Области	Partial Fractions
Change	Revert
Решить	Переписать
Exponential	Natural Logarithm
<trig>	<hyperbolic>
<arctrig>	<archyperbolic>

Литература

1. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. БНВ - Санкт -Петербург Мастер. Руководство для профессионалов, 2003, - 528
<https://studizba.com/files/kompyuternyy-praktikum-po-specialnosti/book/237424-matrosov-a.v.-maple-6.-reshenie-zadach.html>
2. Дьяконов В. Maple 7. Учебный курс. - Питер, 2002. - 672 с.
<https://studizba.com/files/kompyuternyy-praktikum-po-specialnosti/book/237415-djkonov-v.-maple-7-uchebnyj-kurs.djvu.html>

3. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. - М.: СОЛОН-Пресс, 2003. - 176 с. <https://studizba.com/files/kompyuternyy-praktikum-po-specialnosti/book/237431-sdvizhkov-o.l.-matematika-na-kompjutere.html>

Анализ эффективности параллельных алгоритмов сортировки данных

Волынский Артем Денисович¹, Дмитрий Викторович Тарасов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹suving_plus@mail.ru, ²tarasovdv@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются возможности использования технологии OpenMP при реализации параллельных алгоритмов сортировки данных. Проводится анализ эффективности алгоритмов путем определения таких оценок как: время выполнения, ускорение, эффективность и накладные расходы.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, эффективность, ускорение, сортировка, OpenMP

Analysis of the effectiveness of parallel data sorting algorithms

Artyom D. Volynsky¹, Dmitriy V. Tarasov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹suving_plus@mail.ru, ²tarasovdv@mail.ru

Abstract. The possibilities of using OpenMP technology in the implementation of parallel data sorting algorithms are considered. The efficiency of algorithms is analyzed by determining such estimates as: execution time, acceleration, efficiency, and overhead.

Keywords: parallel algorithm, efficiency, acceleration, sorting, OpenMP

Введение

Целью данной работы является изучение и анализ эффективности параллельных алгоритмов сортировки данных [1]. В качестве основной технологии параллельных вычислений в работе выбрана OpenMP для языка программирования C++, которая позволяет проводить параллельные вычисления на многоядерных вычислительных устройствах [2]. В этом случае стандартный программный код достаточно дополнить директивами для параллельных вычислений, причем действовать нужно так чтобы достаточно эффективно нагрузить вычислениями все ядра. В качестве основных методов сортировок данных были выбраны: чет-нечетная сортировка (временная сложность в среднем $O(n^2)$), сортировка слиянием (временная сложность в среднем $O(n \log n)$), сортировка Шелла (временная сложность в среднем $O(n \log^2 n)$), Timsort (временная сложность в среднем $O(n \log n)$).

1. Метод чет-нечетной сортировки данных

Алгоритм *пузырьковой сортировки* в прямом виде достаточно сложен для распараллеливания, так как сравнение пар значений упорядочиваемого набора данных происходит строго последовательно. В связи с этим для

параллельного применения используется не сам этот алгоритм, а его модификация, известная в литературе как *метод чет-нечетной перестановки* [1, 3]. Суть модификации состоит в том, что в алгоритм *сортировки* вводятся два разных правила выполнения итераций метода: в зависимости от четности или нечетности номера итерации *сортировки* для обработки выбираются элементы с четными или нечетными индексами соответственно, сравнение выделяемых значений всегда осуществляется с их правыми соседними элементами. После *n*-кратного повторения итераций *сортировки* исходный набор данных оказывается упорядоченным.

Параллельное обобщение алгоритма сортировки может быть надлежащим образом адаптировано при выполнении директив `parallel for`. В данном случае каждый поток (ядро) получит часть массива для выполнения чет-нечетной перестановки. Например, для случая, когда количество процессоров (*p*) меньше числа упорядочиваемых значений (*n*), каждое ядро получит часть сортируемого набора данных.

Схема распараллеливания:

- разбить набор данных из *n* значений на потоки, так чтобы на каждый задействованный поток приходилось по два набора. В результате каждое ядро получит часть (два блока размера $n/(2p)$) сортируемого набора данных;
- блоки обычно упорядочиваются в самом начале *сортировки* на **каждом процессоре в отдельности при помощи какого-либо быстрого алгоритма** (начальная стадия параллельной *сортировки*);
- далее будем выполнять процедуру упорядочивания для пары блоков с привлечением директивы `#parallel for`.

Выполнение программной реализации осуществлялось на машине с процессором 12th Gen Intel® Core™ i5-12450H с 16 ГБ оперативной памяти, а результаты работы представлены на рис. 1. Нами определялось ускорение, получаемое при использовании параллельного алгоритма для *p* процессоров, по сравнению с последовательным вариантом выполнения вычислений [4]:

$$S_p(n) = \frac{T_1}{T_p},$$

n – параметр вычислительной сложности решаемой задачи (например, количество входных данных задачи); T_1 – время выполнения последовательного алгоритма (на одном ядре).

Другими характеристиками при оценке параллелизма были:

– накладные расходы на организацию взаимодействия процессоров и синхронизацию параллельных вычислений:

$$T_0 = pT_p - T_1;$$

– эффективность, определяющая среднюю долю времени выполнения параллельного алгоритма, в течение которого процессоры реально используются для решения задачи:

$$E_p = \frac{S_p}{p} = \frac{T_1}{T_1 + T_0}.$$



Рис. 1. Зависимость времени выполнения и ускорения от размера массива при выполнении параллельного алгоритма пузырьковой сортировки

Для массива из 100 тыс. элементов эффективность параллелизма чет-нечетной сортировки для двух и четырех потоков равна примерно 1, а для 8 и 12 потоков – примерно 0,5; накладные расходы также оказались оптимальными для двух и четырех потоков – 0,58 и 0,65, а для 8 и 12 потоков эти величины равны 1,35 и 2,52 соответственно.

2. Сортировка слиянием

Алгоритм сортировки слиянием делит массив на две половины, рекурсивно сортирует каждую из них и затем объединяет (сливает) отсортированные половины в один отсортированный массив. Параллельная версия использует многопоточность для ускорения процесса сортировки.

Алгоритм слияние (merge) двух отсортированных подмассивов в один отсортированный массив:

1. Определяются размеры двух подмассивов: n_1 и n_2 .
2. Создаются временные векторы L (левая половина) и R (правая половина) для хранения элементов подмассивов.
3. Заполняются векторы L и R элементами из исходного массива arr .
4. Сравниваются элементы из обоих векторов и поочередно добавляются в исходный массив arr , пока не будут обработаны все элементы.
5. Если остались элементы в одном из векторов, они добавляются в массив arr .

Параллельный алгоритм:

1. Проверяется, что левый индекс меньше правого (базовый случай рекурсии).
2. Вычисляется средний индекс mid .

3. Параллельно запускаются две секции: первая секция рекурсивно сортирует левую половину массива; вторая секция – правую.

4. После завершения обеих секций вызывается функция merge для объединения отсортированных половин.

Результат работы параллельной сортировки слиянием с использованием OpenMP представлен на рис. 2. Для массива из 100 тыс. элементов эффективность параллелизма для двух и четырех потоков равна примерно 0,4, а для 8 потоков – 0,22, для 12 потоков – 0,14; накладные расходы также оказались оптимальными для двух и четырех потоков (порядка 0,5).

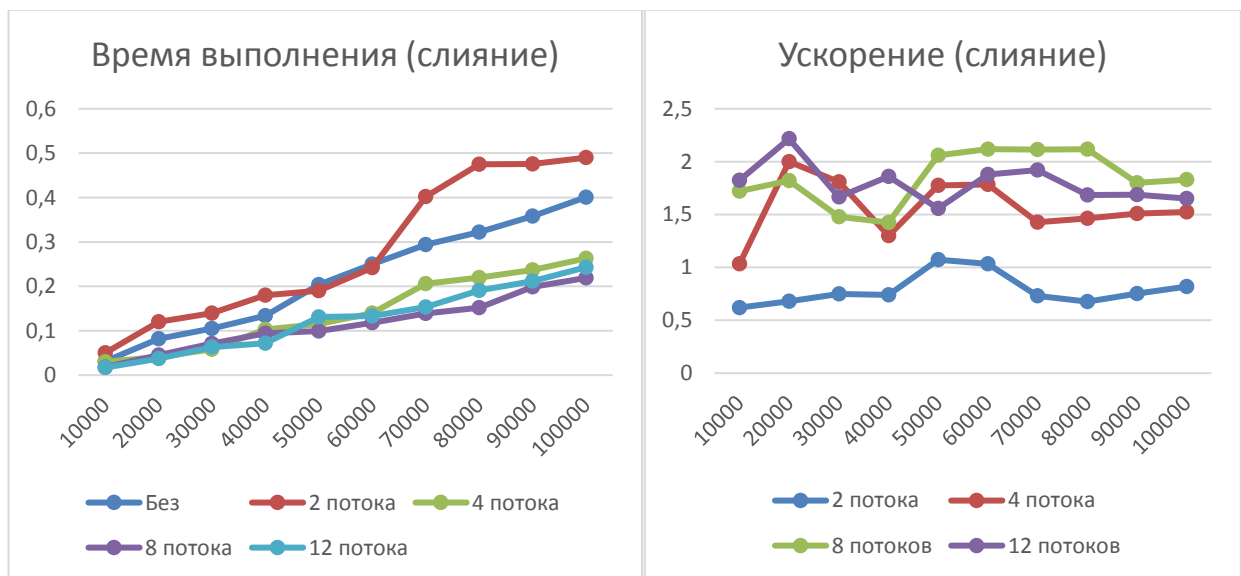


Рис. 2. Зависимость времени выполнения и ускорения от размера массива при выполнении параллельного алгоритма сортировки слиянием

3. Сортировка Шелла

Алгоритм сортировки Шелла является улучшенной версией сортировки вставками. Сортировка Шелла работает по принципу сравнения и перемещения элементов, но вместо того, чтобы сравнивать соседние элементы, она использует шаги, что позволяет более эффективно устранять «плохие» порядки в массиве [3].

Параллельный алгоритм:

1. Определяется размер массива n . Начальное значение шага gap , с которым сравниваются элементы, устанавливается равным половине размера массива ($n/2$).

2. Внешний цикл управляет значением шага gap . Он начинается с $n/2$ и последовательно уменьшает его до 1, что позволяет эффективно сортировать элементы на разных расстояниях.

3. Директива `#pragma omp parallel for` используется для распараллеливания внутреннего цикла, что позволяет одновременно обрабатывать несколько подмассивов. Внутренний цикл проходит по

элементам массива начиная с индекса gap и выполняет сортировку вставками для каждого подмассива, разделенного шагом gap .

4. Для каждого элемента i -го элемента массива, который сохраняется во временной переменной $temp$, происходит сравнение с элементами на расстоянии шага gap . Если текущий элемент больше, чем элемент на расстоянии шага gap , то элементы сдвигаются вправо, освобождая место для вставки.

5. Когда находится правильная позиция для $temp$, он вставляется в массив.

Результат работы параллельной сортировки Шелла с использованием OpenMP представлен на рис. 3. Для массива из 100 тыс. элементов эффективность параллелизма для двух потоков равна 0,74, для 4 потоков – 0,55; для 8 потоков – 0,36, для 12 потоков – 0,24; накладные расходы также оказались оптимальными для двух потоков и составили 0,036, а для 4 потоков равны 0,084, для 8 потоков – 0,184, для 12 потоков – 0,316.

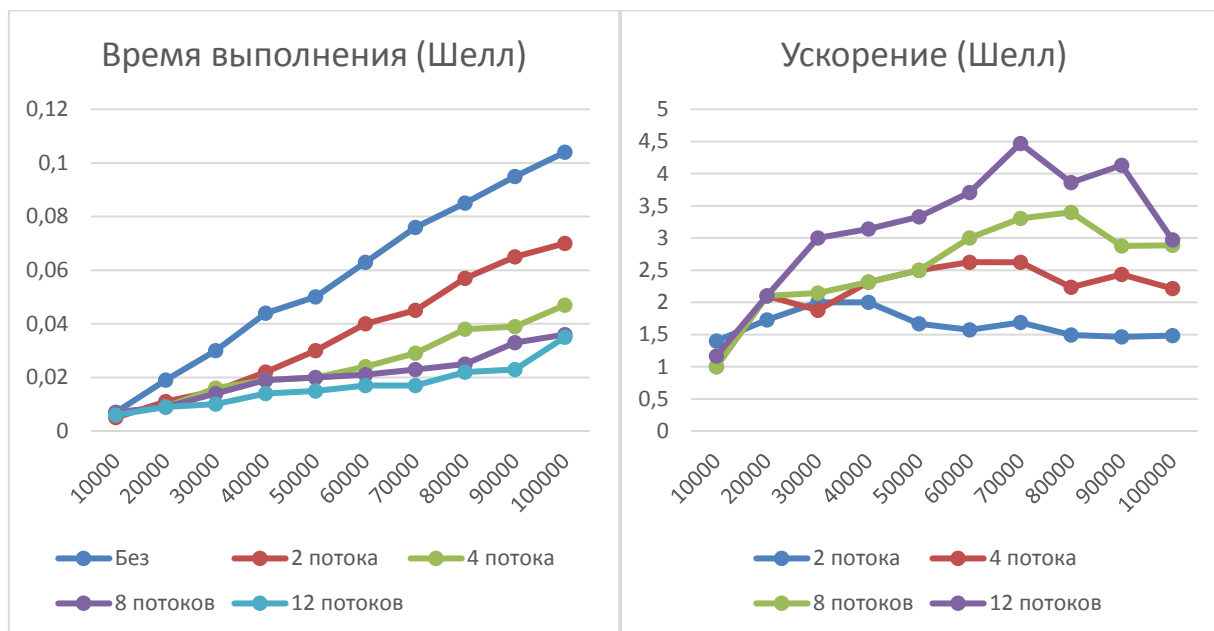


Рис. 3. Зависимость времени выполнения и ускорения от размера массива при выполнении параллельного алгоритма сортировки Шелла

4. Timsort

Timsort – это не полностью самостоятельный алгоритм, а гибрид, эффективная комбинация включающая следующие шаги:

- 1) разбить массив на подмассивы;
- 2) сортировать каждый подмассив вставками;
- 3) объединить отсортированные подмассивы в единый массив с помощью модифицированной сортировки слиянием.

Он эффективен на реальных данных, поскольку он использует уже отсортированные последовательности, что позволяет сократить время выполнения.

Параллельный алгоритм:

1. Определяется размер массива n .
2. Используется директива `#pragma omp parallel for` для распараллеливания сортировки небольших подмассивов. Внешний цикл проходит по массиву с шагом равным размеру «бега» (run), и каждый подмассив сортируется с помощью функции сортировки вставками.

3. Внешний цикл управляет размером «бега», начиная с заданного значения и удваивая его на каждой итерации. Внутренний цикл выполняет слияние отсортированных подмассивов, используя функцию алгоритма сортировки слиянием.

Результат работы параллельной сортировки Timsort с использованием OpenMP представлен на рис. 4. Для массива из 100 тыс. элементов эффективность параллелизма для двух потоков равна 0,52, для 4 потоков – 0,3; для 8 потоков – 0,22, для 12 потоков – 0,16; накладные расходы также оказались оптимальными для двух потоков и составили 0,053, а для 4 потоков равны 0,135, для 8 потоков – 0,207, для 12 потоков – 0,435.

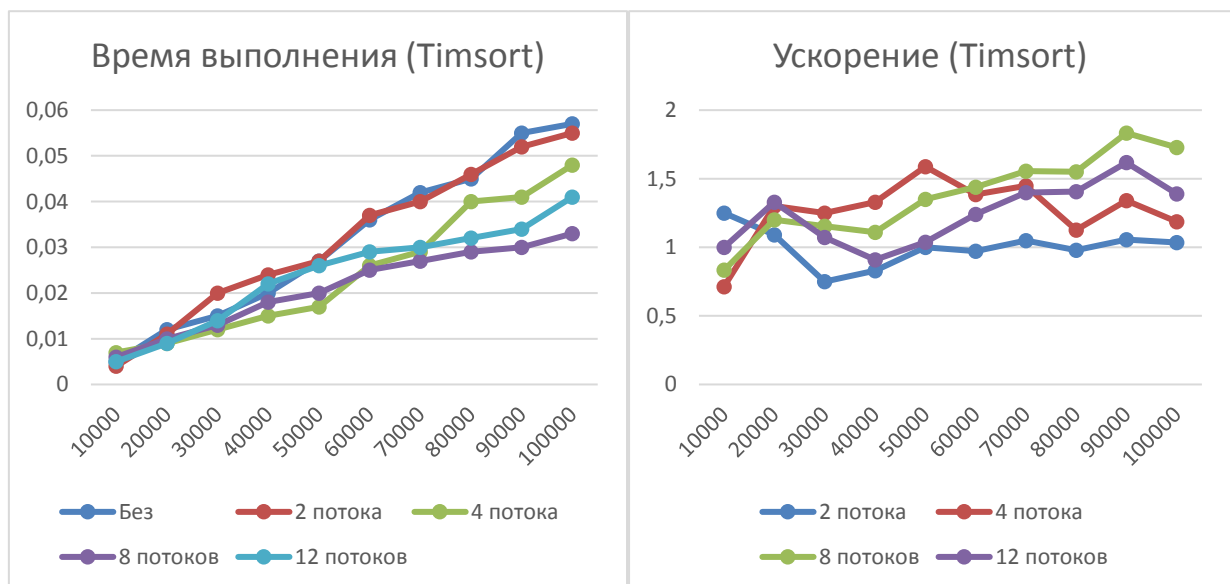


Рис. 4. Зависимость времени выполнения и ускорения от размера массива при выполнении параллельного алгоритма Timsort

Заключение

В ходе исследования была проведена оценка эффективности параллельных алгоритмов сортировки данных. Мы рассмотрели основные концепции параллельных вычислений, включая их преимущества, такие как повышение производительности и сокращение времени обработки данных, а также ограничения, связанные с масштабируемостью и сложностью разработки. Особое внимание было уделено различным подходам к реализации параллельных алгоритмов сортировки, что позволило выявить их преимущества и недостатки.

Список литературы

1. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений. М. : Интернет-Университет, БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007. 424 с.
2. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP : учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 2009. 77 с.
3. Гергель В. П., Лабутина А.А. ПараЛаб. Программная система для изучения и исследования методов параллельных вычислений : учеб. пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2004. 125 с.
4. Ромм Я. Е., Чабанюк Д. А. Построение двоичного дерева на основе параллельной сортировки // Фундаментальные исследования. 2015. № 8. С. 509–510.

Визуализация алгебраических объектов в образовательном процессе

Иванов Данила Сергеевич, Романова Елена Геннадьевна

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

dan.iva07@mail.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается использование компьютерных программ для визуализации и демонстрации алгебраических объектов в образовательном процессе. Предлагается пример линейного оператора, описанного с помощью его матрицы, а также методы визуализации его действия на фигуры в пространстве. Демонстрация позволяет показать не только конечный результат, но и процесс разработки, отладки и оптимизации программ. Это помогает студентам понять, какие навыки и знания необходимы для успешной работы в IT-сфере. В данной статье предоставляются наглядные преимущества применения компьютерных программ и их интеграции в образовательный процесс.

Ключевые слова: Алгебраические структуры, самосопряжённые операторы, собственные значения, собственные векторы.

©Иванов Д.С. 2025

Using computer programs to demonstrate self-adjoint operators

Danila S. Ivanov, Elena G. Romanova

Penza State University, Penza, Russia

dan.iva07@mail.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Annotation

This article discusses the use of computer programs for visualization and demonstration of algebraic objects in the educational process. A specific example of a linear operator described by its matrix is given, as well as methods for visualizing its action on figures in space. Demonstration allows showing not only the final result, but also the process of developing, debugging and optimizing programs. This helps students understand what skills and knowledge are necessary for successful work in the IT field. Demonstration of a computer program in a lecture is a powerful tool that enriches the educational process, makes it more interactive and effective. This article provides visual advantages of using computer programs and their integration into the educational process.

Key words: Algebraic structures, self-adjoint operators, eigenvalues, eigenvectors.

ВВЕДЕНИЕ

Современные образовательные технологии открывают новые горизонты для преподавания математических дисциплин. Дисциплина Линейная алгебра является основой для понимания многих математических и физических концепций и здесь одним из эффективных инструментов является использование компьютерных программ, позволяющих анализировать алгебраические объекты. Компьютерные программы дают возможность визуализировать абстрактные алгебраические концепции, такие как группы, операторы, кольца и поля. Их использование уменьшает время, необходимое для выполнения сложных вычислений и построения графиков, что позволяет сосредоточиться на теоретических аспектах. Визуализация помогает студентам лучше понять структуру и свойства этих объектов, а также это значительно повышает у них уровень понимания и углубляет их знания. Одной из ключевых тем дисциплины Линейная алгебра является изучение самосопряженных операторов, которые играют важную роль в различных областях науки и техники. Однако понимание этих операторов может быть затруднено из-за абстрактности их концепции. Демонстрация работы компьютерной программы на лекции и визуализация алгебраических образов, связанных с самосопряженными операторами, облегчает понимание абстрактных идей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Определение оператора

Самосопряжённые операторы играют ключевую роль в функциональном анализе и квантовой механике. Они совпадают со своими сопряжёнными и это значит, что для самосопряженного оператора A выполняется условие

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

для всех векторов x и y из соответствующего гильбертового пространства [1]. Для изучения самосопряжённых операторов используются такие инструменты, как спектральная теория, которая позволяет описывать оператор в терминах его спектра и собственных функций. Очевидно, что самосопряженные операторы являются фундаментальными инструментами в математике и физике, обеспечивая связь между абстрактными математическими образами и реальными физическими явлениями.

1.2. Преимущества демонстрации действия операторов на лекции

Демонстрация работы компьютерной программы на лекции — это важный элемент учебного процесса, который способствует более глубокому пониманию материала и активному вовлечению по нескольким причинам:

Наглядность и доступность. Визуальное представление работы программы помогает лучше усвоить теоретические концепции. Видя, как код преобразуется в результат, лучше понимаются абстрактные идеи.

Практическое применение знаний. Демонстрация позволяет увидеть, как теоретические знания применяются в реальных задачах. Это помогает связать теорию с практикой и понять, как различные алгоритмы и методы работают в действительности.

Устранение неясностей. Во время демонстрации преподаватель может сразу же ответить на вопросы студентов и разъяснить сложные моменты. Это создает возможность для интерактивного обучения и активного обсуждения.

Мотивация и интерес. Наглядные примеры работы программы могут вдохновить студентов и повысить их интерес к предмету. Увидев, как программа решает конкретные задачи, студенты могут ощутить мотивацию к изучению и разработке собственных проектов.

Развитие навыков. Демонстрация позволяет показать не только конечный результат, но и процесс разработки, отладки и оптимизации программ. Это помогает студентам понять, какие навыки и знания необходимы для успешной работы в IT-сфере.

Обратная связь. Во время демонстрации преподаватель может получить обратную связь от студентов, что позволяет адаптировать содержание лекции и подход к обучению в реальном времени.

1.3. Использование компьютерных программ и выбор программного обеспечения

Для демонстрации работы самосопряженных операторов можно использовать различные программные пакеты, такие как:

MATLAB. Предоставляет мощные инструменты для работы с матрицами и визуализациями [2].

GeoGebra. Интуитивно понятный инструмент для визуализации математических концепций.

Python с библиотеками NumPy и Matplotlib [3]. Позволяет создавать интерактивные графики и производить вычисления с матрицами.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В качестве языка программирования для демонстрации работы самосопряжённых операторов был выбран язык Python. Основная причина использования Python заключается в его удобстве и мощных библиотеках для научных вычислений. Он имеет интуитивно понятный синтаксис, что

облегчает работу с математическими концепциями, также он поддерживает библиотеки NumPy и Matplotlib.

NumPy обеспечивает высокую производительность, удобные многомерные массивы, встроенные функции линейной алгебры и совместимость с Matplotlib для работы с самосопряжёнными операторами.

Matplotlib позволяет удобно визуализировать результаты, создавать графики, иллюстрировать свойства самосопряжённых операторов и наглядно представлять спектры собственных значений.

В качестве эксперимента было выбрано написание кода с библиотеками NumPy и Matplotlib, использующего самосопряжённые операторы для преобразования (сжатия и/или растяжения) фигуры. В качестве входных данных он должен получить матрицу координат вершин; матрицу, соединяющую вершины и матрицу преобразования. Матрица преобразования воздействует на матрицу координат, изменяя фигуру, но оставляет неизменной матрицу соединения вершин, что и приводит к преобразованию фигуры. Запустив приведенный код, получаем графическое представление исходных фигур (рис.1) и их образов после действия оператора (рис.2). Это наглядно демонстрирует, как самосопряженный оператор изменяет (растягивает или сжимает по осям) фигуры в пространстве.

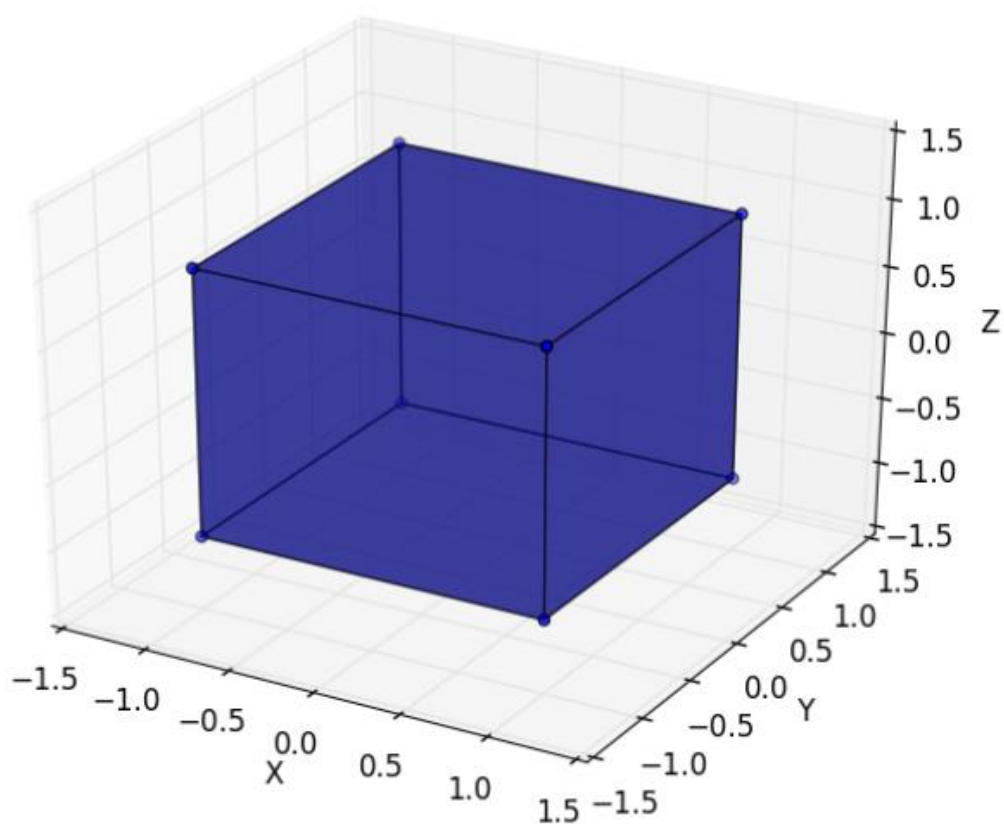


Рис.1

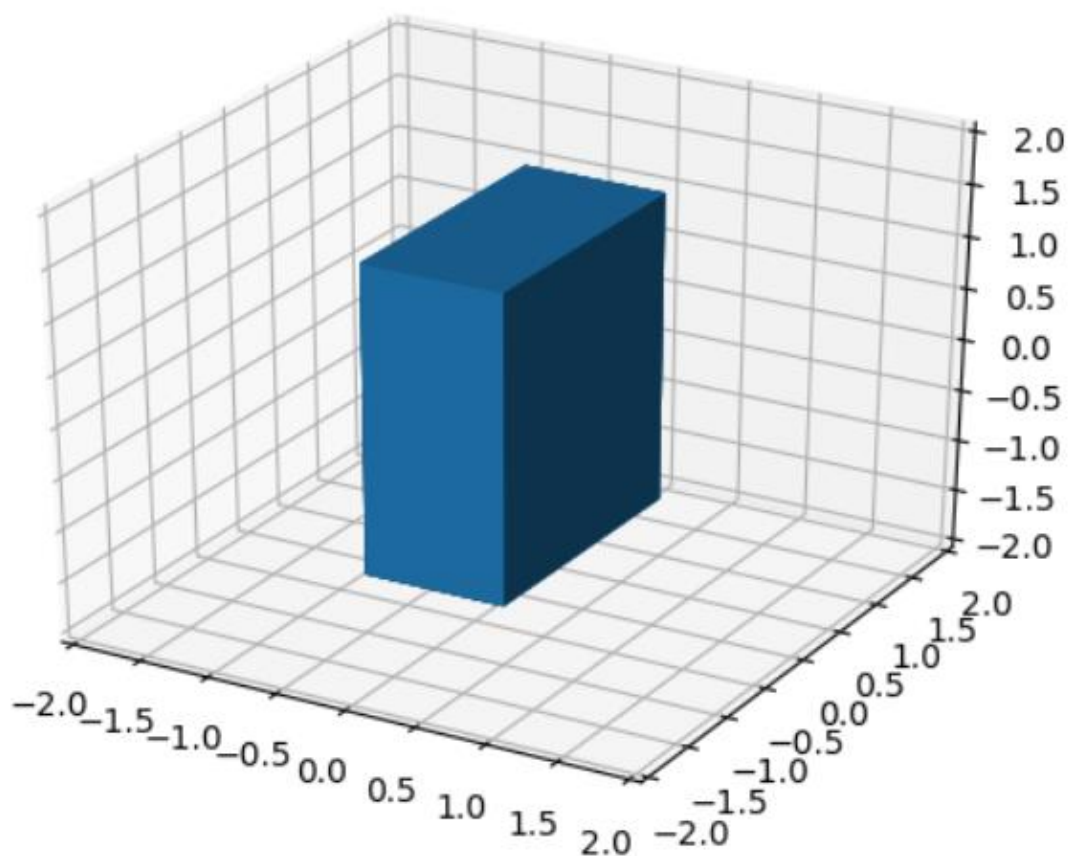


Рис.2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование компьютерных программ для визуализации самосопряженных операторов на лекциях по Линейной алгебре значительно улучшает понимание теоретического материала. Приведенный пример демонстрирует, как можно использовать простую матрицу для иллюстрации преобразований оператора. В дальнейшем возможно расширение данной работы на более сложные примеры и применение различных программных инструментов для углубленного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М., Данилин А.Р. Спектральное разложение самосопряжённых операторов. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2018. – 132 с.
2. Анисимова Г.Д., Евсеева С.И., Мышлявцева М.Д. Использование Matlab при изучении математики. Часть 1. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2018. – 207 с.
3. Буйначев С.К., Боклаг Н.Ю. Основы программирования на Python. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014. – 92с.

ТРИСЕКЦИЯ И ПЯТИ-СЕКЦИЯ УГЛА ПРЯМЫМ И ТОЧНЫМ ПОСТРОЕНИЕМ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ БЕЗ ДЕЛЕНИЙ

Михайлов Сергей Леонидович

г. Заречный Пензенской области

smthrsol@internet.ru

Аннотация. Построение равнобедренного треугольника на луче произвольного угла и последующая его корректировка позволяет решить задачу трисекции и пяти-секции произвольного угла.

Ключевые слова: трисекция произвольного угла, равнобедренный треугольник, внешний угол.

THE EXACT SOLUTION OF THE THREE-SECTION AND FIVE-SECTION TASK OF ARBITRARY ANGLE BY CIRCLE AND RULER

Sergey L. Mikhailov

Zarechny, Penza region, Russia

smthrsol@internet.ru

Abstract. The use of an isoscele triangle, which be on to the beam of the angle and them triangle be correct so, that solve this task now.

Keywords: three-section task of arbitrary angle, isoscale triangle and correct it then.

Развитие идеи, изложенной в [1] привело автора к успешному алгоритму решения неразрешимой почти 3000 лет задачи трисекции угла и пяти-секции. Частные построения – [2].

Год назад было моё сообщение о разрешимости трисекции угла, не вызвавшее активного отклика сообщества [1]. Используя Рис.1. из [1] – здесь также Рис.1., отметим наглядную простоту предлагаемого. В частности, если угол $\angle BDC = 90^\circ$, то $\theta = 22.5^\circ$, а если треугольник $\triangle DBC$ – равнобедренный, то $4\theta = 90^\circ - \theta$, $\theta = 18^\circ$, что означает в итоге $\beta = 67.5^\circ$, $\beta = 54^\circ$ соответственно. Таким образом, количество исключений из «доказательства Ванцеля о неразрешимости трисекции» возросло уже до трёх явно, а взяв половины или

четверти этих углов – минимум девять, то есть множество!

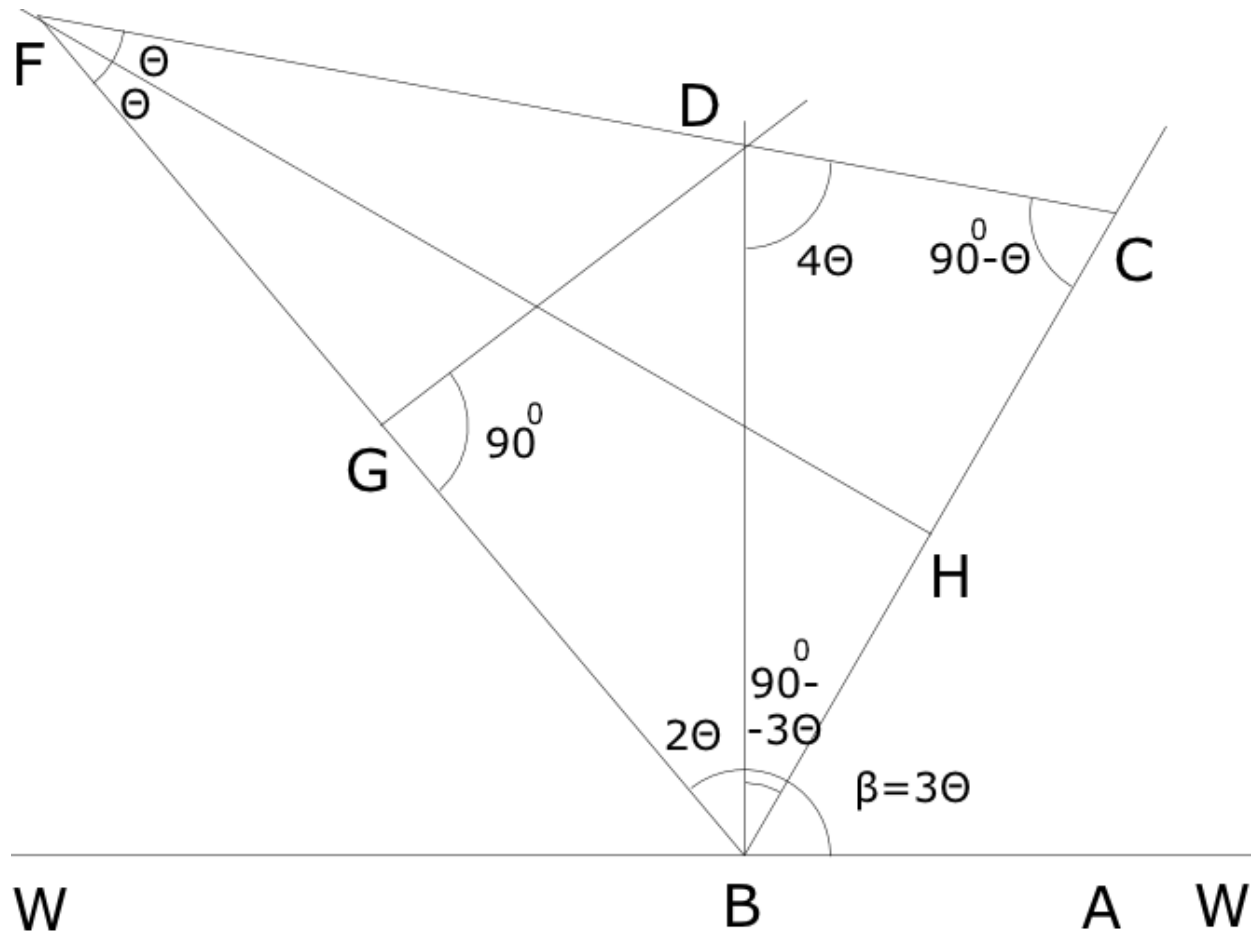
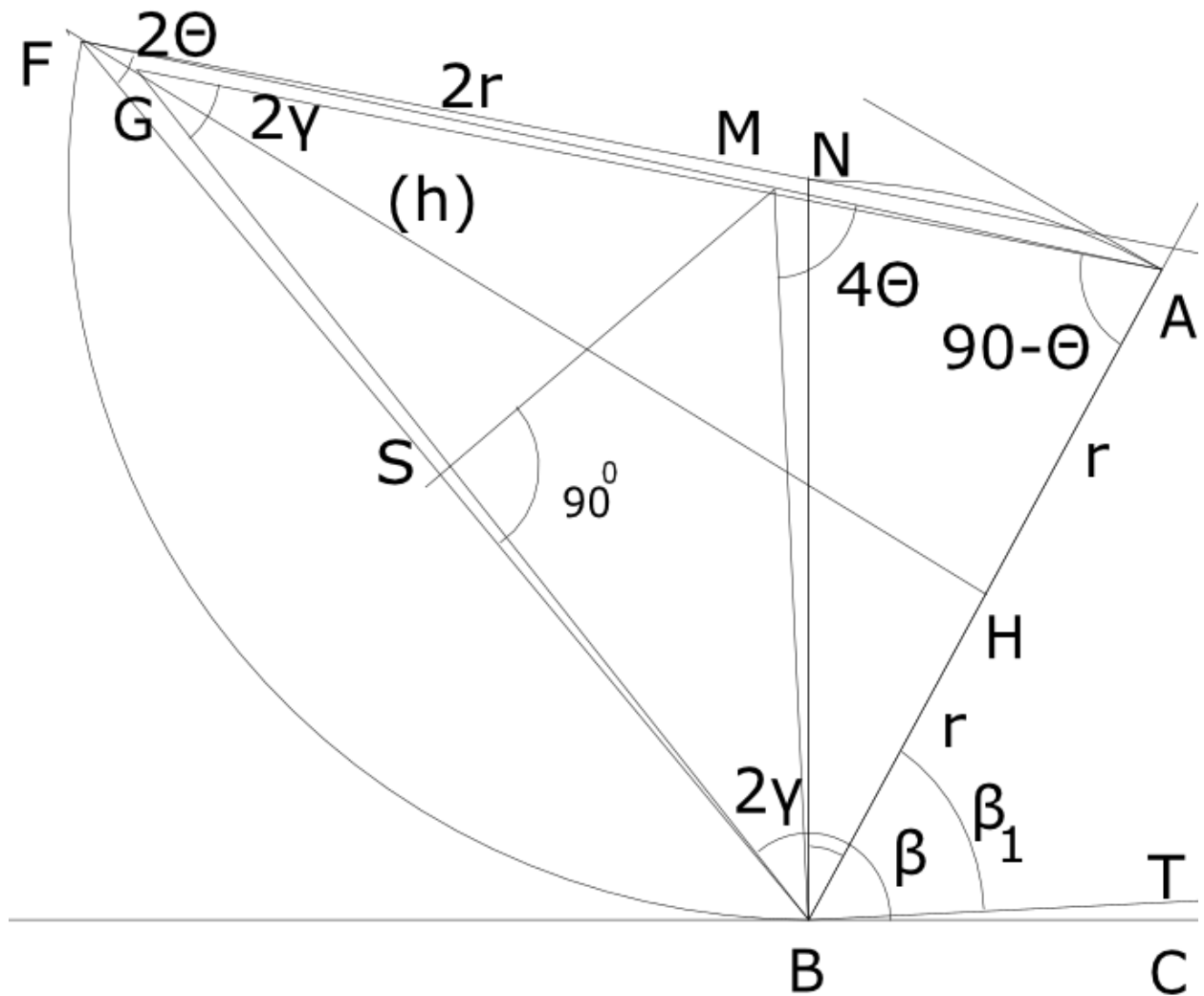


Рис.1.

Точное обоснование разрешимости трисекции угла прямым построением [1].

Используем это построение для решения трисекции угла – проводим прямую (h) из точки Н перпендикулярно лучу АВ – Рис.2. Затем на перпендикуляре BN откладываем отрезок $2r$, фиксируя этим точку N и из N радиусом $2r$ делаем отметку на прямой (h) получая точку F, соединяем её с точками A и B завершая построение равнобедренного треугольника $\triangle AFB$ с вершинным углом $\angle AFB = 2\theta$. Делим боковую сторону FB пополам – точка S и проводим перпендикуляр из S до противоположной стороны – точка M и получаем второй равнобедренный треугольник $\triangle FMB$ с углами при его основании FB в 2θ : $\angle MFB = 2\theta = \angle MBF$ и внешним углом $\angle AMB = 4\theta$ соответственно. Перпендикуляр к BM из точки B – луч BT создаёт угол $\angle ABT = \beta_1$ и угол $\angle TBC = \beta - \beta_1$, который равен углу $\angle MBN$ как углы со взаимно-перпендикулярными сторонами. Изложенное по сути означает, что для успешного решения трисекции β - угла нам нужно скорректировать треугольник $\triangle FMB$ так, чтобы угол $\angle MBN$ стал равен нулю, т.е.: $\angle AMB + \angle MBN = 4\gamma$, $\gamma = \theta + \angle MBN/4$ тогда. После корректировки

Пересечение её со вторым лучом и создаёт новую длину боковых сторон – Рис.2,3 для треугольника решения β - трисекции – ΔAGB $\beta=3\gamma$, и пяти-секции также.



Решение трисекции угла прямым построением циркулем и линейкой без делений: $\angle ABC = \beta = 3\gamma = 60^\circ$. Выполнено в графической системе Inkscape, б/п версия. Построение выполнялось в полу-ручном режиме, рисунок демонстрационный.

Для пяти-секции из точки N делаем отметку отрезком $4r$ вместо $2r$, далее всё также. Затем, получив аналог треугольника $\triangle FMB$, строим угол 4θ при вершине B, что создаёт ещё треугольник $\triangle PBF$ с углами при FB в 2θ и 4θ и внешним углом $\angle APB = 6\theta$ тогда. Этим и решается пяти-секция β - угла в итоге: $\beta = 5\gamma$.

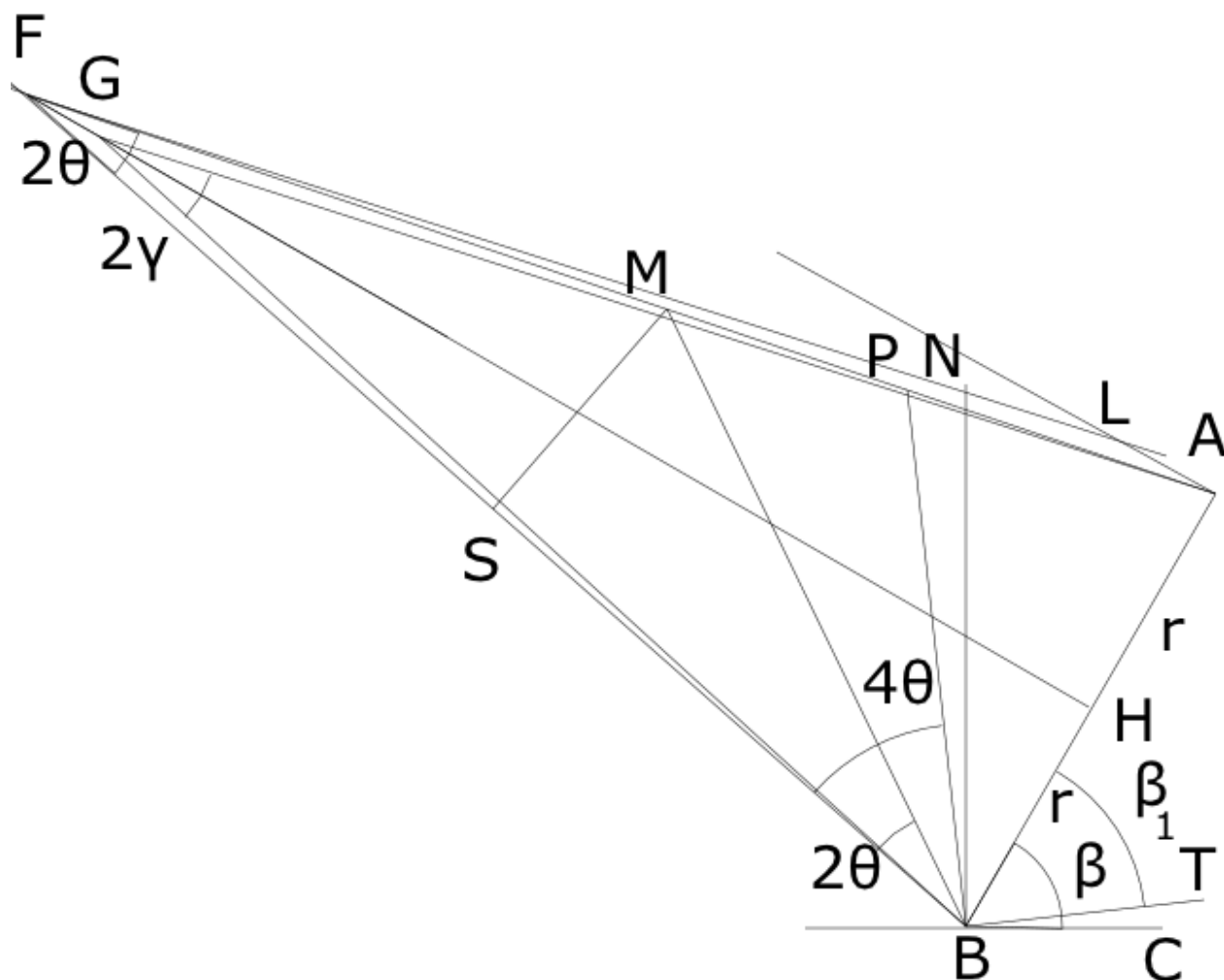


Рис.3.

Пяти-секция угла $\angle ABC = \beta = 60^\circ$ прямым построением циркулем и линейкой без делений, $\gamma = \beta/5$. Выполнено в графической системе Inkscape, б/пл версия.

Построение выполнялось в полу-ручном режиме, рисунок демонстрационный.

Тестирование проводилось автором вручную циркулем и линейкой без делений на ней на большой группе углов и показало отличные результаты – абсолютная погрешность γ - угла ($\gamma = \beta/3$) не превосходит 0.1° и связана с неточностями работы при размерах чертежей примерно $1/4$ от формата А4. Аналогично и для пяти-секции. Для семи-секции видимо надо сдвигать точку F посредством отрезка bg и далее аналогично. Открыт путь решения нечётного деления угла прямым построением, очевидно!

Практически, наиболее удобным для построений оказывается интервал $48^\circ - 84^\circ$ так как меньшие углы создают неудобно большие отрезки и сильно вытягивая сам чертёж. Это осложняет точное определение точки пересечения двух прямых, идущих под малым углом друг к другу также. Углы вне этого диапазона для удобства работы можно кратно уменьшать или увеличивать с обратным преобразованием после трисекции. По мнению автора, выше

предлагаемый метод столь очевиден, что уже не нуждается в каких-либо ещё доказательствах как таковых. Это построение требует аккуратности и потому необходимы всегда максимально точное позиционирование инструментов при минимально допустимой толщине линий чертежа не выше «толщины волоса» на чертежах в $\frac{1}{4}$ от формата А4. Любое позиционирование инструмента или визуальное определение точки пересечения линий неминуемо содержит некую субъективную погрешность всегда, что неустранимо в принципе в построениях вручную, но здесь этого заметно практически не было. Алгоритм разработан автором по личной инициативе, без обсуждений, консультаций и т.п. с кем-либо. Авторское право было мною зафиксировано за собою заранее.

Источники информации

1. Математический форум МГУ – www.Mathforum.ru. Высшая математика, «Трисекция угла – разрешимость», автор smthrsol, 23.04.2024 15:47.
2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике, М «Наука», 1974, 416 с.

Ортогональные операторы и их матрицы

Сазыкина Полина Алексеевна, Романова Елена Геннадьевна

ПГУ (Пенза, Россия)

Poliiiiiiiiishaaa@yandex.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются ортогональные операторы и их матрицы, а также их применение в компьютерной графике. Предлагается визуализация ортогональных преобразований с использованием программного обеспечения. Рассмотрена методика демонстрации вращения объектов в 2D и 3D пространствах, что способствует лучшему пониманию теоретических основ линейной алгебры. Статья включает примеры кода для создания интерактивных графиков, иллюстрирующих свойства ортогональных операторов.

Ключевые слова: ортогональные операторы, матрицы поворота, Python, NumPy, Matplotlib, вращение векторов, ортогональные преобразования.

©Сазыкина П.А. 2025

Orthogonal operators and their matrices

Sazykina Polina Alekseevna, Romanova Elena Gennadevna

Penza State University

Poliiiiiiiiishaaa@yandex.ru, romanova.elenar2016@yandex.ru

Annotation

This article explores orthogonal operators and their matrices, along with their applications in various fields such as computer graphics, quantum mechanics, signal processing, and machine learning. Special emphasis is placed on visualizing orthogonal transformations using software tools like Python with NumPy and Matplotlib. A methodology is proposed for demonstrating vector rotations in 2D and 3D spaces, enhancing students' understanding of linear algebra concepts. The article includes code examples for creating interactive plots that illustrate the properties of orthogonal operators.

Keywords: orthogonal operators, rotation matrices, Python, NumPy, Matplotlib, vector rotation, orthogonal transformations.

Введение

Ортогональные операторы играют важную роль в линейной алгебре и её приложениях. Ортогональные операторы сохраняют скалярное произведение, норму векторов и углы между ними, что делает их незаменимыми в задачах, требующих сохранения геометрических свойств.

Ортогональные операторы и их матрицы находят широкое применение в различных областях науки и техники, также в квантовой механике, компьютерной графике, сигнальной обработке, статистике, машинном обучении, системах управления, кодировании и сжатии данных. Эти области демонстрируют универсальность ортогональных операторов и их матриц, которые помогают решать задачи, связанные с преобразованием и анализом данных.

Цель данной работы - рассмотреть теоретические основы ортогональных операторов, их свойства и практическое применение, включая реализацию в современных вычислительных средах.

4. Ортогональные операторы и их свойства

4.1. Определения и основные свойства

Ортогональный оператор - это линейный оператор в евклидовом пространстве, который сохраняет скалярное произведение, т.е. для любых векторов x и y в пространстве выполняется равенство $(Ax, Ay) = (x, y)$ [1]. Иными словами, ортогональное преобразование “поворачивает” исходное векторное пространство, не меняя между ними угол и расстояние.

4.2. Применение ортогональных операторов

Сжатие изображений:

Одно из важнейших применений ортогональных преобразований - это сжатие изображений, видео, аудио и прочих сигналов. Любой сигнал, видео и изображение можно представить, как вектор большой размерности. При помощи ортогональных преобразований поворачивают исходное пространство так, что основная информация сосредотачивается в малом числе коэффициентов, что позволяет значительно сжать изображение.

Анализ главных компонент:

Ортогональный поворот используется и в этой деятельности. Он поворачивает систему координат, чтобы увеличить дисперсию данных,

приходящуюся на первые несколько координат-компонент. Это позволяет ортогональному преобразованию использоваться в анализе главных компонент в многомерной статистике.

Также можно выделить, что ортогональный поворот позволяет существенно уменьшить размерность данных и избежать значительных потерь данных. Благодаря ортогональности преобразований сохраняются важные статистические данные.

Ортогонализация базиса:

Ортогональные преобразование находят своё применение и в линейной алгебре, а именно в ортогонализации базиса - преобразование произвольного базиса в ортонормированный. Используется это в решении линейных уравнений, вычислении матричных норм и определителей.

Таким образом, ортогональные преобразования важный инструмент в разных сферах, благодаря им можно упростить большое количество процессов в абсолютно разных отраслях. Его использование неотъемлемая часть работы с данными.

5. Ортогональный оператор и его матрица в компьютерной графике

2.1 Вращение фигуры в 3-х мерном пространстве

Матрицей поворота является ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении любого вектора на матрицу поворота длина вектора сохраняется.

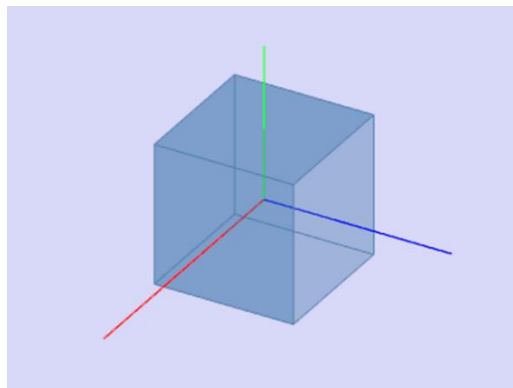


Рисунок 1.

Любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено как композиция поворотов вокруг трех ортогональных осей (например, вокруг осей декартовых координат), т.е. на рис.1. Этой композиции соответствует матрица, равная произведению соответствующих трех матриц поворота [2].

Матрицами вращения вокруг осей декартовой системы координат на угол α в трёхмерном пространстве являются:

$$M_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix} - \text{матрицами вращения вокруг оси X,}$$

$$M_y(a) = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix} - \text{матрицами вращения вокруг Y,}$$

$$M_z(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрицами вращения вокруг Z}$$

2.2 Практическая реализация ортогональных преобразований

Для демонстрации работы ортогональных операторов использовался язык Python и его библиотеки Matplotlib и NumPy. Ниже приводится пример кода, который создает график вращения фигуры с использованием матриц вращения. Запустив приведенный код, можно видеть графическую визуализацию вращения объектов в пространствах. Исходный вектор будет представлен красной стрелкой, а синие стрелки будут показывать его положение после вращения на различные углы. Это наглядно показывает работу ортогональных операторов с сохранением длин векторов и изменением их направлений.

Пример реализации матрицы поворота в 2D на Python:

```
import numpy as np

def rotation_matrix_2d(theta):
    theta = np.radians(theta)
    return np.array([
        [np.cos(theta), -np.sin(theta)],
        [np.sin(theta), np.cos(theta)]
    ])
```

Для 3D-пространства матрицы поворота вокруг осей X, Y и Z имеют аналогичную структуру и сохраняют ортогональность. Использование библиотек Matplotlib и NumPy позволяет наглядно демонстрировать вращение векторов:

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def visualize_rotation():  
    vector = np.array([1, 0])  
    angles = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)  
    plt.figure(figsize=(8, 8))  
    for theta in angles:  
        rotated_vector = rotation_matrix_2d(theta) @ vector  
        plt.quiver(0, 0, rotated_vector[0], rotated_vector[1], color='b', alpha=0.1)  
    plt.quiver(0, 0, vector[0], vector[1], color='r', label='Исходный вектор')  
    plt.grid()  
    plt.show()
```

Заключение

Ортогональные операторы являются мощным инструментом в математике и её приложениях. Их свойства и возможности визуализации делают их особенно полезными в образовательном процессе. Интеграция программных инструментов, таких как Python, позволяет значительно упростить изучение этих концепций и продемонстрировать их практическую значимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.
2. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. - Brooks Cole, 2006.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ МОДУЛЯЦИИ СИГНАЛА ЭКГ

Андрей Александрович Шлыков¹

¹*Министерство обороны РФ, г. Москва, Россия*

¹69shlykov_andrew96@mail.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Данная работа посвящена решению прямой задачи электрокардиографии с использованием модели Титомира. Целью работы является создание программного кода, моделирующего поведение электрокардиограммы человека по второму отведению с использованием модели Титомира по известным заданным характеристикам электрической активности сердца. Материалы и методы. В работе будет применяться интегрированная среда для разработки и отладки программ Microsoft Visual Code, а также язык программирования Python. Результаты. Разработанная система позволит моделировать ЭКГ человека по заданным параметрам модели, что является решением прямой задачи электрокардиографии. Эти результаты могут использоваться в более сложных системах по моделированию электрической активности сердца.

Ключевые слова: электрическая активность сердца, прямая задача электрокардиографии, программирование Python.

SOFTWARE FOR ECG SIGNAL MODULATION

Andrey Aleksandrovich Shlykov¹

¹*Ministry of Defense of the Russian Federation, Moscow, Russia*

¹69shlykov_andrew96@mail.ru

Abstract. Relevance and Objectives. This work is devoted to solving the direct problem of electrocardiography using the Titomir model. The goal of the work is to create software code that simulates the behavior of a human electrocardiogram using the Titomir model based on known specified characteristics of electrical heart activity. Materials and Methods. The work will use the integrated development and debugging environment Microsoft Visual Code, as well as the Python programming language. Results. The developed system will allow modeling a human ECG based on given model parameters, which is a solution to the direct problem of electrocardiography. These results can be used in more complex systems for modeling electrical heart activity.

Keywords: electrical heart activity, direct problem of electrocardiography, Python programming.

Введение

Электрокардиографическое исследование представляет собой высокоинформативный метод оценки электрофизиологических процессов в сердечной мышце. Его принцип заключается в обнаружении и графическом отображении разности потенциалов, возникающих при деполяризации и реполяризации кардиомиоцитов, с использованием многоканальной системы отведений [1].

Использование данного метода связано с решением двух типов задач: прямой и обратной задач электрокардиографии. Прямая задача состоит в определении потенциала по уже известным характеристикам активности сердца. Обратная же задача состоит в определении характеристик модели электрической активности сердца по известному потенциалу [2].

Решение прямой задачи позволяет исследовать формирование ЭКГ и причины ее изменения, тогда как обратная задача сопряжена с диагностикой состояния сердца.

Для решения прямой задачи можно использовать модель Л. И. Титомира. Данная модель используется в различных целях: для генерации искусственных сигналов ЭКГ с заданными характеристиками; для тестирования алгоритмов анализа ЭКГ; для обучения принципам электрокардиографии.

Модель Титомира сыграла важную роль в развитии компьютерной электрокардиографии, позволяя изучать взаимосвязь между процессами в сердце и их отражениями на ЭКГ без необходимости проведения натуральных экспериментов.

К ключевым особенностям модели относят:

1. Представление сердца как дипольного источника. Сердце в модели Титомира рассматривается, как электрический диполь, изменяющий свою величину и ориентацию во времени. Это в свою очередь позволяет имитировать основные компоненты ЭКГ – зубцы Р и Т, комплекс QRS.

2. Параметризация. В модели присутствуют параметры, отвечающие за длительности интервалов и амплитуды зубцов, что дает возможность настройки модели под различные патологии.

3. Учет пространственно-временной динамики. Модель учитывает последовательность активации миокарда и реполяризацию и отражает это на выходе в синтезированной электрокардиограмме [3].

Несмотря на то, что для решения данных задач разработано множество математических моделей и решений, остается актуальной проблема создания новых видений и подходов при решении задач электрокардиографии для обнаружения новых диагностических признаков, а также для общего улучшения возможностей моделей электрической активности сердца [4].

Исходя из этого была поставлена задача по проектированию системы, решающей прямую задачу кардиографии.

Материалы и методы

Решение прямой задачи кардиографии сводится к выбору определенной математической модели и написанию программного кода для реализации этой модели. В качестве математической модели бралась модель Титомира, основная цель которой – имитировать распространение электрических импульсов в сердце и генерировать синтетические ЭКГ-сигналы для исследований и диагностики. В отличие от детальных клеточных моделей, например, модели Ходжкина-Хаксли, модель Титомира является феноменологической – она фокусируется на воспроизведении внешних проявлений электрической активности, т.е. на форме ЭКГ, а не на точном описании ионных токов.

Создание программного кода, осуществляющего вычисление характеристик потенциала при загрузке в систему тестовых характеристик электрической активности сердца, было реализовано в среде разработки Microsoft Visual Code, позволяющей работать со скриптами, написанными на языке программирования Python [5].

Процесс решения делится на несколько этапов.

Во-первых, вводятся исходные данные: длительность сигнала, частота сердечных сокращений, длительности сегментов сигнала и их параметры.

Во-вторых, эти данные передаются функциям для создания сегментов сигнала – Р и Т волн, а также комплекса QRS. Построение сигнала происходит за счет создания различных Гауссовых кривых.

В-третьих, получившиеся сигналы суммируются друг с другом, создавая целостный сигнал ЭКГ.

Пример работы программы представлен на рисунке 1.

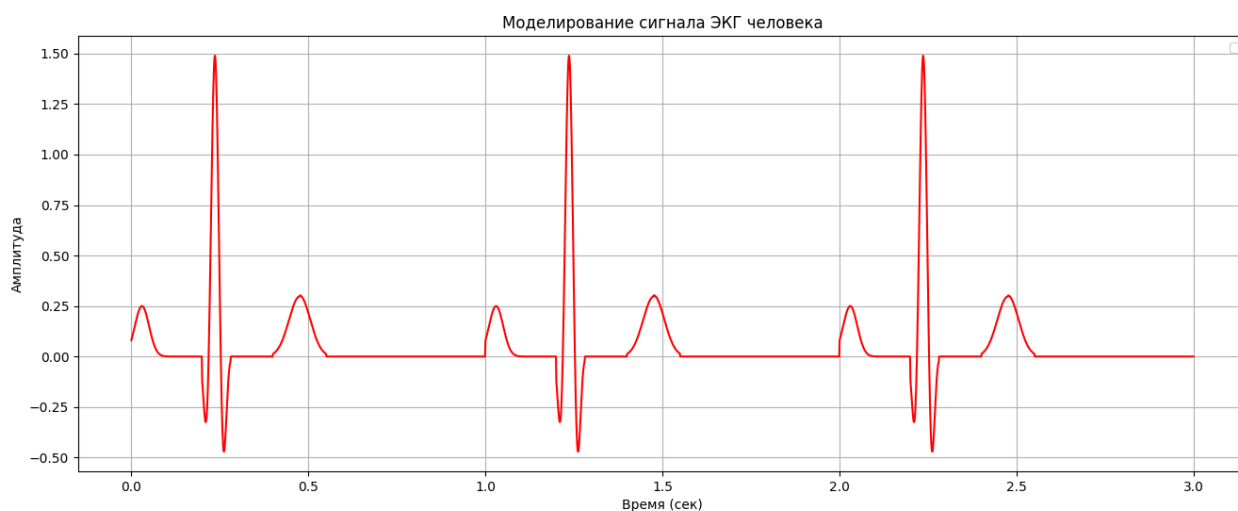


Рисунок 1 – Результат работы программы

На рисунке представлен фрагмент ЭКГ человека длительностью 3 секунды. Исходные данные соответствуют таковым у среднестатистического здорового пациента.

Обсуждение

Исследование посвящено разработке системы, модулирующей сигнал ЭКГ человека.

В ходе работы создан программный код с использованием среды разработки Microsoft Visual Code и языка программирования Python.

Полученные данные могут использоваться в дальнейших исследованиях моделей электрической активности сердца.

Развитие данной работы заключается в модуляции I, II, III, AvR, AvF и AvL отведений и их дальнейшее использование в многодипольной модели, предложенной Л. И. Титомиром.

В перспективе соединение этой системы с уже существующими для персонализированной диагностики состояния сердца.

Список литературы

1. Орлов В.Н. Руководство по электрокардиографии. М.; “Московское медицинское агентство”, 1997., 528 стр.
2. Титомир Л.И. Электрический генератор сердца. М.: «Наука», 1980. 371 с.
3. Титомир Л. И., Кнеппо П. Математическое моделирование биоэлектрического генератора сердца. М. : Наука ; Физматлит, 1999. 447 с.
4. Шакин В.В. Вычислительная электрокардиография / М.: Наука, 1981. – 168 с.
5. Visual Studio Code – Visual Studio Code – Code Editing. Redefined. URL: <https://code.visualstudio.com/> (дата обращения: 19.05.2025).

БЛОКЧЕЙН В ОБРАЗОВАНИИ: ПРОЗРАЧНОСТЬ И ЧЕСТНОСТЬ КАК НОВЫЕ ЦЕННОСТИ

Мойко Ирина Михайловна, Купряшина Лилия Александровна,

Шорикова Дарья Владимировна

Пензенский государственный университет, **Пенза, Россия**
irmojko@yandex.ru, liliya_sl@mail.ru, papshevadash@mail.ru

Аннотация. Технология блокчейн, основанная на принципах прозрачности, неизменности и децентрализации, становится мощным инструментом формирования ценностей у современной молодежи. В статье показано, как применение блокчейна в образовании воспитывает ответственность, критическое мышление и навыки коллаборации, создавая новую цифровую культуру среди студентов. Рассмотрены конкретные примеры внедрения в России и перспективы развития этого подхода.

Ключевые слова: блокчейн, образовательные технологии, формирование ценностей, академическая честность, критическое мышление, децентрализованные системы, российское образование.

BLOCKCHAIN IN EDUCATION: TRANSPARENCY AND HONESTY AS NEW VALUES

Moiko I. M., Kupryashina L. A., Shorikova D. V.

Penza State University, Penza, Russia
irmojko@yandex.ru, liliya_sl@mail.ru, papshevadash@mail.ru

Abstract. Blockchain technology, based on the principles of transparency, immutability and decentralization, is becoming a powerful tool for shaping values among modern youth. The article demonstrates how the application of blockchain in education fosters responsibility, critical thinking and collaboration skills, creating a new digital culture among students. Specific examples of implementation in Russia and prospects for the development of this approach are examined.

Keywords: blockchain, educational technologies, value formation, academic integrity, critical thinking, decentralized systems, Russian education.

Современное образование сталкивается с множеством проблем: фальсификация документов, плагиат, отсутствие прозрачности в оценках и финансировании. Блокчейн — технология, лежащая в основе криптовалют, — предлагает решения этих проблем благодаря децентрализации, неизменяемости данных и криптографической защите. Эта технология не только меняет техническую сторону образования, но и влияет на воспитание студентов, формируя у них ценности честности, прозрачности и ответственности за свои достижения.

Блокчейн — это распределенная база данных, в которой информация хранится в виде последовательных блоков, связанных криптографически. Ключевые особенности: децентрализация (данные хранятся не на одном сервере, а на множестве узлов), неизменяемость (внесенные записи нельзя удалить или подделать), прозрачность (все участники сети могут проверить транзакции). Эти свойства делают блокчейн идеальным инструментом для борьбы с коррупцией, фальсификациями и манипуляциями в образовании.

Некоторые международные университеты, например MIT, Мальтийский университет, University of Nicosia (Кипр), уже выдают дипломы в блокчейне [6, 7]. Работодатели могут мгновенно проверить подлинность документа, сканируя QR-код. По данным Всемирного банка, до 30% дипломов в некоторых странах — поддельные [8]. Блокчейн исключает эту проблему, так как каждый документ имеет цифровую подпись и хранится в неизменяемом реестре. Платформы вроде BitDegree и ODEM используют блокчейн для: прозрачных платежей за обучение, вознаграждения студентов токенами за успехи, хранения учебных достижений в децентрализованной системе. Студенты могут получать цифровые знаки отличия (NFT) за прохождение курсов, которые нельзя потерять или подделать. Блокчейн позволяет отслеживать, как распределяются бюджетные средства и стипендии, снижая риски коррупции. Системы вроде PlagiarismCheck могут интегрироваться с блокчейном, фиксируя авторство работ и их изменения. Ученые и студенты могут регистрировать свои исследования в блокчейне, доказывая приоритет открытий. Децентрализованные рейтинги (на основе отзывов и достижений) помогают создать честную систему оценки.

Преимущества использования блокчейн-системы в образовании представлены в таблице 1. (Таблица 1)

Критерий	Традиционная система	Блокчейн-система
Подлинность документов	Риск подделки, долгая проверка	Мгновенная верификация, защита от фальсификаций
Хранение данных	Централизованные серверы (риск взлома)	Децентрализованное хранение (устойчиво к атакам)
Прозрачность оценок	Зависит от вуза, возможны манипуляции	Все изменения фиксируются и видны участникам

Международное признание	Нострификация занимает месяцы	Дипломы признаются автоматически
Стоимость внедрения	Низкая (но высокие затраты на безопасность)	Высокая на старте, но долгосрочная экономия

Таблица 1. Сравнение традиционных и блокчейн-систем в образовании

Внедрение цифровых дипломов в России сталкивается с рядом системных проблем, которые замедляют этот процесс и снижают его эффективность. На сегодняшний день в России отсутствует полноценный федеральный закон, регулирующий выдачу и признание цифровых дипломов. Существующие инициативы носят экспериментальный характер, как, например, пилотные проекты в отдельных вузах. Это создает правовую неопределенность: работодатели и другие учебные заведения не всегда признают цифровые документы, нет единых стандартов защиты данных, что повышает риски мошенничества.

Многие российские вузы используют устаревшие ИТ-инфраструктуры, что осложняет переход на цифровые форматы: отсутствие единой платформы для хранения и обмена дипломами (аналогичной, например, блокчейн-системам в ЕС). Без модернизации технологической базы цифровые дипломы могут оказаться уязвимыми для взломов или технических сбоев. Кроме того, порою преподаватели и администрация вузов часто скептически относятся к цифровым инновациям: опасения по поводу надежности новых форматов (например, утраты данных), нежелание менять привычные процессы выпуска документов, недостаточная цифровая грамотность среди сотрудников. Для преодоления сопротивления необходимы образовательные программы и демонстрация успешных кейсов (например, опыта МФТИ или ВШЭ, где эксперименты с цифровыми дипломами уже ведутся). Хотя Россия пока отстает от мировых лидеров во внедрении блокчейна в образование [1], [2], первые пилотные проекты уже запущены.

Приведем примеры:

1. НИТУ «МИСиС» – блокчейн-дипломы. Первый (2019г.) в России вуз, начавший выдавать цифровые дипломы на блокчейне Ethereum. Выпускники получают QR-код, по которому работодатель может проверить подлинность документа. Партнеры: компания «Диплом.ру» (разработчик платформы), Росаккредитация (для юридического признания). В результате - сокращение времени проверки дипломов с нескольких дней до 1 минуты.
2. ВШЭ – блокчейн для научных публикаций, 2021г. Платформа «Антиплагиат» тестирует интеграцию с блокчейном для фиксации авторства научных работ. Каждая публикация получает хеш-идентификатор в распределенном реестре. Целью проекта является борьба с плагиатом и «серыми» публикациями.

3. СПбГУ – цифровые сертификаты курсов, 2022г. Студенты онлайн-курсов СПбГУ получают NFT-сертификаты в блокчейне Waves. Можно добавить в LinkedIn или резюме как цифровое доказательство навыков.
4. СберУниверситет – корпоративное обучение, 2023г. Внутренняя система «СберКредит» для учета обучения сотрудников. Данные о пройденных курсах и сертификатах хранятся в приватном блокчейне.
5. Росдистант (Тольятти) – децентрализованная верификация, 2020г. Дистанционный университет использует блокчейн для хранения оценок и экзаменационных работ. Студенты могут предоставлять доступ к своим данным третьим лицам (например, работодателям).
6. Инициативы Минобрнауки. В 2021 году обсуждался проект «Цифровой диплом» на базе блокчейна для всех вузов России. Пока нет единого стандарта, но ведутся переговоры с Росреестром о создании национальной образовательной блокчейн-платформы.

Технология блокчейн, изначально созданная для финансовых транзакций, сегодня становится мощным воспитательным инструментом. Её ключевые принципы — прозрачность, неизменность данных и децентрализация — формируют у студентов ценности, которые особенно важны в цифровую эпоху.

Блокчейн фиксирует каждое действие в системе, создавая цифровой след, который невозможно удалить или подделать. Это воспитывает: честность — осознание, что любая фальсификация (например, покупка диплома) будет раскрыта; аккуратность — привычка тщательно проверять информацию перед её внесением в систему; долгосрочное мышление — понимание, что цифровая репутация остаётся навсегда.[2],[3]

В блокчейн-системах все участники могут проверить подлинность данных без посредников. Это формирует: критическое мышление — привычку запрашивать доказательства вместо слепого доверия; открытость — готовность делиться результатами работы, зная, что их нельзя украсть; справедливость — уверенность в том, что система не позволит одним получить незаслуженные преимущества за счёт других.

Блокчейн устраняет необходимость в централизованном контроле, распределяя ответственность между всеми участниками. Это развивает командный дух — осознание, что успех зависит от вклада каждого; самоорганизацию — способность работать в горизонтальных структурах (например, в DAO — децентрализованных автономных организациях); глобальную солидарность — возможность сотрудничать с коллегами других стран. Так, студенческие сообщества, использующие блокчейн для совместных исследований (например, ScienceMatters), демонстрируют более высокий уровень взаимного доверия.

Кроме того, работа с блокчейном требует понимания его принципов, что стимулирует: любознательность — желание разобраться в сложных системах; адаптивность — готовность осваивать новые инструменты; предпринимательское мышление — способность видеть возможности там, где другие видят только риски.

Блокчейн — это не просто технология, а новый стандарт доверия в образовании. Однако успешное внедрение требует не только технической готовности, но и изменения менталитета преподавателей и студентов. Те, кто адаптируется первыми, получают конкурентное преимущество в мире, где прозрачность и честность становятся главными ценностями.

Список литературы

1. Иванов, А.А. Блокчейн в российском образовании: первые шаги [Текст] / А.А. Иванов // Цифровое образование. - 2020. - № 3(15). - С. 45-52.
2. Петров, В.В. Применение блокчейн-технологий в системе высшего образования [Текст] / В.В. Петров // Цифровая трансформация образования: материалы Междунар. науч.-практ. конф. - Москва, 2021. - С. 112-118.
3. Мойко Н. В. Использование онлайн-образования в современном мире: преимущества и недостатки онлайн-образования, его влияние на воспитание молодежи./ Мойко Н. В., Мойко И. М., Ушкин Д. А. с.296-300 // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем (МКМ-2024) : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 4–7 июня 2024 г.) / под ред. канд. физ.-мат. наук, доц. А. Н. Тынды. - Пенза : Изд-во ПГУ, 2024. – 342 с.
4. Об утверждении Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы [Текст]: указ Президента РФ от 9 мая 2017 г. № 203 // Собрание законодательства РФ. - 2017. - № 20. - Ст. 2901.
5. НИТУ "МИСиС" начал выдавать дипломы с использованием технологии блокчейн [Электронный ресурс]. - URL: <https://misis.ru/university/news/science/2019-06/5917/> (дата обращения: 12.05.2023).
6. European Blockchain Services Infrastructure [Электронный ресурс]. - URL: <https://ec.europa.eu/cefdigital/wiki/display/CEFDIGITAL/EBSI> (дата обращения: 12.05.2023).
7. Blockcerts: The Open Standard for Blockchain Credentials [Электронный ресурс]. - URL: <https://www.blockcerts.org> (дата обращения: 12.05.2023).
8. Blockchain in Education: Prospects and Challenges [Текст]: отчет Европейской комиссии. - Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2022. - 48 p.

ЦИФРОВАЯ КУЛЬТУРА И ЭТИКА: КАК ВОСПИТЫВАТЬ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ У БУДУЩИХ IT-МАТЕМАТИКОВ

*Мойко Ирина Михайловна, Мойко Наталья Валентиновна, Аюпова Алиса
Саубьяновна*

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

irmojko@yandex.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru,

alisya.ayupova.2013@mail.ru

Аннотация. Рассматривается проблема формирования цифровой культуры и профессиональной ответственности среди студентов направления подготовки «Прикладная математика», включая выявление факторов, обуславливающих недостаточную степень акцента на указанные аспекты в современных образовательных программах высшего образования. Представлены доказательства целесообразности внедрения практических занятий, ориентированных на развитие компетентности и соблюдения этических стандартов будущими специалистами данного направления подготовки. Особый акцент сделан на ключевую роль представителей прикладной математики в поддержании информационно-технологической защищенности и устойчивости цифровых инфраструктур современного общества.

Ключевые слова: цифровая культура, профессиональная ответственность, прикладная математика, образовательные программы, этические стандарты, практические занятия, информационно-технологическая защищённость, устойчивость цифровых инфраструктур

DIGITAL CULTURE AND ETHICS: HOW TO CULTIVATE RESPONSIBILITY IN FUTURE IT MATHEMATICIANS

Moiko Irina Mikhailovna, Moiko Natalia Valentinovna, Alisya S. Ayupova

Penza State University, Penza, Russia

irmojko@yandex.ru, nataliyavalentinovna@yandex.ru,

alisya.ayupova.2013@mail.ru

Abstract. The problem of forming digital culture and professional responsibility among students majoring in Applied Mathematics is considered, including identifying the factors that determine the insufficient degree of emphasis on these aspects in modern higher education programs. Evidence is presented of the feasibility of introducing practical classes aimed at developing competence and

compliance with ethical standards by future specialists in this field of training. Particular emphasis is placed on the key role of representatives of applied mathematics in maintaining information technology security and sustainability of digital infrastructures of modern society.

Keywords: digital literacy, professional responsibility, applied mathematics, educational programs, ethical standards, practical training, information technology security, digital infrastructure resilience

Современная эпоха стремительно развивается благодаря активному внедрению информационных технологий и цифровой экономики. Особенное значение приобретают компетенции студентов направлений подготовки, связанных с математикой и компьютерными науками, такими как «Прикладная математика». Их профессиональные навыки оказывают прямое влияние на эффективность и безопасность цифровых систем, используемых практически во всех сферах человеческой деятельности — от здравоохранения и транспорта до обороны и финансов.

Уровень ответственности будущих специалистов играет критически важную роль, поскольку их решения и разработки непосредственно влияют на качество функционирования информационных систем, защищенность персональной информации и стабильность экономических процессов. Именно поэтому задача воспитания ответственности и высокой цифровой культуры среди студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика», должна стать важнейшей задачей наряду с фундаментальной подготовкой студентов.

В рамках обозначенной проблемы важно чётко определить ключевые понятия, составляющие основу профессиональной подготовки современных специалистов в области прикладной математики. Прежде всего, следует понимать под **информационными технологиями** не просто технические средства, а комплексную систему методов обработки данных, включающую их сбор, анализ, преобразование и передачу с использованием компьютерных систем и телекоммуникационных сетей. Эти технологии образуют технологическую основу цифровой трансформации современного общества.[1]

Особое значение в профессиональной деятельности приобретает **цифровая культура**, которую мы определяем как интегральную характеристику специалиста, включающую:

- техническую грамотность в работе с цифровыми сервисами
 - понимание принципов информационной безопасности
 - осознание важности защиты персональных данных
 - соблюдение правовых и этических норм в виртуальном пространстве
- [2],[3]

Неотъемлемой частью профессионального становления является **этика** - система моральных принципов и норм, регулирующих поведение специалиста при принятии решений, имеющих социальные последствия. В прикладной математике этические аспекты особенно важны при работе с большими данными и алгоритмами ИИ.

Фундаментальным качеством профессионала выступает **ответственность** - готовность субъекта полностью осознавать последствия своих профессиональных решений и действий, а также добровольно нести обязательства за их результаты перед обществом, работодателем и профессиональным сообществом.[4]

Современное состояние вопроса

Современные студенты специальности «Прикладная математика» сталкиваются с рядом специфических проблем, связанных с цифровой культурой и ответственностью:

- Низкий уровень осведомлённости о рисках неправомерного использования личных данных и угрозах информационной безопасности.
- Нехватка практики правового регулирования, касающегося цифровой среды и производства ПО.
- Ограниченный опыт разработки алгоритмов и программных продуктов с учетом социальных и этических факторов.

Это порождает ситуацию, когда выпускники вузов оказываются неподготовленными к решению важных задач по обеспечению безопасности и устойчивости цифровой инфраструктуры.

Кроме того, существует проблема недостатка мотивации у студентов изучать теорию этики и права применительно к ИТ-деятельности. Поэтому важной задачей университетов становится создание методологии преподавания, позволяющей студентам глубже проникнуть в суть культурных и этических аспектов их будущей профессии.

В связи с вышесказанным, можно предложить план воспитательной работы, который будет направлен на формирование цифровой культуры и ответственности студентов указанного направления.

Мероприятия

1. Лекции и семинары

- ✓ «Основы цифровой гигиены и кибербезопасности» (лекция от ИТ-специалиста).
- ✓ «Этика в цифровом пространстве: фейки, буллинг, авторское право» (семинар с разбором кейсов).
- ✓ «Ответственное использование искусственного интеллекта и big data» .

2. Практические занятия и тренинги

- ✓ «Как защитить свои данные в сети» (практикум по настройке приватности).
- ✓ «Распознавание фейков и манипуляций в медиа» (анализ новостей и алгоритмов соцсетей).
- ✓ «Кибербезопасность для математиков: шифрование и защита» (мастер-класс).

3. Деловые игры и кейс-стади

- ✓ «Суд над алгоритмом» (разбор этических дилемм в ИИ).
- ✓ «Киберкризис: как реагировать на утечку данных» (ролевая игра).

Предложенные мероприятия будут способствовать реализации следующих задач:

- ✓ повышение осведомленности о цифровой гигиене и кибербезопасности,
- ✓ развитие критического мышления при работе с цифровой информацией,
- ✓ формирование этических норм поведения в интернете и социальных сетях,
- ✓ обучение основам защиты персональных данных и приватности,
- ✓ стимулирование ответственного использования ИИ и алгоритмов.

Заключение

Обучение студентов направления «Прикладная математика» ответственному отношению к своему труду и цифровая культура — две неразрывно связанные задачи сегодняшнего дня. Требуется подготовить поколение высококвалифицированных профессионалов, готовых ответственно подходить к выполнению обязанностей, понимать особенности собственной роли в построении устойчивого цифрового общества.

Список литературы

4. Федеральный закон от 27.07.2006 № 149-ФЗ (ред. от 02.07.2021) "Об информации, информационных технологиях и о защите информации" // Собрание законодательства РФ. – 2006. – № 31 (1 ч.). – Ст. 3448.
5. Асмолов Г.Л. Цифровая социализация в культурно-исторической перспективе: трансформация детства и новые образовательные практики // Психологическая наука и образование. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 5-19. – DOI: 10.17759/pse.2018230301.
6. Асмолов Г.Л., Асмолов А.Г. От Мы-медиа к Я-медиа: трансформации идентичности в виртуальном мире // Вопросы психологии. – 2019. – № 1. – С. 3-15.
7. Выготский Л.С. Психология развития человека. – М.: Смысл, 2005. – 1136 с.

Программная реализация процесса ортогонализации векторов

Яна Игоревна Надеева¹, Дмитрий Викторович Тарасов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹yananad2006@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Аннотация. В работе описывается программная реализация операций линейной алгебры для действий с векторами, включая их ортогонализацию, с использованием алгоритмов Грама – Шмидта.

Ключевые слова: вектор, метод, координаты, операция, базис, ортогонализация, ортогональный вектор

Software implementation of the vector orthogonalization process

Yana I. Nadeeva¹, Dmitriy V. Tarasov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹yananad2006@gmail.com, ²tarasovdv@mail.ru

Abstract. The paper describes a software implementation of linear algebra operations for actions with vectors, including their orthogonalization, using Gram – Schmidt algorithms.

Keywords: vector, method, coordinates, operation, basis, orthogonalization, orthogonal vector-torus

Введение

Целью работы является программная реализация на языке C++ n -мерных векторов в виде класса с использованием методов, задающих операции линейной алгебры (сложение, вычитание векторов, а также умножение вектора на число). Основная задача: провести процесс ортогонализации векторов по Грамму – Шмидту, используя линейные операции над векторами.

Ортогонализация векторов

Вектор – это направленный прямой отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление. Достаточно удобно задавать вектор как упорядоченный набор его координат. Так, n -мерный

вектор

$\vec{x}$ – это упорядоченная совокупность n действительных или комплексных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е.

$$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Одним из ключевых понятий линейной алгебры, является линейная независимость векторов и базис. Система векторов линейно независима, если ни один из векторов нельзя представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы. Базис векторного пространства – это упорядоченная максимальная линейно независимая система векторов из этого пространства [1].

Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ евклидова пространства называется ортогональным, если скалярное произведение $(\vec{e}_j, \vec{e}_k)$ равно 0, при $i \neq k$.

Теорема: во всяком евклидовом пространстве имеется ортогональный базис. Если ортогональный базис состоит из нормированных векторов, то этот базис называется ортонормированным.

Если в n -мерном евклидовом пространстве известен какой-нибудь базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$, то в этом пространстве всегда можно найти и ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Если ортогональная система состоит из ненулевых векторов, то её можно нормировать. Нормированная ортогональная система называется ортонормированной [2, 3].

Процесс ортогонализации исходных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ заключается в последовательном вычислении векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ (табл. 1) [4].

Таблица 1

Составление ортогонального базиса	Процесс нормировки	Условия ортогональности векторов
$\vec{g}_1 = \vec{a}_1$	$\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\ \vec{g}_1\ }$	

$\vec{g}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1$	$\vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\ \vec{g}_2\ }$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0$
$\vec{g}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 - (\vec{a}_3, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2$	$\vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\ \vec{g}_3\ }$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0,$ $(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$
...	...	...
$\vec{g}_k = \vec{a}_k - (\vec{a}_k, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 - \dots - (\vec{a}_k, \vec{e}_{k-1}) \cdot \vec{e}_{k-1}$	$\vec{e}_k = \frac{\vec{g}_k}{\ \vec{g}_k\ }$	$(\vec{e}_k, \vec{e}_1) = 0,$..., $(\vec{e}_k, \vec{e}_{k-1}) = 0$

Практическая часть класса для операций над векторами

При практической реализации ограничимся 5-мерными векторами (в дальнейшем его легко расширить до произвольной размерности) и создадим сам класса Vector и его конструктор.

```
class Vector
{
public: float Array[x];
public:
    Vector(float A0 = 0, float A1 = 0, float A2 = 0, float A3 = 0, float A4 = 0)
    {
        Array[0] = A0;
        Array[1] = A1;
        Array[2] = A2;
        Array[3] = A3;
        Array[4] = A4;
    }
}
```

В качестве методов класса необходимо выделить операции линейной алгебры:

1) сложение и вычитание векторов

```
Vector operator + (Vector A)
{
    Vector Result;
    for(int i = 0; i < x; i++)
        Result.Array[i] = Array[i] + A.Array[i];
    return Result;
}
```

```
}
```

Vector operator - (Vector A)

```
{
```

```
    Vector Result;
```

```
    for(int i = 0; i < x; i++)
```

```
        Result.Array[i] = Array[i] + A.Array[i];
```

```
    return Result;
```

```
}
```

2) умножение вектора на число происходит умножением числа на каждую координату вектора.

Vector operator * (float Const)

```
{
```

```
    Vector Result;
```

```
    for(int i = 0; i < x; i++)
```

```
        Result.Array[i] = Const * Array[i];
```

```
    return Result;
```

```
}
```

3) скалярное произведение векторов

float operator * (Vector A)

```
{
```

```
    int Result = 0;
```

```
    for(int i = 0; i < x; i++)
```

```
        Result += Array[i] * A.Array[i];
```

```
    return Result;
```

```
}
```

4) так как необходимо провести ортогонализацию векторов, то потребуется и нормализация векторов

float Norm ()

```
{
```

```
    float Result = 0;
```

```
    for(int i = 0; i < x; i++)
```

```
        Result += pow(Array[i], 2);
```

```

        return sqrt(Result);
    }

```

5) для ортогонализации также желательно реализовать и деление вектора на число.

```

Vector operator / (float Const)
{
    Vector Result;

    for(int i = 0; i < x; i++)
        Result.Array[i] = Array[i] / Const;

    return Result;
}

```

6) дополним класс метода выводом вектор на экран.

```

void Print ()
{
    for(int i = 0; i < x; i++) cout << Array[i] << "\t";

    cout << "\n";
}

};

```

Для этого введем в рассмотрение также второй класс – массив, элементами которого являются вектора. Данный массив содержит метод ортогонализации векторов.

Также создаем конструктор.

```

class Mas_Vectors
{
public: Vector Array[x];

Mas_Vectors(Vector V0 = Vector(), Vector V1 = Vector(), Vector V2 = Vector(), Vector V3 = Vector(), Vector V4 = Vector())
{
    Array[0] = V0;

    Array[1] = V1;

    Array[2] = V2;

    Array[3] = V3;

    Array[4] = V4;
}
}

```

```

}

Mas_Vectors Orthogonalization();//ортогонализация

void Print ()
{
    for(int i = 0; i < x; i++) Array[i].Print();
}

};

```

Сам процесс ортогонализацию векторов по формуле Грамма – Шмидта в этом случае выглядит следующим образом

```

Mas_Vectors Orthogonalization()
{
    Mas_Vectors a = *this;
    Mas_Vectors e;
    Mas_Vectors g;

    for (int i = 0; i < x; i++)
    {
        g.Array[i] = a.Array[i];

        for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
            g.Array[i] = g.Array[i] - e.Array[j] *(a.Array[i]*e.Array[j]);

        e.Array[i] = g.Array[i] / g.Array[i].Norm();
    }

    return e;
}

```

Результаты программной реализации

Для проверки работы программы используем следующие исходные данные:

$\vec{V}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\vec{V}_2 = \{3, 1, 2, 4, 1\}$, $\vec{V}_3 = \{3, 2, 1, 0, 1\}$, $\vec{V}_4 = \{4, 5, 1, 2, 3\}$,
 $\vec{V}_5 = \{1, 3, 2, 5, 2\}$. При этом код основной программы имеет вид:

```

void main()
{
    Vector V1(2,3,4,5,6);

    Vector V2(3,1,2,4,1);

    Vector V3(3,2,1,0,1);

```

```

Vector V4(4,5,1,2,3);

Vector V5(1,3,2,5,2);

Mas_Vectors A(V1, V2, V3, V4, V5);

Mas_Vectors B = A.Orthogonalization();

A.Print();

cout << "\n";

B.Print();

system("pause");

}

```

Правильность работы алгоритма можно проверить и непосредственно. Так, первым действием определяем вектор $\vec{g}_1$ ортогонального базиса:

$\vec{g}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, далее используем формулу нормализации вектора $\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$,

и получаем $\vec{e}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{90}}, \frac{3}{\sqrt{90}}, \frac{4}{\sqrt{90}}, \frac{5}{\sqrt{90}}, \frac{6}{\sqrt{90}} \right\}$. Следующие векторы $\vec{g}_2$ и $\vec{e}_2$

примут вид:

$$\vec{g}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = \{3, 1, 2, 4, 1\} - \frac{43}{\sqrt{90}} \cdot \left\{ \frac{2}{\sqrt{90}}, \frac{3}{\sqrt{90}}, \frac{4}{\sqrt{90}}, \frac{5}{\sqrt{90}}, \frac{6}{\sqrt{90}} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{184}{90}, -\frac{39}{90}, \frac{8}{90}, \frac{145}{90}, -\frac{168}{90} \right\},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|} = \sqrt{\frac{90}{941}} \cdot \left\{ \frac{184}{90}, -\frac{39}{90}, \frac{8}{90}, \frac{145}{90}, -\frac{168}{90} \right\}.$$

Аналогично цепочка рассуждений может быть продолжена и далее.

Как видим на рис. 1 реализация метода дает идентичные значения (конечно, в формате с плавающей точкой).

2	3	4	5	6	
3	1	2	4	1	
3	2	1	0	1	
4	5	1	2	3	
1	3	2	5	2	
0.210819		0.316228	0.421637	0.527046	0.632456
0.632269		-0.134013	0.027490	0.498255	-0.577289
0.628864		0.485259	-0.002558	-0.605113	0.053716
-0.178519		0.645440	-0.660264	0.326426	-0.095059
-0.358403		0.479553	0.620895	-0.035336	-0.504793

Рисунок 1

Выводы

Ортогонализация векторов может быть полезна при работе с численными алгоритмами линейной алгебры и достаточно быстро проводить поиск ортонормированного базиса векторов.

Список литературы

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. К. : Лань, 2004. 431 с.
2. Чеголин А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. КФУ, 2015. 151 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие в 2 ч. Ч. 1. М. Высш. шк., 1986. 304 с.
4. Студопедия. Процесс ортогонализации Грамма – Шмидта. URL: https://studopedia.ru/17_40427_protssess-ortogonalizatsii-grama-shmidta.html (дата обращения 30.04.2025)

**ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ» СТУДЕНТАМИ НЕПРОФИЛЬНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАБОЧИХ ТЕТРАДЕЙ
(НА ПРИМЕРЕ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «МЕДИЦИНСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА»)**

**Купряшина Лилия Александровна, Бельдягина Екатерина Юрьевна,
Зверовщикова Наталья Васильевна**

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
liliya_sl@mail.ru, belkapnzpgy@mail.ru, nvz.matematika@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются особенности разработки рабочей тетради по математике «Интегральное исчисление», ее структуры, специфика использования на различных этапах обучения. Отдельно выделен вопрос организации самостоятельной работы студентов с использованием рабочих тетрадей, приведены примеры заданий для разных уровней самостоятельной работы. Подробно рассмотрены задания различных видов, в соответствии с поставленными учебно-методическими целями и задачами, реализуемыми на конкретном этапе учебного процесса. Описываются особенности внедрения рабочих тетрадей в классическую модель преподавания математики в вузе, как средства интенсификации математической подготовки. Определены методические рекомендации по разработке рабочей тетради по математике.

Ключевые слова: рабочая тетрадь, обучение математике, интегральное исчисление.

**FEATURES OF STUDYING THE SECTION "INTEGRAL
CALCULUS" BY STUDENTS OF NON-CORE SPECIALTIES USING
WORKBOOKS (USING THE EXAMPLE OF THE SPECIALTY
"MEDICAL CYBERNETICS")**

Kupryashina L.A., Beldyagina E.Yu., Zverovshchikova N.V.

Penza State University, Penza, Russia
liliya_sl@mail.ru, belkapnzpgy@mail.ru, nvz.matematika@yandex.ru

Abstract. The article discusses the features of the development of the mathematics workbook "Integral Calculus", its structures, and the specifics of its use at various stages of learning. The issue of organizing students' independent work using workbooks is highlighted separately, and examples of tasks for different levels of independent work are given. Various types of assignments are considered in detail, in accordance with the set educational and methodological goals and objectives implemented at a specific stage of the educational process. The article describes the features of the introduction of workbooks into the classical model of teaching mathematics at the university, as a means of intensifying mathematical training. Methodological recommendations for the development of a workbook in mathematics are defined.

Keywords: workbook, teaching mathematics, integral calculus.

Рассмотрим особенности математической подготовки студентов специальности «Медицинская кибернетика». Дисциплина «Высшая математика» относится к обязательной части блока С1 учебного плана и направлена на формирование универсальных и общепрофессиональных компетенций в соответствии ФГОС ВО. Изучение высшей математики длится в течение 1-2 семестров и включает в себя освоение следующих разделов: линейная алгебра, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление функции многих переменных, дифференциальные уравнения, ряды.

Необходимо отметить о важности рассматриваемой дисциплины для дальнейшей профессиональной подготовки студентов по специальности «Медицинская кибернетика». Так, знания, полученные в результате освоения курса высшей математики, используются в дальнейшем при изучении следующих дисциплин: современные информационные технологии, информатика, медицинская информатика, общая физика, квантовая физика, физические основы медицинских измерений, математическая статистика, вероятностные методы анализа и планирования медицинского эксперимента и др.

В реальности, как показывает многолетний опыт преподавания авторов, освоение дисциплины «Высшая математика» вызывает трудности у большинства студентов. Это можно объяснить и большим объемом изучаемого материала при малом количестве отведенных учебных часов, и сложностью самой математики, ее формализованным языком, абстрактностью понятийного аппарата и особыми методами исследования. Но особо нужно отметить трудности, связанные с организацией интенсивной самостоятельной работы студентов, возникающие при переходе от школы к вузу.

Одним из решений обозначенных проблем является разработка и внедрение в учебный процесс рабочих тетрадей по высшей математике. Преимущества использования рабочих тетрадей в процессе обучения математике очевидны: экономия учебного времени, эффективная организация самостоятельной работы студентов с возможностью самоконтроля, возможность организации дифференцированного обучения, структурированная подача информации и др. [1].

Подробно рассмотрим особенности разработки и использования рабочей тетради «Интегральное исчисление» в процессе изучения дисциплины «Высшая математика» студентами специальности «Медицинская кибернетика».

Понятие интеграла вводится еще в школе, но, как правило, рассматриваются лишь простейшие табличные интегралы, формула Ньютона-Лейбница и задачи на нахождение площади криволинейной трапеции в рамках ЕГЭ. Таким образом, у большинства студентов 1 курса

наблюдается довольно поверхностный уровень сформированных в школе знаний по данному разделу.

Раздел «Интегральное исчисление», изучаемый в вузе, достаточно объемный по содержанию и включает в себя понятие первообразной и неопределенного интеграла, основные методы интегрирования различных функций, понятие определенного интеграла и его приложения к решению практических задач, понятия несобственных интегралов. Кроме того, рассматриваемый раздел считается одним из самых сложных разделов математического анализа не только из-за сложности понятийного аппарата, но и тесной связи с ранее изученным материалом школьной алгебры и геометрии, и вузовской дисциплины «Высшая математика». При таких особенностях обучения сокращение аудиторных часов лишь осложняет усвоение рассматриваемого раздела.

Например, в разделе «Интегральное исчисление» вводятся в рассмотрение табличные интегралы, но на практических занятиях много времени им уже не уделяется, подразумевая, что студентам известен этот материал из школы, с целью рассмотрения более сложных случаев. Но в реальности, многим студентам не хватает отработки именно простых интегралов вида $\int (ax+b)^m dx$; $\int \sqrt[m]{x^n} dx$; $\int \frac{ax+b}{x} dx$ и др. Таким же образом обстоит дело с работой с определениями и теоремами, на практических занятиях невозможно тратить время на варьирование существенных признаков основных понятий и подробное рассмотрение доказательств теорем, их применения при решении задач. Очевидно, что всю эту работу студентам приходится проводить самостоятельно.

Авторами установлено, что качественная разработка и активное систематическое применение рабочих тетрадей по разделам высшей математики в учебном процессе способствует разрешению вышеописанных трудностей и облегчению самостоятельной работы учащихся, а, следовательно, повышению качества математического образования.

По содержанию рабочая тетрадь «Интегральное исчисление» включает в себя следующие темы в соответствии с образовательной программой дисциплины «Высшая математика» для специальности «Медицинская кибернетика»:

- Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
- Таблица основных формул интегрирования.
- Интегрирование по частям и подстановкой.
- Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей.
- Интегрирование простейших алгебраических иррациональностей. Интегрирование дифференциального бинома.
- Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

- Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона–Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла.

- Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.

- Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел, длин дуг кривых.

Структура учебной темы представлена на рисунке 1. Каждая тема соответствует рабочей программе дисциплины и состоит из теоретического, базового, повышенного уровней заданий и заданий для самостоятельной работы, контроля усвоенных знаний.

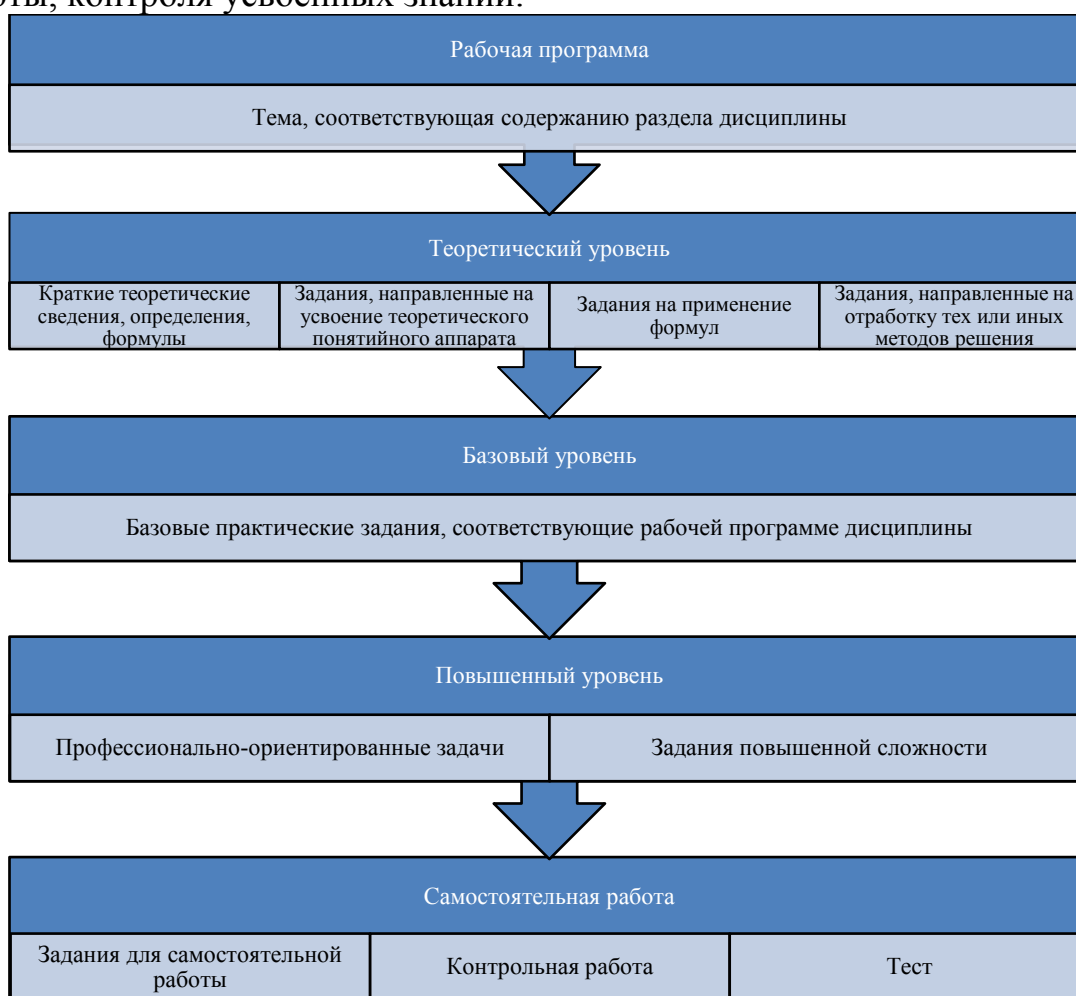


Рисунок 1. Структура учебной темы.

Теоретический уровень включает в себя основные теоретические сведения, формулы, алгоритмы решений, примеры решения типовых задач, так же различные задания на усвоение теоретического материала. Например, для усвоения таблицы интегралов предлагаются следующие задания:

1) Установите взаимосвязь между функциями, записанными в левом и правом столбцах и сделайте вывод:

$f(x)$	$F(x)$
--------	--------

x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Функция x^p является _____ для функции $\frac{x^{p+1}}{p+1}$

Функция $\frac{a^x}{\ln a}$ является _____ для функции a^x .

2) Заполните таблицу, используя взаимосвязь между первообразной $F(x)$ и производной $f(x)$:

$f(x)$	$F(x)$
	$\arctg x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
	$\lg x$
e^x	

$f(x)$	$F(x)$
$\sin x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	
	$\cos x$
	$\ln x $

В качестве примера заданий для усвоения определения первообразной можно привести следующий:

Заполните пропуски:

Функция _____ называется первообразной для функции _____ на промежутке $(a;b)$, если _____

Базовый уровень направлен на отработку методов решения типовых задач. Например:

Вычислить следующие интегралы:

$$1) \int \left(5x^7 - 3\sqrt{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) dx. \quad 2) \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}. \quad 3) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}.$$

Повышенный уровень представлен нестандартными задачами, задачами повышенного уровня, профессионально-ориентированными задачами. Например, подобные медицинские задачи решаются с помощью интегрирования данной функции:

После приема таблетки, содержащийся в ней лекарственный препарат начинает поступать в кровь пациента. Скорость роста концентрации препарата в крови через t минут после приема таблетки равна $R(t) = te^{-0,2t}$. Вычислите общее количество препарата, которое попадет в кровь в течение 10 минут после приема таблетки.

Также для каждой темы разработаны задания для самостоятельной, домашней работы и задания для самоконтроля и проверки усвоенных знаний, умений и навыков по рассматриваемой теме.

Разбиение задач на описанные уровни позволяет строго структурировать учебный материал, последовательно вводить его от простого к сложному, дифференцировать процесс обучения. Таким образом, рабочую тетрадь можно рассматривать, как эффективное средство построения индивидуальных образовательных траекторий учащихся.

Основываясь на исследованиях П.И. Пидкасистого, можно выделить четыре основных уровня самостоятельной работы учащихся: воспроизводящий; реконструктивно-вариативный; эвристический; творческий (исследовательский) [2].

Работа первого уровня выполняется по образцу, инструкции. При выполнении реконструктивно-вариативных самостоятельных заданий действия студентов направлены на преобразование структуры текстов и опыта решения задач. Эвристический уровень предполагает умение анализировать проблемную ситуацию, обобщать, отделять существенное от второстепенного. Самый высокий уровень самостоятельности студентов проявляется в ходе выполнения творческих самостоятельных работ.

В связи с вышесказанным, разноуровневые задания в рабочей тетради вводятся последовательно от простого к сложному, от воспроизводящего до творческого уровня (таб. 1), что способствует равномерному систематическому формированию знаний, умений и навыков по изучаемой теме [3].

Таблица 1. Соответствие заданий в рабочей тетради уровням самостоятельной работы студентов.

Уровень самостоятельной работы	Вид заданий в рабочей тетради	Вид самостоятельной работы студентов	Цель самостоятельной работы
Воспроизводящий	Дописать определение, формулу; кратко ответить на вопрос; решить по образцу.	Самостоятельная работа с учебником, лекционными материалами.	Закрепление знаний, формирование умений, навыков.
Реконструктивно-вариативный	Восстановить цепочку решения (рассуждений), найти ошибки в решении и т.п., решить задание, отличное от образца, требующее использования ранее изученного материала (дополнительных преобразований).	Воспроизведение не только отдельных функциональных характеристик знаний, но и структуры знаний в целом. Обучение преобразовывать способ решения задачи в конкретный метод решения задач с данными условиями.	Формирование умений восстанавливать, преобразовывать, обобщать ранее полученные знания, умения и навыки, устанавливать внутриспредметные связи.
Эвристический	Решить задания повышенной сложности, задания, требующие поиска специальных методов решения.	Разрешение поставленной проблемной ситуации, приобретение опыта поисковой деятельности и элементов творческой деятельности.	Формирование умений и навыков поисковой деятельности.

Творческий	Решить задачи на доказательство, выполнить профессионально ориентированные и практические задания.	Приобретение опыта творческой и исследовательской деятельности.	Формирование умений и навыков поисковой, творческой, исследовательской деятельности.
------------	--	---	--

Примеры разноуровневых заданий:

Задание воспроизводящего уровня:

Заполните пропуски:

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется _____, определённых на рассматриваемом промежутке.

Для второго уровня можно предложить такое задание, как:

Проанализируйте ход вычисления интеграла $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+8} dx$ и заполните пропуски. Укажите в них выполненные действия (методы) и свойства, на основе которых осуществлена замена одного интеграла другими:

$1). \int \frac{2x-3}{x^2+6x+8} dx = \left \begin{aligned} &(x^2+6x+8)' = \\ &= 2x+6 \end{aligned} \right =$ $= \int \frac{(2x+6)-9}{x^2+6x+8} dx =$	1). →
2). $= \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+8} - \int \frac{9dx}{x^2+6x+8} =$	2). _____
3). $= \int \frac{d(x^2+6x+8)}{x^2+6x+8} - 9 \int \frac{dx}{x^2+6x+8} =$	3). →
4). $= \ln x^2+6x+8 - 9 \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} =$	4). _____
5). $= \ln x^2+6x+8 - 9 \ln \left \frac{x+2}{x+4} \right + C$	4). → 5
	5). _____

Задание эвристического уровня требует создания проблемной ситуации, например:

Вычисляя интеграл $I = \int \sin x \cos x dx$, два студента получили такие результаты, используя разные подстановки: $t = \sin x \rightarrow I = \frac{\sin^2 x}{2}$;

$$t = \cos x \rightarrow I = -\frac{\cos^2 x}{2}.$$

Так как оба студента считали свои вычисления верными, то они решили, что:

$$\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} \rightarrow \sin^2 x = -\cos^2 x \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

В чём ошибка студентов? Вычислите этот интеграл.

В качестве творческого задания можно рассмотреть следующее:

Пусть $f(x)$ - монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ - ее обратная функция. Доказать, что если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$.

Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x^n$ ($n > 0$); б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = \arcsin x$.

Необходимо выделить ряд педагогических условий эффективного использования рабочих тетрадей по математике при обучении студентов медицинских направлений:

1) Обеспечение предварительной подготовки студентов по теоретическим вопросам рассматриваемой темы. Для этого в рабочей тетради перед каждым практическим блоком указываются необходимые для изучения теоретические сведения, приводятся основные формулы, определения, теоремы, правила.

2) Последовательное выполнение студентами всех предложенных заданий. Чему способствует разработанная структура каждой учебной темы, разбиение предложенных практических заданий по степени сложности и по уровням самостоятельной работы.

3) Преимущество аудиторной и самостоятельной работы студентов. Обязательное выполнение всех домашних заданий способствует непрерывному, последовательному формированию знаний, умений и навыков.

4) Обязательное выполнение заданий для самоконтроля с последующим анализом допущенных ошибок, выполнением работы над ошибками, восполнением пробелов в изученном материале.

В качестве методических рекомендаций по разработке рабочей тетради по математике авторы выделили следующие:

1) Теоретический учебный материал должен способствовать закреплению, расширению и углублению сформированных знаний, умений и навыков.

2) Практические задания должны быть ориентированы на систематизацию и обобщение полученных знаний и умений, анализ и оценку достижений.

3) Задания подбираются таким образом, чтобы развивать у студентов готовность и умение самостоятельно выбирать и применять освоенные методы.

4) Задания должны быть разноплановыми и разноуровневыми и включать профессионально-ориентированные задачи.

Таким образом, рабочая тетрадь «Интегральное исчисление», как дидактическое средство, способствует не только интенсификации образовательного процесса, но и последовательному, непрерывному изучению материала, поэтапному формированию знаний, умений и навыков, эффективной организации самостоятельной работы студентов, играет

важную роль в реализации принципов дифференциации и профессиональной направленности обучения. Выполнение указанных педагогических условий использования рабочей тетради в учебном процессе обеспечивает качественную математическую подготовку.

Список литературы

1. Попова И.Г., Шишова А.В., Цыганов В.Л. Рабочие тетради по математике // Высшее образование в России. 2014. №12. С.141-144.
2. Потанина О.В., Павлова Е.В., Исламгулова Г.Ф., Захарова М.А. Активизация самостоятельной работы студентов по математике в техническом вузе (на примере рабочей тетради) // Современная высшая школа: инновационный аспект. 2016. Т. 8. №3. С.111-120.
3. Болдовская Т.Е., Бабичева И.В. Методика организации самостоятельной работы студентов в условиях двухуровневого образования // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. №7. С.87-94. URL: <https://e-koncept.ru/2016/16145.htm> (дата обращения: 07.11.2024)

Реализация принципа профессиональной направленности обучения математике студентов направления «Электроэнергетика и электротехника»

П.В. Айкашев , Н.В. Зверовщикова , Л.А. Купряшина , Т.В. Черушева

^{1, 2, 3, 4} *Пензенский государственный университет, Пенза, Россия*

¹aikashev.pavek@mail.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³liliya_sl@mail.ru,

⁴tank1100@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы, связанные с реализацией принципа профессиональной направленности обучения математике студентов направления «Электроэнергетика и электротехника», в частности, описаны связи изучаемого математического аппарата и задач энергетики, приводятся математические методы решения задач энергетики.

Ключевые слова: Методика обучения математике, профессиональная направленность, обучение студентов направления «Электроэнергетика и электротехника»

Implementation of the principle of professional orientation in teaching mathematics to students in the field of "Electric Power Engineering and Electrical Engineering"

P.V. Aikashev, N.V. Zverovshchikova, L.A. Kupryashina, T.V. Cherusheva

^{1, 2, 3, 4} *Penza State University, Penza, Russia*

¹aikashev.pavek@mail.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru, ³liliya_sl@mail.ru,

⁴tank1100@yandex.ru

Abstract

The article discusses issues related to the implementation of the principle of professional orientation in teaching mathematics to students of the field of "Electric Power Engineering and electrical Engineering", in particular, describes the relationship between the studied mathematical apparatus and energy problems, provides mathematical methods for solving energy problems.

Key words: Methods of teaching mathematics, professional orientation, teaching students in the field of "Electric power engineering and electrical engineering"

Особенностью обучения высшей математике студентов направления «Электроэнергетика и электротехника» является ориентация содержания

обучения на их будущую профессиональную деятельность. Каждый раздел, тема высшей математики должны преподноситься студентом в тесной взаимосвязи со спецификой профессии энергетика. Каждому математическому понятию, операции необходимо придавать профессионально ориентированный характер, чтобы курс высшей математики был не просто общеобразовательным, а необходимым курсом в подготовке специалистов в энергетической области, чтобы сформировать у студентов потребности и мотивы в расширении и углублении математических знаний, в стремлении использовать их при изучении специальных дисциплин и в будущей профессиональной деятельности.

Исходя из того, что методы анализа энергетических процессов и методы, используемые при обучении математике, имеют много общего, можно выделить следующие профессионально-значимые умения: умение решать задачи (постановка вопроса, нахождение нужной информации для решения задачи, анализ проблемной ситуации, выдвижение гипотезы); способность к математическому моделированию (определение данных, условий и границ поиска решений, перевод проблемы на язык математики, применение математического аппарата, интерпретация решения); умение логически мыслить (дедуктивные и индуктивные умозаключения, комбинация логики и интуиции, аргументация выводов и заключений); коммуникативные умения (чтение, письмо, речь на языке математики, использование математических символов и формул, построение графиков, схем, диаграмм); умение применять новые информационные технологии.

Анализ государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования направлению 13.03.02 "Электроэнергетика и электротехника" профиля «Электроэнергетические системы и сети» и учебных программ по математике для указанных специальностей позволил описать глубокие связи, существующие между математикой и энергетикой (табл. 1).

Таблица 1. Математика в решении энергетических задач

Раздел	Область применения	Содержание
Матрицы	Одним из ключевых применений матриц в электроэнергетике является анализ электрических цепей. Представление цепей в виде матриц позволяет электрикам эффективно решать системы линейных	<ul style="list-style-type: none"> • Понятие матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$; • Действия над матрицами, свойства действий; • Определитель матрицы; • Обратная матрица;

	<p>уравнений, описывающих поведение цепей во времени.</p> <p>С помощью матриц можно компактно представлять данные о сетях передачи электроэнергии, а также проводить вычисления и оптимизацию работы энергетических систем. Играют важную роль в электроэнергетике, особенно при анализе сложных систем с большим количеством переменных.</p> <p>Матрицы используются для представления различных параметров системы, таких как сопротивления, проводимости, индуктивности и емкости. Путем анализа этих матриц можно оценить стабильность системы, ее реакцию на различные воздействия и оптимизировать работу оборудования.</p> <p>Применяются для анализа качества электроэнергии, диагностики неисправностей в системах электроснабжения, для оптимизации работы энергетических установок. Путем использования матриц инженеры и специалисты в области электроэнергетики могут более точно прогнозировать работу систем, улучшать их надежность и эффективность.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Элементарные преобразования; • Ранг матрицы.
Системы линейных уравнений	Методы решения СЛАУ позволяют эффективно находить решения систем уравнений, что необходимо при анализе сложных электрических схем и систем.	<ul style="list-style-type: none"> • Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ); • Методы решения СЛАУ: матричный, Крамера, Гаусса
Дифференциальные уравнения	В электротехнике дифференциальные уравнения применяются для описания динамики систем, включая электрические цепи, электромеханические системы и не только. Решение дифференциальных уравнений позволяет предсказать поведение системы во времени и оптимизировать их работу.	<ul style="list-style-type: none"> • Обыкновенные дифференциальные уравнения; • Интегральные кривые, задача Коши; • Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения; • Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка; • Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; • Системы дифференциальных уравнений.

Из таблицы видно, что каждый раздел высшей математики тесно взаимосвязан с понятиями и задачами электроэнергетики. Остановимся подробно на изучаемых разделах.

Математические модели многих задач энергетики удобно формулировать и исследовать в матричной записи. Следовательно, сначала необходимо в программе изучения математики дать основные операции линейной алгебры: транспонирование, сложение и умножение квадратных матриц, умножение матрицы на вектор – столбец, после чего научить использовать сформированные знания и умения при решении профессионально значимых задач.

В частности, в энергетике распространено математическое описание установившегося режима электрической сети в виде системы уравнений узловых балансов токов (или мощностей). Известными в этих уравнениях являются проводимости ветвей и мощности нагрузок всех узлов (кроме балансирующего), а неизвестными переменными – величины узловых напряжений. В этом случае система уравнений установившегося режима (УУР) становится линейной и имеет вид

$$YU = I,$$

где Y – матрица проводимостей схемы замещения электрической сети; I – вектор задающих токов нагрузки; U – искомый вектор узловых напряжений (см., например [1]).

Таким образом, студенты должны уметь решать системы линейных алгебраических уравнений методами Крамера, матричным и Гаусса.

Эти методы хороши для систем малой размерности или в том случае, когда надо определять все неизвестные величины системы. Если требуется найти часть большого числа неизвестных, то используют другие методы, например такой [2].

Пусть дана система линейных уравнений

$$AX=Y, \quad (1)$$

которую надо решить относительно первых k неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_k$. Обозначим через X матрицу неизвестных $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ через Y – столбец свободных

членов $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, через A – матрицу коэффициентов $\|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$.

Перепишем матрицы A, X, Y следующим образом:

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

От простых матриц перейдем к блочным матрицам, и тогда система (1) примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

По правилу умножения матриц получаем

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = Y_1, \quad A_3 X_1 + A_4 X_2 = Y_2.$$

Отсюда, выражая X_2 из второго уравнения и подставляя в первое уравнение системы, получаем:

$$X_1 = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} (Y_1 - A_2 A_4^{-1} Y_2),$$

т.е. получаем матричное уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_k$. Значения $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ искать не надо. Таким образом, студентам необходимы знания вычисления обратной матрицы, правила сложения и умножения матриц.

Рассмотрим задачи энергетики, решаемые в разделе «Дифференциальные уравнения». Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный контур, имеет вид

$$i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{LC} i = 0,$$

где R, L и C называются соответственно сопротивлением, индуктивностью и емкостью.

Для исследования переходных процессов в электрических системах необходимо решать дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$, где f - нелинейная функция.

Переходные процессы в электрической цепи возникают при коммутациях: включение, отключение, переключение источников энергии или элементов цепи, а также при импульсных воздействиях. На схемах коммутаторы (ключи) изображают в докоммутационном состоянии.

Классический метод анализа электрических цепей основан на интегрировании дифференциального уравнения цепи, записанного относительно выбранной переменной. В качестве переменных принимают величины, для которых легко записать начальные условия. Как правило, это токи индуктивных и напряжения емкостных элементов. Порядок дифференциального уравнения определяется числом мест накопления энергии - индуктивных и емкостных элементов. Дифференциальное уравнение получают, записывая систему уравнений для мгновенных значений токов и напряжений на основании законов Кирхгофа или метода контурных токов, и разрешая её относительно одной из переменных (тока, напряжения).

Как известно, решение полученного дифференциального уравнения ищется в виде суммы частного и общего решений:

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t).$$

Составляющие токов и напряжений, определяемые частным решением дифференциального уравнения $f_{\text{пр}}(t)$, обусловлены действием источников, поэтому их называют вынужденными или принужденными. Эти составляющие отсутствуют, когда нет внешнего воздействия (правая часть дифференциального уравнения равна нулю).

Составляющие токов и напряжений, определяемые общим решением однородного дифференциального уравнения $f_{\text{св}}(t)$, обусловлены энергией, связанной с накопителями. Эти составляющие называют свободными.

Свободная составляющая определяется видом корней характеристического уравнения.

Для решения задачи Коши требуется задание начальных условий. Различают независимые и зависимые начальные условия.

Независимые начальные условия (ННУ) – значения токов индуктивных и напряжений емкостных элементов в момент коммутации.

ННУ определяются законами коммутации, согласно которым токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах в момент коммутации непрерывны.

Токи индуктивных и напряжения емкостных элементов (катушек индуктивности и конденсаторов) однозначно определяют запас электромагнитной энергии цепи в любой момент времени. Иными словами, они полностью определяют все другие токи и напряжения. Поэтому системы уравнений, описывающие переходный процесс, формируются так, чтобы их решение базировалось на определении токов индуктивных и напряжений емкостных элементов.

Зависимые начальные условия (ЗНУ) – значения токов (емкостных и резистивных элементов) и напряжений (индуктивных и резистивных элементов), которые в момент коммутации могут изменяться скачком, не подчиняясь законам коммутации. Они определяются по законам Кирхгофа в схеме сразу после коммутации ($t=0+$ или $t=t_0+$) с использованием ранее найденных независимых начальных условий.

ЗНУ используются для определения значений первых производных искомых величин (или их свободных составляющих) в момент коммутации.

Следовательно, для построения математической модели необходимо понимание сути процессов, происходящих в цепи.

Для расчёта тока или напряжения в цепях с нулевыми начальными условиями при действии единственного источника ЭДС или тока произвольной формы (заданных кусочно –аналитической функцией) применяется интеграл Дюамеля.

Наиболее распространённая форма записи:

$$f_p(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f'(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

где $f_p(t)$ – искомая реакция цепи – ток или напряжение; $f(0)$ - начальное значение входного воздействия; $h(t)$ – переходная характеристика. Это уравнение решается при помощи методов операционного исчисления — раздела теории функции комплексного переменного.

При исследовании переходных процессов электрических систем требуется решать системы дифференциальных уравнений. Классический метод сводится к решению систем алгебраических уравнений, нахождению собственных чисел и собственных векторов. Рассмотрим другой метод. Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n; \end{cases}$$

что в операторной форме равносильно выражению $DA = AX$, или $\frac{dX}{dt} = AX$, где $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$.

Предположим, что $n = 1$ и $\frac{d}{dt}y = Ay, y(t_0) = y_0$.

$$\text{Тогда } \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}y dt = \int_{t_0}^t Ay dt, y - y_0 = \int_{t_0}^t Ay dt,$$

или

$$y = y_0 + \int_{t_0}^t Ay dt.$$

Пусть операция интегрирования обозначена через $Q = \int_{t_0}^t (\cdot) dt$. Тогда последнее выражение с использованием рекурсии переписывается в виде

$$Y = y_0 + QAy = y_0 + QA(y_0 + QAy) = y_0 + QAy_0 + QAQAy = \dots = (E + QA + QAQA + QAQAQA + \dots)y_0.$$

Этот ряд быстро сходится [3]. Аналогично поступим с матричным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= AX, X(t_0) = X_0, \\ X(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t AX dt. \end{aligned}$$

Получим

$$X(t) = (E + QA + QAQA + QAQAQA + \dots) X_0 = \Omega^{t_0, t}(A) X_0,$$

где $\Omega^{t_0, t}(A)$ — оператор интегрирования, примененный к матрице A .
Окончательно

$$X(t) = \Omega^{t_0, t}(A) X_0.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для подготовки специалистов по направлению 13.03.02 "Электроэнергетика и электротехника" профиля «Электроэнергетические системы и сети» требуется обширный математический аппарат, включающий в себя теорию матриц, решение систем линейных алгебраических уравнений, дифференцирование и интегрирование, теорию функций комплексного переменного. Особенностью математической подготовки студентов рассматриваемого профиля является тесная взаимосвязь классической математики и задач энергетики.

Изучение математических понятий и методов не должно ограничиваться решением стандартных задач, но требует применения изученного

математического аппарата при решении конкретных задач энергетики. В частности, в результате изучения высшей математики, студенты должны овладеть умениями математически грамотно сформулировать инженерную задачу, составить математическую модель задачи, выбрать нужный для решения математический аппарат и эффективно ее решить.

Литература

1. Математические задачи энергетики: учеб. пособие/О.М. Грунин, Л.В. Савицкий. – Чита: ЗабГУ, 2014. - 260 с.
2. Алгебра матриц: учеб. пособие/Т.В. Черушева. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007.-48 с.
3. Каплан, И. А. Практические занятия по высшей математике/ И. А. Каплан. Ч. 5. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1972. – 412 с.
4. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Новое издание, исправл. — М.: МЦНМО, 2012. — 344 с.
5. Математические задачи энергетики: учебное пособие / И. Л. Кирпикова, МЗ4 В. П. Обоскалов, С. И. Семененко, А. С. Тавлинцев ; М-во науки и высш. образования РФ. — 3-е изд., испр. и доп. – Екатеринбург : Изд-во Урал. Ун-та, 2023. — 238 с.
6. Эркенов, Н.Х. Математические задачи в электроэнергетике: методические рекомендации к расчетно-графической работе, обучающимся направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника всех форм обучения /Н.Х. Эркенов.– Черкесск:БИЦ СевКавГГТА, 2018.–24 с.
7. Козловская, В. Б. Математические задачи энергетики: пособие к практическим занятиям и курсовому проектированию для студентов специальности 1-43 01 03 01 «Электроснабжение промышленных предприятий» /В. Б. Козловская, В. В. Сталович. – Минск : БНТУ, 2021. – 43 с.

**Аналогия как метод формирования образа при повторении темы
производных и первообразных**

Наталья Владимировна Наземнова

**Пензенский Государственный Университет, г. Пенза
Россия, natalianazemnova@yandex.ru**

Аннотация: В данной статье рассматривается вопрос применения аналогии в высшей школе, способствующей формированию у студентов действия по распознаванию образа производной и первообразной. Рассмотрена система таких упражнений, связанных с понятием первообразной. Значимость состоит в том, что она позволяет выявить уровень усвоения студентами, как теоретического материала, так и практического.

Ключевые слова: аналогия, распознавание образа, функция, первообразная.

**Analogy as a method of forming an image when repeating the topic of
derivatives and primary.**

N.V. Nazemnova

Penza State Universitu

Penza, Russia, : natalianazemnova@yandex.ru

Annotation: This article examines the application of analogy in higher education, which helps students to form actions to recognize the image of a derivative and an original. The part of the system of such exercises related to the notion of derivative is reviewed in the article. The significance of this system

Is that it allows to identify the students level of the assimilation of the material both theoretical and practical.

Keywords: analogy , image recognition, function, primitive.

Аналогия как метод формирования образа характеризуется тем, что из сходства двух объектов в нескольких признаках и при наличии у одного из них дополнительного признака делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта. Вывод по аналогии является предположительным и подлежит последующей проверке. Аналогию, как метод обучения, можно использовать на этапе введения нового понятия и прогнозирования его свойств, а также способов решения задач, доказательства теорем.[6]

В процессе обучения математике преподавателю следует приобщать студентов к самостоятельному проведению умозаключений по аналогии. Применение аналогии является одним из эффективных приёмов, способствующих формированию действия по распознаванию образа у студентов. Этот метод приобщает к такому виду деятельности, который называют исследовательским. Кроме того, широкое применение аналогии даёт возможность более лёгкого и прочного усвоения учебного материала,

так как часто обеспечивает мысленный перенос определённой системы знаний и умений от неизвестного объекта к известному. Необходимость широкого и систематического использования аналогии как приема обучения математике, неоднократно подтверждалось методистами Г.Д. Балк, Е.А. Беляевым, В.А. Далингером, С.Н.Дорофеевым, Т.А.Ивановой, М.И.Зайкиным, Ю.М. Колягиным, Д. Пойа, М.А.Родионовым, А.А. Столяр, Г.И. Саранцевым, А.Е. Уемовым, Р.А.Утеевой, П.М. Эрдниевым и др.

Термин “аналогия” происходит от греческого “*analogia*” - соответствие, соразмерность. У древних математиков он применялся к отношению между числами. Так, Аристотель дает такое определение аналогии: “... под аналогией я разумею тот случай, когда второе относится к первому также, как четвертое к третьему. Однако здесь следует заметить, что аналогия у Аристотеля носит значительно более общий характер, чем равенство числовых отношений. Говоря о применении аналогии в обучении математическим методам распознавания математических образов. Решение одной задачи может быть использовано в решении другой задачи, аналогичной первой, т. е. имеющей с первой сходные условия или заключения. Для этого каждый шаг решения одной задачи “переносится” на решение другой.

Учебники математики для университетов имеют широкие возможности для формирования приема аналогии в изучении математики.

Необходимо отметить, что вывод по аналогии может быть истинным и ложным. Однако аналогия имеет большое значение для дальнейших исследований возможных объективных связей, помогает объяснить в какой-то мере искомые свойства и признаки, наводит на догадки, правильность или ошибочность которых проверяется доказательством.[3]

Полезны специально подобранные упражнения в применении метода аналогии. Применение аналогии распадается на следующие действия:

- а) построение аналогов различных заданных объектов и отношений;
- б) нахождение соответствующих элементов в аналогичных предложениях;
- в) составление предложений или задач по аналогичным данным;
- г) проведение рассуждений по аналогии.

Насколько важна аналогия в математике можно судить по следующему высказыванию известного польского математика Стефана Банаха: «Математик - это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик тот, кто замечает аналогии теорий; но можно себе представить и такого, кто между аналогиями видит аналогии». Таким образом, умозаключение по аналогии являются умозаключениями

вероятности. Для того, что бы выяснить достоверность или ложность, вывода по аналогии, необходимо дополнительно исследовать этот вывод.

Умозаключение по аналогии, рассматривается в единстве с процессом доказательства его истинности. Здесь в теснейшем переплетении и во взаимосвязи встречается индукция и дедукция. В умозаключении по аналогии, прежде всего, используется индукция, ибо переход от первого предмета ко второму состоит в установлении связей между частными свойствами. В то же время умозаключение по аналогии тесно связано с дедукцией, ибо истинность вывода по аналогии устанавливается дедуктивным доказательством.[4]

Приведем несколько примеров решения задач по математическому анализу при повторении двух важнейших тем: «Производная» и «Первообразная» .[1]

Повторение формул дифференцирования.

- | | |
|---|---|
| 1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, | 5. $(\operatorname{ctgx})' = -1/\sin^2 x$, |
| 2. $(\sin x)' = \cos x$, | 6. $(\ln x)' = 1/x$, |
| 3. $(\cos x)' = -\sin x$, | 7. $(a^x)' = a^x \ln a$ |
| 4. $(\operatorname{tgx})' = 1/\cos^2 x$, | 8. $(e^x)' = e^x$. |

Таблица первообразных

функция		первообразная
1	x^n	$F(x) = x^{n+1}/(n+1) + c$
2	$\sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
3	$\cos x$	$F(x) = \sin x + c$
4	$1/\cos^2 x$,	$F(x) = \operatorname{tgx} + c$
5	$1/\sin^2 x$	$F(x) = -\operatorname{ctgx} + c$
6	$1/x$	$F(x) = \ln x + c$
7	a^x	$F(x) = a^x/\ln a + c$
8	e^x	$F(x) = e^x + c$

Рассматривая эти таблицы можно натолкнуть студентов на то, чтобы в процессе сравнения этих данных они сделали умозаключение по аналогии используя приемы анализа и синтеза. Приведем примеры решения некоторых упражнений.

Производная		Первообразная
1	$f(x) = \sin 5x$, $f(x)' = 5 \cos 5x$	$f(x) = \sin 5x$, пусть $5x = u$, тогда $f(x) = \sin u$, $F(x) = -1/5 \cos u + c = -1/5 \cos 5x + c$
2	$f(x) = e^{-3x}$, $f(x)' = -3 e^{-3x}$	$f(x) = e^{-3x}$, пусть $-3x = u$, тогда $f(x) = e^u$, $F(x) = e^u + c = -1/3 e^{-3x} + c$

3	$f(x)=(2x-1)^{100}, f(x)'=2(2x-1)^{99}$	$f(x)=(2x-1)^{100}$, пусть $(2x-1)=u$, тогда $f(x)=(2x-1)^u, F(x)=u^{101}/202+c=$ $=1/202(2x-1)^{101}+c$
44	$f(x)=x/(1+x)^2, f(x)'=(1-x^2)/(1+x^2)^2$	$f(x)=x/(1+x)^2, F(x)=1/2\ln 1+x^2 +c$

При использовании аналогии совершенствуется сложный мыслительный процесс, в котором применяются примеры анализа и синтеза. По нашему мнению эти приемы являются одним из важнейших методов математики. При решении упражнений необходимо руководствоваться принципом: «сначала правило, потом действие; без правила нет действия!». В процессе преподавания надо не только подчёркивать истинные аналогии, но и отличать ложные, разрушать их с целью предупреждения возможных ошибок. Многие грубые ошибки, которые совершают студенты, связаны с неправомерным распределением распределительного свойства на всевозможные операции.

Библиографический список.

1.Бермант А.Ф.Краткий курс математического анализа для вузов. Изд. «Наука».Москва.1967.стр.138-258.

2.Далингер В.А Об аналогиях в планиметрии и стереометрии // Математика в школе. – 1995. - № 6. – С.16-21.

3. Пойа Д. Обучение через задачи. Сборник статей и материалов, - М.: «Просвещение»,1978.-С.220-226.

4.Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Типография «Красный Октябрь», 1999. – 208с.

5. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: «Просвещение», 1995. - 240 с.

6. Столяр А.А. Педагогика математики. – Минск, Высшая школа.1986.