

УДК 004.925.86

EDN: ENTGGS

**ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШИВАЮЩИХ
ФУНКЦИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ВДОЛЬ ОСИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ:
АЛЬТЕРНАТИВА СПЛАЙНАМ**

© Автор(ы) 2024

SPIN: 8818-0590

AuthorID: 137865

ORCID: 0000-0003-4717-7682

ResearcherID: A-4799-2014

ScopusID: 6504300037

КОСНИКОВ Юрий Николаевич, доктор технических наук,
профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы»
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, Пенза, улица Красная, 40, email: kosnikov@gmail.com)

SPIN: 7960-7865

AuthorID: 1256109

ORCID: 0009-0005-5364-3258

АБУБЕКЕРОВ Динар Рашидович, аспирант
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, Пенза, улица Красная, 40, email: ofjordan@yandex.ru)

Аннотация. Плоские неаналитические кривые имеют множество практических приложений. Они задаются набором характерных (опорных) точек. Для восстановления полной кривой по опорным точкам применяют методы интерполяции. Хорошими интерполяторами являются сплайны. Они широко применяются для геометрического моделирования кривых различной формы – замкнутых и незамкнутых, гладких и имеющих острия. Однако в задачах визуализации многие сплайновые методы можно применить, только наложив на процесс интерполяции или исходные данные ряд ограничений. В результате алгоритмы интерполяции становятся усложненными. Предлагается интерполировать на основе смешивающих функций (СФ), действующих вдоль параметрической координатной линии, которая проходит через опорные точки. Такие СФ в статье названы линейными (ЛСФ). Математическое описание интерполианта на основе ЛСФ получено путем модификации интерполианта на основе радиальных базисных функций. Каждая опорная точка кривой получает целочисленную параметрическую координату. Каждой опорной точке ставится в соответствие ЛСФ, действующая в обе стороны от опорной точки вдоль координатной линии. Интерполиант для вычисления декартовых координат текущей точки кривой записан как система из двух параметрических уравнений. Каждое уравнение представляет собой сумму слагаемых. Каждое слагаемое привязано к одной из опорных точек, участвующих в интерполяции. Слагаемое представляет собой произведение значения ЛСФ опорной точки на коэффициент ее влияния. Коэффициенты влияния опорных точек находятся из условий точного прохождения интерполианта через опорные точки. Интерполяция кривой идет по шагам. На каждом шаге формируется отрезок (сегмент) кривой, который использует конечное число опорных точек. Визуально представляемый фрагмент соединяет часть точек сегмента. Эксперимент подтвердил хорошие формообразующие возможности ЛСФ-интерполиатора. Точность ЛСФ-интерполяции сравнима с точностью сплайн-интерполяции. Число сегментов составной кривой, которые нужно рассчитывать, значительно меньше числа сегментов сплайн-интерполяции. В дальнейшем предполагается исследовать количественные характеристики составной интерполированной кривой.

Ключевые слова: плоская кривая, опорная точка, параметрическая интерполяция, локальная интерполяция, смешивающая функция, целочисленная параметризация, сплайн-интерполяция, сплайн Кэтмулла-Рома, радиальная базисная функция, линейная смешивающая функция.

**VISUALIZATION OF FLAT CURVES USING BLENDING FUNCTIONS OPERATING ALONG THE A
PARAMETRIC COORDINATE SYSTEM AXIS: AN ALTERNATIVE TO SPLINES**

© The Author(s) 2024

KOSNIKOV Yuri Nikolaevich, doctor of technical sciences,
professor of the Department of Information and Computing Systems
Penza State University
(440026, Russia, Penza, Krasnaya Street, 40, email: kosnikov@gmail.com)

ABUBEKEROV Dinar Rashidovich, postgraduate student
Penza State University
(440026, Russia, Penza, Krasnaya Street, 40, email: ofjordan@yandex.ru)

Abstract. Plane non-analytical curves have many practical applications. They are defined by a set of characteristic (reference) points. Interpolation methods are used to restore the complete curve from the reference points. Splines are

good interpolators. They are widely used for geometric modeling of various curves – closed and unclosed, smooth and having edges. However, in visualization tasks, many spline methods can be applied only by imposing a number of restrictions on the interpolation process or the source data. As a result, the interpolation algorithms are complicated. An interpolant based on blending functions (BF) acting along a parametric coordinate line that passes through the reference points is proposed. Such BF in this paper are called linear (LBF). The mathematical description of the LBF-based interpolant is obtained by modifying the interpolant based on radial basis functions. Each reference point of the curve receives an integer parametric coordinate. Each reference point is matched with an LBF acting in both directions from the reference point along the coordinate line. The interpolant for calculating the Cartesian coordinates of the curve current point is written as a system of two parametric equations. Each equation is a sum of terms. Each term is linked to one of the reference points involved in the interpolation. The term is the product of the LBF value of the reference point by the its influence coefficient. The influence coefficients of the reference points are determined from the conditions of the exact interpolant passage through these points. The curve is interpolated in steps. At each step, a curve segment is formed, which uses a finite number of reference points. The visually represented fragment connects part of the segment points. The experiment confirmed the good shaping capabilities of the LBF interpolant. The accuracy of LBF interpolation is comparable to the accuracy of spline interpolation. The number of composite curve segments to be calculated during LBF interpolation is significantly less than the number of spline interpolation segments. In the future, it is planned to investigate the quantitative characteristics of the composite interpolated curve.

Keywords: plane curve, reference point, parametric interpolation, local interpolation, blending function, integer parametrization, spline interpolation, Catmull-Rom spline, radial basis function, linear blending function.

Для цитирования: Косников Ю.Н. Визуализация плоских кривых с использованием смешивающих функций, действующих вдоль оси параметрической системы координат: альтернатива сплайнам / Ю.Н. Косников, Д.Р. Абубекеров // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2024. – Т. 13. – № 4(68). – С. 12-19. – EDN: ENTGGS.

Введение. Среди задач визуализации значительное место занимает отображение неаналитических кривых на плоскости. К ним относятся границы регионов, линии одинакового уровня физической величины (изолинии), траектории движения транспортных средств, границы земельных участков, контуры береговой линии водоемов, изображения строительных конструкций и многое другое. Кроме того, многие пространственные объекты моделируются с помощью плоских криволинейных сечений. Исходными данными для визуализации, как правило, являются координаты характерных (опорных) точек, принадлежащих линиям. Эти координаты задаются разработчиками или получаются с помощью технических средств, например, ГЛОНАСС-приёмников или инструментов топографической съемки. При необходимости цифровизации и компьютерного представления заданных таким образом линий применяют методы интерполяции. С их помощью опорные точки соединяются отрезками (отсеками) той или иной формы, образуя кусочно-аналитические кривые. Промежуточные точки отсеков, взятые с некоторым шагом, служат для визуализации кривых. Как правило, расстояние между промежуточными точками берется столь малым, чтобы при соединении их отрезками прямых у наблюдателя создавалось ощущение непрерывной кривой.

Кривые, подлежащие визуализации, предъявляют к процессу интерполяции характерные требования:

- точное прохождение кривой через опорные точки;
- соответствие формы отсеков топологической тенденции хода кривой (иначе – ожиданиям разработчика);

– возможность обеспечить гладкое и негладкое сопряжение отсеков;

– отсутствие незапланированных аномалий формы: выбросов, петель, острий, разрывов кривой;

– получение точности интерполяции, позволяющей обеспечить заданный характер прохождения отсеков между опорными точками;

– минимизация временных затрат на интерполяцию, вплоть до обеспечения режима реального времени, например, для отображения анимации.

Наука знает множество методов интерполяции, в связи с чем возникает задача выбора метода для решения задач визуализации.

Методология. Испытанным средством интерполяции неаналитических кривых являются сплайны. Обычно это степенные многочлены, описывающие сегменты кривых и позволяющие стыковать их требуемым образом – гладко или в виде острия. Аппарат сплайнов развивается в течение более, чем ста лет и хорошо проработан. На тему сплайнов существует обширная библиография. Известны хорошие публикации, как зарубежные, так и отечественные, в том числе, по применению сплайнов в задачах визуализации. Из монографий прежних лет можно назвать [1-4], из более поздних – [5-7]. Сплайны широко применяются в геометрическом моделировании для описания конструкций самых различных форм: замкнутых и незамкнутых, гладких и имеющих острия, состоящих из линий, поверхностей и тел. Однако при анализе их формообразующих возможностей в задачах визуализации можно отметить ряд ограничений.

В графике обычно применяются сплайны третьей степени, которые представляются в параметрической форме. Одним из первых геометрических примитивов

интерполяции является сплайн Эрмита (*Hermite*) [3, 6]. Описание его отсека включает координаты двух точек – концов отсека – и две производные, задающие направления касательных в конечных точках, то есть изгибы отсека. От направлений этих касательных зависит форма отсека, но для их задания нужны какие-то дополнительные условия. Например, можно положить касательные параллельными хордам, соединяющим опорные точки, предшествующие и последующие по отношению к конечным точкам. Остается открытым вопрос о направлении касательной, проведенной через начальную точку кривой. Кроме того, для каждой касательной нужно как-то задать длину, влияющую на степень изгиба отсека. Необходимость решения этих задач усложняет алгоритм интерполяции.

Одним из самых популярных геометрических примитивов является *B*-сплайн (*B-spline*) [5–7]. Его отсек задается четырьмя опорными точками, но в общем случае не проходит ни через одну из них. Он только приближается к двум средним опорным точкам и, чтобы начать отсек от крайней опорной точки, нужно применить специальный прием – использовать кратные (повторяющиеся) опорные точки. С другой стороны, чтобы отсек точно проходил через опорные точки, нужно ввести новые опорные точки, такие, что построенный на них отсек будет точно проходить через исходные опорные точки [8]. *B*-сплайн дает гладкое сопряжение отсеков в составной кривой. Если же требуется на стыке отсеков получить острие, нужно ввести дополнительные опорные точки и в месте стыка перейти от одной последовательности опорных точек к другой. И здесь можно видеть усложнение алгоритма интерполяции. Существуют модификации *B*-сплайновой интерполяции, расширяющие формообразующие возможности сплайна, но еще больше усложняющие процесс интерполяции. Например, в публикации [9] предлагается подход к интерполяции кривых и поверхностей, основанный на применении *B*-сплайнов и генетического алгоритма.

Сходными с *B*-сплайнами свойствами обладают бета-сплайны [3, 4, 7]. Они так же, как *B*-сплайн, задаются четырьмя опорными точками и так же, в общем случае, не проходят ни через одну из них. В описании отсека бета-сплайна содержатся два числовых параметра, которые позволяют управлять формой кривой без изменения опорных точек. Однако из-за этих параметров запись отсека бета-сплайна значительно усложнена, что негативно влияет на производительность интерполяции.

B-сплайну не уступает в популярности сплайн Безье (*Bezier*) [2, 5, 7]. Описание его отсека также включает координаты четырех опорных точек. Две крайние точки являются концами отсека, две средние лежат на касательных, проведенных через конечные точки и задающих изгибы сегмента. Через средние точки отсек в общем случае не проходит. Если для описания каждого следующего отсека восстанавливаемой кривой последовательно выбирать по четыре очередные точки, то в результате интерполяции кривая не будет

проходить через половину своих точек. Если же выбирать для очередного отсека две точки – начальную и конечную, то необходимо каким-то образом доопределять еще две опорные точки каждого отсека. Для этого на формообразование нужно наложить дополнительные условия, что усложняет алгоритм интерполяции.

Это ограничение снято в фундаментальном (*fundamental*) сплайне, который при определенных условиях преобразуется в сплайн Кэтмулла-Рома (*Catmull-Rom*) [3]. Его отсек точно проходит через две средние опорные точки и автоматически гладко стыкуется со следующим отсеком. Но для того, чтобы начать визуализацию кривой с первой точки, приходится применять аппарат кратных опорных точек. Кроме того, для получения негладкой стыковки отсеков нужно вводить дополнительные опорные точки [10].

Хорошими формообразующими возможностями обладает сплайн Кочанек-Бартельса (*Kochanek-Bartels*) [11]. Его описание содержит три настраиваемых параметра: натяжение, непрерывность и смещение, с помощью которых можно сформировать отсеки желаемой формы – гладкие, с остриями и петлями. Однако настройка трех параметров для каждого отсека составной кривой усложняет алгоритм интерполяции.

Сплайн Акимы (*Akima*) описывает отсек кубической кривой и задается четырьмя параметрами [12]. Для построения сплайна Акимы требуется не менее 5 точек. Интерполянт записывается в явной форме $y=f(x)$, причем координаты x его опорных точек должны быть упорядочены. По этой причине сплайн Акимы нечасто применяется в задачах визуализации, так как с его помощью затруднительно сформировать кривую, описываемую многозначной функцией.

Общей особенностью перечисленных сплайнов (кроме сплайна Акимы) является формирование визуального образа отсека между двумя опорными точками. Это означает, что для визуализации протяженной кривой на N опорных точках необходимо получить в лучшем случае $(N-1)$ интерполянты. Хорошим примитивом для интерполяции был бы отсек, визуальная часть которого соединяет несколько опорных точек. При этом можно немного поступиться точностью интерполяции, в частности, гладкостью стыковки отсеков, поскольку для многих кривых, особенно природного происхождения, это свойство менее важно, чем точное прохождение кривой через опорные точки.

Результаты. Для геометрического моделирования неаналитических плоских кривых предлагается интерполянт на основе смешивающих функций (СФ), действующих вдоль параметрической координатной линии (криволинейной координатной оси). Таковую СФ назовем координатно-линейной, или просто линейной смешивающей функцией (ЛСФ). Чтобы получить математическое описание интерполянта на основе ЛСФ, можно воспользоваться инструментом интерполяции с применением радиальных базисных функций (РБФ), наложив ограничение на размерность пространства интерполяции.

РБФ – хороший интерполятор, свойства которого

неплохо исследованы. Теория РБФ представлена в разных информационных источниках: монографиях, статьях, электронных документах, например, [13-15]. В последнее время традиционный геометрический и алгебраический аппарат РБФ стал дополняться средствами искусственного интеллекта, например, [16, 17]. В задачах визуализации РБФ часто применяются для моделирования и отображения криволинейных поверхностей, заданных в декартовой системе координат множеством опорных точек. Как правило, каждая опорная точка принимается за узел интерполяции, и ей ставится в соответствие некоторая функция, имеющая в этой точке экстремальное значение и изменяющая значение по мере удаления от опорной точки. Для нахождения координат промежуточной (текущей) точки поверхности учитываются «вклады», то есть уровни влияния опорных точек, окружающих промежуточную точку.

Как всякая алгебраическая функция, РБФ-интерполянт может быть записан в явной, неявной и параметрической форме. Особый интерес представляет параметрическая запись интерполянта, в которой каждая декартова координата поверхности выражается явной зависимостью от двух параметрических координат u и v . Параметры представляют собой шаги по поверхности, образующие ортогональную криволинейную систему координат – параметрическую сетку. Опорные точки привязываются к узлам этой сетки. Параметрическая запись РБФ-интерполянта имеет вид:

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \Phi(r_i), \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \Phi(r_i), \quad (2)$$

$$z = \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \Phi(r_i), \quad (3)$$

$$r_i = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2},$$

где x, y, z – декартовы координаты промежуточной точки;

Таблица 1 – Некоторые разновидности радиальных базисных функций

Наименование РБФ	Математическое описание	Наименование РБФ	Математическое описание
Мультиквадрик	$\Phi(r) = \sqrt{c + (\epsilon r)^2}$	Инверсный мультиквадрик	$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}$
Гауссиан	$\Phi(r) = e^{-(\epsilon r)^2}$	Тонкоплечный сплайн	$\Phi(r) = r^2 \log(r)$

В таблице 1: ϵ – коэффициент сглаженности – число, влияющее на скорость изменения РБФ, а c – константа, подбираемая при интерполяции.

Для случая интерполяции плоских кривых можно адаптировать аппарат РБФ-интерполяции, применив зависимость координат x, y текущей точки кривой от одного параметра t , который представляет собой шаг по кривой, то есть вводится одномерная параметрическая система координат. Каждая (i -я) опорная точка кривой получает некоторую параметрическую координату t_i . Каждой опорной точке ставится в соответствие ЛСФ – линейная смешивающая функция, действующая в обе стороны от опорной точки вдоль координатной линии t . Тогда

u_i и v_i – параметрические координаты i -й опорной точки;

r_i – декартово расстояние от промежуточной (текущей) точки до i -й опорной точки, измеренное на параметрической сетке;

$\Phi(r_i)$ – радиальная базисная функция, значение которой зависит от расстояния r_i ;

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – коэффициенты влияния i -й РБФ по координатам x, y, z , соответственно;

N – количество опорных точек, влияющих на текущую точку.

РБФ – интерполяция имеет хорошие формообразующие свойства. Она обеспечивает точное прохождение поверхности через опорные точки. Для этого на коэффициенты влияния $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ накладываются ограничения. Ограничения представляются в виде трех систем уравнений – по одному для каждой декартовой координаты. Это условия точного прохождения поверхности через опорные точки. Например, для координаты x :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{xi} \Phi(r_{ij}) = x_j, \quad j = 1 \dots N, \quad (4)$$

где j – номер опорной точки, для которой составляется условие прохождения поверхности-интерполянта;

r_{ij} – расстояние между j -й опорной точкой и остальными ($i = 1 \dots N$) опорными точками поверхности.

Выражение (4) при переборе j дает СЛАУ – систему из N линейных алгебраических уравнений. Аналогично составляются СЛАУ для координат y и z . Решение трех СЛАУ дает коэффициенты влияния РБФ $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, обеспечивающие прохождение поверхности через опорные точки. Эти коэффициенты подставляются в интерполянт (1) – (3). На практике применяются различные виды РБФ [18-21], наиболее популярными из которых являются приведенные в таблице 1.

описание интерполянта принимает вид

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \Phi(r_i), \quad (5)$$

$$y = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \Phi(r_i), \quad (6)$$

$$r_i = |t - t_i|,$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в (1 – 3). Коэффициенты влияния $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ i -й ЛСФ находятся, исходя из условия прохождения интерполированной кривой через опорные точки, как это делается в случае РБФ, то есть с участием выражений, аналогичных (4). Только расстояние r_{ij} между i -й и j -й опорными точками находятся по-другому:

$$r_{ij} = |t_i - t_j|. \quad (7)$$

Подстановка коэффициентов влияния в (5), (6)

дает ЛСФ-интерполянт.

Применение ЛСФ-интерполянта имеет своеобразие. При построении интерполянта на всех заданных опорных точках возникает глобальная интерполяция. Она образует гладкую кривую, точно проходящую через все опорные точки, однако в случае большого количества этих точек нахождение коэффициентов влияния требует больших временных затрат на решение СЛАУ большой размерности. Чтобы повысить производительность интерполяции и упростить ее алгоритм, нужно ограничить число опорных точек, то есть применить локальную интерполяцию. Однако при этом возможно снижение качества интерполяции. Возникает вопрос выбора числа опорных точек, устанавливающего компромисс между характеристиками интерполяции.

Если разбить множество исходных опорных точек кривой на подмножества, провести интерполяцию в пределах каждого подмножества и визуализировать сегмент на всех точках подмножества, то гладкое сопряжение сегментов, в общем случае, не получится. В этом случае каждый сегмент-интерполянт формируется независимо и имеет свою форму. Очевидно, для гладкой стыковки подмножества опорных точек должны пересекаться, но визуализация должна выполняться лишь на средних точках отсека.

Обозначив количество опорных точек интерполянта (сегмента) N , а количество опорных точек, на которых строится визуальный образ сегмента, M , можно указать соответствие (схему) количеств точек, участвующих в вычислениях и участвующих в визуализации, как $N \mapsto M$. Назовем ее схемой расчета-визуализации. Чем больше N , тем лучше форма восстанавливаемой кривой, но сложнее вычисления. Чем больше M , тем выше производительность интерполяции, но хуже стыковка сегментов с соседними. Минимальная схема $4 \mapsto 2$ сходна по структуре со сплайн-интерполяцией, но не удовлетворяет требованиям по форме отсека и гладкости стыковки. Далее возможны схемы $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 4$, $7 \mapsto 3$, $7 \mapsto 5$ и т.д. Свойства таких интерполянтов нуждаются в изучении. В статье лишь сравниваются формообразующие свойства ЛСФ- и сплайн-

интерполяции.

Обсуждение. Для ЛСФ-интерполяции выбрана схема расчета-визуализации $5 \mapsto 3$ и последовательная параметризация. Интерполянт имеет вид выражений (5), (6), в которых $N=5$. Для вычисления коэффициентов влияния в соответствии с выражением (4) параметр t изменяется в интервале от 1 до 5, а для визуализации сегмента по выражениям (5), (6) – в интервале от 2 до 4. В качестве ЛСФ выбрана биквадратная функция

$$\phi(t_i) = \left(1 - \left(\frac{t-t_i}{t_{\max}}\right)^2\right)^2, t=1, 2, \dots, 5 \quad (8)$$

где $t_{\max}$ – половина зоны влияния ЛСФ в параметрических координатах.

Для сравнения с ЛСФ-интерполяцией взята интерполяция с применением сплайна Кэтмулла-Рома, так как она характеризуется простотой алгоритма и хорошим формообразованием. Описание сегмента сплайна в параметрической форме имеет вид:

$$x = \frac{1}{2}((-t + 2t^2 - t^3)x_1 + (2 - 5t^2 + 3t^3)x_2 + (t + 4t^2 - 3t^3)x_3 + (-t^2 + t^3)x_4), \quad (9)$$

$$y = \frac{1}{2}((-t + 2t^2 - t^3)y_1 + (2 - 5t^2 + 3t^3)y_2 + (t + 4t^2 - 3t^3)y_3 + (-t^2 + t^3)y_4), \quad t = 0 \dots 1, \quad (10)$$

где $x_p, \dots, x_p, y_p, \dots, y_p$ – декартовы координаты четырех опорных точек сегмента;

t – параметр.

Для формирования тестовой кривой выбрана зависимость

$$x(t) = t - 2\sin(t) - 2,$$

$y(t) = 1 - 2\cos(t) + 0.1t^2 - 5, \quad t = 1, 2, \dots, 11$,
график которой имеет участки медленного, среднего и быстрого изменения кривизны, как это показано на рисунке 1. На кривой заданы опорные точки, отстоящие друг от друга на разные декартовы расстояния, но имеющие последовательные параметрические координаты от $t = 1$ до $t = 11$.

Значения параметра и декартовых координат опорных точек P_i приведены в таблице 1.

Кривая разбита на четыре отсека. Обозначения опорных точек, входящих в отсеки, и их соответствие опорным точкам интерполянта схемы $5 \mapsto 3$ показаны в таблице 2.

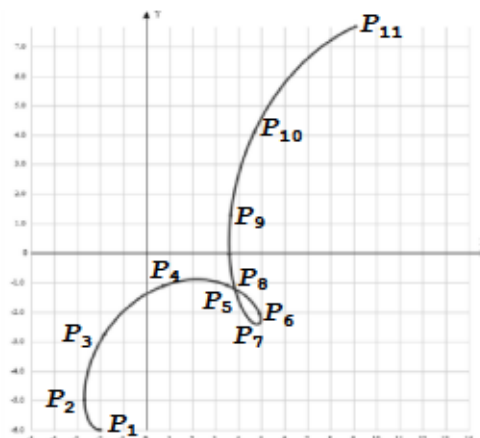


Рисунок 1 – Вид тестовой кривой с опорными точками

Таблица 1 – Параметрические и декартовы координаты опорных точек тестовой кривой

P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	-2.0	-2.683	-1.819	0.718	3.514	4.918	4.559	3.686	4.021	6.176	9.088
y_i	-6.0	-4.981	-2.768	-1.120	-1.093	-2.067	-2.320	-0.608	2.691	5.922	7.678

Таблица 2 – Соответствие обозначений опорных точек кривой опорным точкам отсека и участка его визуализации

Номер i опорной точки интерполянта	Опорные точки расчета отсеков				Опорные точки визуализации отсеков			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	P_1	P_3	P_5	P_7	P_1			
2	P_2	P_4	P_6	P_8	P_2	P_4	P_6	P_8
3	P_3	P_5	P_7	P_9	P_3	P_5	P_7	P_9
4	P_4	P_6	P_8	P_{10}	P_4	P_6	P_8	P_{10}
5	P_5	P_7	P_9	P_{11}				P_{11}

Как видно из таблицы 2, в визуализации первого и последнего отсеков принимают участие не только средние, но и крайние опорные точки. Это делается, чтобы «прижать» кривую к начальной и конечной точкам. В них не нужно обеспечивать гладкую стыковку отсеков с соседними, а вычисление их координат выполняется корректно, так как на них влияют все опорные точки отсека.

Значения коэффициентов влияния для интерполянта (5), (6) находятся из условия прохождения кривой-интерполянта через опорные точки. Например, система уравнений, необходимая для определения коэффициентов влияния λ_{xi} опорных точек первого отсека и построенная по данным таблицы 1 с применением функции (8) в соответствии с (4) и (7), имеет вид:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda_{x1} + \frac{225}{256} \lambda_{x2} + \frac{144}{256} \lambda_{x3} + \frac{49}{256} \lambda_{x4} + 0 \cdot \lambda_{x5} &= -2.0 \\ \frac{225}{256} \lambda_{x1} + 1 \cdot \lambda_{x2} + \frac{215}{256} \lambda_{x3} + \frac{144}{256} \lambda_{x4} + \frac{49}{256} \lambda_{x5} &= -2.683 \\ \frac{144}{256} \lambda_{x1} + \frac{225}{256} \lambda_{x2} + 1 \cdot \lambda_{x3} + \frac{225}{256} \lambda_{x4} + \frac{144}{256} \lambda_{x5} &= -1.819 \\ \frac{49}{256} \lambda_{x1} + \frac{144}{256} \lambda_{x2} + \frac{225}{256} \lambda_{x3} + 1 \cdot \lambda_{x4} + \frac{215}{256} \lambda_{x5} &= 0.718 \\ 0 \cdot \lambda_{x1} + \frac{49}{256} \lambda_{x2} + \frac{144}{256} \lambda_{x3} + \frac{225}{256} \lambda_{x4} + 1 \cdot \lambda_{x5} &= 3.514 \end{aligned}$$

Коэффициенты СЛАН представляют собой зна-

чения биквадратной СФ для соответствующих значений параметра t . Значение t_{max} выбрано равным четырем, рекомендации по его обоснованному выбору нуждаются в разработке. Решение СЛАН дает значения коэффициентов влияния:

$$\begin{aligned} \lambda_{x1} &= 93.223170, \lambda_{x2} = -398.749393, \\ \lambda_{x3} &= 585.672000, \lambda_{x4} = -387.658904, \\ \lambda_{x5} &= 91.112059. \end{aligned}$$

Аналогично находятся коэффициенты влияния для опорных точек первого отсека по координате y и для остальных отсеков. Следует обратить внимание, что левая часть СЛАН для всех отсеков остается неизменной, меняется только набор свободных членов (координат опорных точек).

После подстановки коэффициентов влияния в выражения (5), (6) выполнена интерполяция и визуализация промежуточных точек кривой. Результат показан на рисунке 2, где кривая ЛСФ-интерполяции наложена на тестовую кривую. Визуальный анализ показывает, что сколько-то значимые расхождения этих кривых заметны лишь на первом и последнем отсеках (места показаны на рисунке 2 стрелками), хотя окончательный вывод о точности интерполяции даст только количественная оценка.



Рисунок 2 – Результат ЛСФ-интерполяции тестовой кривой

Отсек сплайна Кэтмулла-Рома в соответствии с выражениями (9), (10) строится на четырех опорных точках, причем визуализируется отрезок между двумя средними опорными точками. Это означает, что для интерполяции тестовой кривой, имеющей 11 опорных точек, нужны 8 отсеков. Однако при этом кривая будет построена между второй и предпоследней опорными точками. Чтобы «прижать» ее к первой и последней точкам, нужно применить аппарат кратных опорных точек, то есть первый отсек строить на точках $P_1 - P_1 - P_2 - P_3$, а последний – на точках $P_9 - P_{10} - P_{11} - P_{11}$. Тогда число отсеков Кэтмулла-Рома возрастет до 10. Результат

сплайн-интерполяции показан на рисунке 3, где сплайновая составная кривая наложена на кривую ЛСФ-интерполяции.

Изображения опорных точек взяты с тестовой кривой.

Визуальный анализ показывает, что ЛСФ-интерполянт по своим формообразующим возможностям не уступает сплайн-интерполянту, а на крайних участках интерполяции и превосходит его. В дальнейшем нужно дать количественную оценку расхождения двух интерполяционных кривых. В то же время число сегментов ЛСФ-интерполяции более чем в два раза меньше числа сегментов сплайна.

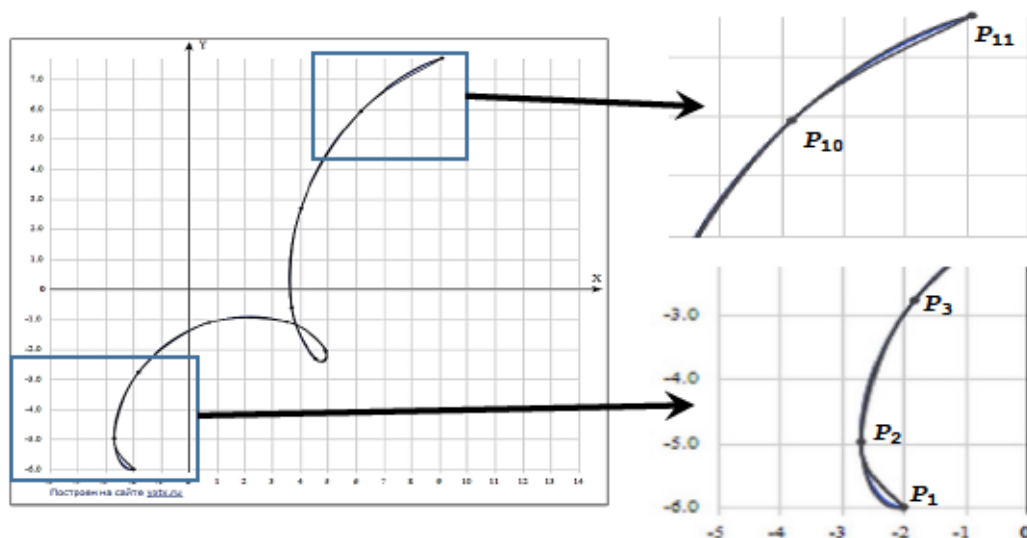


Рисунок 3 – Иллюстрация сравнения результатов сплайн-интерполяции и ЛСФ-интерполяции

Выводы. Визуальный анализ показывает, что предлагаемый ЛСФ-интерполятор обладает хорошими формообразующими возможностями. Точность ЛСФ-интерполяции сравнима с точностью сплайн-интерполяции. Число сегментов составной кривой, которые нужно рассчитывать, значительно меньше числа сегментов сплайн-интерполяции. При вычислении характеристик ЛСФ-интерполянта необходимо решать СЛАУ. Если выбрать последовательную параметризацию, матрица коэффициентов СЛАУ при переходе от одного отсека к следующему не меняется, меняется лишь матрица свободных членов (координат опорных точек), что упрощает алгоритм интерполяции и повышает ее производительность. Количественные характеристики точности интерполяции и гладкости стыковки сегментов составной интерполированной кривой нуждаются в выяснении. Точность интерполяции можно определить по среднеквадратическому отклонению или метрике Хаусдорфа, а критерий гладкости стыковки следует разработать. Кроме того, в ходе дальнейших исследований нужно определить возможности ЛСФ-интерполяции при различной расстановке опорных точек, а также сформулировать для нее рекомендации по рациональному выбору схемы расчета-визуализации. Еще одной задачей

на будущее является создание простого алгоритма визуализации кривых с острями, изломами, разрывами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Rogers D.F., Adams J.A. Mathematical Elements for Computer Graphics / 2nd Edition. – McGraw-Hill, 1989. – 512 p.
2. Bartels R.H., Beatty J.C., Biersky B.A. An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling. – Morgan Kaufmann Publishers, 1995 – 476 p.
3. Херд Д., Бейкер М.П. Компьютерная графика и стандарт OpenGL, 3-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1168 с.
4. Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с.
5. Vince J. Mathematics for Computer Graphics / Fifth Edition. – London: Springer-Verlag Ltd. – 2017. – 512 p.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике / Изд. 2. – М.: URSS, 2022. – 248 с.
7. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование: учебное пособие / Н.Н. Голованов. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2024. – 400 с. – URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2131753>.
8. Hoang, T.H. Applying the B-spline interpolation in designing the movement trajectory of a dynamic object / T.H. Hoang, Yu.N. Kosnikov // Dong Thap University Journal of Science. – Vietnam: Dong thap University. – 2017. – № 27. – P. 100-105.
9. Komar A., Riegler M., Preiner R., Augsdörfer U. Genetic Subdivision Curve and Surface Reconstruction // Proceedings of 32. International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (WSCG 2024). – Czech Republic, Plzen, June 3-6, 2024. – P. 315-323. URL: <https://www.wscg2024.org/>

doi.org/10.24132/CSRN.3401.34.

10. Kosnikov Y.N., Zimin A.P., Novikov A.V. Information Technique for Smooth and Non-Smooth Curves Modeling // International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). – Vladivostok, 2020. – P. 1-4. doi: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271619 <https://ieeexplore.ieee.org/document/9271619>.

11. Kochanek D.H.U., Bartels R.H. Interpolating splines with local tension, continuity, and bias control // SIGGRAPH '84: Proceedings of the 11th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, January 1984. – P. 33-41. URL: <https://doi.org/10.1145/800031.808575>.

12. Akima H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures // J. Assoc. Comput. Machinery, 1970. – Vol. 17. – № 4. – P. 589-602. DOI: 10.1145/321607.321609.

13. Buhmann M.D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. – Cambridge University Press, 2009. – 272 p.

14. Cella U., Patrizi D., Porziani S., Virdung T., Biancolini M.E. Radial Basis Functions Theory Background. Encyclopedia. Available online: <https://encyclopedia.pub/entry/29056>.

15. De Marchi S., Perracchiione E. Lectures on radial basis functions. [Электронный ресурс], URL: <https://www.math.uni-pd.it/~demarchi/RBF/LectureNotes.pdf>.

16. Pandey A., Yadav V., Nagar R., Chaudhury S. LISR: Learning Linear 3D Implicit Surface Representation Using Compactly Supported Radial Basis Functions // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2024. – Vol. 38. – P. 4415-4423. Doi: 10.1609/aaai.v38i5.28239.

17. Yao S., Song W., Wang C.A. Comparative Study of Neural Surface Reconstruction for Scientific Visualization. – arXiv:2407.20868 [cs.GR], 2024. URL: <https://arxiv.org/abs/2407.20868>.

18. Wendland H. Piecewise polynomial, positive defined and compactly supported radial functions of minimal degree // Advances in Computational Mathematics, 1995. – Volume 4, Issue 1. – Pp. 389-396. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:36452865>.

19. Buhmann M. A new class of radial basis functions with compact support // Mathematics of Computation, 2001. – Vol. 70. – №233. – P. 307-318. DOI: 10.1090/s0025-5718-00-01251-5.

20. Skala V. RBF Interpolation with CSRBF of Large Data Sets // International Conference on Computational Science, ICCS 2017 / Procedia Computer Science, 2017. – Vol. 108. – Pp. 2433-2437. – Электронный ресурс. – URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187705091730621X>.

21. Menandro F. Two new classes of compactly supported radial basis functions for approximation of discrete and continuous data / Engineering Reports, 2019. – Vol 1. [Электронный ресурс], doi: 10.1002/eng2.12028. – URL: <https://doi.org/10.1002/eng2.12028>.

Статья поступила в редакцию 15.09.2024

Статья принята к публикации 13.12.2024